

OPTIMASI SISTEM KEAMANAN TRANSFER DATA DENGAN MENGAPLIKASIKAN KONSEP TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF

OPTIMIZATION OF DATA TRANSFER SECURITY SYSTEMS BY APPLYING THE RAINBOW CONNECTION CONCEPT IN THE GRAPH

Sitta Alief Farihati¹, M. Salman A. N.², Ariestha Widyastuty Bustan³

¹Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Terbuka

²Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung

³Program Studi Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Pasifik Morotai

*sitta@ecampus.ut.ac.id

ABSTRAK

Pada era digital saat ini, inovasi teknologi berkembang semakin pesat. Hal ini seiring dengan tujuan manusia untuk mencapai Sustainable Development Goals (SDGs). Salah satu komponen pendukung berbasis teknologi yang diperlukan dalam pencapaian SDGs tersebut adalah sistem komunikasi publik secara digital, yang selanjutnya disebut sistem komunikasi digital. Dalam hal ini, sistem transfer data merupakan salah satu bentuk sistem komunikasi digital yang sering digunakan oleh masyarakat. Dapat dilihat dengan jelas, cakupan sistem komunikasi digital sangat luas, masif, dan terbuka. Oleh karena itu, keamanan pada sistem transfer data merupakan hal yang sangat penting dalam sistem komunikasi digital saat ini. Untuk menjaga keamanan data yang

ditransfer, pengirim data akan menggunakan sandi (password) pada data tersebut. Namun untuk mengantisipasi bocornya sandi tersebut, maka pengirim data perlu memasang sandi secara berlapis. Banyaknya lapisan sandi pada data tersebut dapat ditentukan dengan konsep terhubung pelangi pada graf. Konsep ini dikembangkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2008 untuk mengatasi kelemahan dalam pengamanan pengiriman informasi antar agen rahasia Amerika Serikat. Artikel ini merupakan hasil studi literatur. Untuk memudahkan pemahaman, pembahasan dalam artikel ini dimulai dengan pemaparan tentang terminologi graf dan konsep terhubung pelangi pada graf. Selanjutnya, dalam artikel dibahas tentang bilangan terhubung pelangi dari beberapa kelas graf dan hasil operasi graf yang merepresentasikan kompleksitas sistem jaringan komunikasi.

Kata Kunci: *graf, sistem keamanan, terhubung pelangi, transfer data*

ABSTRACT

In today's digital era, technological innovation is growing rapidly. It aligns with human goals to achieve Sustainable Development Goals (SDGs). One of the technology-based supporting components needed to achieve the SDGs is a digital public communication system, further referred to as a digital communication system. In this case, the data transfer system is a form of digital communication that is often used by the public. As can be seen clearly, the scope of digital communication systems is very wide, massive, and open. Therefore, security in data transfer systems is fundamental in digital communication systems. The sender will use a password to maintain the security of the data being transferred. However, to anticipate the leakage of the password, the data sender needs to use a password in layers. The rainbow connection concept of the graph can determine the number of layers in the data. This concept was developed by Chartrand et al. in 2008 to address weaknesses

in securing the transmission of information between the United States secret agents. This article is the result of a literature study. To facilitate understanding, the discussion in this article begins with an explanation of graph terminology and the concept of a rainbow connection in graphs. Furthermore, this article discusses the rainbow connection numbers of several graph classes and the results of graph operations that represent network communication systems.

Keywords: *data transfer, graph, rainbow connection, security system*

PENDAHULUAN

Pada era digital dan *big data* saat ini, teknologi informasi dan komunikasi semakin pesat berkembang sehingga menimbulkan berbagai macam permasalahan baru yang mengarah pada studi pemodelan matematika kombinatorik dan komputasi. Salah satu permasalahan yang terkait adalah sistem keamanan transfer data dalam jaringan komunikasi publik. Dalam sistem tersebut terdapat proses pengiriman suatu data/informasi antar individu atau komunitas. Namun dalam komunikasi tersebut ada data/informasi yang tidak boleh diakses oleh sembarang orang atau dengan kata lain harus dijaga kerahasiaannya. Oleh karena itu, pengirim dan penerima harus menggunakan sandi (*password*) untuk keamanan proses komunikasi tersebut. Untuk meningkatkan keamanan, sandi yang digunakan harus dipastikan tidak berulang. Selain itu, terkait dengan penyimpanan data, banyaknya sandi yang digunakan harus minimal. Aturan ini merupakan upaya untuk mengoptimalkan sistem keamanan transfer data.

Pada tahun 2008, Chartrand dkk. mengembangkan konsep terhubung pelangi pada graf setelah memperhatikan adanya kelemahan dalam pengamanan pengiriman informasi antar agen rahasia Amerika Serikat. Kelemahan tersebut ditemukan setelah terjadi serangan teroris 11 September 2001 di New York (lihat Gambar 1). Berdasarkan hasil observasi Ericksen (2007), peristiwa serangan teroris tersebut tidak dapat diantisipasi oleh pemerintah karena penegak hukum dan agen rahasia tidak dapat berkomunikasi satu sama lain melalui saluran reguler mereka, yaitu dari sistem radio ke basis datanya. Hal ini dikarenakan penegak hukum dan agen rahasia tidak diijinkan untuk saling memeriksa informasi sehingga informasi antar agen harus menggunakan sandi. Padahal terdapat lebih dari satu lintasan informasi antar dua agen dan setiap lintasan informasi tersebut harus menggunakan sandi yang berbeda. Akibatnya, jumlah dan kompleksitas sandi yang dibutuhkan sangat banyak. Oleh karena itu, Chartrand dkk. mengembangkan

konsep terhubung pelangi pada graf untuk menentukan minimal banyaknya sandi yang digunakan dalam lintasan informasi antar dua agen.



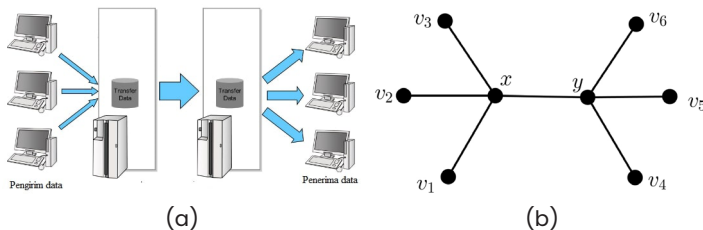
Sumber: Bergen, 2001

Gambar 1. Kebakaran Akibat Serangan Teroris pada
11 September 2001

Di masa yang akan datang, komunikasi melalui digital akan semakin berkembang. Melihat betapa pentingnya keamanan data dalam komunikasi digital, penerapan konsep terhubung pelangi pada sistem transfer data akan sangat relevan dengan masalah keamanan transfer data. Pengembangan konsep terhubung pelangi pada berbagai bentuk graf yang merupakan representasi dari suatu jaringan komunikasi sangat diperlukan. Dalam hal ini, semakin kompleksnya suatu jaringan maka akan semakin kompleks bentuk graf yang diperoleh. Jika pengirim (pihak pertama) dan penerima (pihak kedua) data digambarkan sebagai suatu titik, maka hubungan antar kedua pihak merupakan suatu sisi pada graf.

Oleh karena itu, untuk memahami konsep graf sebagai representasi dari jaringan komunikasi digital, akan dibahas terlebih dahulu terminologi graf dan operasi pada graf. Selanjutnya akan dijelaskan konsep terhubung pelangi pada graf dan hasil-hasil

yang telah diperoleh para peneliti. Kebaruan dari artikel ini adalah visualisasi pewarnaan pelangi dari teori-teori yang diperoleh para peneliti. Hal ini sebagai gambaran cara mewarnai lintasan sesuai dengan graf yang merepresentasikan masalah pada jaringan komunikasi digital. Artikel ini merupakan hasil studi literatur. Untuk memudahkan pemahaman, pembahasan dalam artikel ini dimulai dengan pemaparan tentang terminologi graf dan konsep terhubung pelangi pada graf. Selanjutnya, dalam artikel dibahas tentang bilangan terhubung pelangi dari beberapa kelas graf dan hasil operasi graf yang merepresentasikan kompleksitas sistem jaringan komunikasi.



Sumber: Anonim, 2021

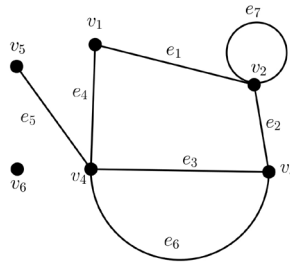
Gambar 2. (a) Ilustrasi Sistem Transfer Data dalam Jaringan Komunikasi Digital
(b) Representasi Graf dari Sistem pada Gambar (a)

GRAF DAN OPERASI PADA GRAF

Dalam artikel ini, terminologi dan notasi yang digunakan mengacu pada Bondy dan Murty (2008) dan Voloshin (2009). Adapun terminologi operasi pada graf mengacu pada Imrich dan Klavzar (2000). Untuk menyederhanakan penulisan notasi, didefinisikan $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$. Adapun graf yang dibahas adalah graf hingga dan tak-berarah.

Graf G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$ dengan himpunan titik $V(G)$ yang tak kosong dan himpunan sisi $E(G) = \{uv \mid u, v \in V(G)\}$ (Bondy & Murty, 2008). Orde G adalah

banyaknya titik G , yaitu $|V(G)|$, yang dinotasikan dengan $n(G)$. Ukuran G adalah banyaknya sisi G , yaitu $|E(G)|$, yang dinotasikan dengan $m(G)$. Sebagai ilustrasi, berikut ini diberikan contoh graf.



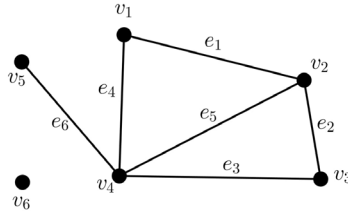
Gambar 3. Contoh Graf G

Graf G pada Gambar 3 mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Adapun orde G adalah $n(G) = 6$ dan ukuran G adalah $m(G) = 7$.

Graf G disebut graf trivial jika berorde satu, namun jika berorde lebih dari satu disebut graf non-trivial. Misalkan u dan v adalah sepasang titik di G dengan $e = uv$ adalah suatu sisi di G . Titik u dan v dikatakan bertetangga jika $uv \in G$, sedangkan sisi e dikatakan terkait dengan titik u dan v . Dua titik yang terkait dengan satu sisi yang sama disebut titik ujung sisi tersebut. Adapun dua sisi yang terkait dengan satu titik yang sama disebut bertetangga. Sebagai contoh, perhatikan graf G pada Gambar 3. Terlihat bahwa titik v_4 bertetangga dengan titik v_5 . Adapun sisi $e_5 = v_4v_5$ terkait dengan titik v_4 dan v_5 sehingga kedua titik tersebut dikatakan sebagai titik ujung dari sisi e_5 . Sisi e_1 dan e_2 adalah contoh sisi yang bertetangga karena terkait dengan titik yang sama, yaitu titik v_2 .

Sisi yang mempunyai titik ujung yang sama disebut *loop*. Adapun sisi ganda adalah dua atau lebih sisi yang titik-titik ujungnya sama. Suatu graf dikatakan sederhana jika tidak memuat *loop* atau sisi ganda. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 3. Graf

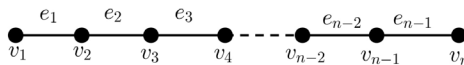
tersebut bukan graf sederhana karena memuat *loop* yaitu e_7 , atau sisi ganda yaitu e_3 dan e_6 . Adapun graf berikut adalah contoh graf sederhana.



Gambar 4. Graf Sederhana G

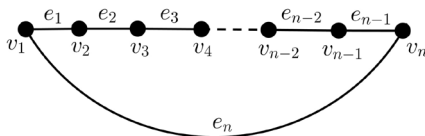
Misalkan titik u dan v di G . Suatu barisan titik di G , yang berawal di u dan berakhir di v sehingga titik-titik yang berurutan tersebut bertetangga di G disebut *jalan* u - v . Jalan W di G dinyatakan dengan $W = (u = v_1, v_2, \dots, v_{k+1} = v)$ dengan $v_i v_{i+1} \in E(G)$ untuk $i \in [1, k]$. Titik tak berurutan di w tidak harus berbeda. Suatu jalan di G yang sisinya tidak berulang disebut *jejak* di G . Suatu jalan di G yang titiknya tak berulang disebut *lintasan*. Sebagai contoh, perhatikan graf G di Gambar 4. Jalan v_1 - v_2 adalah $W_1 = (v_1, v_4, v_5, v_4, v_2)$, jejak v_1 - v_2 adalah $W_2 = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_2)$, dan lintasan v_1 - v_2 adalah $W_3 = (v_1, v_4, v_3, v_2)$.

Graf lintasan berorde n , yang dinotasikan dengan P_n , adalah graf yang titik-titiknya dapat diberi label v_1, v_2, \dots, v_n sehingga $E(P_n) = (v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n)$. Dalam hal ini, v_1 dan v_n disebut titik ujung lintasan P_n maka lintasan tersebut dinamakan lintasan v_1 - v_n . Adapun panjang lintasan P_n didefinisikan sebagai banyaknya sisi dalam lintasan tersebut. Karena itu, untuk setiap P_n , banyaknya sisi adalah $m(P_n) = n - 1$. Gambar 5 berikut ini adalah ilustrasi lintasan P_n .



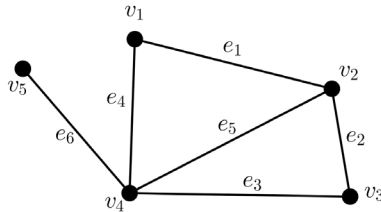
Gambar 5. Graf Lintasan P_n

Graf lingkaran berorde n , yang dinotasikan dengan C_n , adalah graf yang diperoleh dari lintasan P_n dengan menambahkan satu sisi pada titik-titik ujung lintasan P_n yang menjadikan kedua titik tersebut bertetangga. Panjang lingkaran C_n didefinisikan sebagai banyaknya sisi dalam lingkaran tersebut. Karena itu, untuk setiap C_n , banyaknya sisi adalah $m(C_n) = n$. Misalkan G graf yang memuat lingkaran. *Girth* graf G adalah panjang lingkaran terkecil di G , yang dinotasikan dengan $g(G)$. Graf pohon berorde n , yang dinotasikan dengan T_n , adalah graf yang tidak memuat lingkaran. Gambar 6 berikut ini merupakan ilustrasi lingkaran C_n .



Gambar 6. Graf Lingkaran C_n

Suatu graf G dinyatakan terhubung jika untuk setiap pasang titik terdapat lintasan yang menghubungkannya. Jika graf G tak-terhubung, maka G memuat dua atau lebih komponen yang masing-masing merupakan graf terhubung. Sebagai contoh, gambar berikut ini adalah graf terhubung, sedangkan graf tak-terhubung ditunjukkan pada Gambar 4.



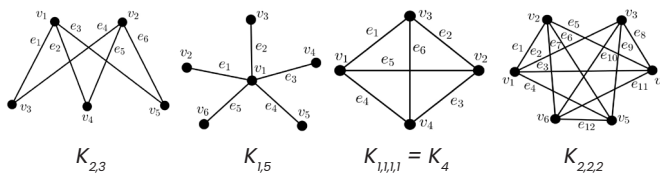
Gambar 7. Graf Terhubung G

Pandang lintasan $u-v$. Jarak titik u ke v di graf G , dinotasikan dengan $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut di G . Lintasan $u-v$ dengan panjang $d(u,v)$ disebut geodesik $u-v$ (Chartrand & Zhang, 2020). Dalam Li dan Sun (2012), *eccentricity* titik v di graf terhubung G adalah jarak antara titik v dan titik terjauh dari v di G , yang dinotasikan dengan $\text{ecc}(v) = \max_{x \in V(G)} d(v,x)$. Diameter graf G adalah $\text{diam}(G) = \max_{x \in V(G)} \text{ecc}(x)$. Radius graf G adalah $\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \text{ecc}(x)$. Untuk setiap graf terhubung non-trivial,

berlaku $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$. Sebagai contoh, perhatikan graf terhubung G pada Gambar 7. Jarak titik v_2 ke v_5 adalah $d(v_2, v_5) = 2$, sedangkan jarak titik v_2 ke v_4 adalah $d(v_2, v_4) = 1$. Adapun lintasan $P = (v_2, v_4, v_5)$ adalah geodesik v_2-v_5 . *Eccentricity* titik v_2 adalah $\text{ecc}(v_2) = 2$. Adapun diameter graf G adalah $\text{diam}(G) = 2$ dan radius graf G adalah $\text{rad}(G) = 1$.

Graf G disebut graf lengkap jika setiap dua titik berbeda di graf tersebut bertetangga. Graf lengkap berorde n dinotasikan dengan K_n . Karena itu, K_n merupakan graf berorde n dan berukuran $\binom{n}{2}$. Jika setiap titik pada graf G berderajat sama, maka G disebut graf reguler. Jika setiap titik di G berderajat r , maka G disebut graf reguler- r . Sebagai contoh, graf lingkaran C_n adalah graf reguler-2, sedangkan graf lengkap K_n adalah graf reguler- $(n-1)$. Graf reguler-3 disebut juga graf kubik, contohnya graf Petersen.

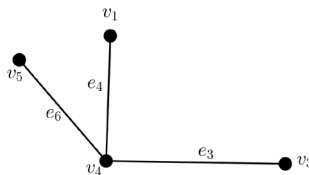
Suatu graf non-trivial disebut graf bipartit G jika himpunan titik graf G dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan U dan W sehingga setiap sisi di G menghubungkan suatu titik di U dan suatu titik di W . Apabila setiap titik di U bertetangga dengan setiap titik di W maka disebut graf bipartit lengkap. Secara umum, untuk $k \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}^+$, dan n_1, n_2, \dots, n_k bilangan asli, graf multipartit lengkap (atau graf partit- k lengkap), yang dinotasikan dengan $K(n_1, n_2, \dots, n_k)$, adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi k subhimpunan yaitu V_1, V_2, \dots, V_k dengan $|V_i| = n_i$ untuk $1 \leq i \leq k$ sedemikian hingga $uv \in E(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i, j \in [1, k]$ dan $i \neq j$.



Sumber: Chartrand & Zhang, 2020

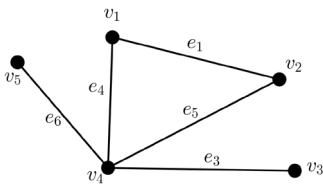
Gambar 8. Graf Multipartit Lengkap G

Penghapusan kuat titik v adalah menghapus suatu titik v dari himpunan titik $V(G)$ dan menghapus semua sisi di $E(G)$ yang terkait dengan titik v tersebut. Penghapusan kuat titik v dari graf G dinotasikan dengan $G_1 = G - v$. Sebagai contoh, jika dilakukan penghapusan kuat titik v_2 dari graf G pada Gambar 7, maka diperoleh graf G_1 berikut ini.



Gambar 9. Graf $G_1 = G - v_2$

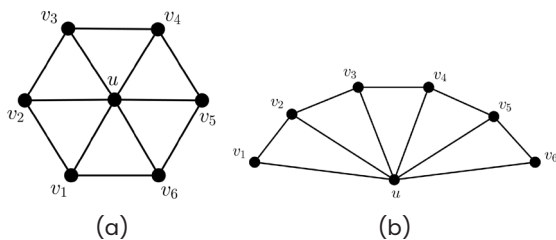
Penghapusan lemah sisi e adalah menghapus suatu sisi e dari himpunan sisi $E(G)$. Penghapusan lemah sisi e dari graf G dinotasikan dengan $G_1 = G - e$ lemah. Sebagai contoh, jika dilakukan penghapusan lemah sisi e_2 dari graf G pada Gambar 7, maka diperoleh graf G_1 berikut ini.



Gambar 10. Graf $G_1 = G - e_2$ Lemah

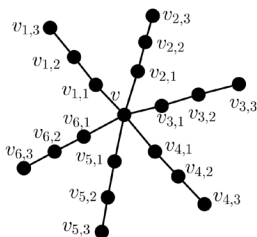
Misalkan graf $G = (V, E)$. Suatu graf $G' = (V', E')$ dikatakan subgraf dari graf G , dinotasikan dengan $G' \subseteq G$, jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$. Graf G' dikatakan subgraf merentang dari G jika $G' \subseteq G$ dan $V' = V$ (Diestel, 2017). Dengan kata lain, subgraf merentang diperoleh dari penghapusan lemah suatu sisi di graf G . Sebagai contoh, graf G_1 pada Gambar 9 dan pada Gambar 10 masing-masing berturut-turut adalah subgraf dan subgraf merentang dari graf pada Gambar 7.

Misalkan $G = (V, E)$ dan $G' = (V', E')$ adalah dua graf. Gabungan (*union*) graf G dan G' , yang dinotasikan dengan $G \cup G'$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V \cup V'$ dan himpunan sisi $E \cup E'$. Graf roda merupakan kelas graf yang dikonstruksi dari lingkaran. Untuk $n \geq 3$, graf roda W_n didefinisikan sebagai $C_n \cup K_1$, yaitu graf yang dikonstruksi dari satu titik yang dihubungkan ke setiap titik lingkaran C_n . Jadi $W_3 = K_4$. Adapun graf kipas adalah kelas graf yang dikonstruksi dari lintasan. Untuk $n \geq 3$, graf *kipas* F_n didefinisikan sebagai $P_n \cup K_1$, yaitu graf yang dikonstruksi dari satu titik yang dihubungkan ke setiap titik lintasan P_n . Gambar 11 berikut merupakan contoh graf roda dan kipas.



Gambar 11. (a) Graf Roda W_6 , (b) Graf Kipas F_6

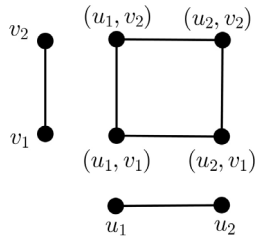
Untuk $t \in \mathbb{N}$ dan $i \in [1, t]$, misalkan G_i graf terhubung sederhana dan $|V(G_i)| = k_i \geq 2$ untuk suatu $k_i \in \mathbb{N}$. Untuk $t \geq 2$, misalkan $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ koleksi graf hingga dan setiap G_i , $i \in [1, t]$ mempunyai sebuah titik tetap v_{oi} yang disebut terminal. Amalgamasi $\text{Amal}(G_i, v_{oi})$ adalah graf yang dibentuk oleh semua graf G_i dan mengidentifikasi terminal-terminalnya (Carlson, 2006). Misalkan $G \cong \text{Amal}(G_i, v_{oi})$ dengan titik $v_{oi} = v$ sebagai terminal dan $V(G) = \{v\} \cup \{v_{ij} \mid i \in [1, t], j \in [1, k_i - 1]\}$ (Fitriani & Salman, 2016).



Sumber: Kurniawati dkk., 2021

Gambar 12. Amalgamasi $\text{Amal}(G_i, v_{oi})$ dengan $G_i \cong P_4$

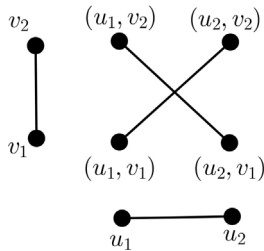
Misalkan graf G berorde m dan graf H berorde n . Cartesian product graf G dan H , yang dinotasikan dengan $G \square H$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi berupa himpunan pasangan (u, v) dan (u', v') sedemikian hingga $uu' \in E(G)$ dan $v = v'$, atau $vv' \in E(H)$ dan $u = u'$.



Sumber: Bondy & Murty, 2008

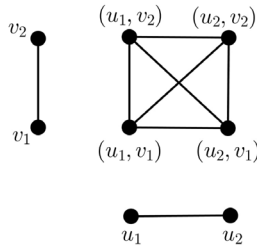
Gambar 13. Cartesian Product $K_2 \square K_2$

Direct product graf G dan H , yang dinotasikan dengan $G \times H$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \times V(H)$, dan dua titik (u,v) dan (u',v') bertetangga jika proyeksi pada kedua koordinatnya bertetangga, yaitu $uu' \in E(G)$ dan $vv' \in E(H)$.



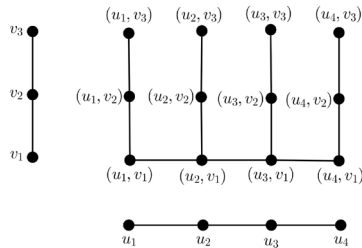
Gambar 14. Direct Product $K_2 \times K_2$

Strong product graf G dan H , yang dinotasikan dengan $G \otimes H$, adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi berupa himpunan pasangan (u,v) dan (u',v') sedemikian hingga $uu' \in E(G)$ dan $v = v'$, atau $vv' \in E(H)$ dan $u = u'$, atau $uu' \in E(G)$ dan $vv' \in E(H)$. Terlihat bahwa *strong product* dari dua graf adalah gabungan dari *cartesian product* dan *direct product* dari kedua graf tersebut.



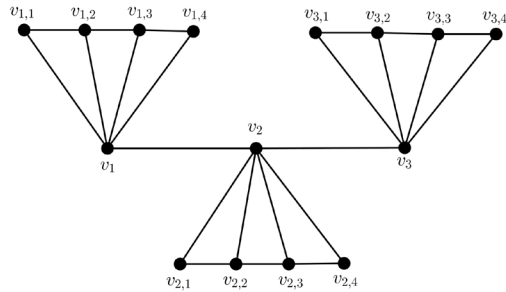
Gambar 15. Strong Product $K_2 \otimes K_2$

Misalkan o titik di H . Comb product graf G dan H , yang dinotasikan dengan $G \triangleright_o H$, adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan dari G dan $|V(G)|$ salinan dari H dan menyabangkan salinan ke- i dari H pada titik o ke titik ke- i dari G . Berdasarkan definisi, comb product graf G dan H adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) \times V(H)$ dengan dua titik (u,v) dan (u',v') bertetangga jika dan hanya jika $u = u'$ dan $vv' \in E(H)$ atau $uu' \in E(G)$ dan $v = v' = o$ (Saputro dkk., 2017).



Gambar 16. Comb Product $P_4 \triangleright_o P_3$

Corona graf G dan H , yang dinotasikan dengan $G \circ H$, adalah graf yang dihasilkan dari satu salinan graf G dan m salinan graf H , katakan H_1, H_2, \dots, H_m , dan dihubungkan oleh suatu garis dari titik ke- i graf G ke setiap titik di salinan ke- i graf H . Dengan demikian, graf $G \circ H$ mempunyai $m(I+n)$ titik.

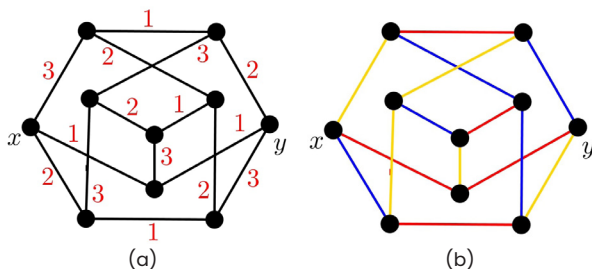


Sumber. Wardani dkk., 2018

Gambar 17. Graf $P_3 \circ P_4$

TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF

Pada tahun 2008, Chartrand dkk. mengembangkan konsep terhubung pelangi pada graf sebagai berikut. Misalkan G graf terhubung non-trivial. Untuk k bilangan asli, suatu pemetaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ adalah pewarnaan sisi pada graf G . Lintasan pada graf G disebut lintasan pelangi jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut yang memiliki warna sama. Graf G disebut terhubung pelangi (terkait dengan c) jika G memuat suatu lintasan $u - v$ pelangi untuk setiap pasang titik u dan v di G . Adapun pewarnaan c disebut pewarnaan sisi pelangi atau pewarnaan pelangi. Jika warna yang digunakan dalam pewarnaan pelangi graf G sebanyak k , maka c disebut pewarnaan- k pelangi. Bilangan terhubung pelangi adalah k bilangan asli terkecil sehingga terdapat pewarnaan- k pelangi pada graf G . Bilangan terhubung pelangi dinotasikan dengan $rc(G)$. Dalam hal ini, jika $diam(G) = k$, maka berlaku $rc(G) \geq k$.



Gambar 18. Pewarnaan-3 Pelangi Graf Petersen (a) dengan Label Angka (Chartrand & Zhang, 2020), (b) dengan Warna

Sebagai contoh, perhatikan graf Petersen pada Gambar 18. Misalkan graf Petersen G mempunyai pewarnaan-3 pelangi dengan pewarnaan sisi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 18 sehingga berlaku $rc(G) \leq 3$. Selanjutnya, karena $diam(G) = 2$ diperoleh $rc(G) \geq 2$. Namun tidak ada pewarnaan-2 pelangi pada graf Petersen, maka andaikan terdapat pewarnaan sisi c . Karena graf Petersen G adalah graf kubik, terdapat dua sisi bertetangga, misalkan uv dan vw , yang berwarna sama yaitu c . Karena $girth\ g(G) = 5$, lintasan $u - w$ yaitu (u, v, w) adalah lintasan dengan panjang 2. Karena lintasan tersebut bukan lintasan pelangi, c bukan pewarnaan pelangi, maka $rc(G) = 3$.

Misalkan c adalah pewarnaan sisi suatu graf terhubung non-trivial G . Untuk setiap pasang titik u dan v di G , geodesik $u - v$ pelangi adalah lintasan pelangi $u - v$ dengan panjang $d(u, v)$. Jika G memuat suatu geodesik $u - v$ pelangi untuk setiap pasang titik u dan v di G maka G dikatakan terhubung pelangi kuat. Adapun pewarnaan c disebut pewarnaan pelangi kuat di G . Bilangan terhubung pelangi kuat, yang dinotasikan dengan $src(G)$, adalah k bilangan asli terkecil sedemikian hingga G mempunyai pewarnaan- k pelangi kuat. Bilangan ini disebut juga bilangan diameter pelangi (Chakraborty dkk, 2011). Secara umum, jika G adalah graf terhubung non-trivial berukuran m , maka

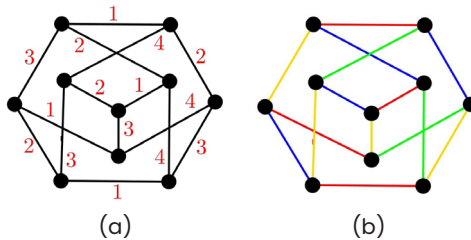
$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m \quad (1)$$

Pada tahun 2011, Schiermeyer memperbaiki batas bawah $rc(G)$ pada Pertidaksamaan (1) dalam bentuk Teorema 1 berikut. Untuk graf G berorde n , misalkan $n_i(G)$ menyatakan banyaknya titik G yang berderajat i untuk $i \in [1, n-1]$.

Teorema 1. (Schiermeyer, 2011)

Misalkan G graf terhubung dengan $n \geq 3$ titik, maka $rc(G) \geq \max\{\text{diam}(G), n_1(G)\}$.

Selanjutnya perhatikan kembali graf Petersen pada Gambar 18. Karena bilangan terhubung pelangi graf Petersen adalah $rc(G) = 3$, maka $src(G) \geq 3$. Akan tetapi pewarnaan-3 pelangi pada Gambar 18 bukan pewarnaan-3 pelangi kuat, karena terdapat geodesik $x - y$ di graf Petersen yang bukan merupakan geodesik $x - y$ pelangi. Dalam hal ini, karena setiap pewarnaan pelangi kuat dari graf Petersen G memetakan warna yang berbeda ke sisi yang bertetangga, pewarnaan tersebut menjadi pewarnaan sisi murni. Karena indeks kromatik dari graf Petersen adalah 4, diperoleh $src(G) \geq 4$. Karena pewarnaan sisi graf Petersen seperti yang ditunjukkan pada Gambar 19 berikut adalah pewarnaan-4 pelangi kuat, maka $src(G) = 4$.



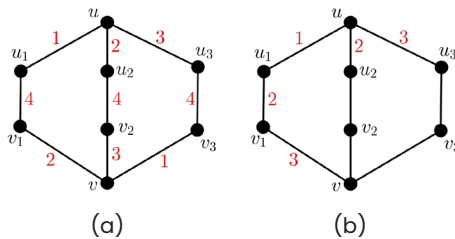
Gambar 19. Pewarnaan-4 Pelangi Kuat Graf Petersen G (a) dengan Label Angka (Chartrand & Zhang, 2020), (b) dengan Warna

Dari penjelasan tersebut, terlihat bahwa graf Petersen mempunyai bilangan terhubung pelangi yang berbeda dengan bilangan terhubung pelangi kuat. Namun keadaan ini tidak terjadi pada graf yang mempunyai bilangan terhubung pelangi kurang dari 3. Karakteristik ini ditunjukkan dalam Teorema 2 berikut.

Teorema 2. (Chartrand dan Zhang, 2020)

Untuk $k \in \{1, 2\}$ dan G graf terhubung non-trivial, $rc(G) = k$ jika dan hanya jika $src(G) = k$.

Selanjutnya, Chartrand dkk. (2008) memberikan contoh sebarang graf G yang mempunyai $rc(G)$ dan $src(G)$ yang sama.



Sumber: Chartrand dkk., 2008

Gambar 20. Graf G dengan $rc(G) = src(G) = 4$

Misalkan pewarnaan- k sisi adalah pemetaan $c': E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa graf G pada Gambar 20(a) mempunyai diameter $diam(G) = 3$, oleh karena itu $rc(G) \geq 3$. Andaikan $rc(G) = 3$, maka terdapat pewarnaan-3 pelangi pada graf G . Karena panjang setiap lintasan $u - v$ di G adalah 3, paling sedikit satu dari tiga lintasan $u - v$ di G adalah sebuah lintasan $u - v$ pelangi. Misalkan $P = (u, u_1, v_1, v)$ adalah sebuah lintasan $u - v$ pelangi. Misalkan $c'(uu_1) = 1$, $c'(u_1v_1) = 2$, dan $c'(v_1v) = 3$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 20(b). Jika x dan y adalah dua titik di G sedemikian hingga $d(x, y) = 2$, maka G memuat tepat satu lintasan $x - y$ dengan panjang 2, sementara seluruh lintasan $x - y$ lainnya mempunyai panjang 4 atau lebih. Hal ini menyatakan secara

tak langsung bahwa tidak ada dua sisi bertetangga yang dapat diwarnai sama, sehingga dapat diasumsikan, tanpa mengurangi perumuman, $c'(uu_2)=2$ dan $c'(uu_3)=3$ (lihat Gambar 20(b)). Jadi, $\{c'(vv_2), c'(vv_3)\} = \{1, 2\}$. Jika $c'(vv_2)=1$ dan $c'(vv_3)=2$, maka $c'(u_2v_2)=3$ dan $c'(u_3v_3)=1$. Pada kasus ini, tidak terdapat lintasan pelangi $u_i - v_j$ di G . Di lain pihak, jika $c'(vv_2)=2$ dan $c'(vv_3)=1$, maka $c'(u_2v_2) \in \{1, 3\}$ dan $c'(u_3v_3)=2$. Jika $c'(u_2v_2)=1$, maka tidak terdapat lintasan pelangi $u_2 - v_3$ di G ; sementara jika $c'(u_2v_2)=3$, maka tidak terdapat lintasan pelangi $u_2 - v_1$ di G . Hal ini kontradiksi dengan definisi terhubung pelangi. Oleh karena itu, $rc(G) = 4$. Karena $4 = rc(G) \leq src(G)$ dan graf G pada Gambar 20(a) adalah pewarnaan-4 pelangi kuat juga, maka $src(G) = 4$.

Dari pemaparan di atas, telah dibahas tentang bagaimana menentukan $rc(G)$ dan $src(G)$. Oleh karena graf merupakan representasi dari suatu jaringan komunikasi, jika jaringan komunikasi yang diberikan berupa graf pada Gambar 20(a) maka berikut ini representasi dari pewarnaan pelangi yang diperoleh. Diketahui bahwa graf G pada Gambar 20(a) mempunyai bilangan terhubung pelangi $rc(G) = src(G) = 4$. Hal ini berarti minimal banyaknya sandi yang digunakan pada sistem jaringan komunikasi tersebut adalah 4. Oleh karena itu jika pengirim di u_i akan mengirimkan data ke penerima di v_j , maka pengirim harus memasangkan sandi pada data sebanyak 4 layer. Selanjutnya, pengirim dapat mengirimkan data melalui lintasan pelangi $u_i - v_j$ yang aman. Salah satu pilihan lintasan pelangi $u_i - v_j$ yang aman adalah $u_1 - v_1 - v_2 - v_3$. Meskipun panjang lintasan tersebut adalah 3, namun karena sandi yang dipasang sebanyak 4, maka data yang dikirim masih terjaga keamanannya.

Selanjutnya, akan dijabarkan hasil-hasil penelitian tentang bilangan terhubung pelangi dari beberapa kelas graf (umum) dan hasil operasi graf umum sebagai berikut.

1. Bilangan Terhubung Pelangi Beberapa Kelas Graf Umum

Pada tahun 2008, Chartrand dkk. telah memperoleh bilangan terhubung pelangi beberapa kelas graf umum sebagai berikut.

Lema 1. (Chartrand dkk., 2008)

Misalkan G adalah graf terhubung non-trivial berukuran m .

(1) $G = K_n$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $rc(G) = src(G) = 1$;

(2) $G = T_n$ adalah graf pohon dengan $m = n-1$ jika dan hanya jika $rc(G) = src(G) = m$;

(3) Jika $G = C_n$ adalah graf lingkaran dengan $n \geq 4$, maka $rc(G) = src(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$;

(4) Jika $G = W_n$ adalah graf roda dengan $n \geq 3$, maka

$$rc(G) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3; \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6; \\ 3, & \text{jika } n \geq 7. \end{cases}$$

$$\text{dan } src(G) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

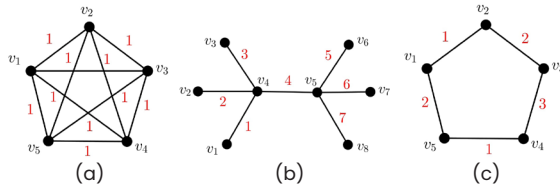
(5) Misalkan $G = K_{st}$ adalah graf bipartit dengan s dan t adalah bilangan asli, maka $rc(G) = \min\left\{\left\lceil \sqrt[3]{t} \right\rceil, 4\right\}$ jika $2 \leq s \leq t$, dan $src(G) = \left\lceil \sqrt[3]{t} \right\rceil$ jika $1 \leq s \leq t$.

(6) Misalkan $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ adalah graf p -partit lengkap dengan $p \geq 3$ dan $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$ sehingga $s = \sum_{i=1}^{p-1} n_i$ dan $t = n_p$, maka

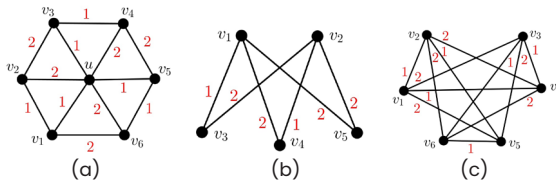
$$rc(G) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n_p = 1; \\ 2, & \text{jika } n_p \geq 2 \text{ dan } s > t; \\ \min\left\{\left\lceil \sqrt[3]{t} \right\rceil, 3\right\}, & \text{jika } s \leq t. \end{cases}$$

$$src(\mathcal{G}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n_p = 1; \\ 2, & \text{jika } n_p \geq 2 \text{ dan } s > t; \\ \lceil \sqrt{t} \rceil, & \text{jika } s \leq t. \end{cases}$$

Adapun cara mewarnai graf-graf tersebut dapat dilihat pada contoh-contoh ilustrasi berikut ini.



Gambar 21. Pewarnaan Pelangi pada (a) Graf Lengkap K_5 , (b) Graf Pohon T_8 , dan (c) Graf Lingkaran C_5



Gambar 22. Pewarnaan Pelangi pada Graf Roda W_6 , Graf Bipartit $K_{2,3}$ dan Graf Multipartit Lengkap $K_{2,2,2}$

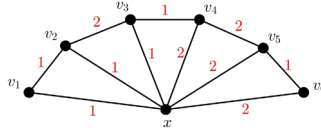
Pada tahun 2013, Sy dkk. memperoleh hasil sebagai berikut.

Teorema 3. (Sy dkk., 2013)

Untuk bilangan bulat $n \geq 2$, bilangan terhubung pelangi graf kipas F_n adalah

$$(1) \quad rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 2; \\ 2, & \text{jika } 3 \leq n \leq 6; \\ 3, & \text{jika } n \geq 7. \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{src}(F_n) = \begin{cases} rc(F_n), & \text{jika } 2 \leq n \leq 6; \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, & \text{jika } n \geq 7. \end{cases}$$



Sumber: Sy dkk., 2013

Gambar 23. Pewarnaan Pelangi pada Graf Kipas F_6 dengan $rc(F_6) = 2$

2. Bilangan Terhubung Pelangi Graf Hasil Operasi

Pada bagian ini disajikan beberapa hasil penelitian untuk graf hasil operasi, antara lain amalgamasi, *cartesian product*, *direct product*, *strong product*, *comb product*, dan *corona*. Untuk memudahkan ilustrasi pewarnaan pelangi, ada graf yang diberi label angka atau warna seperti yang ditunjukkan pada Gambar 18 dan 19. Adapun warna yang digunakan pada setiap sisi menunjukkan nomor warna. Sebagai contoh, jika warna merah adalah nomor satu, maka warna biru adalah nomor dua, dan seterusnya.

a. Graf Hasil Operasi Amalgamasi

Pada tahun 2016, Fitriani dan Salman menyelidiki bilangan terhubung pelangi graf hasil operasi amalgamasi dari graf lingkaran, pohon, lengkap, roda, dan kipas. Secara umum, Teorema 4 berikut memberikan batas bawah dan batas atas bilangan terhubung pelangi graf hasil operasi amalgamasi.

Teorema 4. (Fitriani & Salman, 2016)

Untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, misalkan $\{G_i \mid i \in [1, t]\}$ adalah koleksi graf hingga dan setiap G_i mempunyai suatu terminal v_{oi} . Jika G adalah amalgamasi G_1, G_2, \dots, G_t , yaitu $\text{Amal}(G_i, v_{oi})$, maka

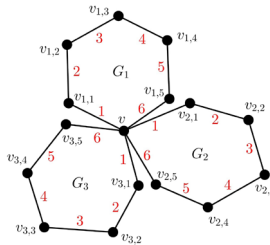
$$\text{diam}(\mathcal{G}) \leq rc(\mathcal{G}) \leq \sum_{i=1}^t rc(\mathcal{G}_i)$$

Graf yang memenuhi batas bawah Teorema 4 adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf lingkaran C_n seperti yang ditunjukkan pada Teorema 5 berikut.

Teorema 5. (Fitriani & Salman, 2016)

Misalkan n dan t adalah bilangan asli dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$. Misalkan $\mathcal{G} \equiv \text{Amal}(\mathcal{G}_i, v_{oi})$ dengan \mathcal{G}_i adalah graf lingkaran C_n , $i \in [1, t]$, maka

$$rc(\mathcal{G}) = \begin{cases} \text{diam}(\mathcal{G}), & \text{untuk } n \geq 4 \text{ (} n \text{ genap) dan } t \geq 2, \\ & \text{atau } n \geq 3 \text{ (} n \text{ ganjil) dan } t = 2; \\ \text{diam}(\mathcal{G}) + 1, & \text{untuk } n \geq 3 \text{ (} n \text{ ganjil) dan } t \geq 3. \end{cases}$$



Sumber: Fitriani & Salman, 2016

Gambar 24. Pewarnaan Pelangi Graf $\text{Amal}(\mathcal{G}_i, v_{oi})$, $\mathcal{G}_i \equiv C_6$, dan $t = 3$ dengan $rc(\text{Amal}(\mathcal{G}_i, v_{oi})) = 6$

Adapun graf yang memenuhi batas atas Teorema 4 adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf pohon T yang ditunjukkan pada Teorema 6 berikut.

Teorema 6. (Fitriani & Salman, 2016)

Misalkan t , bilangan asli dengan $t \geq 2$ dan $\mathcal{G} \equiv \text{Amal}(\mathcal{G}_i, v_{oi})$

dengan \mathcal{G}_i adalah graf pohon T , $i \in [1, t]$, maka $rc(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^t rc(\mathcal{G}_i)$.

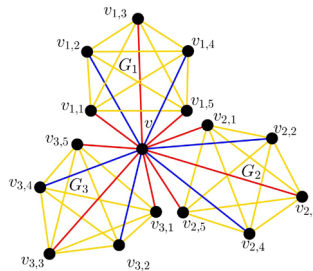
Sebagai contoh sederhana, misalkan graf G_i adalah graf lintasan P_2 dan $t = 4$, maka graf $\text{Amal}(G_i, v_{oi})$ merupakan graf bintang S_4 . Jelas bahwa $rc(G_i) = 1$ sehingga $\sum_{i=1}^4 rc(G_i) = 4 = rc(S_4)$.

Selanjutnya, Fitriani dan Salman menunjukkan bahwa graf hasil operasi amalgamasi dari graf lengkap, roda, dan kipas juga memenuhi batas bawah dan batas atas pada Teorema 5.

Teorema 7. (Fitriani & Salman, 2016)

Misalkan n dan t adalah bilangan asli dengan $n \geq 4$ dan $t \geq 2$. Misalkan $G \cong \text{Amal}(G_i, v_{oi})$ dengan G_i adalah graf lengkap K_n , $i \in [1, t]$, maka

$$rc(G) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } t \geq 3; \\ 2, & \text{untuk } t = 2. \end{cases}$$



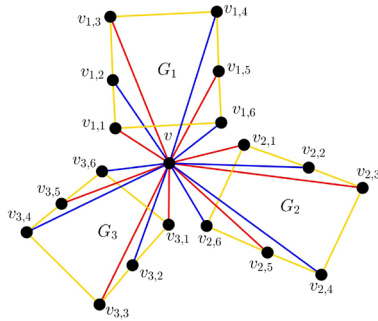
Sumber: Fitriani & Salman, 2016

Gambar 25. Pewarnaan Pelangi Graf $\text{Amal}(G_i, v_{oi})$, $G_i \cong K_6$, dan $t = 3$ dengan $rc(\text{Amal}(G_i, v_{oi})) = 6$

Teorema 8. (Fitriani & Salman, 2016)

Misalkan n dan t adalah bilangan asli dengan $n \geq 4$ dan $t \geq 2$. Misalkan $G \cong \text{Amal}(G_i, v_{oi})$ dengan G_i adalah graf roda W_n dengan $n + 1$ titik, $i \in [1, t]$. Jika v_{oi} untuk $i \in [1, t]$ adalah titik pusat W_n , maka

$$rc(\mathcal{G}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \geq 5 \text{ dan } t \geq 2, \text{ atau } n = 4 \text{ dan } t \geq 3; \\ 2, & \text{untuk } n = 4 \text{ dan } t = 2. \end{cases}$$



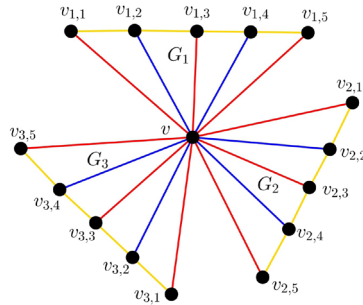
Sumber: Fitriani & Salman, 2016

Gambar 26. Pewarnaan Pelangi Graf Amal(G_i, v_{oi}), $G_i \cong W_6$, dan $t = 3$ dengan $rc(\text{Amal}(G_i, v_{oi})) = 3$

Teorema 9. (Fitriani & Salman, 2016)

Misalkan n dan t adalah bilangan asli dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$. Misalkan $\mathcal{G} \cong \text{Amal}(G_i, v_{oi})$ dengan G_i adalah graf kipas F_n dengan $n + 1$ titik, $i \in [1, t]$. Jika v_{oi} untuk $i \in [1, t]$ adalah titik pusat F_n , maka

$$rc(\mathcal{G}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \geq 4 \text{ dan } t \geq 2, \text{ atau } n = 3 \text{ dan } t \geq 3; \\ 2, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } t = 2. \end{cases}$$



Sumber: Fitriani & Salman, 2016

Gambar 27. Pewarnaan Pelangi Graf Amal(G_i, v_{oi}), $G_i \cong F_5$, dan $t = 3$ dengan $rc(\text{Amal}(G_i, v_{oi})) = 3$

b. Graf Hasil Cartesian Product

Pada tahun 2010, Li dan Sun menyelidiki bilangan terhubung pelangi graf hasil Cartesian product dari graf sebarang. Hasilnya dapat dilihat dalam buku Li dan Sun (2012).

Teorema 10. (Li & Sun, 2010; Li & Sun, 2012)

Misalkan $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$, $k \geq 2$ dengan masing-masing

G_i ($1 \leq i \leq k$) adalah graf terhubung, maka $rc(G) = \sum_{i=1}^k rc(G_i)$.

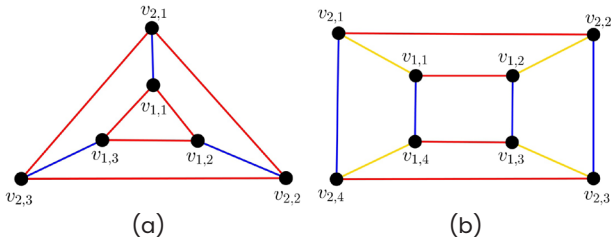
Lebih jauh lagi, jika $\text{diam}(G_i) = rc(G_i)$ untuk setiap G_i , maka kesamaan berlaku. Adapun Cartesian product dari beberapa graf lintasan dan graf lingkaran genap, $P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_t} \square C_{n_{t+1}} \square C_{n_{t+2}} \square \dots \square C_{n_k}$, kesamaan juga berlaku, dimana t atau $k-t$ bernilai 0.

Secara khusus, Hader (2014) menunjukkan bilangan terhubung pelangi graf hasil Cartesian product dari graf lintasan dan lingkaran sebagai berikut.

Teorema 11. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan asli dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf $C_m \square P_n$, adalah $rc(C_m \square P_n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$.

Sebagai gambaran, berikut contoh pewarnaan pelangi $C_3 \square P_2$ dan $C_4 \square P_2$.



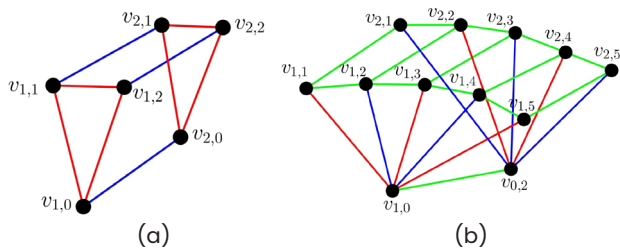
Gambar 28. (a) Pewarnaan Pelangi $C_3 \square P_2$ dengan $rc(C_3 \square P_2) = 2$,
(b) Pewarnaan Pelangi $C_4 \square P_2$ dengan $rc(C_4 \square P_2) = 3$

Hader (2014) juga melakukan penelitian untuk graf hasil *Cartesian product* dari graf kipas dan roda dengan lintasan. Hasil-hasilnya ditunjukkan pada Teorema 12 dan 13.

Teorema 12. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan asli dengan $m, n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf *Cartesian product* dari graf kipas dan lintasan $F_m \square P_n$ adalah

$$rc(F_m \square P_n) = \begin{cases} n, & \text{jika } m = 2; \\ n + 1, & \text{jika } m \geq 3. \end{cases}$$

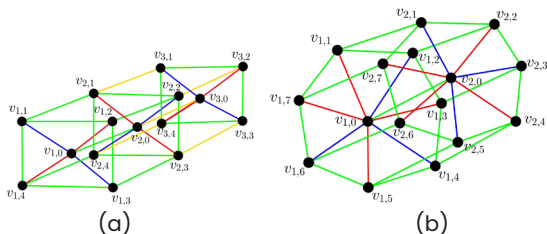


Gambar 29. (a) Pewarnaan Pelangi $F_2 \square P_2$ dengan $rc(F_2 \square P_2) = 2$,
(b) Pewarnaan Pelangi $F_5 \square P_2$ dengan $rc(F_5 \square P_2) = 3$

Teorema 13. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan asli dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf Cartesian product dari graf roda dan lintasan $W_m \square P_n$ adalah

$$rc(W_m \square P_n) = \begin{cases} n, & \text{jika } m = 3; \\ n+1, & \text{jika } m \geq 4. \end{cases}$$



Gambar 30. (a) Pewarnaan Pelangi $W_4 \square P_3$ dengan $rc(W_4 \square P_3) = 4$,
(b) Pewarnaan Pelangi $W_7 \square P_2$ dengan $rc(W_7 \square P_2) = 3$

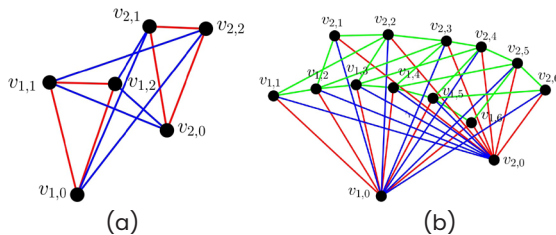
c. Graf Hasil Direct Product

Dalam tesisnya, Hader (2014) menunjukkan bilangan terhubung pelangi hasil *direct product* dari graf kipas dan roda dengan graf lintasan.

Teorema 14. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m, n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf *direct product* dari graf kipas dan lintasan $F_m \times P_n$ adalah

$$rc(F_m \times P_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } m \leq 5 \text{ dan } n = 2; \\ 3, & \text{jika } m > 5 \text{ dan } n = 2; \\ n, & \text{jika } n \geq 3. \end{cases}$$



Gambar 31. (a) Pewarnaan Pelangi $F_2 \times P_2$ dengan $rc(F_2 \times P_2) = 2$,

(b) Pewarnaan Pelangi $F_6 \times P_2$ dengan $rc(F_6 \times P_2) = 3$

Dalam hal ini, karena $F_m \times P_n$ merupakan subgraf merentang dari graf $W_m \times P_n$, bilangan terhubung pelangi $W_m \times P_n$ sama dengan $F_m \times P_n$ sehingga diperoleh Teorema 15 berikut ini.

Teorema 15. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf *direct product* dari graf roda dan lintasan $W_m \times P_n$ adalah

$$rc(W_m \times P_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } m \leq 5 \text{ dan } n = 2; \\ 3, & \text{jika } m > 5 \text{ dan } n = 2; \\ n, & \text{jika } n \geq 3. \end{cases}$$

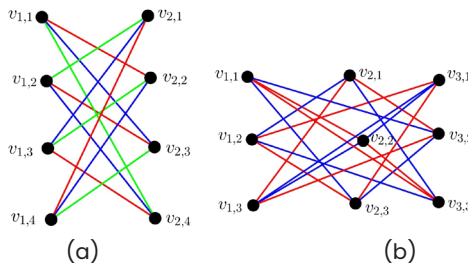
Adapun bilangan terhubung pelangi hasil *direct product* dari dua graf lengkap ditunjukkan Gologranca dkk. (2013) sebagai berikut.

Teorema 16. (Gologranca dkk., 2013)

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $n, m \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi graf *direct product* dari dua graf lengkap adalah

- (i) $rc(K_n \times K_m) = src(K_n \times K_m) = 2$
- (ii) $rc(K_2 \times K_m) = src(K_2 \times K_m) = 3$

Perhatikan bahwa yang dimaksud graf lengkap pada Gambar 32(a) adalah $G_1 = K_4$ dengan $V(G_1) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4}\}$ dan $E(G_1) = \{v_{1,1}v_{1,2}, v_{1,2}v_{1,3}, v_{1,3}v_{1,4}, v_{1,4}v_{1,1}\} \cup \{v_{1,1}v_{1,3}, v_{1,2}v_{1,4}\}$ dan $G_2 = K_4$ dengan $V(G_2) = \{v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{2,4}\}$ dan $E(G_2) = \{v_{2,1}v_{2,2}, v_{2,2}v_{2,3}, v_{2,3}v_{2,4}, v_{2,4}v_{2,1}\} \cup \{v_{2,1}v_{2,3}, v_{2,2}v_{2,4}\}$. Untuk memudahkan visualisasi, maka sisi-sisi graf lengkap tidak diilustrasikan pada Gambar 32.



Sumber: Gologranca dkk., 2013

Gambar 32. (a) Pewarnaan Pelangi $K_2 \times K_4$ dengan $rc(K_2 \times K_4) = 2$,
(b) Pewarnaan Pelangi $K_3 \times K_3$ dengan $rc(K_3 \times K_3) = 3$

d. Graf hasil *strong product*

Pada tahun 2010, Li dan Sun menyelidiki bilangan terhubung pelangi graf hasil *strong product* dari sebarang graf terhubung.

Misalkan $G^* = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k$ ($k \geq 2$) dengan setiap G_i , $i \in [1, k]$ graf terhubung. Oleh karena *Cartesian product* dari sebarang dua graf adalah sebuah subgraf merentang dari *strong product*-nya, G adalah subgraf merentang dari G^* , maka diperoleh hasil berikut.

Lema 2. (Li dan Sun (2010), Li dan Sun (2012))

Misalkan $G^* = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_k$ dengan masing-masing G_i , $i \in [1, k]$ graf terhubung, maka $rc(G^*) \leq \sum_{i=1}^k rc(G_i)$.

Adapun Gologranca dkk. (2013) memperoleh karakteristik bilangan terhubung pelangi graf hasil *strong product* dari sebarang graf terhubung sebagai berikut.

Teorema 17. (Gologranca dkk., 2013)

Misalkan G dan H graf terhubung, maka

- (i) $rc(G \otimes H) \leq \max\{rc(G), rc(H)\}$;
- (ii) $src(G \otimes H) \leq \max\{src(G), src(H)\}$.

Dari Lema 1 dan Teorema 17 tersebut dapat disimpulkan bahwa jika diberikan dua graf terhubung yang sama maka Teorema 17 lebih baik dari Lema 2. Selanjutnya Gologranca dkk. (2013) menunjukkan bilangan terhubung pelangi graf hasil *strong product* dari dua graf bipartit lengkap sebagai berikut.

Teorema 18. (Gologranca dkk., 2013)

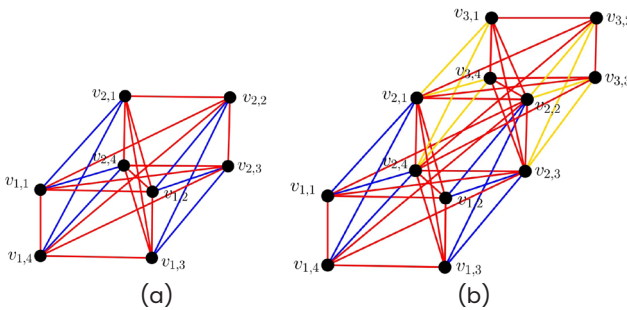
Untuk $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ dengan $n, q > 1$, maka $rc(K_{m,n} \otimes K_{p,q}) \leq 3$.

Pada tahun 2014, Hader menyelidiki bilangan terhubung pelangi hasil *strong product* dari graf lingkaran dan kipas dengan graf lintasan.

Teorema 19. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m \geq 2$, $n \geq 4$ dan genap. Bilangan terhubung pelangi graf strong product dari graf lingkaran dan lintasan $C_n \otimes P_m$ adalah

$$rc(C_n \otimes P_m) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jika } 2 \leq m \leq \frac{n}{2}; \\ m, & \text{jika } m > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

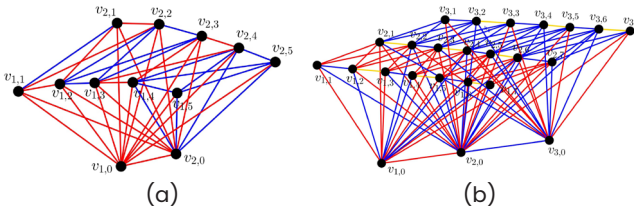


Gambar 33. (a) Pewarnaan Pelangi $C_4 \otimes P_2$ dengan $rc(C_4 \otimes P_2) = 2$, (b) Pewarnaan Pelangi $C_4 \otimes P_3$ dengan $rc(C_4 \otimes P_3) = 3$

Teorema 20. (Hader, 2014)

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi graf strong product dari graf kipas dan lintasan $F_m \otimes P_n$ adalah

$$rc(F_m \otimes P_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } m \leq 12 \text{ dan } n = 2 \text{ atau } m \leq 6 \text{ dan } n = 3; \\ 3, & \text{jika } m \geq 13 \text{ dan } n = 2 \text{ atau } m \geq 7 \text{ dan } n = 3; \\ n-1, & \text{jika } n \geq 4. \end{cases}$$



Gambar 34. (a) Pewarnaan Pelangi $F_5 \otimes P_2$ dengan $rc(F_5 \otimes P_2) = 2$,
(b) Pewarnaan Pelangi $F_7 \otimes P_3$ dengan $rc(F_7 \otimes P_3) = 3$

e. Graf hasil comb product

Fitriani dkk. (2022) menyelidiki bilangan terhubung pelangi hasil *comb product* beberapa graf. Secara umum, Fitriani dkk. memperoleh batas atas bilangan terhubung pelangi dari $G \triangleright_v H$ untuk sebarang graf G dan H sebagai berikut.

Teorema 21. (Fitriani dkk., 2022)

Misalkan G dan H dua graf terhubung dengan masing-masing berorde m dan n serta $v \in V(H)$. Maka

$$\text{diam}(G \triangleright_v H) \leq rc(G \triangleright_v H) \leq rc(G) + m(rc(H))$$

Selanjutnya, Fitriani dkk. menunjukkan bilangan terhubung pelangi hasil *comb product* dari beberapa graf berikut.

Teorema 22. (Fitriani dkk., 2022)

Misalkan G graf terhubung berorde $m \geq 2$ dengan $rc(G) = \text{diam}(G)$, C_n graf lingkaran berorde $n \geq 3$, dan $v \in V(C_n)$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$ genap, atau $m = 2$ dan $n \geq 3$ ganjil, diperoleh $rc(G \triangleright_v C_n) = \text{diam}(G \triangleright_v C_n)$.

Teorema 23. (Fitriani dkk., 2022)

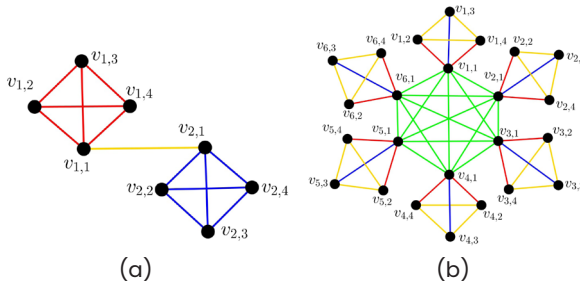
Misalkan G dan H graf pohon sebarang dengan masing-masing berorde m dan n serta $v \in V(H)$. Maka $rc(G \triangleright_v H) = rc(G) + m(rc(H))$.

Jika G graf lengkap dan H adalah graf lengkap, roda, atau kipas, maka diperoleh bilangan terhubung pelangi hasil *comb product* $G \triangleright_v H$ sebagai berikut.

Teorema 24. (Fitriani dkk., 2022)

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, misalkan K_m dan K_n graf lengkap dengan masing-masing berorde m dan n serta $v \in V(K_n)$. Bilangan terhubung pelangi dari *comb product* graf K_m dan K_n adalah

$$rc(K_m \triangleright_v K_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \in \{2, 3\}; \\ 4, & \text{untuk } m \geq 4. \end{cases}$$



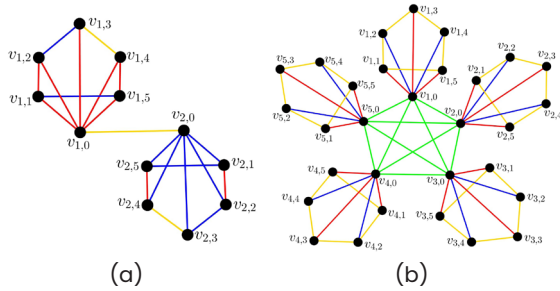
Gambar 35. (a) Pewarnaan Pelangi $K_2 \triangleright_v K_4$ dengan

$$rc(K_2 \triangleright_v K_4) = 3, \text{ (b) Pewarnaan Pelangi } K_6 \triangleright_v K_4 \text{ dengan } rc(K_6 \triangleright_v K_4) = 4$$

Teorema 25. (Fitriani dkk., 2022)

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 4$, misalkan K_m graf lengkap berorde m , W_n graf roda berorde $n + 1$, dan v titik pusat W_n . Bilangan terhubung pelangi dari *comb product* graf K_m dan W_n adalah

$$rc(K_m \triangleright_v W_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \in \{2, 3\} \text{ dan } n \in \{4, 5, 6\}; \\ 4, & \text{untuk } m \geq 4 \text{ dan } n \in \{4, 5, 6\}, \\ & \text{atau } m \geq 2 \text{ dan } n \geq 7 \end{cases}$$

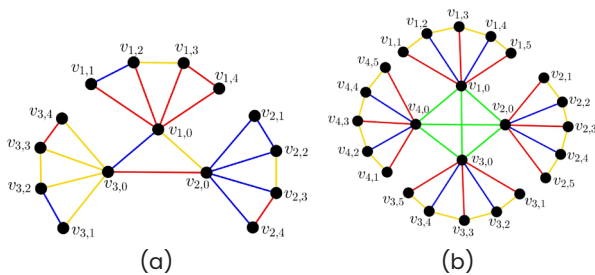


Gambar 36. (a) Pewarnaan Pelangi $K_2 \triangleright_V W_5$ dengan $rc(K_2 \triangleright_V W_5) = 3$, (b) Pewarnaan Pelangi $K_5 \triangleright_V W_5$ dengan $rc(K_5 \triangleright_V W_5) = 4$

Teorema 26. (Fitriani dkk., 2022)

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, misalkan K_m graf lengkap berorde m , F_n graf kipas berorde $n + 1$, dan v titik pusat F_n . Bilangan terhubung pelangi dari comb product graf K_m dan F_n adalah

$$rc(K_m \triangleright_V F_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \in \{2,3\} \text{ dan } n \in \{3,4\}; \\ 4, & \text{untuk } m \geq 4 \text{ dan } n \in \{3,4\}, \text{ atau } m \geq 2 \text{ dan } n \geq 5. \end{cases}$$



Gambar 37. (a) Pewarnaan Pelangi $K_3 \triangleright_V F_4$ dengan $rc(K_3 \triangleright_V F_4) = 3$, (b) Pewarnaan Pelangi $K_4 \triangleright_V F_5$ dengan $rc(K_4 \triangleright_V F_5) = 4$

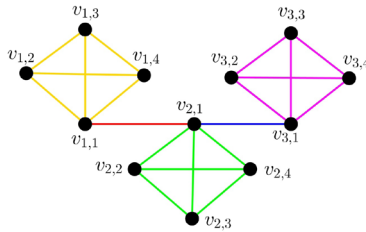
Adapun Dafik dkk. (2018) memperoleh hasil *comb product* dari kombinasi graf lintasan dengan graf lengkap, lingkaran, dan kipas sebagai berikut.

Teorema 27. (Dafik dkk., 2018)

Misalkan P_n graf lintasan berorde n dan H graf terhubung sebarang. Untuk setiap *comb product* P_n dan H berlaku $\text{diam}(P_n \triangleright_v H) \leq \text{rc}(P_n \triangleright_v H) \leq n \cdot \text{rc}(H) + n - 1$ dan $\text{diam}(P_n \triangleright_v H) \leq \text{src}(P_n \triangleright_v H) \leq n \cdot \text{src}(H) + n - 1$.

Teorema 28. (Dafik dkk., 2018)

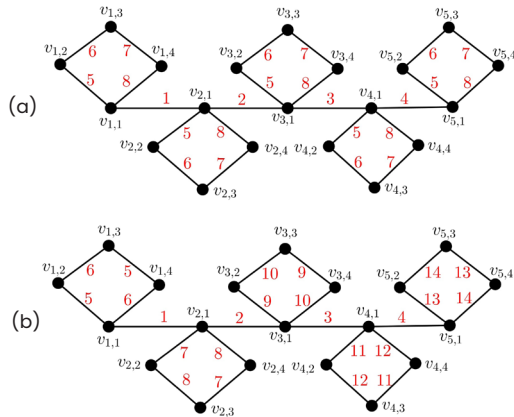
Misalkan P_n graf lintasan berorde n dan K_m graf lengkap berorde m , $m \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi dari *comb product* graf P_n dan K_m adalah $\text{rc}(P_n \triangleright_v K_m) = 2n - 1$.



Gambar 38. Pewarnaan Pelangi $P_3 \triangleright_v K_4$ dengan $\text{rc}(P_3 \triangleright_v K_4) = 5$

Teorema 29. (Dafik dkk., 2018; Fitriani dkk., 2022)

Misalkan P_n graf lintasan berorde n , $n \geq 2$ dan C_m graf lingkaran berorde m , $m \geq 3$ Bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung pelangi kuat dari *comb product* graf P_n dan C_m adalah $\text{rc}(P_n \triangleright_v C_m) = m + n - 1$ dan $\text{src}(P_n \triangleright_v C_m) \leq n \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + n - 1$.



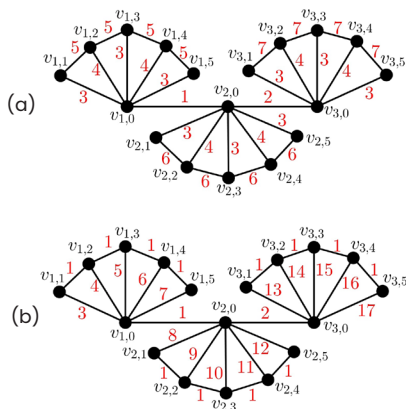
Sumber: Dafik dkk., 2018

Gambar 39. (a) Pewarnaan Pelangi $P_5 \triangleright_V C_4$ dengan

$$rc(P_5 \triangleright_V C_4) = 8, \text{ (b) Terhubung Pelangi kuat } P_5 \triangleright_V C_4 \text{ dengan } src(P_5 \triangleright_V C_4) = 14$$

Teorema 30. (Dafik dkk., 2018)

Misalkan P_n graf lintasan berorde n , $n \geq 2$ dan F_m graf kipas berorde m , $m \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung pelangi kuat dari comb product graf P_n dan F_m adalah $rc(P_n \triangleright_V F_m) \leq m + n - 1$ dan $src(P_n \triangleright_V F_m) \leq mn + n - 1$.



Gambar 40. (a) Pewarnaan Pelangi $P_3 \triangleright_V F_5$ dengan

$rc(P_3 \triangleright_V F_5) \leq 7$, (b) Terhubung Pelangi kuat $P_3 \triangleright_V F_5$ dengan
 $src(P_3 \triangleright_V F_5) = 17$

f. Graf Hasil Operasi Corona

Pada tahun 2013, Estetikasari dan Sy menyelidiki graf hasil operasi corona, yaitu kombinasi graf lengkap K_1 dengan graf lengkap dan lintasan.

Teorema 31. (Estetikasari dan Sy, 2013)

Misalkan G dan H dua graf terhubung, maka

$$rc(G \circ H) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong K_m; \\ 2, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m \text{ dengan } 3 \leq m \leq 6; \\ 3, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m, m \geq 7 \text{ atau} \\ & G \cong P_2 \text{ dan } H \cong K_m, m \geq 1. \end{cases}$$

Estetikasari dan Sy (2013) juga menyelidiki bilangan terhubung pelangi graf hasil operasi corona, yaitu kombinasi graf lengkap, pohon, dan roda dengan graf lengkap K_r .

Teorema 32. (Estetikasari & Sy, 2013)

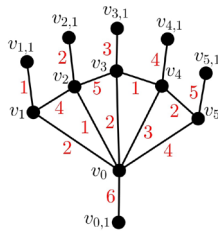
Bilangan terhubung pelangi dari graf corona $G \circ H$ adalah

$$rc(G \circ H) = \begin{cases} m+1, & \text{untuk } G \cong K_m \text{ dan } H = K_1; \\ 2m-1, & \text{untuk } G \cong T_m \text{ dan } H \cong K_1; \\ m+3, & \text{untuk } G \cong W_m \text{ dan } H \cong K_1; \\ rc(G)+3, & \text{untuk } |G|=m \geq 3 \text{ dan } |H|=n \geq 2. \end{cases}$$

Hader (2014) juga menyelidiki graf hasil operasi corona, yaitu kombinasi graf kipas dan roda dengan graf lintasan. Hasilnya ditunjukkan pada Teorema 33 dan 34.

Teorema 33. (Hader, 2014)

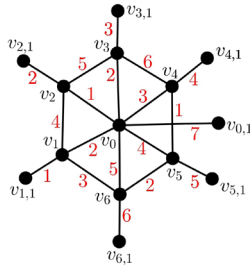
Misalkan m suatu bilangan bulat dengan $m \geq 2$. Bilangan terhubung pelangi dari graf $F_m \circ P_1$ adalah $rc(F_m \circ P_1) = m+1$



Gambar 41. Pewarnaan Pelangi $F_5 \circ P_1$ dengan $rc(F_5 \circ P_1) = 6$

Teorema 34. (Hader, 2014)

Misalkan m suatu bilangan bulat dengan $m \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi dari graf $W_m \circ P_1$ adalah $rc(W_m \circ P_1) = m+1$.

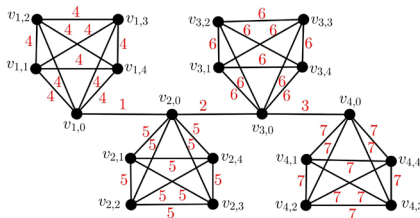


Gambar 42. Pewarnaan Pelangi $W_6 \circ P_1$ dengan $rc(W_6 \circ P_1) = 7$

Pada tahun 2012, Ramya dkk. menyelidiki graf hasil operasi *corona*, yaitu kombinasi graf lintasan dan graf lengkap $P_n \circ K_2$. Hasil tersebut diperumum oleh Jagannatharao dan Murali (2019) untuk graf hasil operasi *corona* graf lintasan dan graf lengkap ($P_n \circ K_n$).

Teorema 35. (Jagannatharao & Murali, 2019)

Misalkan $G = P_n \circ K_n$, maka untuk $n \geq 2$, diperoleh $rc(G) = src(G) = 2n - 1$

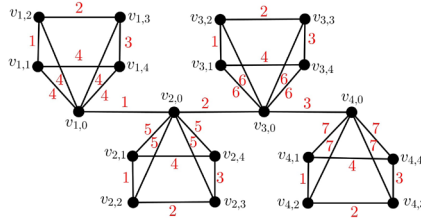


Gambar 43. Pewarnaan Pelangi $P_4 \circ K_4$ dengan $rc(P_4 \circ K_4) = 7$

Ramya dkk. (2012) juga menyelidiki graf hasil operasi *corona*, yaitu kombinasi graf lintasan dan graf lingkaran $P_n \circ C_4$. Hasil tersebut kemudian diperumum dan diperbaiki oleh Jagannatharao dan Murali (2019) menjadi Teorema 36.

Teorema 36. (Jagannatharao & Murali, 2019)

Misalkan $G = P_n \circ C_n$, maka untuk $n \geq 3$, diperoleh $rc(G) = src(G) = 2n - 1$.



Gambar 44. Pewarnaan Pelangi $P_4 \circ C_4$ dengan $rc(P_4 \circ C_4) = 7$

Pada tahun 2019, Maulani dkk. menyelidiki graf hasil operasi corona, yaitu kombinasi graf lingkaran dan graf lintasan. Dalam hal ini, graf corona $C_m \circ P_n$ adalah graf dengan C_m sebagai pusat dan setiap titik v_i di C_m terhubung dengan setiap titik di P_n .

Teorema 37. (Maulani dkk., 2019)

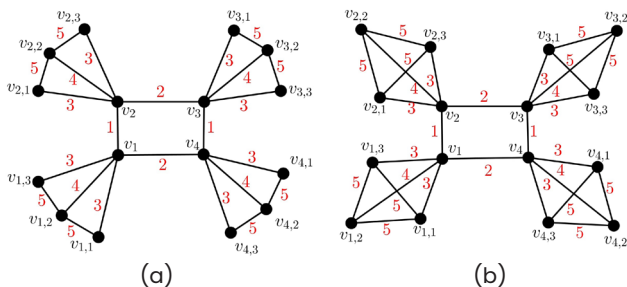
Bilangan terhubung pelangi graf corona $C_m \circ P_n$ adalah

$$rc(C_m \circ P_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 3, n \geq 2; \\ \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 3, & \text{untuk } m > 3, n \geq 2. \end{cases}$$

Teorema 38. (Maulani dkk., 2019)

Bilangan terhubung pelangi kuat graf corona $C_m \circ P_n$ adalah

$$src(C_m \circ P_n) = \begin{cases} 3 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{untuk } m = 3, n \geq 2; \\ 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, & \text{untuk } m > 3, n \geq 2. \end{cases}$$



Gambar 45. (a) Pewarnaan Pelangi Graf $C_4 \circ P_3$ dengan

$$rc(C_4 \circ P_3) = 5, \text{ dan (b) Pewarnaan Pelangi Graf } C_4 \circ C_3 \text{ dengan}$$

$$rc(C_4 \circ C_3) = 8$$

Selain itu, Maulani dkk. (2019) juga memperoleh hasil operasi *corona* $C_m \circ C_n$. Berdasarkan hasil yang diperoleh, Maulani dkk. menyimpulkan bahwa $C_m \circ P_n$ dan $C_m \circ C_n$ mempunyai karakteristik yang sama karena terdapat satu titik pusat v_p pada graf roda dan graf kipas. Karenanya, kedua graf tersebut mempunyai tipe pewarnaan pelangi yang sama.

KESIMPULAN

Konsep terhubung pelangi pada graf dapat dimanfaatkan untuk menentukan banyaknya sandi minimal yang diperlukan untuk mengirimkan data terenkripsi. Karena graf merupakan representasi dari suatu jaringan komunikasi digital, artikel ini menunjukkan hasil-hasil penelitian pada beberapa kelas graf umum dan hasil operasi graf. Hal ini dimaksudkan agar diperoleh gambaran tentang berbagai macam bentuk jaringan komunikasi yang digunakan dalam sistem transfer data. Dengan demikian, dapat dipilih bentuk graf yang sesuai dengan masalah yang dihadapi sehingga konsep terhubung pelangi dapat dimanfaatkan untuk meminimalisir masalah keamanan pada sistem transfer data.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. 2021. Data transfer method (Framed Message Transfer). *HULFT8 IBMi Administration Manual, Edisi 7*. https://www.hulft.com/help/en-us/HULFT-V8/IBMI-ADM/Content/HULFT_ADM_IBMI/System/datatransfer_method.htm. Diakses pada 25 Juni 2023.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory. Graduate Texts in Mathematics*. Berlin: Springer.
- Bergen, P. L. 2001. September 11 attacks. <https://www.britannica.com/event/September-11-attacks>. Diakses pada 25 Juni 2023.
- Carlson, K. (2006). Generalized books and C_m -snakes are prime graphs. *Ars Combinatoria*, 80, 215–221.
- Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., & Yuster, R. (2011). Hardness and algorithms for rainbow connection. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21, 330–347.
- Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., & Zhang, P. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133, 85–98.
- Chartrand, G. & Zhang, P. (2020). *Chromatic graph theory, Second edition*. New York: Taylor and Francis Group.
- Dafik, Agustin, I. H., Wardanai, W. A. R., Kurniawati, E. Y., & Alfarisi, R. (2018). On the rainbow and strong rainbow coloring of comb product graphs. *Acta Mechanica Slovaca*, 22(3), 20–26.
- Diestel, R. (2017). *Graph theory, Fifth edition*. Springer.
- Ericksen, A. (2007). A matter of security. *Graduating Engineer and Computer Careers*, 24–28.

- Estetikasari, D., & Sy, S. (2013). On the rainbow connection number for some corona graphs. *Applied Mathematical Sciences*, 7, 4975–4980.
- Fitriani, D., Salman, A. N. M., & Awanis, Z. Y. (2022). Rainbow connection number of comb product of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 10(2), 461–473.
- Fitriani, D., & Salman, A. N. M. (2016). Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 13, 90–99.
- Gologranca, T., Mekius, G., & Peterin, I. (2014). Rainbow connection and graph products. *Graphs and Combinatorics*, 30(3), 591–607. DOI: 10.1007/s00373-013-1295-y.
- Hader, A. E. (2014). *Bilangan terhubung pelangi pada graf lingkaran, pertemanan, kipas, dan roda dengan beberapa operasinya. Tesis Magister* (unpublished), Institut Teknologi Bandung. <https://digilib.itb.ac.id/index.php/gdl/view/18019/>.
- Imrich, W., & Klavzar, S. (2000). *Product graphs-structure and recognition*. New York: Wiley.
- Jagannatharao, K. S., & Murali, R. (2019). Rainbow coloring in some corona product graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 7(1), 127–131.
- Kurniawati, E. Y., Agustin, I. H., Dafik, & Marsidi. (2021). On the local antimagic labeling of graphs amalgamation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1836, 012021.
- Li, X., & Sun, Y. (2012). *Rainbow connection of graphs. Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer.

- Maulani, A., Pradini, S. F. Y. O., Setyorini, D., & Sugeng, K. A. (2019). Rainbow connection number of $C_m \circ C_n$ and $C_m \circ C_n$. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(2), 95-108.
- Ramya, N., Rangarajan, K., & Sattanathan, R. (2012). On rainbow coloring of some classes of graphs. *International Journal of Computer Applications*, 46(18).
- Saputro, S. W., Mardiana, N., & Purwasih, I. A. (2017). The metric dimension of comb product graphs. *Matematicki Vesnik*, 69(4), 248-258.
- Schiermeyer, I. (2011). Bounds for the rainbow connection number of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31(2), 387-395.
- Sy, S., Medika, G. H., & Yulianti, L. (2013). The rainbow connection number of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*, 7(64), 3155-3159.
- Voloshin, V. (2009). *Introduction to graph and hypergraph theory*. New York: Nova Science Publisher.
- Wardani, A. R., Dafik, Agustin, I. H., Marsidi, & Putri, C. D. (2018). On the LIDS of corona product of graphs. *AIP Conference Proceedings 2014*, 020087. DOI:10.1063/1.5054491.