LAPORAN AKHIR PENELITIAN

Skema: Penelitian Dasar

Judul:

Karakterisasi Operator Diferensial Fraksional dan Penerapannya di Bidang Ekonomi

Ketua	:	Elin Herlinawati, M.Si.
		NIP. 199002012018032001 / NIDN. 0001029004
Anggota	:	Wahyu Hidayat, M.Si.
		NIP. 199006112024061003 / NIDN. 0011069008
		Heri Kurniawan, S.Si., M.Si.
		NIP. 197805122005011001 / NIDN. 0012057801
		Ihsan Rajamuda Nasution
		NIM. 042066097

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT

UNIVERSITAS TERBUKA

2024

LEMBAR PENGESAHAN
LAPORAN PENELITIAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT
UNIVERSITAS TERBUKA

1	a	Judul Penelitian	:	Karakterisasi Operator Diferensial Fraksional dan Penerapannya di Bidang Ekonomi
	b	Skema Penelitian	:	Dasar
	c	Area Penelitian (Diisi Khusus untuk Penelitian Pengembangan Instansi)	:	-
	d	Tingkat Kesiapanterapan Teknologi (TKT)	:	3
2	Ketua Peneliti			
	a	Nama Lengkap & Gelar	:	Elin Herlinawati, M.Si.
	b	NIP/NIDN	:	199002012018032001 / 0001029004
	c	Golongan Kepangkatan	:	III/c
	d	Jabatan Akademik	:	Lekor
	e	Fakultas	:	Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
	f	Unit Kerja	:	FST
	g	Program Studi	:	Matematika
3	Anggota Peneliti 1		:	Wahyu Hidayat, M.Si./ NIP. 199006112024061003
	Anggota Peneliti 2		:	Heri Kurniawan, S.Si., M.Si. / NIP. 197805122005011001
	Anggota Peneliti 3		:	Ihsan Rajamuda Nasution / NIM. 042066097
4	a	Tahun Penelitian	:	2024
	b	Lama Penelitian	:	1 tahun
5	Biaya Penelitian			
	a	Diusulkan	:	Rp. 49.962.000,-
	b	Disetujui	:	Rp. 47.451.000,-
6	Sumber Biaya		:	UT
7	Pemanfaatan Hasil Penelitian			
	a	Seminar	:	~~Nasional/Regional/~~Internasional***)
	b	Jurnal	:	~~UT/~~Nasional/~~Internasional~~***)
8	Luaran Penelitian		:	Artikel Jurnal dan Seminar Internasional

Mengetahui *)
Dekan FST UT,

Dr. Subekti Nurmawati, M.Si.
NIP. 196705181991032001

Ketua Peneliti,

Elin Herlinawati, M.Si.
NIP. 199002012018032001

Menyetujui,

Ketua LPPM UT,

Prof. Dra. Dewi Artati Padmo Putri, M.A., Ph.D.
NIP. 196107241987102003

Kepala Pusat Penelitian Keilmuan LPPM UT,

Dr. Mery Noviyanti, S.Si., M.Pd.
NIP. 198111242005012003

DAFTAR ISI

RINGKASAN

Persamaan diferensial (orde bilangan bulat), memegang peranan penting dalam rekayasa fisika, ilmu ekonomi, dan berbagai disiplin ilmu lainnya. Namun, untuk permasalahan yang membutuhkan turunan berode bilangan rasional ataupun yang membutuhkan model Matematika untuk peristiwa dengan efek momori, persamaan diferensial berode bilangan bulat tidak bisa menyelesaikan permasalahan tersebut. Oleh karena itu, orde persamaan diferensial diperluas menjadi orde fraktal/bilangan rasional. Bentuk umum persamaan diferensial fraksional memuat operator diferensial fraksional. Beberapa definisi operator diferensial fraksional muncul dengan berbagai versi antara lain operator diferensial fraksional Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Faktanya, definisi derivatif Caputo dan Grunwald-Letnikov merupakan modifikasi dari definisi derivatif Riemann-Liouville. Untuk itu, perlu dikaji lebih mendalam terkait karakterisasi dari operator diferensial fraksional ini agar penggunaannya sesuai dengan kebutuhan dalam kehidupan nyata. Selanjutnya, dalam penerapannya, operator diferensial fraksional dapat digunakan untuk memodelkan berbagai peristiwa fisis yang memiliki efek memori seperti masalah viskoelastisitas, mekanika fluida, masalah Strum-Liouville fraksional, dan model pertumbuhan ekonomi. Pada penelitian ini, penerapan operator diferensial fraksional di fokuskan pada bidang ekonomi. Untuk itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan karakterisasi operator diferensial fraksional dan menyelidiki serta menganalisis masalah-masalah tertentu di bidang ekonomi melalui operator diferensial fraksional

Hasil penelitian ini menargetkan hasil akhir dengan tingkat kesiapterapan teknologi yang berada pada level tiga (TKT 3) yaitu berupa konsep dan karakteristik penting yang telah diidentifikasi dan diprediksi karakter/sifat dan kapasitas unjuk kerja dari suatu operator diferensial fraksional. Adapun target luaran yang direncanakan adalah hasil penelitian: (1) dipublikasikan dalam jurnal terakreditasi minimal sinta 3; (2) dideseminasikan dalam seminar nasional/internasional Matematika/Terapannya.

Kata kunci: fraksional, persamaan diferensial fraksional, operator diferensial fraksional, ekonomi.

BAB I
PENDAHULUAN

Persamaan diferensial (orde bilangan bulat), memegang peranan penting dalam rekayasa fisika, ilmu ekonomi, dan berbagai disiplin ilmu lainnya. Namun, untuk permasalahan yang membutuhkan turunan berode bilangan rasional ataupun yang membutuhkan model Matematika untuk peristiwa dengan efek momori, persamaan diferensial berode bilangan bulat tidak bisa menyelesaikan permasalahan tersebut. Oleh karena itu, orde persamaan diferensial diperluas menjadi orde fraktal/bilangan rasional. Bentuk umum persamaan diferensial fraksional memuat operator diferensial fraksional. Beberapa definisi operator diferensial fraksional muncul dengan berbagai versi antara lain operator diferensial fraksional Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Dari beberapa pendekatan untuk mendefinisikan operator diferensial fraksional, perlu dilakukan karakterisasi operator diferensial fraksional sesuai dengan jenis dan kebutuhannya.

Selanjutnya, dalam penerapannya, operator diferensial fraksional dapat digunakan untuk memodelkan berbagai peristiwa fisis yang memiliki efek memori seperti masalah viskoelastisitas, mekanika fluida dan masalah Strum-Liouville fraksional. Selain itu, persamaan diferensial fraksional juga dapat diaplikasikan pada bidang biologi, lingkungan, ekonomi dan keuangan (David *et al*., 2011; Giusti & Colombaro, 2018; Katsikadelis, 2015; Sun *et al.*, 2018). Dalam bidang ekonomi, Tarasova dan Tarasov menerapakan diferensial fraksional untuk menggeneralisasi gagasan dalam menyelesaikan masalah dinamika ekonomi dengan melibatkan efek memori. Generalisasi model ekonomi menunjukkan bahwa pertumbuhan dan penurunan produk bergantung pada perubahan harga, sedangkan perubahan harga bergantung pada efek memori. Selain itu, pengaruh memori dapat menyebabkan perubahan yang signifikan pada fenomena dan proses ekonomi. Namun belum banyak dikaji contoh aplikasi metode penentuan elastisitas harga permintaan dengan menggunakan turunan fraksional.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan karakterisasi operator diferensial fraksional dan menyelidiki serta menganalisis masalah-masalah tertentu di bidang ekonomi melalui operator diferensial fraksional.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

A. Operator

Dalam Matematika, secara umum, operator merupakan suatu pemetaan atau fungsi pada elemen suatu ruang untuk menghasilkan elemen di ruang lain. Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas lapangan K. Pemetaan $A: U \to V$ dikatakan linear apabila

$$A(ax + by) = aAx + bAy$$

untuk semua $x, y \in U$ dan $a, b \in K$. Dalam hal ini, operator linear mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di ruang vektor. Untuk kasus ruang vektor berdimensi hingga, operator linear dapat direpresentasikan oleh matriks. Adapun konsep yang berhubungan langsung dengan operator antar ruang vektor berdimensi hingga adalah konsep rank, determinan, operator invers, dan ruang eigen.

Selanjutnya, misalkan U dan V adalah dua ruang vektor atas lapangan yang sama, dan keduanya dilengkapi dengan norm. Maka operator linear dari U dan V dikatakan terbatas jika terdapat c>0 sedemikian sehingga

$$\|Ax\|_V \leq c\|x\|_U$$

untuk setiap $x \in U$. Sebagai tambahan, domain dari suatu operator umumnya merupakan sekumpulan fungsi atau objek terstruktur lainnya. Salah satu contoh operator adalah operator diferensial. Misalkan D menyatakan operator diferensial, beberapa sifat operator diferensial yang berlaku antara lain:

(i). Linear, yakni $D(f + g) = (Df) + (Dg)$ dan $D(af) = a(Df)$ dengan f dan g adalah fungsi dan a konstanta.

(ii). Komposisi operator diferensial memenuhi $(D_1 \circ D_2)(f) = D_1(D_2(f))$

B. Diferensial Operator Fraksional

Turunan fraksional diperkenalkan Lacroix pada tahun 1819. Misalkan $y = x^m$ dengan m bilangan bulat positif, Lacroix menemukan turunan ke-n sebagai

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n$$

dan dengan menggunakan simbol Lengendre (fungsi Gamma) Γ, untuk faktorial umum, Lacroix mendefinisikan turunan fraksional sebagai berikut

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \tag{2.1}$$

Fungsi Gamma Γ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt, z \in \mathbb{R}^+$$

Fungsi Gamma memiliki sifat dasar

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) = z\Gamma(\mathrm{z}), \qquad z \in \mathbb{R}^+$$

Jika $z \in \mathbb{Z}^+$, maka $\Gamma(\mathrm{z}) = (\mathrm{z}-1)!$. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi Gamma merupakan perluasan dari fungsi faktorial. Derivatif fraksional yang didefinisikan Lacroix masih dikembangkan lagi oleh para matematikawan seperti Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann, Liouville, dan Caputo.

Selanjutnya, operator diferensial fraksional didefinisikan sebagai

$$D_{x_0}^{-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} y(t) \, dt \tag{2.2}$$

dengan α bilangan real tak negatif. Terdapat beberapa pendekatan untuk menotasikan derivatif berorde fraksional, diantaranya adalah Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Pendekatan yang paling sering digunakan adalah derivatif fraksional Riemann-Liouville yang berkaitan dengan integral fraksional Riemann-Liouville.

Definisi 1.1. Misalkan α bilangan real, integral fraksional orde α dari fungsi $f(x)$ adalah

$$\begin{aligned} J^{\alpha} f(x) &= D^{-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \; f(t) \; dt, \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan $\alpha > 0$. Sedangkan untuk $\alpha \geq 0$, dan $\beta \geq 0$, integral fraksional yang dikemukakan Riemann-Liouville memiliki sifat sebagai berikut:

1. $J^{\alpha} J^{\beta} f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$,
2. $J^{\alpha} J^{\beta} f(x) = J^{\beta} J^{\alpha} f(x)$.

Definisi 1.2. Derivatif fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} D_{x_0}^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left[J^{n-\alpha} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) \, dt \right], \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan α orde sebarang, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in Z^+$, x_0 batas bawah, $x_0 < x$, $x > 0$, dan D^{α} operator derivatif fraksional berorde α.

Sifat turunan fraksional

1. $D^{\alpha+\beta} f(x) = D^{\alpha} D^{\beta} f(x)$
2. $D^{n} \; [af(t)] = aD^{n}[f(t)]$
3. $D^{\alpha} (af(x) + bg(x)) = aD^{\alpha} f(x) + bD^{\alpha} g(x)$

Pendekatan derivatif tersebut memiliki kekurangan untuk memodelkan peristiwa dalam dunia nyata karena membutuhkan definisi syarat batas dan nilai awal berorde fraksional, sementara syarat batas dan nilai awal berorde fraksional belum memiliki intrepretasi yang jelas dalam kehidupan nyata, sehingga diperkenalkan derivatif fraksional Caputo yang merupakan modifikasi dari Riemann-Liouville.

Definisi 1.3. Misalkan α bilangan real, dan $n-1 < \alpha \leq n$, di mana n adalah bilangan asli, turunan fraksional orde α dari $f(x)$ terhadap x diberikan oleh

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= J^{n-\alpha} D^{n} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \; f^{(n)}(t) \; dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Selanjutnya, diperkenalkan juga derivatif fraksional Grunwald-Letnikov sebagai berikut.

Definisi 1.4. Misalkan α bilangan real positif. Turunan fraksional orde ke-h Grunwald-Letnikov dari fungsi f terhadap x didefinisikan sebagai

$$ {}_{a}^{GL}D_{x}^{\alpha} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \alpha h = x - a}} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) $$

dengan

$$ \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k!\,\Gamma(\alpha - k + 1)} $$

$$ {}_{a}^{GL}D_{x}^{\alpha} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \alpha h = x - a}} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k!\,\Gamma(\alpha - k + 1)} \right) f(x - kh) $$

dan fungsi Gama didefinisikan sebagai

$$ \Gamma(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha!\ \alpha^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+\alpha)}, x > 0 $$

.

Selanjutnya, menurut Podlubny (1999), permasalahan dalam bidang sains seperti viskoelastisitas, mekanika fluida, kimia, teori kontrol, dan psikologi telah berhasil dimodelkan dengan baik menggunakan derivatif berorde fraksional. Hal ini karena suatu peristiwa fisis tidak hanya bergantung pada waktu tertentu saja melainkan bergantung pula pada waktu-waktu sebelumnya. Persamaan diferensial fraksional yang memiliki efek memori dapat digunakan untuk memodelkan peristiwa tersebut. Selain itu, persamaan diferensial fraksional juga dapat diaplikasikan pada bidang biologi, lingkungan, ekonomi dan keuangan (David *et al*., 2011; Giusti & Colombaro, 2018; Katsikadelis, 2015; Sun *et al*., 2018).

C. Penerapan Diferensial Fraksional dalam Ekonomi

Dalam bidang Ekonomi, penerapan diferensial fraksional dapat dilihat dari fenomena ekonomi yang melibatkan efek memori. Tarasova dan Tarasov (2019) menerapakan diferensial fraksional untuk menggeneralisasi gagasan dalam menyelesaikan masalah dinamika ekonomi dengan melibatkan efek memori, dan menjelaskan penentuan elastisitas harga perminataan suatu produk menggunakan turunan fraksional. Tarasova dan Tarasov juga menggunakan pendekatan waktu diskrit untuk memodelkan percepatan pertumbuhan ekonomi dengan menggunakan turunan fraksional Grunwald-Letnikov, sedangkan solusi eksak diperoleh dengan menggunakan transformasi Fourier. Pemodelan pertumbuhan ekonomi terkait produk domestik bruto juga dapat menggunakan model turunan dan integral berorde fraksional (Tejado *et al.*, 2019; Ming *et al.*, 2019; McTier (82)). Selain itu, Acay *et al*. (2020) menyelidiki beberapa masalah ekonomi dengan bantuan operator fraksional non-lokal yang meliputi Caputo, Caputo-Fabrizo, Atangana-Baleanu-Caputo (ABC), dan pengembangan kernel Mittag-Leffler.

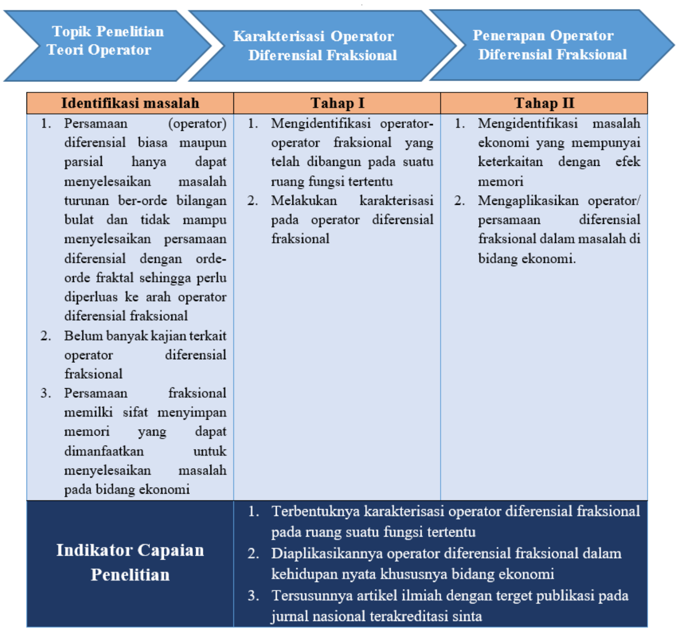
BAB III
METODE PENELITIAN

A. Metode Penelitian

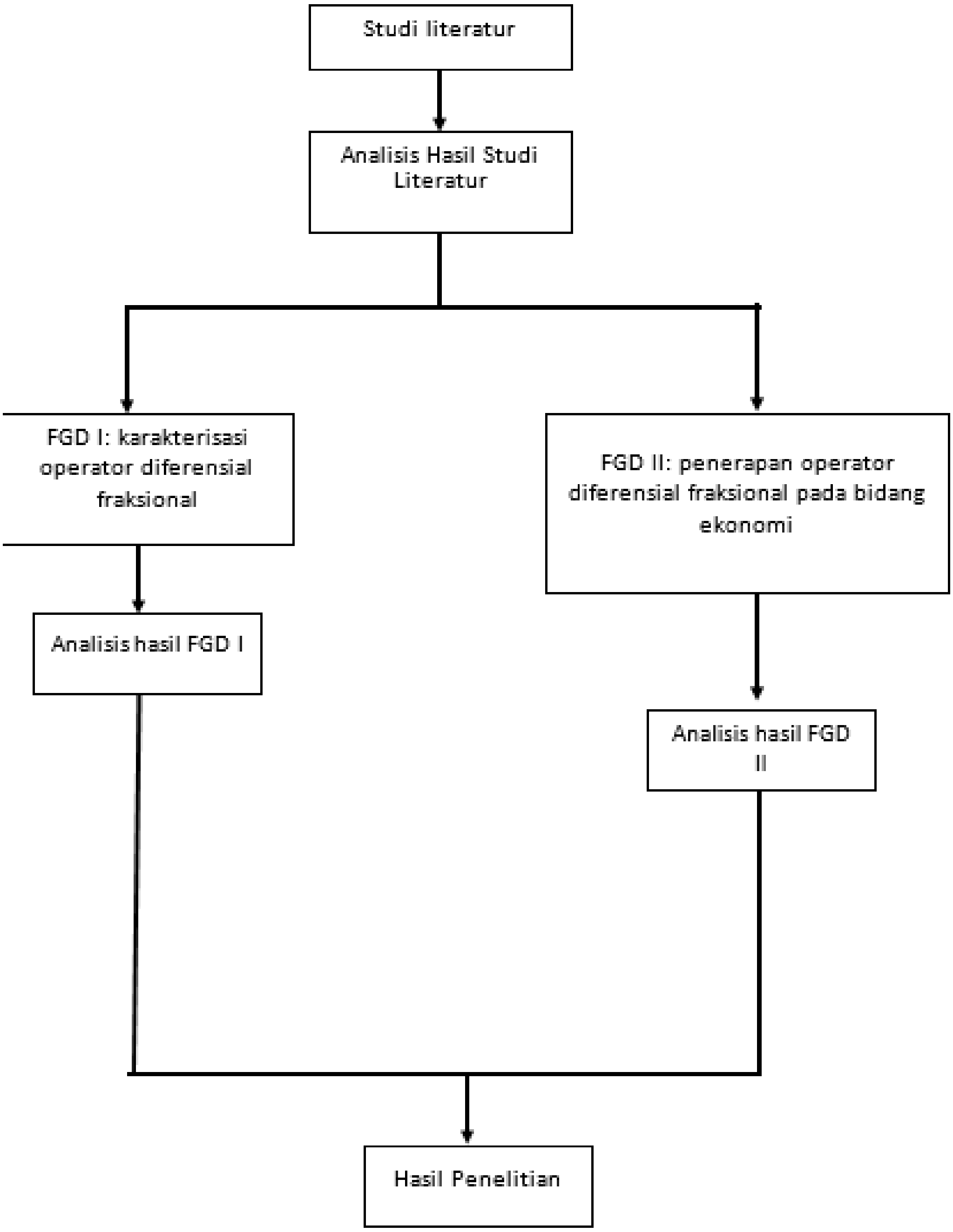
Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan analisis konsep. Sumber data dari penelitian ini adalah dokumen-dokumen. Dalam hal ini dokumen yang diperlukan adalah buku-buku teks, artikel jurnal dari sumber terpercaya dan bereputasi, dan dokumen lainnya yang terkait topik penelitian.

Penelitian ini dimulai dengan **studi literatur** yaitu dengan mengumpulkan bahan-bahan yang mendukung topik penelitian dari berbagai sumber seperti internet, perpustakaan perguruan tinggi baik perpustakaan Universitas Terbuka, perpustakaan Nasional (perpusnas), dan perpustakaan perguruan tinggi lainnya yang memiliki kajian penelitiaan serupa seperti Institut Teknologi Bandung (ITB), Universitas Padjadjaran (UNPAD), Universitas Gajah Mada (UGM), Institut Teknologi Sepuluh November (ITS), dan Universitas Airlangga (UNAIR). Hasil studi literatur dianalisis untuk memperoleh karakterisasi operator diferensial fraksional.

Untuk mendapatkan informasi yang tidak ditemukan dalam studi literatur terkait karakterisasi operator diferensial fraksional dalam suatu ruang fungsi tertentu, dilakukan ***focus grup discussion*** (FGD) dengan para **pakar matematika di bidang teori operator fraksional** dari ITB/UNPAD dalam kegiatan FGD I yang berlokasi di Bandung. Lebih jauh lagi, karena sifat fraksionalisasi ini, maka operator tersebut memiliki efek memori sehingga dapat dilakukan analisis lanjutan terkait penerapan dari operator diferensial fraksional dalam kehidupan khususnya dalam bidang ekonomi dengan para **pakar Matematika Terapan** dalam bentuk **FGD II: penerapan operator diferensial fraksional** yang berlokasi di Surabaya.



Gambar 1. Indikator Capaian Penelitian



Gambar 1. Langkah-langkah penelitian

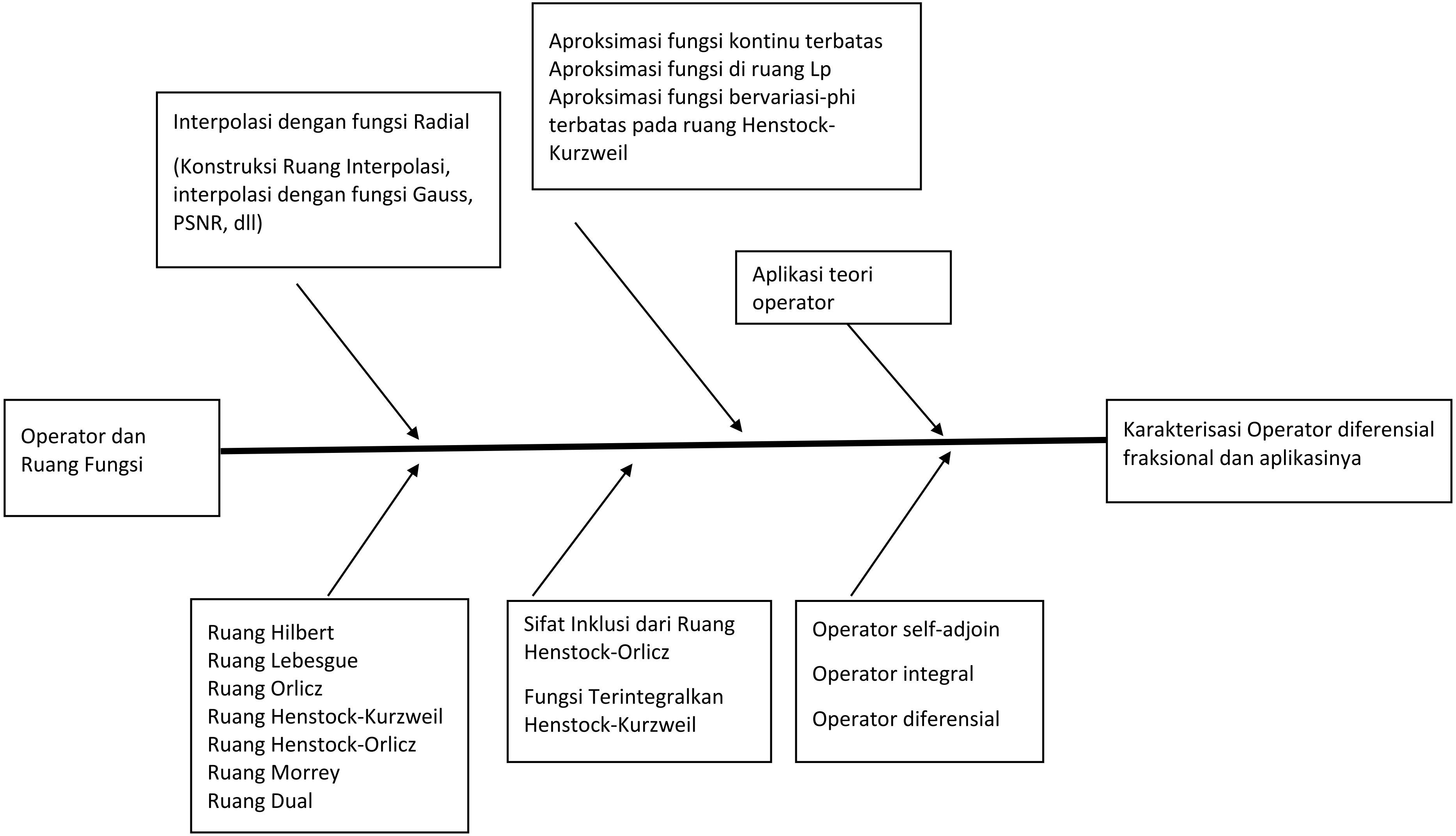
B. Uraian Tugas Peneliti

Penelitian ini akan dilaksanakan secara bertahap, terstruktur, sistematis serta terencana berdasarkan kaidah analitis dan empiris yang disusun oleh tim peneliti dengan pembagian tugas seperti yang tercantum pada Tabel 1.

Tabel 1. Uraian Tugas Peneliti

No	Nama dan NIDN	Posisi dalam Penelitian	Uraian Tugas
1	Elin Herlinawati NIDN 0001029004 (Analisis/Teori Operator)	Ketua Peneliti	✓ Mengkoordinir kegiatan penelitian ✓ Mendiskusikan tujuan, proses dan hasil yang akan dicapai dengan anggota tim peneliti. ✓ Memberikan arahan dan bimbingan penelitian berupa penjelasan ide-ide yang akan dikembangkan untuk memperoleh karakterisasi operator diferensial fraksional pada suatu ruang fungsi ✓ Studi literatur ✓ Analisis studi literatur ✓ FGD I & FGD II ✓ Penulisan artikel ilmiah dan publikasi ✓ Penyusunan laporan.
2	Wahyu Hidayat (Aljabar/Teori Operator)	Anggota Peneliti	✓ Studi literatur ✓ Analisis studi literatur ✓ FGD I ✓ Penulisan artikel ilmiah dan publikasi ✓ Penyusunan laporan.
3	Heri Kurniawan (Matematika Keuangan/Ekonomi)	Anggota Peneliti	✓ Studi literatur ✓ Analisis studi literatur ✓ FGD II ✓ Penulisan artikel ilmiah dan publikasi ✓ Penyusunan laporan
4	Ihsan Rajamuda Nasution	Anggota Mahasiswa	✓ Studi literatur ✓ Membantu pelaksanaan penelitian

C. Roadmap Penelitian



Gambar 3. Roadmap Penelitian yang akan dilakukan

D. Jadwal Penelitian

Tabel 2. Rencana Jadwal Penelitian

No	Kegiatan	Bulan												
		Des	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Jun	Juli	Agust	Sep	Okt	Nov	Des
1	Penyusunan dan pengajuan Proposal penelitian													
2	Studi literatur													
3	Pengkajian dan analisis hasil studi literatur													
4	FGD I													
5	Analisis hasil FGD I													
6	FGD II													
7	Analisis hasil FGD II													
8	Penulisan artikel hasil penelitian													
9	Penyusunan laporan penelitian dan laporan penggunaan dana penelitian													

BAB IV
HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

A. Beberapa Karakterisasi Operator Turunan Fraksional $\boldsymbol{\psi}$-Caputo pada $\boldsymbol{C^n}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

Ide turunan fraksional pertama kali muncul pada tahun 1695 ketika L'Hopital menulis surat kepada Leibniz, menanyakan tentang kemungkinan turunan dengan orde ½. Leibniz menjawab bahwa hal tersebut akan menghasilkan sebuah paradoks (Majardi, 2024; Škovránek *et al.*, 2012; Tejado *et al.*, 2017; Machado & Mata, 2015). Matematikawan seperti Euler, Lagrange, Riemann, Liouville, Abel, Laurent, Hardy, dan Littlewood menyelidiki lebih lanjut tentang turunan fraksional dan integral pada abad ke-18. Matematikawan lain juga terus mengembangkan teori mengenai turunan fraksional.

Konsep teoretis dari turunan fraksional menemukan aplikasi praktis di berbagai bidang, menjadikannya alat yang ampuh untuk memodelkan peristiwa fisik dengan efek memori. Dari masalah viskoelastisitas hingga mekanika fluida dan masalah pecahan Strum-Liouville hingga model biologi, lingkungan, dan ekonomi, dampak derivatif fraksional sangat penting dan luas jangkauannya. Relevansi dunia nyata ini menggarisbawahi pentingnya berbagai penelitian tentang operator fraksional, terutama versi turunannya, termasuk Caputo, Riemann-Liouville, Erdelyi-Kober, Hilfer, Hadamard, dll.

Operator turunan fraksional memiliki beberapa definisi. Sebagai contoh, kita dapat menggeneralisasi operator ini di mana kita mendapatkan turunan fraksional klasik melalui pemilihan kernel khusus dengan beberapa operator turunan. Sebagai contoh, kita mendapatkan turunan Riemann-Liouville untuk kernel dengan operator turunan, turunan fraksional versi Hadamard diperoleh dengan dan operator turunan (Tarasova & Tarasov, 2016; 2017; 2018; 2019). Namun, karena karakteristik masing-masing kernel, dalam beberapa kasus, sebagian besar hukum-hukum penting dari operator diferensial tidak dapat dipenuhi. Dari pendekatan ini, muncul permasalahan ketika kernel yang digunakan adalah dan operator dalam bentuk untuk beberapa kasus khusus (Tarasova & Tarasov, 2019). Dalam hal ini mengacu pada , kami menyelidiki beberapa sifat dari operator ini meskipun fungsinya, dalam hal ini kernel, masih belum diketahui. Fokus utama yang akan dikaji disini adalah turunan dari fraksional Caputo dengan kernel. Pada subbab ini, Turunan Fraksional ψ-Caputo ditulis sebagai "ψ-CFD".

Selanjutnya, definisi dan beberapa sifat dari operator ψ-CFD terkait kekonvergenan dan keterbatasan operator ini akan dibahas disini.

1. The $\boldsymbol{\psi}$- CFD Operator

Operator ψ-CFD didefinisikan sebagai

Definition 1. (Tarasova & Tarasov, 2019) Misalkan $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$, dan $h, \psi \in C^n[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, dengan ψ naik, and untuk setiap $\xi \in [a,b]$ kita punya $\psi'(\xi) \neq 0$. Maka untuk setiap orde $\alpha \notin \mathbb{N}$, operator ψ-CFD kiri dari h diberikan sebagai berikut:

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^\xi \big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{n-1-\alpha} \psi'(\eta) \left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n \frac{d^n}{d\eta^n} h(\eta) d\eta, \tag{4.1}$$

dan operator ψ-CFD kanan dari h diberikan sebagai

$$ {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\xi}^{b}\big(\psi(\eta)-\psi(\xi)\big)^{n-1-\alpha}(-1)^n\psi'(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n \frac{d^n}{d\eta^n}h(\eta)d\eta \tag{4.2} $$

Ketika $n-1 \leq \alpha < n$.

Selanjutnya, untuk $\alpha \in (0,1)$ dan $x \in [a,b]$ maka

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{\xi}\big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{-\alpha}h'(\eta)d\eta, \tag{4.3} $$

dan

$$ {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \frac{(-1)}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\xi}^{b}\big(\psi(\eta)-\psi(\xi)\big)^{-\alpha}h'(\eta)d\eta. \tag{4.4} $$

Teorema 1. (Tarasova & Tarasov, 2019) Misalkan $\psi, h \in C^{n+1}[a,b]$, untuk $\alpha > 0$, kita punya

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \left(\frac{\big(\psi(\xi)-\psi(a)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^n h^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{a}^{\xi}\big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{n-\alpha}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)d\eta \tag{4.5} $$

dan

$$ {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = (-1)^n\left(\frac{\big(\psi(\xi)-\psi(a)\big)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^n h^{(n)}(b) - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{\xi}^{b}\big(\psi(\eta)-\psi(\xi)\big)^{n-\alpha}(-1)^n\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)d\eta. \tag{4.6} $$

Bukti. Berdasarkan Definisi 1,

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{a}^{\xi}\big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{n-1-\alpha}\psi'(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)d\eta, $$

misal $u'(\eta) = \big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{n-1-\alpha}\psi'(\eta)$ dan $v(\eta) = h^{(n)}(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n$, maka

$$ \begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\big(h(\xi)\big) &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{a}^{\xi}u'(\eta)v(\eta)d\eta = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{a}^{\xi}u'(\eta)v(\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_{a}^{\xi}v(\eta)du(\eta) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left(v(a)u(a) - \int_{a}^{\xi}u(\eta)dv(\eta)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left(v(a)u(a) - \int_{a}^{\xi}u(\eta)v'(\eta)d(\eta)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left(h^{(n)}(a)\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^n\left(\frac{\psi'(a)\big(\psi(\xi)-\psi(a)\big)^{n-\alpha}}{-\psi'(a)}\right)\right. \\ &\quad \left. - \int_{a}^{x}\left(\frac{\psi'(\eta)\big(\psi(\xi)-\psi(\eta)\big)^{n-\alpha}}{-\psi'(\eta)}\right)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)d\eta\right) \end{aligned} $$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left(\left(\psi(\xi)-\psi(a)\right)^{n-\alpha}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta) + \int_a^{\xi}\left(\psi(\xi)-\psi(\eta)\right)^{n-\alpha}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta)d\eta\right).$$

Untuk (6), dengan cara yang serupa, kita juga mendapatkan operator ψ-CFD kanan seperti yang kita inginkan. ■

Selanjutnya, dari Definisi 1 dan Teorema 1, kita dapat menurunkan sifat kekonvergenan dari operator ini seperti yang ditunjukkan pada Teorema 2 dan Teorema 3.

Teorema 2. Diberikan $\psi, h \in C^n[a,b]$, maka

$$\lim_{\alpha\to n-1} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = \left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(\xi) - \left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(a) \tag{4.7}$$

and

$$\lim_{\alpha\to n-1} {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(\xi) - \left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(a) \tag{4.8}$$

Bukti. Berdasarkan Definisi 1, diperoleh

$\lim_{\alpha\to n-1} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = \lim_{\alpha\to n-1}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^{\xi}\left(\psi(\xi)-\psi(\eta)\right)^{n-1-\alpha}\psi'(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n}\frac{d^n}{d\eta^n}h(\eta)d\eta =$
$\frac{1}{\Gamma(0)}\int_a^{\xi}\left(\psi(\xi)-\psi(\eta)\right)^{0}\psi'(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta)d\eta =$
$\int_a^{\xi}\psi'(\eta)\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(\eta)d\eta = \int_a^{\xi}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n-1} h^{(n-1)}(\eta)d\eta =$
$h^{(n-1)}(\xi)\left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n-1} - h^{(n-1)}(a)\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n-1}.$

Kemudian, gunakan cara yang serupa untuk mendapatkan (4.8). ■

Teorema 3. Diberikan $h \in C^{n+1}[a,b]$, maka

$$\lim_{\alpha\to n} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = \left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n} h^{(n)}(\xi) \text{ dan } \lim_{\alpha\to n} {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = (-1)^{n}\left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n} h^{(n)}(\xi). \tag{4.9}$$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 1 dan Teorema 1, diperoleh

$\lim_{\alpha\to n} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}\left(h(\xi)\right) = \lim_{\alpha\to n}\left(\frac{\left(\psi(\xi)-\psi(a)\right)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n} h^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_a^{\xi}\left(\psi(\xi)-\right.\right.$
$\left.\left.\psi(\eta)\right)^{n-\alpha}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta)d\eta\right) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n} h^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^{\xi}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta)d\eta =$
$h^{(n)}(a)\left(\frac{1}{\psi'(a)}\right)^{n} + \int_a^{\xi}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^{n} h^{(n)}(\eta)d\eta = \left(\frac{1}{\psi'(\xi)}\right)^{n} h^{(n)}(\xi)\,.$

Kemudian, gunakan cara yang serupa untuk mendapatkan limit dari ψ-CFD kanan. ■

Untuk menunjukkan keterbatasan operator ini pada $C^n[a,b]$, definisikan terlebih dahulu norm di ruang ini. Misalkan norm $\|\cdot\|_C : C[a,b] \to \mathbb{R}$ and $\|\cdot\|_{C_\psi^{(n)}} : C^n[a,b] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$\|h\|_C := \max_{\xi\in[a,b]}|h(\xi)| \text{ and } \|h\|_{C_\psi^{(n)}} := \sum_{k=0}^{n}\left\|\left(\frac{1}{\psi'}\right)^{k} h^{(k)}\right\|_C. \tag{4.10}$$

Maka sifat keterbatasan operator ini dapat dilihat pada Teorema 4.

Teorema 4. Operator ψ-CFD terbatas. Untuk $\alpha > 0$,

$$\left\| {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h \right\|_C \leq M \|h\|_{C_\psi^{(n)}} \text{ and } \left\| {}^{C}D_{b^-}^{\alpha,\psi} h \right\|_C \leq M \|h\|_{C_\psi^{(n)}} \tag{4.11}$$

dengan $M = \frac{\left(\psi(b)-\psi(a)\right)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}$.

Bukti. Berdasarkan definisi norm,

$$\left|\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)\right| \leq \max_{y\in[a,b]} \left|\left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n h^{(n)}(\eta)\right| = \left\|\left(\frac{1}{\psi'}\right)^n h^{(n)}\right\|_C \leq \sum_{k=0}^{n} \left\|\left(\frac{1}{\psi'}\right)^k h^{(k)}\right\|_C = \|h\|_{C_\psi^{(n)}}.$$

maka

$$\left\| {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h \right\|_C = \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^\xi \left(\psi(\xi) - \psi(\eta)\right)^{n-1-\alpha} \psi'(\eta) \left(\frac{1}{\psi'(\eta)}\right)^n \frac{d^n}{d\eta^n} h(\eta) d\eta\right| \leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^\xi \left(\psi(\xi) - \psi(\eta)\right)^{n-1-\alpha} \psi'(\eta) \|h\|_{C_\psi^{(n)}} d\eta\right| = \frac{\|h\|_{C_\psi^{(n)}}}{\Gamma(n-\alpha)} \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^\xi \left(\psi(\xi) - \psi(\eta)\right)^{n-1-\alpha} \psi'(\eta) d\eta\right| \leq M \|h\|_{C_\psi^{(n)}}.$$

Kemudian, gunakan cara yang serupa untuk mendapatkan keterbatasan bagi operator ψ-CFD kanan.■

2. Aplikasi Operator ψ- CFD

Model ppertumbuhan Malthusian growth ditunjukkan dalam bentuk

$$N'(\zeta) = \lambda\, N(\zeta) \tag{4.12}$$

dengan notasi λ yang merepresentasikan rata-rata pertumbuhan populasi, dan $N(\zeta)$ dinotasikan sebagai jumlah populasi pada saat ζ. Disini, λ diasumsikan sebagai konstanta dan N_0 dinotasikan sebagai populasi awal, maka solusi dari persamaan (4.12) diberikan sebagai berikut:

$$N(\zeta) = N_0 \exp(\lambda\zeta). \tag{4.13}$$

Sekarang, jika kita ganti persamaan diferensial (4.12) dengan ψ-CFD, maka

$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha,\psi} N(\zeta) = \lambda N(\zeta). \tag{4.14}$$

Dalam kasus ini, $N(\zeta) \in C^n[a,b], a, b \in \mathbb{R}$. Almeida (2017) menunjukkan bahwa solusi dari persamaan (4.14) dalam bentuk perumuman fungsi eksponensial, yakni fungsi Mittag-Liffer E_α, sebagai berikut:

$$N(\zeta) = N_0 E_\alpha\left(\lambda\left(\psi(\zeta) - \psi(\zeta_0)\right)^\alpha\right). \tag{4.15}$$

Persamaan (4.15) merupakan solusi dari model pertumbuhan populasi Malthusian versi ψ-Caputo. Sebagai contoh, kita gunakan data populasi Indonesia dari BPS (Tabel 1).

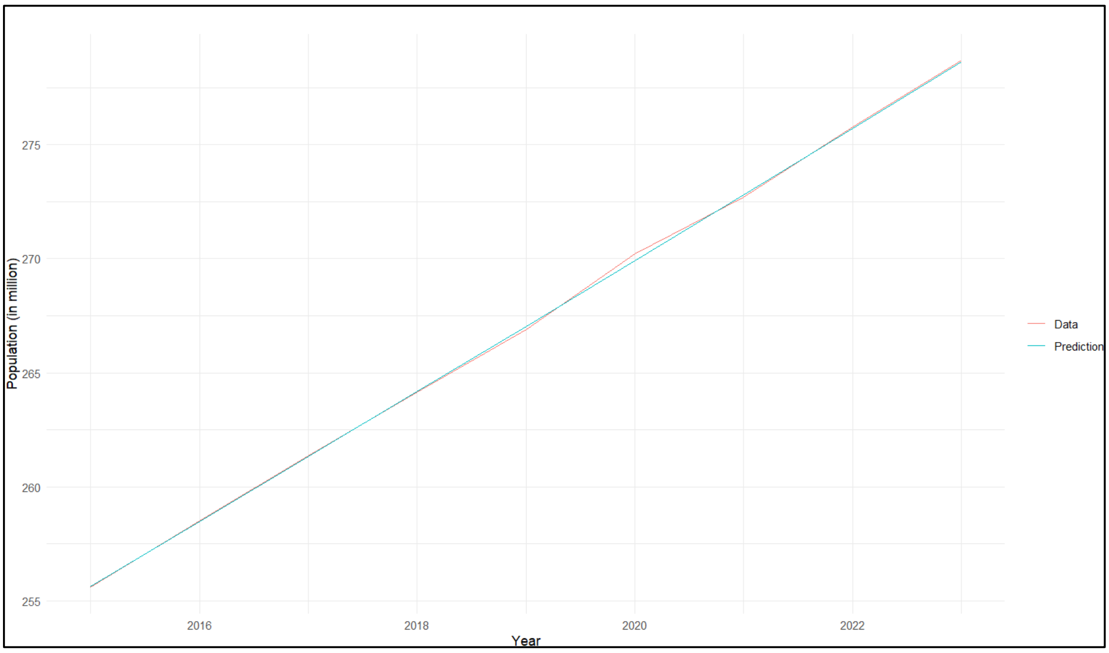
TABEL 1. Indonesian Population (in million)

Year (ζ)	**Population ($N(\zeta)$)**
2015	255.5875
2016	258.4965
2017	261.3555
2018	264.1616
2019	266.9119
2020	270.2039
2021	272.6825
2022	275.7738
2023	278.6962

Kemudian, pilih kernel $\psi(\zeta) = \zeta$ dan terapkan persamaan (4.10) untuk melakukan simulasi model. Prosedur fitting menggunakan bantuan software R. Tujuannya adalah untuk meminimumkan mean square error (MSE) untuk mendapatkan konstanta λ, dan orde turunan fraksional α. Output dari software R yang dihasilkan dapat dilihat pada Tabel 2 dan Gambar 1.

TABEL 2. Value of variable λ, order of fractional, and error

Model	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\alpha}$	**Error**
ψ-Caputo	0.01136	0.97363	0.01400



GAMBAR 1. Approximation results using the ψ-CFD operator with $\psi(\zeta) = \zeta$

Gambar 1 mengilustrasikan perbandingan antara data populasi aktual dan nilai data prediksi yang diperoleh menggunakan operator ψ-CFD dengan $\psi(\zeta) = \zeta$. Grafik prediksi terlihat mendekati grafik data aktual. Hal ini menunjukkan bahwa model tersebut memberikan estimasi yang kuat terhadap data aktual dan bahwa model turunan fraksional secara akurat memprediksi tren pertumbuhan populasi pada data yang diberikan.

B. Operator Turunan Fraksional dan Aplikasinya dalam Model Pertumbuhan Ekonomi Indonesia

Sebagai salah satu negara dengan jumlah penduduk terbesar di dunia, Indonesia memiliki dinamika pertumbuhan ekonomi yang cukup baik meskipun nilai tukar mata uang asing terus meningkat pada pertengahan tahun 2024. Traore & Sene (2020) menyatakan bahwa pertumbuhan ekonomi dapat diukur dengan menghitung tingkat persentase kenaikan produk domestik bruto (GDP). Pada tahun 2023, perekonomian Indonesia berdasarkan GDP mencapai Rp20.892,4 triliun dan GDP per kapita mencapai Rp75,0 juta atau sekitar USD4.919,7. Capaian ini menurun dibandingkan tahun sebelumnya sebesar 0,26%. Namun, data Badan Pusat Statistik (BPS) menunjukkan adanya peningkatan pertumbuhan ekonomi sebesar 0,07% pada triwulan I tahun 2024 dibandingkan triwulan sebelumnya. Peningkatan ini menunjukkan perekonomian Indonesia tetap tangguh di tengah meningkatnya ketidakpastian ekonomi global. (Marjadi, 2024).

Proses pertumbuhan ekonomi dapat dimodelkan dengan menggunakan turunan. Selain itu, turunan fraksional juga banyak digunakan untuk membangun model ekonomi, dan hasil menunjukkan bahwa model orde fraksional lebih baik daripada model orde bilangan bulat, seperti yang dilakukan oleh Škovránek *et al.* (2012), Tejado *et al.* (2017), Machado and Mata (2015), Machado *et al.* (2015), Tarasova and Tarasov (2016; 2017; 2018; 2019) [7–11], Tarasov [12], dan Luo et al. [13]. Namun, masih terdapat beberapa kekurangan dalam penggunaan turunan fraksional (kalkulus klasik) untuk memodelkan data yang akurat. Beberapa operator yang dapat digunakan untuk memodelkan GDP adalah operator turunan fraksional Caputo dan Grunwald-Letnikov.

Selanjutnya, Tejado *et al*. (2017) menggunakan kalkulus fraksional untuk memodelkan pertumbuhan ekonomi di Spanyol dan Portugal menggunakan turunan fraksional Grunwald-Letnikov. Selain itu, Luo *et al*. (2018) menggunakan kalkulus fraksional untuk memodelkan pertumbuhan ekonomi menggunakan operator Grunwald-Letnikov dan Caputo untuk ekonomi Spanyol. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Caputo lebih baik dalam pemodelan dibandingkan Grunwald-Letnikov. Ming *et al*. (2019) juga menggunakan operator Caputo untuk memodelkan pertumbuhan ekonomi di Tiongkok. Beberapa penulis lain juga telah melakukan pemodelan pertumbuhan ekonomi di berbagai negara, seperti the Group of Seven (G7) (Tejado *et al.*, 2019), the European Union (Tejado *et al.*, 2018), Portuguese (Tejado *et al.*, 2014), Spain (Tejado *et al.*, 2015), and the Group of Twenty (Tejado *et al.*, 2020). Model Pertumbuhan Ekonomi, khususnya untuk Indonesia saja, yang menggunakan derivatif fraksional belum pernah dibahas. Oleh karena itu, dalam makalah ini, kami mengingat kembali beberapa properti operator derivatif fraksional Caputo dan menerapkan operator ini untuk memodelkan pertumbuhan ekonomi Indonesia.

1. Model Pertumbuhan Ekonomi

Misalkan model pertumbuhan ekonomi suatu negara dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$y = f(x_1, x_2, \dots) \tag{4.16}$$

dimana y adalah output model, x_k adalah variabel input yang bergantung pada y, dan f adalah fungsi yang diberikan. Dalam artikel ini, kami memilih enam variabel yang memengaruhi pertumbuhan GDP (lihat Tabel 1).

Tabel 1
Variabel dependen dalam model

Variable	Information	Measure	unit
x_1	island area	the natural resources available	km^2
x_2	arable land	the quality of the natural resources	km^2
x_3	population	the human resources	million people
x_4	gross capital formation (GCF), in 2015 USD	manufactured resources	Million USD
x_5	exports of goods and services (EGS), 2015 USD	external impacts on the economy	Million USD
x_6	general government final consumption expenditure (GGFCE), 2015 USD	budgetary impacts on the economy	Million USD

Data yang digunakan adalah data Indonesia tahun 1961 sampai dengan 2021 dari Bank Dunia (Beghin & Caputo, 2020). Untuk model pertama, GDP diberikan sebagai kombinasi linier sebagai berikut:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{6} c_k x_k(t), \tag{4.17}$$

dimana $y(t)$ adalah GDP pada saat t, c_k adalah kosntanta untuk setiap variabel x_k, t adalah tahun, dan t_0 adalah tahun pertama yang ditetapkan. Model kedua menggunakan operator turunan fraksional Caputo. Model ini diberikan sebagai berikut:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{6} c_k (D_{t_0,t}^{\alpha_k} x_k)(t), \tag{4.18}$$

dengan turunan Caputo $D_{t_0,t}^{\alpha_k} x_k$, untuk fungsi x_k , diberikan sebagai berikut:

$$D_{t_0,t}^{\alpha_k} x_k(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\alpha_k}} f^{(1)}(s)dt\,,\ t > t_0, 0 < \alpha_k \leq 1. \tag{4.19}$$

Untuk membandingkan PDB per tahun, PDB, GCF, EGS, dan GGFCE dikonversi ke mata uang lokal yang tidak dapat diubah. Untuk pembentukan model, kami menggunakan data dari tahun 1961 – 2015, dan data tahun 2016-2021 sebagai sampel uji untuk mendapatkan nilai eror. Prosedur yang dilakukan menggunakan bantuan *software* R untuk menemukan model pada persamaan (4.17) dan (4.18). Tujuannya adalah meminimalkan *mean square error* (MSE). Selanjutnya, kami mengevaluasi model menggunakan *mean absolute deviation* (MAD) dan koefisien deterministik (R^2) serta membandingkan efek prediksi model menggunakan error relative absolute (ARE).

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{N}; \tag{4.20}$$

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|}{n}; \tag{4.21}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2}; \quad (4.22)$$

$$ARE_i = \left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|, \ i = 1,2,\dots,n. \quad (4.23)$$

dimana n adalah jumlah tahun, y_i adalah GDP, $\hat{y}_i$ adalah estimasi model GDP, dan $\bar{y}_i$ adalah rata-rata GDP. Kami juga menggunakan kriteria informasi Bayesian (BIC) untuk memilih variabel untuk model. Kami mengadopsi kriteria BIC berikut ini:

$$BIC = log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2\right) + \frac{p\log n}{n}. \quad (4.24)$$

2. Operator turunan pecahan Caputo

Definisi 1 (Johansyah *et al.*, 2021) Turunan pecahan Caputo didefinisikan sebagai

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \quad (4.25)$$

dengan $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

Secara umum operator turunan fraksional Caputo memenuhi beberapa sifat berikut, yaitu Linearitas, non-semigroup, non-komutatif, dan turunan konstanta adalah nol (Sontakke & Shaikh, 2015; Atangana, 2018). Perhatikan bahwa operator pecahan, termasuk tipe Caputo, tidak berlaku sifat semigrup dan sifat komutatif, sedangkan untuk turunan integer, kedua sifat tersebut berlaku. Beghin & Caputo (2020) memberikan asumsi tambahan sehingga operator turunan fraksional, terutama tipe Caputo, dapat memenuhi kedua sifat ini. Misalkan $AC[a,b]$ adalah ruang fungsi kontinu absolut pada $[a,b] \in \mathbb{R}$. Beberapa asumsi diberikan untuk memberikan representasi lain dari turunan fraksional Caputo, seperti yang ditunjukkan pada Lemma 1.

Lemma 1 (Beghin & Caputo, 2020) Misalkan f memenuhi kondisi berikut:

(i) f adalah fungsi analitik pada $AC[0,T], T \in \mathbb{R}$.

(ii) f memenuhi ekspansi deret pangkat $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ di mana n adalah bilangan bulat non-negatif.

(iii) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\left|f^{(n)}(0)\right| < K^n$ untuk suatu konstanta $K > 0$

maka $D^\alpha f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^{n-\alpha}$ dimana $t \in [0,T]$ dan $\alpha \in (0,1]$.

Misalkan f dan $\alpha, \beta \in (0,1]$, menggunakan asumsi yang sama pada Lemma 1, maka sifat komutatif dan semigrup terpenuhi seperti yang ditunjukkan pada Teorema 1.

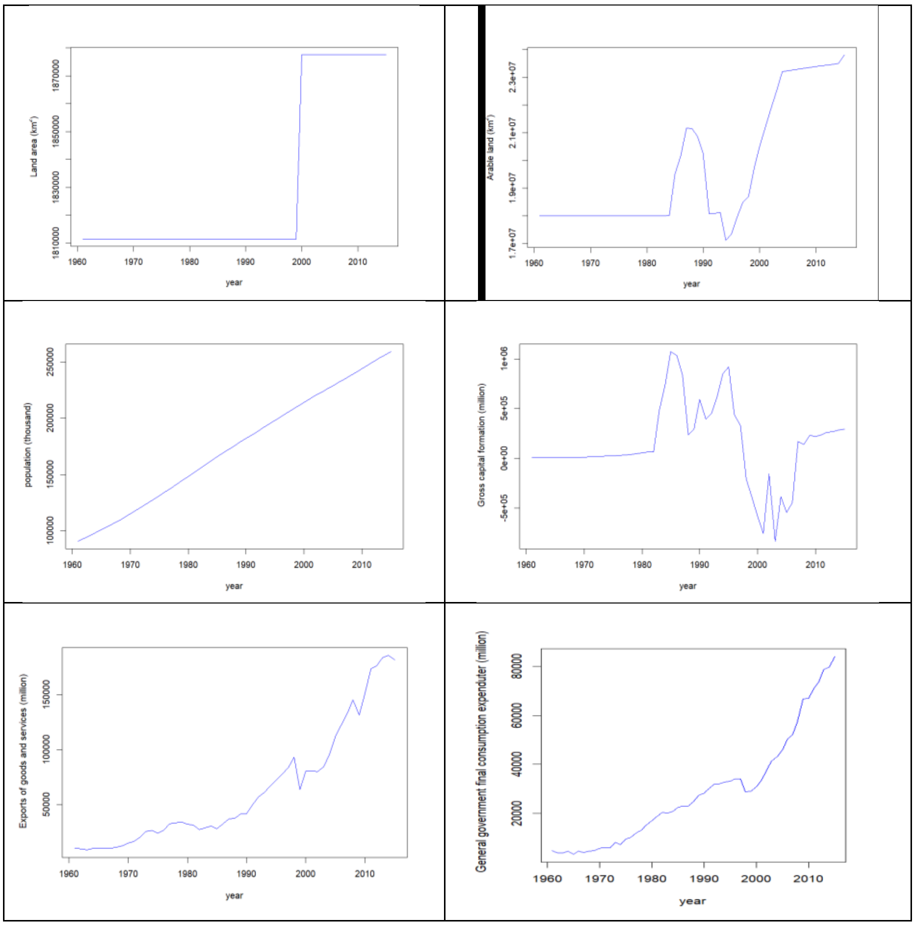
Theorem 1 [24] Misalkan $\alpha, \beta \in (0,1]$, dan $f: [0,T] \to \mathbb{R}$ dengan $f \in AC^2[0,T]$. Jika f adalah fungsi analitik sedemikian sehingga untuk $\left|f^{(n)}(0)\right| < K^n$, untuk suatu $K > 0$, dan dengan asumsi tambahan bahwa $f^{(1)}(0) = 0$ jika $\alpha + \beta > 1$, maka

(i) $D^\beta D^\alpha f(t) = D^\alpha D^\beta f(t), t \geq 0$;

(ii) $D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\beta+\alpha} f(t)$.

3. Aplikasi dalam Model Pertumbuhan Indonesia

Untuk memperoleh Gambar 1, kami menerapkan software R pada data ekonomi Indonesia tahun 1961-2021, khususnya GCF, EGS, dan GGFCE dalam mata uang lokal yang tidak diubah.



Gambar. 1. Data for Economic of Indonesia from 1961-2015

Dalam artikel ini, kami memperoleh estimasi koefisien pada Model 1 dan Model 2 (lihat Tabel 2) menggunakan sofware R dengan metode kuadrat terkecil. Kami menetapkan orde turunan fraksional Caputo sebesar α=0,5. Tabel 3 menunjukkan tingkat signifikansi kedua model. Selain itu, kami menyajikan nilai indeks MAD, R^2, dan BIC dalam beberapa sampel (lihat Tabel 4) untuk membandingkan kinerja sampel kedua model tersebut.

Tabel 2
Koefisien model

Coefficients	Model 1	Model 2
c_1	5.006e+04	-6.807e+04
c_2	-5.090e+03	-7.586e+03
c_3	8.485e+02	1.204e+03
c_4	-1.441e-02	-8.814e-03
c_5	1.532e+00	1.958e+00
c_6	5.026e+00	6.046e+00
c_7	-7.525e+10	1.221e+11

Tabel 3
Tingkat signifikansi model

Variable	Model 1		Model 2	
	t-value	p-value	t-value	p-value
x_1	0.181	0.857	-1.600	0.000161
x_2	-1.598	0.117	-2.541	0.116174
x_3	5.572	1.12e-06	6.550	0.014354
x_4	-1.362	0.179	-0.870	3.60e-08
x_5	5.333	2.57e-06	5.748	0.388500
x_6	5.807	4.93e-07	5.680	6.08e-07
x_7	-0.160	0.873	4.095	7.69e-07

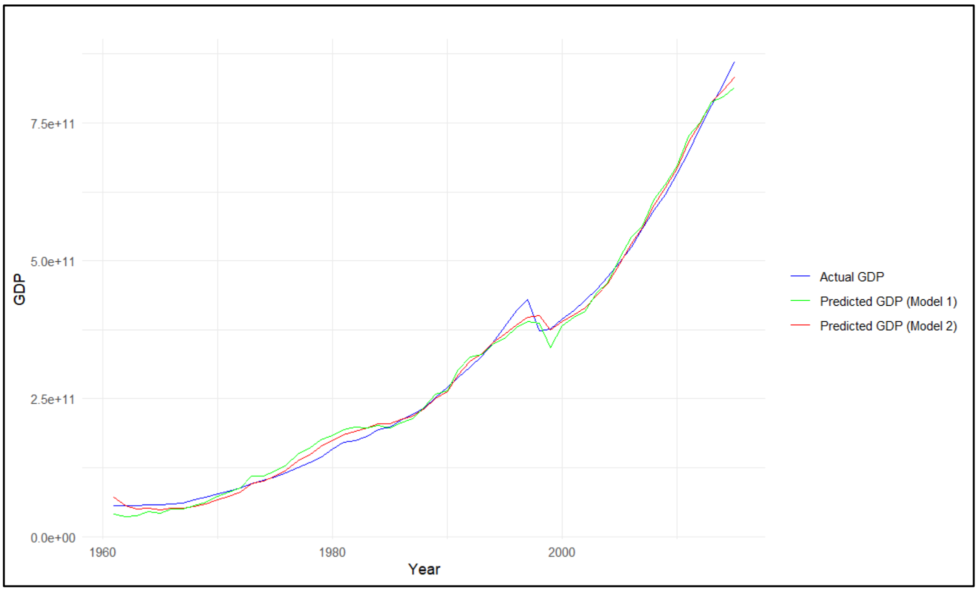
Tabel 4
Sample performance of models

	Model 1	Model 2
MSE	3.202314e+20	1.486288e+20
MAD	14,827,473,104	9,746,629,947
R^2	0.9936712	0.9970626
BIC	2,784.999	2,742.781

Kami menunjukkan simulasi berdasarkan software R seperti pada Tabel 5 dan Gambar 2.

Tabel 5
Perbandingan hasil prediksi dua model

Year	Real value	Model 1		Model 2	
		Predict value	ARE_i	Predict value	ARE_i
2016	904,181,621,780.39	803,933,124,505.00	11,09%	836,197,000,000.00	7,52%
2017	950,021,694,164.00	833,700,527,444.00	12,24%	860,912,593,623.00	9,38%
2018	999,178,586,309.02	875,688,704,252.00	12,36%	897,440,354,832.00	10,18%
2019	1,049,330,233,997.45	890,920,210,736.00	15,10%	920,542,733,608.00	12,27%
2020	1,027,656,193,885.38	876,429,310,812.00	14,72%	922,244,455,758.00	10,26%
2021	1,065,710,871,623.66	950,840,624,529.00	10,78%	973,817,877,095.00	8,62%



Gambar. 2. Data fitting

Kami menyajikan hasil estimasi Model 1 dan Model 2 untuk data GDP Indonesia tahun 2016-2021 dan menghitung nilai indeks ARE (lihat Tabel 5). Hasil menunjukkan bahwa Model 2 memprediksi lebih akurat daripada Model 1.

BAB V
SIMPULAN DAN SARAN

Penerapan operator diferensial fraksional di fokuskan pada bidang ekonomi, khususnya pemodelan pertumbuhan ekonomi Indonesia dengan menggunakan operator turunan fraksional Caputo. Selain itu, sudah dijelaskan pula terkait beberapa karakterisasi operator diferensial fraksional. Hasil penelitian yaitu berupa konsep dan karakteristik penting yang telah diidentifikasi dan diprediksi karakter/sifat dan kapasitas unjuk kerja dari suatu operator diferensial fraksional. Adapun capaian luaran yang telah dihasilkan adalah: (1) mendiseminasikan artikel dalam dua seminar internasional (ICICAM dan INCIRESMA); (2) menerbitkan artikel dengan status *accepted* di jurnal *Nonlinear Dynamics and Systems Theory: An International Journal of Research and Surveys* untuk Vol. 25 Tahun 2025.

DAFTAR PUSTAKA

Acay, B., Bas, E., & Abdeljawad. T. (2020). Fractional economic models based on market equilibrium in the frame of different type kernels, *Chaos Soliton. Fract.*, 130, 109438.

Atangana, A. (2018). Fractional Operators and Their Applications. *In Fractional Operators with Constant and Variable Order with Application to Geo-Hydrology, A. Atangana, Ed. Academic Press*. 79–112.

Beghin, L., & Caputo, M. (2020). Commutative and associative properties of the Caputo fractional derivative and its generalizing convolution operator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 89:105338.

David, S. A., Linares, J. L., & Pallone, E. M. de´J. A. (2011). Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de F´ısica*. 33:4302–4302.

Giusti, A., & Colombaro, I. (2018). Prabhakar-like fractional viscoelasticity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 56:138–143.

Hassan, S.K., Alazzawi, S.N.A., & Ibrahem, N.M.J. (2020). Some Results in Grunwald-Letnokov Fractional Derivative and its Best Approximation. *Journal of Physics: Conference Series* 1818. 012020.

Johansyah, D.M., Supriatna, A. K., Rusyaman, E., & Muslihin, K.R.A. (2022). *Persamaan diferensial fraksional dan aplikasinya*. Bandung: Unibi Press.

Johansyah, D.M., Supriatna, A. K.., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2021). Application of fractional differential equation in economic growth model: A systematic review approach. *AIMS Math*., 6(9):10266–10280.

Katsikadelis, J. T. (2015). Generalized fractional derivatives and their applications to mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*, 85(9):1307–1320.

Luo, D., Wang, J.R., & Fečkan, M. (2018). Applying Fractional Calculus to Analyze Economic Growth Modelling. *J. Appl. Math. Stat. Informatics*, 14(1): 25–36.

Machado, J. A. T., & Mata, M. E. (2015). A fractional perspective to the bond graph modelling of world economies. *Nonlinear Dyn*., 80(4):1839–1852.

Machado, J. A. T., Mata, M. E., & Lopes, A. M. (2015). Fractional state space analysis of economic systems. *Entropy*. 17(8):5402–5421.

McTier, A. (2016). Fractional Calculus Fundamentals and Applications in Economic Modeling. *Thesis*. Milledgeville: Georgia College & State University.

Majardi, F. (2024). National Economic Growth Accelerates In Q1/2024. *Bank Indonesia*. https://www.bi.go.id/id/publikasi/ruang-media/news-release/Pages/sp_269424.aspx (accessed Jun. 24, 2024).

Ming, H., Wang, J. R., & Feckan, M. (2019). The application of fractional calculus in Chinese economic growth models, *Mathematics*, **7**, 665.

Ortigueira, M.D., & Trujillo, J.J. (2011). Generalized Grunwald-Letnikov Fractional Derivative and Its Laplace and Fourier Transforms. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 6(3):34501-34503.

Ouyang, Y., & Wang, Wusheng. (2016). Comparisan of definition of several fractional derivatif. *Proceedings of the 2016 International Conference on Education, Management and Computer Science*. Atlantis Press.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, Technical University of Kosice, Slovakia. Academic Press.

Tarasov, V. E. (2016). Local fractional derivatives of differentiable functions are integer-order derivatives or zero, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 2: 195–201.

Tarasov, V. E. (2018). Generalized memory: Fractional calculus approach. *Fractal Fract*. 2(4): 1–17.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2016). Long and short memory in economics: Fractional-order difference and differentiation. *IRA-Int. J. Manage. Soc. Sci.* 5: 327–334.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2016). Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach. *Fract. Diff. Calc.* 6, 219–232.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2017). Economic interpretation of fractional derivatives. *Prog. Fract. Differ. Appl.* 3: 1–7.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2018). Criterion of existence of power-law memory for economic processes. *Entropy*, **20**, 414.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2018). Macroeconomic models with long dynamic memory: Fractional calculus approach. *Appl. Math. Comput*. 338: 466–486.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2019). Dynamic Keynesian model of economic growth with memory and lag, *Mathematics*, 7, 178.

Tarasova, V. V., & Tarasov, V. E. (2019). Harrod-Domar growth model with memory and distributed lag. *Axioms.* 8(1): 64–65.

Tejado, I., Pérez, E., & Valério, D. (2018). Economic growth in the European Union modelled with fractional derivatives: First results. *Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci.*, 66(4):455–465.

Tejado, I., Pérez, E., & Valério, D. (2019). Fractional calculus in economic growth modelling of the group of seven. *Fract. Calc. Appl. Anal.*. 22(1): 139–157.

Tejado, I., Valério, D., Pérez, E., & Valério, N. (2017). Fractional calculus in economic growth modelling: the Spanish and Portuguese cases. *Int. J. Dyn. Control.* 5(1): 208–222.

Tejado, I., Valério, D., & Valério, N. (2014). Fractional calculus in economic growth modeling. The Portuguese case. *in Proceedings Int. Conf. Fract. Differ. Its Appl. ICFDA 2014*.

Tejado, I., Valério, D., & Valério, N. (2014). Fractional Calculus in Economic Growth Modelling: The Spanish Case. i*n Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Automatic Control. Lecture Notes in Electrical Engineering*. 321: 449–458.

Traore, A., & Sene, N. (2020). Model of economic growth in the context of fractional derivative. *Alexandria Eng. J*. 59(6): 4843–4850.

Škovránek, T., Podlubny, I, & Petráš, I. (2012). Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach. *Econ. Model.*, 29(4): 1322–1327.

Sontakke, B. R., & Shaikh, A. S. (2015). Properties of Caputo Operator and Its Applications to Linear Fractional Differential Equations. *J. Eng. Res*. 5(5): 22–27.

Sun, H. G., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., & Chen, Y. Q. (2018). A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64:213–231.

LAMPIRAN

1. Sertifikat presenter pada InCiReSMa 2024 UNESA, Jawa Timur, Indonesia.

2. Sertifikat presenter pada ICICAM 2024 UNISZA, Malaysia.

3. Draf artikel Jurnal

On Caputo Fractional Derivative Operator and Its Application in Indonesia's Economic Growth Model

Elin Herlinawati[1,*], Heri Kurniawan[1], Wahyu Hidayat[1]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Terbuka, South Tangerang, Indonesia

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Article history: Received Received in revised form Accepted Available online *Keywords:* Caputo fractional derivative; economic growth model, gross domestic product; Indonesia;	Indonesia is one of the countries with the largest population in the world. This is one of the factors that can influence the dynamics of economic growth in Indonesia. Economic growth can be modelled using differential equations. One of the breakthroughs in mathematics is the formulation of differential equations using fractional order. We use the economic growth model using the Caputo fractional derivative operator. This paper aims to discuss the Caputo fractional derivative operator and its properties and apply the operator to simulate Indonesia's economic growth by modelling the growth of Indonesia's gross domestic product (GDP). Additionally, we compare the results of the model with these operator with the regular model. The study shows that the model performs more accurately when predicting GDP values with the Caputo fractional derivative operator.

1. Introduction

As one of the countries with the largest population in the world, Indonesia has quite good economic growth dynamics even though foreign exchange rates increase continuously in mid-2024. Traore & Sene [1] state that economic growth can measured by calculating the percentage rate of gross domestic product (GDP) increase. In 2023, the Indonesian economy, based on GDP, reached IDR20,892.4 trillion, and GDP per capita reached IDR75.0 million or around USD4,919.7. This achievement decreased compared to the previous year by 0.26%. However, data from the BPS-Statistics Indonesia (BPS) shows an increase in economic growth of 0.07% in the first quarter of 2024 compared to the previous quarter. This increase indicates that the Indonesian economy remains resilient amidst increasing global economic uncertainty [2].

ND&ST
Nonlinear Dynamics and Systems Theory
An International Journal of Research and Surveys

ACCEPTANCE LETTER

15 November 2024

Dear Elin Herlinawati

Title "On Caputo Fractional Derivative Operator and Its Application in Indonesian Economic Growth Model"

This article has been completed the reviewing process and has been **accepted** for publication. Your manuscript is tentatively scheduled for publication in the Volume 25.

We wish you all the best.

Editor in Chief

ND&ST

Editor NDST

4. Draf artikel Prosiding

Some Characterizations of ψ-Caputo Fractional Operator on $C^n[a,b]$

Elin Herlinawati[1, a)], Wahyu Hidayat[1], and Heri Kurniawan[1]

[1] *Universitas Terbuka, South Tangerang 15437, Banten, Indonesia*

[a)] *Corresponding author: elin@ecampus.ut.ac.id*

Abstract. We study the characterization of ψ-Caputo fractional derivative operator, in particular regarding the convergence and boundedness of this operator on $C^n[a,b]$. In addition, we apply this operator to the Malthusian population growth model, and we obtain an approximation of the data with this model.

INTRODUCTION

The idea of fractional derivatives first appeared in 1695 when L'Hopital wrote to Leibniz, inquiring about the possibility of a derivative with an order of ½. Leibniz responded that it would result in a paradox [2–6]. Mathematicians such as Euler, Lagrange, Riemann, Liouville, Abel, Laurent, Hardy, and Littlewood further investigated fractional derivatives and integrals in the 18th century. Other mathematicians also continued to develop theories regarding fractional derivatives.

The theoretical concept of fractional derivatives finds practical applications in various fields, making it a powerful tool for modeling physical events with memory effects. From viscoelasticity problems to fluid mechanics and Strum-Liouville fractional problems to biological, environmental, and economic models, the impact of fractional derivatif is very important and far-reaching. This real-world relevance underscores the importance of the numerous studies on fractional operators, especially derivative version, including Caputo, Riemann-Liouville, Erdelyi-Kober, Hilfer, Hadamard, etc.

The operator of fractional derivative has several definitions. For instance, we can generalize this operators in which we obtain classical fractional derivatives through the selection a special kernel with some derivative operator. As an example, we get the Riemann-Liouville derivative for kernel $k(\xi,\eta) = \xi - \eta$ with the derivative operator $d/d\xi$; the Hadamard version of the fractional derivative is obtained with $k(\xi,\eta) = ln(\xi/\eta)$ and the derivative operator$\xi\ d/d\xi$ [7–10]. However, due to the characteristics of each kernel, in some cases, most of the essential laws of the differential operator cannot be fulfilled. From this approach, problems arise when the kernel used is $k(\xi,\eta) = \psi(\xi) - \psi(\eta)$ and the operator in the form $\frac{1}{\psi'(\xi)}\ d/d\xi$ for some special cases [11]. In this case