ALJABAR-C* DAN PENERAPANNYA DALAM MEKANIKA KUANTUM: TEOREMA SPEKTRAL UNTUK OPERATOR *SELF-ADJOINT* TAK TERBATAS

C-ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS IN QUANTUM MECHANICS: THE SPEKTRAL THEOREM FOR UNBOUNDED SELF-ADJOINT OPERATORS*

Elin Herlinawati*, Wahyu Hidayat, Hasoloan Siregar, Asmara Iriani Tarigan, Kenny Adrianus Santosa

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Terbuka

*elin@ecampus.ut.ac.id

ABSTRAK

Pada era teknologi yang semakin berkembang, inovasi teknologi dilakukan untuk mencapai tujuan Sustainable Development Goals (SDGs) yang mengarah kepada kehidupan berkelanjutan. Kehidupan berkelanjutan menekankan pentingnya penggunaan sumber daya alam yang bijaksana, perlindungan lingkungan, pengurangan limbah dan polusi, penggunaan energi terbarukan, dan kesadaran terhadap dampak sosial dan ekonomi, serta tindakan individu dan masyarakat secara keseluruhan untuk mencapai tujuan SDGs. Dalam hal ini, Matematika digunakan untuk membangun model matematis yang mendukung analisis dan perencanaan terkait tujuan SDGs termasuk dalam bidang kriptografi dan komputer kuantum yang erat kaitannya dengan mekanika kuantum. Konsep matematika, khususnya aljabar-C, dapat digunakan sebagai alat untuk menganalisis dan memodelkan sistem kuantum dan fenomena yang terkait dalam mekanika kuantum. Aljabar-C* merupakan hasil dari kajian lanjutan terhadap konsep aljabar* *operator dan analisis fungsional. Tujuan penulisan artikel ini adalah untuk mengkaji aljabar-C* serta penerapannya dalam mekanika kuantum, khususnya terkait teorema spektral untuk operator-operator self-adjoint tak terbatas di ruang Hilbert. Pada artikel ini, dibahas terlebih dahulu beberapa teori dasar aljabar-C* termasuk operator linear, operator adjoint, operator uniter, dan sifat-sifat dasar lainnya yang terkait dengan teori mekanika kuantum. Selanjutnya, pembahasan aljabar-C* dikerucutkan pada operator self-adjoint tak terbatas di ruang Hilbert dengan memanfaatkan transfromasi Cayley sehingga diperoleh teorema spektral untuk operator tak terbatas dari operator terbatas. Selain itu, dijelaskan pula penerapan Aljabar-C* dalam mekanika kuantum.*

Kata Kunci: *aljabar-C*, mekanika kuantum, operator self-adjoint, teorema spektral.*

ABSTRACT

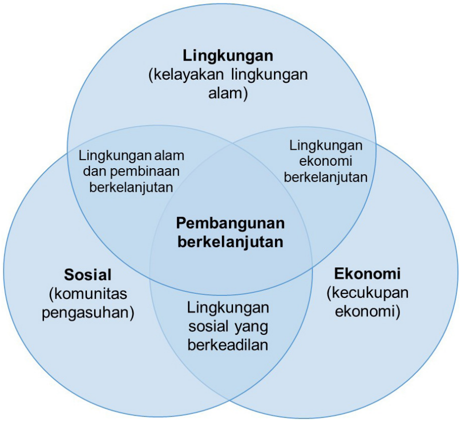
In an era of increasingly developing technology, technological innovation is carried out to achieve Sustainable Development Goals (SDGs), which lead to sustainable living. Sustainable living emphasizes the importance of wise use of natural resources, environmental protection, reduction of waste and pollution, use of renewable energy, awareness of social and economic impacts, and individual and societal actions to achieve the SDGs' goals. In this case, Mathematics is used to build mathematical models that support analysis and planning related to SDGs goals, including cryptography and quantum computers, which are closely related to quantum mechanics. Mathematical concepts, especially C-algebra, can be used to analyze and model quantum systems and related phenomena in quantum mechanics. Algebra-C* is the result of a further study of the concepts of algebraic operators and functional analysis. This article aims to study C*-algebra and its application in quantum mechanics, particularly regarding the spectral theorem for infinite self-adjoint operators in Hilbert space.*

In this article, we first discuss some of the fundamental theories of C algebra, including linear operators, adjoint operators, unitary operators, and other essential properties related to the theory of quantum mechanics. Furthermore, the discussion of C* algebra is narrowed down to the infinite self-adjoint operator in Hilbert space by utilizing the Cayley transform to obtain the spectral theorem for the infinite operator of the finite operator. In addition, it also explains the application of Algebra-C* in quantum mechanics.*

Keywords: *algebra-C*, quantum mechanics, self-adjoint operators, spectral theorems*

PENDAHULUAN

Sustainable living atau kehidupan berkelanjutan merupakan pola hidup dan pendekatan kehidupan yang bertujuan untuk memenuhi kebutuhan manusia saat ini tanpa mengorbankan kemampuan generasi mendatang untuk memenuhi kebutuhan mereka sendiri (Cham, 2022). Kehidupan berkelanjutan pada dasarnya adalah penerapan keberlanjutan pada pilihan dan keputusan gaya hidup. Kehidupan berkelanjutan erat kaitannya dengan tujuan kehidupan berkelanjutan atau *Sustainable Development Goals* (SDGs) dengan memperhatikan tiga dimensi utama yaitu ekonomi, sosial, dan lingkungan (Ismail, 2018).



Sumber: *Rogers, 2008*

Gambar 1. Tiga Pilar Pembangunan Berkelanjutan

Kehidupan berkelanjutan menekankan pentingnya penggunaan sumber daya alam yang bijaksana, perlindungan lingkungan, pengurangan limbah dan polusi, penggunaan energi terbarukan, dan kesadaran terhadap dampak sosial dan ekonomi, serta tindakan individu dan masyarakat secara keseluruhan untuk mencapai tujuan SDGs. Dalam hal ini, Matematika digunakan untuk membangun model matematis yang mendukung analisis dan perencanaan terkait tujuan SDGs. Model matematis dapat membantu dalam memahami dinamika sistem, memprediksi dampak kebijakan, dan mengidentifikasi solusi yang berkelanjutan pada era teknologi yang semakin berkembang. Salah satu konsep yang sangat berperan dalam inovasi teknologi seperti dalam bidang kriptografi (Schneier, 1993) dan komputer kuantum untuk *artificial intelligence* (IBM, 2017) adalah mekanika kuantum. Menurut Budiyono, salah satu dosen peneliti di pusat penelitian Nanosains dan Nanoteknologi Institut Teknologi Bandung, mekanika kuantum adalah cabang ilmu fisika yang bisa memprediksi dengan sangat akurat fenomena yang melibatkan benda-benda berukuran sangat kecil, misalnya perilaku atom dan unsur pembentuknya (Permana, 2022). Oleh karena itu, untuk memahami mekanika kuantum diperlukan pengetahuan teori fisika dan kemampuan memodelkan masalah perilaku fisis yang muncul (Hidayat, 2022). Dalam hal ini, konsep matematika yang dapat digunakan sebagai alat untuk menganalisis dan memodelkan sistem kuantum dan fenomena terkait dalam mekanika kuantum adalah aljabar-C*.

Aljabar-C* melibatkan konsep aljabar operator dan aljabar Banach untuk menggambarkan operator linear pada ruang Hilbert. Ruang Hilbert merupakan struktur matematis untuk mewakili keadaan kuantum dalam mekanika kuantum. Keadaan kuantum tersebut dinyatakan dalam vektor-vektor pada ruang Hilbert yang disebut sebagai vektor keadaan. Selain itu, operator dalam aljabar-C* digunakan untuk mewakili observabel-observabel fisik dalam mekanika kuantum seperti operator posisi, operator momentum, dan operator energi. Nilai-nilai fisik yang dapat diamati tersebut dianggap sebagai nilai eigen atau lebih tepatnya sebagai nilai spektral (spektrum) dari operator linier di ruang Hilbert (Subiono, 2022). Himpunan dari semua nilai eigen tersebut merupakan spektrum dari operator linear. Operator linear dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks (matriks Hermit) yang dapat didiagonalisasi oleh matriks uniter dan menghasilkan matriks diagonal real dengan entri-entri pada diagonalnya merupakan nilai eigen dari matriks. Diagonalisasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan teorema spektral.

Selanjutnya, teorema spektral menyatakan bahwa setiap operator Hermitian pada ruang Hilbert memiliki suatu basis ortonormal dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan operator tersebut. Lebih spesifik, teorema spektral menyatakan bahwa operator Hermitian pada ruang Hilbert dapat diuraikan sebagai jumlah dari proyeksi terhadap vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen dari operator tersebut dikalikan dengan nilai-nilai eigennya sendiri. Dalam mekanika kuantum, teori ini membantu untuk menganalisis operator-operator dalam ruang Hilbert terutama operator-operator Hermitian yang mewakili observabel-observabel fisik. Operator Hermitian dalam ruang Hilbert merupakan operator *self-adjoint*. Selaras dengan Weckman (2020), operator *self-adjoint* menjadi konsep fundamental dalam mekanika kuantum dengan observabel direpresentasikan sebagai operator *self-adjoint* dalam ruang Hilbert. Selain itu, dalam mekanika kuantum, fisikawan seringkali harus bekerja dengan operator yang tidak terbatas pada ruang fungsi yang tak terhingga, antara lain operator posisi dan momentum. Sementara itu, operator-operator *self-adjoint* dapat memiliki domain yang lebih besar daripada domain operator *adjoint* mereka. Jadi, gagasan teori spektral muncul dari upaya untuk menggeneralisasikan teori nilai eigen dimensi terbatas ke dimensi tak terbatas (Arveson, 2006; Morreti, 2013).

Selain operator posisi dan momentum, penerapan operator *self-adjoint* tak terbatas dalam mekanika kuantum tercermin pada operator yang digunakan dalam pemodelan pergerakan gelombang seperti operator pada persamaan Schrodinger. Misalkan $\left|\psi(t)\right\rangle$ menunjukkan keadaan sistem pada waktu t, persamaan Schrodinger dinyatakan sebagai $i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle$ dengan H adalah operator *self-adjoint* yang padat di ruang Hilbert, i adalah unit imajiner, dan $\hbar$ merupakan konstanta Planck tereduksi.

Persamaan Schrodinger, yang berbentuk persamaan diferensial, menjelaskan perubahan dari suatu sistem kuantum tiap waktu yang membuat efek kuantum seperti dualitas gelombang partikel menjadi signifikan (Herlinawati, 2022).

Oleh karena itu, tujuan penulisan artikel ini adalah untuk mengkaji konsep dasar aljabar-C* yang terkait dengan mekanika kuantum termasuk konsep-konsep utama seperti ruang Hilbert, operator linear, dan operator *self-adjoint*. Lebih khusus lagi, pembahasan difokuskan pada operator-operator *self-adjoint* tak terbatas di ruang Hilbert dan teorema spektral serta gambaran mengenai penerapan aljabar-C* dalam mekanika kuantum.

PEMBAHASAN

1. Beberapa Konsep Dasar Aljabar-C*

Aljabar-C* dianggap sebagai konsep pertama yang dapat digunakan dalam mekanika kuantum untuk memodelkan aljabar dari bentuk fisik yang dapat diamati (Batkunde, 2012). Pada bagian ini, disebutkan beberapa definisi dan teorema terkait aljabar-C* dan sifat-sifatnya.

Definisi 1. (Batkunde, 2012; Ikhwanudin, 2017)

Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ berlaku

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika x = 0,

(iii) $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$, dan

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

maka $\|\cdot\|$ merupakan *norm* pada X dan pasangan (X, $\|\cdot\|$) disebut ruang ber-*norm*. Lebih lanjut, ruang ber-*norm* yang lengkap disebut ruang Banach.

Definsi 2. (Batkunde, 2012)

Misalkan A adalah suatu ruang *norm*. A disebut aljabar ber-*norm* jika untuk setiap $x, y \in A$ berlaku $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Lebih lanjut, aljabar ber-*norm* yang lengkap disebut adalah aljabar Banach.

Definisi 3. (Batkunde, 2012)

Aljabar A dikatakan komutatif jika perkaliannya komutatif, yaitu jika untuk setiap $x, y \in A$ berlaku $xy = yx$. Kemudian, aljabar A memiliki elemen satuan jika terdapat $e \in A$ sehingga untuk setiap $y \in A$ berlaku $ey = ye = y$.

Definisi 4. (Batkunde, 2012)

Suatu involusi adalah suatu pemetaan $*: A \to A$ dengan A adalah ruang vektor atas lapangan F yang memenuhi sifat:

(i) $x^{**} = x$,

(ii) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$, dan

(iii) $(xy)^* = y^* x^*$

untuk setiap $x, y \in A$ dan $\alpha, \beta \in F$. Suatu aljabar yang dilengkapi dengan involusi disebut Aljabar-* dan suatu aljabar Banach yang dilengkapi dengan involusi dan memenuhi $\|x^*\| = \|x\|$ dinamakan aljabar Banach-*.

Definisi 5. (Batkunde, 2012; Ikhwanudin, 2017)

Misalkan A aljabar Banach-* yang memenuhi

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \tag{1}$$

untuk setiap $x \in A$, maka A disebut aljabar-C*. Persamaan (1) disebut kondisi-C*.

2. Operator di Ruang Hilbert

Pada bagian ini, konsep kunci dari teori spektral dijelaskan, mulai dari ruang Hilbert dan sifat-sifatnya. Selain itu, beberapa sifat dari operator linear terbatas juga didiskusikan termasuk operator *self-adjoint* dan operator uniter.

Definisi 6. (Speicher, 2020)

1) Misalkan H adalah ruang vektor kompleks. Jika terdapat pemetaan $\langle \cdot,\cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ sehingga untuk semua $x, y, z \in H$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi
   (i) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
   (ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
   (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
   (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ dan $\langle x, x \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

   dan jika H merupakan ruang yang lengkap dengan *norm* $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ maka H disebut ruang Hilbert.
2) Misalkan H adalah ruang Hilbert. Jika H mempunyai subhimpunan padat yang terhitung, maka H disebut dapat dipisahkan (*separable*).
3) Misalkan $T : H \to H$ adalah suatu pemetaan. Jika T linear, yakni untuk setiap $x, y \in H$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, maka T disebut operator linear.

Definisi 7. (Penttala, 2023)

Misalkan X dan Y ruang vektor dengan *norm* masing-masing adalah $\|\cdot\|_X$ dan $\|\cdot\|_Y$, serta $T : X \to Y$ suatu operator. Maka *norm* operator dari T diberikan sebagai

$$\|T\| = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X \text{ untuk semua } x \in X\} \tag{2}$$

Jika $\|T\| < \infty$ maka operator T dikatakan terbatas. Misalkan $\|T\|$ menyatakan *norm* operator dari T maka ruang operator dari operator-operator terbatas dinotasikan dengan

$$B(H) := \{T : H \to H \mid T \text{ linear dan terbatas}\} \tag{3}$$

Dengan demikian, operator linear dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(T)$ berlaku $\|Tx\| \leq M \|x\|$, dengan $D(T)$ menyatakan domain T. Keterbatasan operator menjadi penting karena berkaitan dengan domain dan *range* pada ruang Hilbert yang akan dibicarakan pada bahasan utama artikel ini. Beberapa sifat dari operator linear terbatas pada H diberikan pada definisi dan teorema berikut.

Definisi 8. (Penttala, 2023)

Misalkan T adalah operator linear terbatas pada H. Maka *adjoint* dari T adalah T^* sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle$.

Teorema 9. (Penttala, 2023) [Eksistensi operator *adjoint*)

Misalkan T^* adalah operator *adjoint* dari T. Maka T^* bersifat tunggal dan terbatas dengan *norm* $\|T^*\| = \|T\|$.

Teorema 10. (Speicher, 2020)

1) Untuk setiap $T \in B(H)$ berlaku
   (i) $(T^*)^* = T$
   (ii) $\|T^*\| = T$
   (iii) $\|TT^*\| = \|T\|^2$
2) Misalkan T operator linear terbatas pada H.
   (i) Jika $T^* = T$ maka T disebut *self-adjoint*.
   (ii) Jika $T = T^2 = T^*$ maka T disebut proyeksi ortogonal.
   (iii) Jika $T^*T = TT^* = 1$ maka T disebut uniter.
   (iv) Jika $T^*V = 1$ maka T disebut isometri.
   (v) Jika $TT^* = T^*T$ maka T disebut normal.

Misalkan T operator *self-adjoint* terbatas pada ruang Hilbert H. Berdasarkan definisi operator *adjoint* dalam ruang Hilbert, berlaku $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ untuk semua $x, y \in H$. Karena $T = T^*$ maka $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. Kemudian, karena H merupakan ruang Hilbert atas lapangan kompleks, maka operator T disebut juga sebagai operator Hermitian.

Selanjutnya, Firman (2016) menyebutkan beberapa sifat dari operator *self-adjoint* dalam ruang Hilbert. Misalkan $T : H \to H$ operator linear pada ruang Hilbert H, maka berlaku sifat-sifat berikut:

1) Jika T adalah *self-adjoint*, maka $\langle Tx, x \rangle$ real untuk setiap $x \in H$.

2) Misalkan S dan T operator linear *self-adjoint*, maka
   (i) TS *self-adjoint* jika dan hanya jika S dan T komutatif, $ST = TS$.
   (ii) $S + T$ *self-adjoint*.
   (iii) untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, αT *self-adjoint*.
3) Jika T_n barisan operator *self-adjoint* yang konvergen ke T, maka T *self-adjoint*.
4) Misalkan T operator linear *self-adjoint*, maka semua nilai eigen dari T (jika ada) adalah real.

3. Operator *Self-adjoint* Tak Terbatas di Ruang Hilbert

Pada operator *self-adjoint* tak terbatas di ruang Hilbert, operator ini mungkin tidak terdefinisi pada seluruh ruang Hilbert. Meskipun demikian, operator ini tetap memenuhi sifat *self-adjoint*.

Domain dari operator *self-adjoint* tak terbatas adalah ruang dari vektor-vektor yang operator itu terdefinisi. Domain T, $D(T)$, bisa juga berupa subruang Hilbert. Kepadatan $D(T)$ pada H menjadi syarat cukup dan perlu eksistensi dari suatu operator *adjoint*. Untuk selanjutnya, asumsikan bahwa operator *self-adjoint* terdefinisi pada subruang padat H. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 11 (Penttala, 2023)

1) Misalkan $T : D(T) \to H$ adalah operator linear (tak terbatas) di ruang Hilbert kompleks H, dengan $D(T)$ padat di H. Domain operator *adjoint* $T^* : D(T^*) \to H$ dari T didefinisikan sebagai berikut: $D(T^*)$ terdiri dari semua $y \in H$ sedemikian sehingga terdapat $y^* \in H$ yang memenuhi $\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ untuk setiap $x \in H$ dengan $T^* y = y^*$.
2) Suatu operator tak terbatas T pada H dikatakan simetri jika $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$ untuk setiap $x, y \in D(T)$. Operator T adalah *self-adjoint* jika T simetri dan $D(T^*) = D(T)$.

Disini, eksistensi dan ketunggalan dari vektor y^* diperoleh dari Teorema Representasi Riesz (dapat dilihat di Kreyzig (1978)). Contoh umum dari operator *self-adjoint* tak terbatas dalam mekanika kuantum adalah operator momentum. Operator momentum adalah operator yang terkait dengan pergeseran posisi suatu partikel. Sebagai contoh, untuk kasus satu partikel dalam dimensi satu, operator momentum didefinisikan sebagai

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

dengan $\hbar$ adalah konstanta Planck tereduksi, i unit imajiner, x koordinat spasial, dan $\frac{\partial}{\partial x}$ melambangkan turunan parsial.

4. Teorema Spektral untuk Operator *Self-adjoint* Tak Terbatas

Operator seringkali dapat dipelajari dalam hal spektrumnya. Untuk ruang Hilbert berdimensi terbatas, spektrum berkaitan dengan nilai eigen operator. Operator linear tak terbatas juga mempunyai sifat-sifat umum dari spektrum yang berlaku pada operator terbatas khususnya untuk kasus operator-operator linear *self-adjoint*. Definisi dan lemma berikut menyatakan spektrum dan sifat spektral dari operator.

Definisi 12. (Penttala, 2023) [Spektrum dari suatu operator]

1) Misalkan $\lambda \in \mathbb{C}$, maka himpunan $\rho(T)$ dari $\lambda \in \mathbb{C}$ memenuhi
   (i) $\overline{Range(T-\lambda I)} = H$,
   (ii) $(T-\lambda I): D(T) \to H$ injektif,
   (iii) $(T-\lambda I)^{-1}: Range(T) \to H$
2) Misalkan $\lambda \in \rho(T)$. Resolven dari T adalah operator
   $R_\lambda(T) = (T-\lambda I)^{-1}: Range(T-\lambda I) \to D(T)$
3) Spektrum dari T adalah himpunan $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Lemma 13. (Penttala, 2023)

Misalkan $T \in B(H)$ operator dengan $\|T\| < 1$. Maka $(T - \lambda I)^{-1}$ ada sebagai operator linear terbatas pada seluruh ruang H dan $(T-\lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, deret tersebut konvergen dalam *norm* operator.

Lemma 14. (Penttala, 2023; Weckman, 2020)

1) Misalkan H ruang Hilbert kompleks. Spektrum $\sigma(T)$ dari operator *self-adjoint* $T : D(T) \to H$ dengan $D(T)$ padat di H, bernilai real dan bersifat tertutup.
2) Misalkan $U : H \to H$ operator uniter pada $H \neq \{0\}$ maka spektrum $\sigma(u)$ adalah subhimpunan tutup dari *circle* satuan. Dengan demikian $|\lambda| = 1$ untuk semua $\lambda \in \sigma(u)$.

Jika sebuah operator pada ruang Hilbert adalah uniter, maka teorema spektral juga berlaku untuk operator tersebut. Namun, basis vektor eigen ortonormal pada operator uniter tidak selalu ada. Oleh karena itu, operator uniter memiliki spektrum yang terbatas pada *circle* satuan (modulus 1), yang menyatakan nilai-nilai eigen dari operator tersebut. Selanjutnya, diperkenalkan ukuran bernilai proyeksi yang merupakan perumuman dari ukuran, dengan nilai real, yang nilai dari ukurannya merupakan operator proyeksi ke subruang dari ruang Hilbert asal. Dalam ruang berdimensi hingga, jika operator T normal, maka teorema spektral menyatakan bahwa operator T dapat ditulis sebagai

$$T = \sum_i \lambda_i e_{\lambda_i} e^+{}_{\lambda_i}$$

dengan λ_i adalah nilai eigen ke-*i* dan e_i menyatakan vektor eigen yang bersesuaian. Hal ini menunjukkan Tx dapat diinterpretasikan sebagai berikut: setiap suku dalam jumlahan tersebut dapat dipandang sebagai proyeksi vektor x ke dalam ruang eigen dan kemudian dikalikan dengan nilai eigen yang bersesuaian. Pada kasus dimensi berhingga, T dapat dituliskan sebagai $T = \int_{\sigma(T)} \lambda d\mu^T(\lambda)$ dengan $\sigma(T)$ menyatakan spektrum operator T dan $\mu^T : \sigma(T) \to B(H)$ ukuran bernilai proyeksi yang didefinisikan sebagai $\mu^T(E) = \sum_{\lambda \in E} P_\lambda$ dengan $P_\lambda = e_\lambda e^+{}_\lambda$ operator proyeksi.

Selanjutnya, teorema spektral untuk operator uniter diberikan pada teorema berikut.

Teorema 15. (Penttala, 2023)

Misalkan U adalah operator uniter pada H. Maka terdapat ukuran bernilai proyeksi μ^U pada $\sigma(U)$ dengan nilai pada $B(H)$ sedemikian sehingga

$$\int_{\sigma(U)} \lambda d\mu^U(\lambda) = U .$$

Untuk membuktikan teorema spektral bagi operator-operator *self-adjoint* yang tak terbatas, dibutuhkan fungsi yang memetakan operator *self-adjoint* ke operator uniter. Hal ini dapat dilakukan dengan memanfaatkan transformasi Cayley. Transformasi Cayley diadopsi dari transformasi Mobius. Misalkan $C:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C},\ C(x)=\dfrac{x+i}{x-i}=(x+i)(x-i)$ merupakan transformasi Mobius yang memetakan garis real ke *circle* satuan dan invers dari transformasi Mobius yaitu $C^{-1}:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C},\ C^{-1}(x)=i\dfrac{x+i}{x-i}=i(x+1)(x-1)^{-1}$. Analog dengan transformasi Mobius, dalam transformasi Cayley, spektrum dari operator *self–adjoint* dipetakan ke dalam spektrum dari operator uniter, sedangkan invers dari transformasi Cayley memetakan spektrum dari operator uniter ke dalam spektrum dari operator *self-adjoint*.

Teorema 16. (Penttala, 2023) [Transformasi Cayley]

Misalkan $T : D(T) \to H$ operator *self-adjoint* dan U operator uniter, maka Transfromasi Cayley dinyatakan dengan $U=(T+iI)(T-I)^{-1}$.

Teorema 17. (Penttala, 2023; Kreyzig, 1978) [Invers Transformasi Cayley]

Misalkan $T : D(T) \to H$ operator linear *self-adjoint* dan $U=(T+iI)(T-iI)^{-1}$ maka $T=i(U+I)(U-I)^{-1}$ dan 1 bukan nilai egien dari U.

Dengan menggunakan Transfromasi Cayley, kita dapat memperoleh teorema spektral untuk operator tak terbatas T dari operator terbatas U. T mempunyai spektrum $\sigma(T)$ yang terletak pada garis real dari $\mathbb{C}$, sedangkan spektrum dari operator uniter terletak pada lingkaran satuan dari $\mathbb{C}$. Dalam hal ini, domain dari operator *self-adjoint* padat di H.

Akibat 18. (Penttala, 2023)

Misalkan T operator *self-adjoint* dan U adalah Transformasi Cayley, maka U merupakan operator uniter dengan $\ker(I-U)=(0)$ dan $(I-U)(H)$ padat di H.

Selanjutnya, untuk mendukung pembuktian teorema utama dalam artikel ini dibutuhkan definisi aljabar-σ Borel.

Definisi 19 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

1) Misalkan X himpunan. Koleksi $\Sigma \subseteq X$ disebut aljabar-σ jika memenuhi
   (i) $\theta \in \Sigma$
   (ii) Jika $A \in \Sigma$ maka $X \setminus A \in \Sigma$
   (iii) Jika $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ maka $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
2) Dalam ruang topologi, aljabar-σ Borel adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan dari Σ.

Berikut merupakan teorema utama dalam artikel ini, yakni teorema spektral untuk operator *self-adjoint* tak terbatas.

Teorema 20. (Zwart, 2018; Penttala, 2023)

Misalkan A adalah operator *self-adjoint* pada H. Maka terdapat secara tunggal ukuran bernilai proyeksi μ^A pada $\sigma(A)$ dengan nilai proyeksi di ruang Hilbert H sedemikian sehingga

$$\int_{\sigma(U)} \lambda d\mu^A(\lambda) = A$$

Bukti. Misalkan H ruang Hilbert dan $E \subseteq H$. Misalkan pula A operator *self-adjoint*, U operator uniter, dan $C^{-1}(U) = i(U+I)(U-I)^{-1}$ $\varphi \in E$. Pertama, akan ditunjukkan eksistensi dari μ^A. Definisikan ukuran $\mu_\varphi^U(E) = \left\langle \varphi, \mu^U(E)\varphi \right\rangle$ dan $\mu_\varphi^A(E) = \left\langle \varphi, \mu^U(C(E))\varphi \right\rangle$. Misalkan $\lambda = C^{-1}(\xi)$, maka

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_\varphi^A(\lambda) &= \int_{S^1\setminus\{1\}} C^{-1}(\xi) d\mu_\varphi^A(C^{-1}(\xi)) = \int_{S^1\setminus\{1\}} C^{-1}(\xi) d\mu_\varphi^U(\xi) \\ &= \left\langle \varphi, C^{-1}(U)\varphi \right\rangle = \left\langle \varphi, A\varphi \right\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

Karena (5) berlaku untuk semua $\varphi \in H$, diperoleh

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu^A \tag{6}$$

Jika μ^A pada $\sigma(A)$, maka persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^A$$

Selanjutnya, akan dibuktikan ketunggalan dari μ^A. Misalkan terdapat ukuran bernilai proyeksi v^A sedemikian sehingga $\int_{\sigma(U)} \lambda dv^A(\lambda) = A$. Maka dapat ditunjukkan bahwa operator uniter yang diberikan oleh transformasi Cayley, $U = (A+iI)(A-iI)^{-1}$, dapat ditulis sebagai

$$U = C(A) = \int_{\mathbb{R}} C(\lambda) dv_\psi^A(\lambda) = \int_{S^1\setminus\{1\}} \xi dv_\psi^A(C^{-1}(\xi))$$

Disisi lain,

$$U = C(A) = \int_{\mathbb{R}} C(\lambda) d\mu_\psi^A(\lambda) = \int_{S^1\setminus\{1\}} \xi d\mu_\psi^A(C^{-1}(\xi))$$

Berdasarkan ketunggalan dari ukuran bernilai proyeksi untuk operator uniter, diperoleh $v_\psi^A(C^{-1}(E)) = \mu_\psi^A C^{-1}(E))$ untuk semua E di aljabar-σ Borel dari $S^{-1} \setminus \{1\}$. Karena $C^{-1} : S^{-1} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ bijektif, maka haruslah $v^A = \mu^A$. Jadi, ukuran μ^A tunggal.

Dari Teorema 20, diperoleh beberapa sifat berikut.

Akibat 21. (Penttala, 2023)

Misalkan A operator *self-adjoint* pada H. Maka subruang spektral V_E yang berasosiasi dengan operator A memenuhi sifat berikut:

(i) Untuk himpunan yang saling bebas E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}$, subruang spektral V_{E1} dan V_{E2} ortogonal.

(ii) Jika E terbatas, subruang spektral V_E termuat kedalam $D(A)$ dan V_E invarian terhadap A.

(iii) Spektrum dari $A|_{V_E}$ (A yang dibatasi pada subruang V_E) termuat dalam klosur E. Secara khusus, jika E terbatas maka $A|_{V_E}$ merupakan suatu operator terbatas.

(iv) Jika E termuat dalam $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ maka untuk setiap $\varphi \in V_E$ berlaku $\|(A - \lambda_0 I)\varphi\| \le \varepsilon \|\varphi\|$.

(v) Jika λ_0 adalah spektrum dari A maka untuk setiap persekitaran N dari λ_0 diperoleh $V_N \neq \{0\}$ atau dengan kata lain $\mu^A(N) \neq 0$.

Sifat (i), (ii), dan (iii) merupakan perumuman dari sifat operator di ruang Hilbert berdimensi terbatas, pada kasus ini, operator dipartisi ke dalam ruang eigen ortogonal yang berkorespondensi ke vektor eigen berbeda. Pada kasus yang lebih umum, perlu dimisalkan pula spektrum yang tidak memiliki vektor eigen. Walaupun demikian, ruang Hilbert dapat dipartisi kedalam subruang yang berkorespondensi ke subhimpunan berbeda dari spektrumnya.

Kemudian, sifat (iv) menyatakan bahwa walaupun secara umum tidak dapat ditemukan vektor eigen untuk setiap $\lambda_0 \in A$, namun ditemukan sebarang vektor yang cukup dekat untuk menjadi vektor eigennya. Salah satunya dengan cara mengambil barisan dari vektor φ_n sedemikian sehingga $\|(A - \lambda_0 I)\varphi\| \le \varepsilon \|\varphi\|$ dipenuhi untuk $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Namun, tidak ada jaminan bahwa barisan tersebut konvergen ke suatu anggota di ruang Hilbert, tetapi kekonvergenannya hanya untuk nilai di titik spektrum $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. Terakhir, sifat (v) menjelaskan bahwa ukuran μ^A dapat bernilai tak nol pada himpunan yang memuat λ_0 dalam spektrum A.

5. Penerapan dalam Mekanika Kuantum

Mekanika kuantum merupakan cabang ilmu fisika yang menjelaskan perilaku materi serta interaksinya dengan energi pada skala atom dan partikel subatom. Karena teori mekanika Newton klasik tidak dapat menjelaskan fenomena mekanik pada skala atomik dan subatomik, teori mekanika kuantum muncul untuk menggantikan konsep deterministik klasik dengan konsep indeterministik. Mekanika kuantum digunakan untuk menyusun kerangka acuan matematika untuk fisika atom, fisika molekular, kimia komputasi, kimia kuantum, fisika partikel, dan fisika nuklir. Sejarah mekanika kuantum berkembang dari penyelesaian Max Planck tahun 1900 pada masalah radiasi benda-hitam dan artikel Albert Einstein tahun 1905 yang menawarkan teori berbasis-kuantum untuk menjelaskan efek fotolistrik. Teori kuantum telah lama dikaji secara mendalam pada pertengahan tahun 1920-an. Teori ini dinyatakan dalam berbagai rumus matematika, salah satunya adalah sebuah fungsi matematika yang disebut fungsi gelombang. Fungsi ini memberikan informasi mengenai amplitudo probabilitas dari posisi, momentum, dan properti fisik lainnya dari sebuah partikel.

Untuk menjelaskan ide dan konsep dasar mekanika kuantum, dimisalkan sebuah partikel tunggal yang dibatasi untuk satu dimensi (yaitu, $\mathbb{R}$). Dalam mekanika klasik, keadaan sistem pada suatu saat dijelaskan dengan menentukan posisi dan kecepatan partikel. Oleh karena itu, dalam mekanika klasik, keadaan sesaat dari sistem dideskripsikan dalam bentuk pasangan bilangan. Dalam mekanika kuantum, keadaan sesaat dideskripsikan dengan fungsi φ dengan mengasumsikan φ adalah anggota dari ruang Hilbert $L^2(-\infty,\infty)$. Kemudian, dalam mekanika kuantum, persamaan gelombang digunakan untuk memprediksi secara statistik besaran sistem yang diukur, sedangkan dalam mekanika klasik, persamaan gerak digunakan untuk mengetahui secara tepat posisi dan momentum setiap partikel.

Selanjutnya, pada akhir tahun 1924, teori mekanika kuantum modern dibuat oleh Erwin Schrodinger dan Werner Heisenberg. Schrodinger membangun konsep mekanika gelombang dan Heisenberg membangun konsep matriks untuk mekanika. Schrodinger sudah membuktikan bahwa dua konsep tersebut ekuivalen secara ilmu fisika karena keduanya menghasilkan kemungkinan yang sama pada observabel A untuk keadaan (*state*) ϕ.

Keadaan kuantum adalah kondisi dengan sistem fisik ada, biasanya dijelaskan dengan fungsi gelombang atau sekumpulan bilangan kuantum (Anonim, 2023). Suparmi (2011) menjelaskan bahwa perilaku dari partikel dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi gelombang yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrodinger. Hal Ini berbeda dengan fungsi gelombang pada mekanika klasik seperti gelombang bunyi, air, atau panas. Fungsi gelombang pada keadaan kuantum tidak bisa didefinisikan fisiknya secara langsung sehingga fungsi tersebut dikaitkan dengan peluang yang digunakan untuk menemukan sebuat partikel pada waktu dan posisi tertentu. Misalkan ψ, fungsi gelombang dari posisi x dan waktu t, menyatakan sebuah keadaan kuantum, maka

$$\psi(x,t)\overline{\psi(x,t)} = |\psi(x,t)|^2$$

Partikel harus berada pada lokasi tertentu pada daerah R untuk setiap waktu t, sehingga ada peluang untuk menemukan partikel di suatu tempat pada setiap waktu. Fungsi gelombang harus dinormalisasi karena t harus bernilai 1. Jumlah peluang di seluruh tempat R pada setiap waktu t harus bernilai 1 sehingga

$$\int_R |\psi(x,t)|^2 = 1$$

Posisi x dari sebuah partikel merupakan nilai yang dapat diamati sehingga merupakan sebuah observabel. Ekspektasi diberikan oleh

$$E\langle x\rangle = \int_R |\psi(x,t)|^2 \, dx$$

Hal Ini menunjukkan bahwa nilai ekspektasi adalah rerata dari pengukuran berulang pada kumpulan sistem identik pada fungsi gelombang ψ. Perhatikan bahwa sistem yang sama tidak diukur berulang kali. Ekspektasi $E\langle x\rangle$ juga akan berubah dari waktu ke waktu. Nilai kemungkinan posisi x sama dengan nilai kemungkinan kecepatan. Dengan kata lain, nilai kemungkinan x bukanlah kecepatan partikel. Dalam mekanika kuantum, jumlah fisis yang digunakan untuk menunjukkan kecepatan partikel disebut momentum.

Dengan demikian, secara umum, keadaan kuantum berisi informasi statistik tentang sistem kuantum (Wittek, 2014). Secara matematis ini diwakili oleh sebuah vektor-vektor keadaan. Kemudian, fungsi gelombang dan operator adalah dua komponen utama mekanika kuantum. Fungsi gelombang menunjukkan keadaan sistem, dan operator menunjukkan apa yang teramati. Dalam perspektif matematika, fungsi gelombang memenuhi kondisi tertentu untuk suatu vektor, dan operator melakukan transformasi linear pada vektor tersebut.

Selanjutnya, teorema spektral secara umum menyatakan bahwa setiap operator linier yang terbatas pada ruang Hilbert dapat diuraikan menjadi jumlah dari proyeksi pada vektor-vektor eigen dan integral dari proyeksi tersebut. Dalam konteks mekanika kuantum, ini berarti bahwa setiap operator yang mewakili suatu sifat fisik dapat diuraikan menjadi kombinasi dari keadaan dasar dan keadaan eksitasi yang mungkin dalam sistem kuantum, sedangkan observabel adalah semua sifat yang dapat diukur, seperti energi, posisi, dan momentum. Saat pengukuran dilakukan, kondisi kuantum akan memengaruhi hasil analisis. Dalam hal ini, observable dapat dideskripsikan sebagai himpunan operator-operator terbatas yang *self-adjoint* pada ruang Hilbert H (Kagelas, 2022).

Untuk kasus operator tak terbatas, observabel dapat diasosiasikan ke operator *self-adjoint* tak terbatas pada ruang Hilbert yang sesuai dan spektrum dari setiap operator serupa dengan nilai observabel yang mungkin dicapai. Teorema spektral memberikan konstruksi dari operator yang rumit mulai dari proyeksi atau dekomposisi operator hingga proyeksi pada spektrum.

Teorema spektral untuk operator *self-adjoint* pertama kali dibuktikan oleh Jhon von Neumann. Perkembangan teorema ini dianggap krusial untuk formulasi di ruang Hilbert dari mekanika kuantum dan salah satu dari pencapaian paling penting dalam matematika dan matematika fisika selama abad ke-20. Vonn Neumann juga membangun aksioma di ruang Hilbert yang berkaitan dengan pendekatan ke mekanika kuantum yaitu, Heisenberg dan Schrodinger (Moretti, 2013).

Berdasarkan aksioma yang dibangun von Neumaan (Weckman, 2020), kita dapat menyimpulkan beberapa hal berikut:

1) Keadaan ψ dari suatu sistem kuantum adalah vektor tak nol dari ruang Hilbert terpisahkan bernilai kompleks H. Terdapat korespondensi satu-satu diantara observable dan operator linear *self-adjoint* pada H. Kita dapat memisalkan keadaan ψ sebagai vektor satuan pada H. vektor keadaan memuat ketersediaan informasi lengkap dari sistem kuantum.
2) Observabel direpresentasikan oleh operator linear *self-adjoint* pada H. setiap observable $\hat{A}$ terdefinisi pada subhimpunan padat $D(\hat{A}) \subseteq H$.
3) Ketika sebuah observabel terukur pada keadaan $\psi \in H$, hasilnya selalu berupa salah satu nilai pada $\sigma(A)$. Nilai ekspektasi dari ukuran dari A dihitung sebagai nilai rata-rata dari operator pada keadaan ψ. Observabel $A_1, A_2, \dots, A_n$ secara simultan terukur jika dan hanya jika operator *self-adjoint* $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ saling komutatif.
4) Terdapat sebuah grup parameter U_t dari operator uniter yang disebut sebagai operator evolusi yang memetakan ψ_0 pada waktu $t = 0$ ke $\psi(t) = U_t\psi_0$ pada waktu t. Operator U_t berbentuk $U_t = e^{-i\hat{H}t/h}$, dan h konstanta Plank. Jika $\psi_0 \in D(H)$ maka $\psi(t)$ terdiferensialkan dan $ih\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t)$.

KESIMPULAN

Kehidupan berkelanjutan erat kaitannya dengan tujuan SDGs. Untuk mencapai tujuan SDGs, Matematika berperan dalam mendukung analisis dan perencanaan SDGs. Salah satu upayanya adalah dengan mengembangkan konsep-konsep matematika dalam bidang mekanika kuantum seperti Aljabar-C*. Aljabar-C* adalah alat penting dalam analisis operator pada ruang Hilbert dan memiliki banyak penerapan dalam mekanika kuantum. Teorema spektral adalah salah satu hasil penting dalam aljabar-C* yang memungkinkan kita untuk memahami dan menganalisis operator *self-adjoint* tak terbatas, yang merepresentasikan observabel-observabel fisik dalam mekanika kuantum. Teorema spektral menyatakan bahwa operator Hermitian pada ruang Hilbert dapat diuraikan sebagai jumlah dari proyeksi terhadap vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen dari operator tersebut dikalikan dengan nilai-nilai eigennya sendiri, hal ini direpresentasikan dalam bentuk $A = \int_{\sigma(U)} \lambda d\mu^{A}(\lambda)$ dengan A adalah operator *self-adjoint* pada H, λ nilai eigen, dan $\mu^{A}(\lambda)$ menyatakan proyeksi pada $\sigma(A)$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim (2023). Quantum state. https://www.dictionary.com/browse/quantum%20state. Diakses pada 20 Juli 2023.

Arveson, W. (2006). *A short course on spectral theory*. Vol. 209. New York: Springer Science & Business Media.

Batkunde, H., & Persulessy, E. (2012). Aljabar-C* dan sifatnya. *Barekeng*: *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 6(1), 19-22.

Cham, S. (2022). Sustainable development adalah: pengertian dan 3 pilarnya. https://indonesiasustainability.com/sustainable-development-adalah/. Diakses pada 20 Juli 2023.

Firman. (2016). Beberapa sifat operator self-adjoint dalam ruang Hilbert. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, 12(2),153-159.

Herlinawati, E. (2022). Integral Henstock-Kurzweil: Inovasi dalam perkembangan terori integral dan penerapannya pada beberapa persamaan diferensial. *Accelerating Sustainable Innovation toward Soceiety*, 153-184. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

Hidayat, W. (2022). Representasi tunggal aljabar-C* dari graf berarah baris –berhingga. *Accelerating Sustainable Innovation toward Soceiety*, 185-214. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.

IBM. (2017). *Application of quantum computing*. http://research.ibm.com/quantum-computing. Diakses pada 20 Juli 2023.

Ikhwanudin, T. (2017). Aljabar-C* dan keunikan *Norm* C. *Science Tech*: *Jurnal Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, *3*(2), 81-84.

Ismail, Y. (2018). Pertimbangan keberlanjutan dalam perubahan peruntukan lahan pertanian di Kabupaten Bekasi. *Journal of Env. Engineering & Waste Management*, 3(2), 48-60.

Kagelas, A. (2022). Lecture notes on operator algebras and their application in Physics. Geomathematics and Geoinformatics Group, Institute for Geophysics, TU Bergakademie Freiberg. https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.10151.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.,

Morreti, V. (2013). *Spectral theory and quantum mechanics*: *Mathematical foundations of quantum theories, symmetries and introduction to the algebraic formulation*. Vol 64. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70706-8.

Penttala, J. *(2023). Spektral theory for unbounded self-adjoint operators.* Tesis. University of Jyväskylä.

Permana, A. (2022). Mengungkap misteri dasar mekanika kuantum untuk teknologi informasi masa depan. https://www.itb.ac.id/berita/mengungkap-misteri-dasar-mekanika-kuantum-untuk-teknologi-informasi-masa-depan/59042. Diakses pada 15 Juli 2023.

Rogers, PP. (2008). *An introduction to sustainable development* Glen Educational Foundation. Inc. Philippines.

Royden, H.L., & Fitzpatrick, P.M. (2010). Real analysis 4th edition. Beijing: China Machine Press.

Schneier, B. (1993). *Applied cryptography (2nd ed.)*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Speicher, R. (2020). *Mathematical aspects of quantum mechanics.* Universitat Des Saarlandes. https://www.uni-saarland.de/lehrstuhl/speicher/teaching/winter-term-20202021/mathematical-aspects-of-quantum-mechanics.html. Diakses pada 20 Juli 2023.

Subiono. (2022). *Matematika kuantum*. https://www.its.ac.id/matematika/wp-content/uploads/sites/42/2018/08/BukuMatematikaQuantum_2022.pdf. Diakses pada 20 Juli 2023.

Suparmi. (2011). *Mekanika kuantum*. Surakarta: Universitas Negeri Sebelas Maret.

Weckman, T. (2020). *Spektral theory of unbounded self-adjoint operators in Hilbert spaces*. Thesis. University of Helsinki.

Wittek, P. (2014). *Quantum machine learning* (pp.11–24). London: Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2013-0-19170-2.

Zwart, K. (2018). *The spektral theorem for unbounded self-adjoint operators and Nelson's theorem*. Tesis. Universiteit Utrecht.