cc BY NC ND

ESTIMASI PARAMETER MODEL COX INGERSOLL ROSS MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

Fanny Syahfitri B[1], Neva Satyahadewi[2], Muhlasah Novitasari Mara[3]
[1,2,3]Universitas Tanjungpura, Pontianak

Email korespondensi : **fanny_syahfitri@ymail.com**

Keuntungan yang diperoleh dari suatu aset finansial atau investasi dipengaruhi oleh tingkat bunga. Tingkat bunga yang berubah-ubah secara tidak pasti ini menyebabkan tingkat bunga sulit untuk diprediksi. Penelitian ini membahas tentang salah satu model pergerakan tingkat bunga yaitu model Cox Ingersoll Ross (CIR). Model CIR memprediksi tingkat bunga selalu bernilai positif. Pada model CIR terdapat beberapa parameter yang tidak diketahui nilainya. Oleh karena itu, pada penelitian ini parameter pada model CIR diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Penaksiran parameter model CIR membutuhkan data historis dari tingkat bunga. Dengan menggunakan data tingkat bunga Bank Indonesia mulai dari Januari 2006 sampai dengan Januari 2015 diperoleh nilai estimasi parameter pada model CIR yaitu $\hat{a} = 0{,}0279$ $\hat{b} = 14{,}6791$ dan $\hat{s} = 0{,}2973$.

Kata kunci: Model CIR, MLE, Newton Raphson

PENDAHULUAN

Tingkat bunga mempunyai pengaruh yang penting dalam menentukan harga dari suatu instrumen investasi, seperti obligasi, saham, dan opsi. Keuntungan yang diperoleh saat melakukan investasi dipengaruhi oleh tingkat bunga yang berlaku pada instrumen investasi yang telah dipilih. Tingkat bunga berubah sepanjang waktu yang merupakan proses stokastik.

Kegiatan perdagangan berlangsung terus-menerus dalam pasar keuangan, sehingga dibutuhkan suatu model pergerakan tingkat bunga untuk waktu yang kontinu. Dari berbagai alternatif model tingkat bunga yang ada, terdapat sisi positif dan negatifnya. Pada tahun 1977, Vasicek memperkenalkan model Vasicek sebagai model suku bunga stokastik pertama kalinya. Pada model ini, prediksi tingkat bunga bisa bernilai negatif, sedangkan pada realitanya tingkat bunga tidak mungkin bernilai negatif. Selanjutnya, kekurangan tersebut diperbaiki pada sebuah model yang disebut model Cox Ingersoll Ross (CIR), yang menjamin prediksi tingkat bunga tidak negatif [1]. Model ini akan dibahas lebih lanjut pada penelitian ini.

Model CIR diperkenalkan oleh Cox, Ingersoll dan Ross pada tahun 1985. Pada model ini terdapat sifat *mean reversion* yang merupakan kecenderungan dari tingkat bunga untuk kembali menuju rata-rata jangka panjang dari tingkat bunga. Dengan adanya sifat ini, pergerakan tingkat bunga akan menuju suatu level rata-rata tingkat bunga yang disebut *mean reversion level*. Ketika tingkat bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan permintaan kredit dari peminjam cenderung rendah. Sebagai dampaknya, tingkat bunga akan turun. Sebaliknya. Ketika tingkat bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan kredit dari peminjam sehingga dampaknya tingkat bunga akan cenderung naik. Jika proses naik dan turunnya tingkat bunga terjadi terus menerus, maka dalam jangka panjang tingkat bunga akan berada disekitar *mean reversion level* [2].

Di dalam model CIR terdapat beberapa parameter yang perlu diestimasi hingga didapatkan suatu estimasi yang mendekati data sebenarnya. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter antara lain *Maximum Likelihood Estimator* (MLE), *Ordinary Least Square* (OLS), metode Momen dan lainnya. Pada penelitian ini digunakan MLE. Metode ini memberikan hasil estimasi yang baik bagi parameter, terutama apabila sampelnya besar.

METODOLOGI

Penelitian ini berupa studi literatur yang dimulai dengan mempelajari teori probabilitas, persamaan diferensial, persamaan diferensial stokastik dan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Penelitian dimulai dengan menggunakan persamaan model CIR. Kemudian, berdasarkan data tingkat bunga Bank Indonesia mulai dari Januari 2006 sampai dengan januari 2015, parameter-parameter pada model CIR diestimasi menggunakan metode MLE. Sehingga akan diperoleh nilai estimasi untuk parameter model CIR. Parameter-parameter tersebut yaitu volatilitas s , rata-rata jangka panjang dari tingkat bunga (*mean reversion level*) a , dan kecepatan proses untuk kembali menuju *mean reversion level* b .

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada tahun 1985 Cox, Ingersoll dan Ross memperkenalkan model tingkat bunga Cox Ingersoll Ross (CIR). Model ini memprediksi tingkat bunga selalu bernilai positif. Model CIR dapat dinyatakan sebagai berikut [2]:

$$dr(t) = b\left(a - r(t)\right)dt + s\sqrt{r(t)}\,dB(t) \qquad (1)$$

dengan $dr(t)$ menunjukkan perubahan tingkat bunga, s menunjukkan volatilitas, a menunjukkan rata-rata jangka panjang dari tingkat bunga (*mean reversion level*), b menunjukkan kecepatan proses untuk kembali menuju *mean reversion level,* dan $B(t)$ menunjukkan gerak Brown.

Di dalam model tingkat bunga CIR ada tiga parameter yang tidak diketahui dan harus diestimasi, yaitu a, b dan s. Pada penelitian parameter-parameter tersebut diestimasi mengunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Sebelum mengestimasi parameter dengan menggunakan fungsi MLE dibutuhkan *probability density function* (pdf) dari model CIR. Pdf dari model CIR dapat ditentukan dari mean dan variansi. Berdasarkan model tingkat bunga pada Persamaan (1) dan proses Ito, diperoleh mean dan variansi model tingkat bunga CIR, yaitu

$$E(r(t)) = a + e^{-bt}(r(0) - a) \tag{2}$$

dan

$$Var(r(t)) = \frac{s^2 a}{2b} + (r(0) - a)\frac{s^2}{b}e^{-bt} + \frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(0)\right)e^{-2bt} \tag{3}$$

Diasumsikan model CIR berdistribusi Normal atau dapat ditulis menjadi $N\left(a + e^{-bt}(r(0) - a), \frac{s^2 a}{2b} + (r(0) - a)\frac{s^2}{b}e^{-bt} + \frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(0)\right)e^{-2bt}\right)$. Oleh karena itu, pdf dari tingkat bunga $r(t)$ pada selang $[u, t]$ dengan $u < t$ adalah

$$f(r(t)) = \frac{1}{\sqrt{2p\left(\frac{s^2 a}{2b} + (r(u) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(t-u)} + \frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(u)\right)e^{-2b(t-u)}\right)}}\exp\left(-\frac{\left(r(t) - \left(a + e^{-b(t-u)}(r(u) - a)\right)\right)^2}{2\left(\frac{s^2 a}{2b} + (r(u) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(t-u)} + \frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(u)\right)e^{-2b(t-u)}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p\frac{s^2 a}{b} + 2p(r(u) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(t-u)} + 2p\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(u)\right)e^{-2b(t-u)}}}\exp\left(-\frac{\left(r(t) - a - e^{-b(t-u)}(r(u) - a)\right)^2}{\frac{s^2 a}{b} + 2(r(u) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(t-u)} + 2\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(u)\right)e^{-2b(t-u)}}\right) \tag{4}$$

Persamaan (4) ini digunakan untuk membentuk persamaan Likelihood yaitu

$$L(a, b, s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p\frac{s^2 a}{b} + 2p(r(i-1) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(i-(i-1))} + 2p\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(i-1)\right)e^{-2b(i-(i-1))}}}\exp\left(-\frac{\left(r(i) - a - e^{-b(i-(i-1))}(r(i-1) - a)\right)^2}{\frac{s^2 a}{b} + 2(r(i-1) - a)\frac{s^2}{b}e^{-b(i-(i-1))} + 2\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(i-1)\right)e^{-2b(i-(i-1))}}\right) \tag{5}$$

Dengan menggunakan Persamaan (5), parameter a, b dan s dicari dengan memaksimumkan fungsi Likelihood $L(a, b, s)$. Selanjutnya, fungsi $L(a, b, s)$ dimodifikasi ke dalam bentuk $\ln(L(a, b, s))$. Dengan memaksimumkan $\ln(L(a, b, s))$ akan mengakibatkan $L(a, b, s)$ menjadi maksimum. Dengan demikian Persamaan (5) menjadi

$$\ln L(a, b, s) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{p\frac{s^2 a}{b} + 2p(r(i-1) - a)\frac{s^2}{b}e^{-bDi} + 2p\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(i-1)\right)e^{-2bDi}}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\left(r(i) - a - e^{-bDi}(r(i-1) - a)\right)^2}{\frac{s^2 a}{b} + 2(r(i-1) - a)\frac{s^2}{b}e^{-bDi} + 2\frac{s^2}{b}\left(\frac{a}{2} - r(i-1)\right)e^{-2bDi}}\right) \tag{6}$$

Fungsi $\ln(L(a, b, s))$ pada Persamaan (6) disebut juga fungsi Log-Likelihood.

BY NC ND

Untuk memperoleh estimasi parameter α, β dan σ, fungsi Log-Likelihood diturunkan sekali terhadap tiap parameter yang akan diestimasi. Hasil estimasi dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan-persamaan $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \beta} = 0$ dan $\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$

.

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1+2e^{-\beta\Delta i}+e^{-2\beta\Delta i}}{\alpha+2\left(r(i-1)-\alpha\right)e^{-\beta\Delta i}+2\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}}{\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\pi\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\pi\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}}\right)\frac{\left(2\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)\cdot\left(-1+e^{-\beta\Delta i}\right)\right)}{\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\pi\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\pi\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}}\right)\left(\frac{\left(\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}\right)\left(\frac{\sigma^{2}}{\beta}-2\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-2\beta\Delta i}\right)}{\left(\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}\right)^{2}}\right)\right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\beta\Delta i\left(4r(i-1)-2\alpha\right)e^{-2\beta\Delta i}-2\beta\Delta i\left(r(i-1)-\alpha\right)e^{-\beta\Delta i}-2\left(r(i-1)-\alpha\right)e^{-\beta\Delta i}+\left(2r(i-1)-\alpha\right)e^{-2\beta\Delta i}-\alpha\right)\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}}{2\left(\left(2r(i-1)-2\alpha\right)e^{-\beta\Delta i}+\left(\alpha-2r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}+\alpha\right)\left(\sigma^{2}\alpha+2\left(r(i-1)-\alpha\right)\sigma^{2}e^{-\beta\Delta i}+\sigma^{2}\left(\alpha-2r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}\right)}\right.$$

$$-\frac{2\beta\Delta i\left(\left(r(i-1)-\alpha\right)e^{-\beta\Delta i}\right)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\pi\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\pi\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}}\right)\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)}{\left(\alpha\sigma^{2}+\left(2r(i-1)-2\alpha\right)\sigma^{2}e^{-\beta\Delta i}+\left(\alpha-2r(i-1)\right)\sigma^{2}e^{-2\beta\Delta i}\right)}$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\pi\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\pi\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}}\right)\left(\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}\right)}{\alpha\sigma^{2}+\left(2r(i-1)-2\alpha\right)\sigma^{2}e^{-\beta\Delta i}+\left(\alpha-2r(i-1)\right)\sigma^{2}e^{-2\beta\Delta i}} \quad (8)$$

dan

$$\frac{\partial L(\alpha,\beta,\sigma)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}}{\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\frac{\sigma^{2}\alpha}{\beta}+2\pi\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{2}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+2\pi\frac{\sigma^{2}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(r(i)-\alpha-e^{-\beta\Delta i}\left(r(i-1)-\alpha\right)\right)^{2}}{\frac{\sigma^{3}\alpha}{2\beta}+\left(r(i-1)-\alpha\right)\frac{\sigma^{3}}{\beta}e^{-\beta\Delta i}+\frac{\sigma^{3}}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}-r(i-1)\right)e^{-2\beta\Delta i}}\right) \quad (9)$$

Persamaan (7), (8) dan (9) merupakan fungsi implisit. Untuk memperoleh nilai estimasi $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}$ digunakan metode Newton Raphson. Pada penelitian ini metode Newton-Raphson dilakukan dengan bantuan *software R*. Dengan menggunakan metode Newton Raphson ini diperoleh nilai estimasi parameter model CIR yang dinyatakan dengan notasi $\alpha(k+1) = \hat{\alpha}$, $\beta(k+1) = \hat{\beta}$ dan $c(k+1) = \hat{\sigma}$, dimana $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}$ berturut-turut adalah estimasi dari α,β dan σ.

Berikut adalah langkah-langkah metode Newton-Raphson:

a. Tentukan nilai awal untuk $\hat{a}, \hat{b}$ dan $\hat{s}$ yaitu a^0, b^0 dan s^0.

b. Hitung nilai a b dan c secara iteratif, dengan rumus

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

c. Langkah ke dua diulangi hingga $\left\| \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \right\| \leq TOL$ memenuhi toleransi *TOL* yang dikehendaki.

d. Setelah melewati langkah tiga, pilih $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$ pada iterasi yang terakhir sebagai estimasi dari parameter $a(k+1) = \hat{a}$, $b(k+1) = \hat{b}$ dan $c(k+1) = \hat{s}$.

Berdasarkan data tingkat bunga Bank Indonesia mulai dari Januari 2006 sampai dengan Januari 2015 diperoleh nilai estimasi parameter pada model CIR yaitu $\hat{a} = 0,0279$ $\hat{b} = 14,6791$ dan $\hat{s} = 0,2973$.

KESIMPULAN

Parameter-parameter pada model CIR diestimasi mengunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berdasarkan data tingkat bunga Bank Indonesia mulai dari Januari 2006 sampai dengan Januari 2015 diperoleh nilai estimasi parameter pada model CIR yaitu $\hat{a} = 0,0279$ $\hat{b} = 14,6791$ dan $\hat{s} = 0,2973$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Filipovic, Damir, 2009, *Term-Structure Models*, Springer-Verlag, New York
2. Hull, J.C., 2012, *Options, Futures and Other Derivatives*, Eighth Edition, Prentice Hall, New Jersey.

CC BY NC ND

3. Jong, P. D. and Heller, G.Z., 2008, *Generalized Linear Models for Insurance Data*, Cambridge University Press,1 Cambridge.