DIMENSI FRAKSIONAL DAN APLIKASINYA DALAM FRAKTAL

Ignatius Danny Pattirajawane
Jurusan Matematika, F-MIPA, Universitas Terbuka, UPBJJ-Jakarta

Email korespondensi : dannyradja@yahoo.co.id

Umumnya dimensi memiliki nilai berupa bilangan bulat seperti titik atau kumpulan hingga titik-titik merupakan objek berdimensi 0, garis merupakan objek berdimensi 1, bidang merupakan objek berdimensi 2 dan ruang merupakan objek berdimensi 3. Pada makalah ini akan dieksplorasi objek matematika yang berdimensi tidak bulat (memiliki nilai bilangan irasional) yang disebut dimensi fraksional. Dimulai dari pembahasan himpunan Cantor, pemaparan kemudian diperumum kepada fraktal sebagai objek yang memiliki dimensi fraksional, serta dimensi Hausdorff. Selanjutnya akan digunakan konsep dimensi Hausdorff untuk menghitung objek fraktal klasik seperti himpunan Cantor, karpet Sierpinski, kurva Koch dan spons Menger.

Kata kunci: fraktal, keserupaan-diri, dimensi Hausdorff

Pendahuluan

Dalam Geometri kita dipaparkan berbagai bangun dalam berbagai dimensi (umumnya hingga tiga). Kurva dan garis lurus adalah bangun berdimensi 1. Bangun-bangun dalam bidang seperti persegi panjang, bujur sangkar, segitiga, dan lingkaran adalah bangun berdimensi 2. Sedangkan limas, kubus dan bola adalah bangun berdimensi 3. Para ahli matematika kemudian dapat mengumumkan bangun-bangun geometris dalam ruang dimensi lebih dari 3 dan kita memperoleh ruang berdimensi n.

Terkait dengan itu, konsep ruang vektor juga menyatakan dimensi yang berhubungan dengan jumlah vektor-vektor bebas linear yang merentang (*span*) ruang tersebut. Ruang vektor berdimensi n direntang oleh n buah (*tuple*s) vektor-vektor yang bebas linear. Terlepas dari pengumuman yang telah dibuat ini, nilai n selalu bernilai bilangan bulat.

Penulisan makalah ini didorong oleh pertanyaan bagaimana kita dapat mengkonstruksi suatu bangun geometri yang berdimensi tidak bulat. Yang dimaksud tidak bulat di sini ialah bahwa dimensi bangun tersebut dapat memiliki nilai berupa bilangan irasional. Pertanyaan tersebut mengarahkan penulis melakukan studi literatur dan menemukan bahwa ternyata bangun geometri yang berdimensi tidak bulat bukan merupakan suatu hal yang baru dan sudah diteliti oleh para ahli matematika sejak akhir abad ke-19 (Edgar, 2004). Dimensi yang tidak bulat tersebut oleh Felix Hausdorff pada tahun 1918 dinamakan **dimensi fraksional** (dalam Edgar, 2004). Sebutan “fraksi” di sini bukan saja mengacu pada pecahan (bilangan rasional), melainkan juga mencakup bilangan real (termasuk bilangan irasional).

Pada makalah ini penulis bermaksud: *pertama*, menjelaskan apa yang dimaksud dengan fraktal serta memberikan beberapa contohnya. Himpunan Cantor adalah salah satu contoh fraktal. Contoh yang lain yang akan dibahas dalam makalah ini ialah karpet Sierpinski, kurva Koch dan spons Menger. Semua bangun-bangun yang telah disebutkan ini memiliki dimensi fraksional. Bagian penting dari penjelasan tentang fraktal adalah konsep keserupaan diri (*self-similiarity*); *kedua*, penulis akan membahas dimensi topologis biasa yang bernilai bulat. Termasuk dalam pembahasan ini adalah dimensi induktif kecil (*small inductive dimension*), dimensi induktif besar (*large inductive dimension*) dan dimensi selimut Lebesgue (*Lebesgue covering dimension*); *ketiga*, memaparkan salah satu konsep dimensi fraksional yang sering digunakan yakni dimensi Hausdorff dan konsep yang terkait erat dengannya yakni ukuran (*measure*) Hausdorff.

Fraktal dan Keserupaan-Diri

Menurut Benoit Mandelbrot fraktal adalah himpunan yang dimensi Hausdorff-nya melampaui dimensi topologis-nya (Mandelbrot, 1983 hal. 15; Falconer, 1990 hal. xx, Falconer, 2003 hal. xxv, Edgar, 2008, hal. VII, 165). Sampai di sini pembaca yang baru berkenalan dengan fraktal tentu belum memahami apa maksudnya, sebab pembahasan mengenai dimensi Hausdorff baru akan dibahas pada seksi berikutnya. Namun demikian melalui himpunan Cantor, yang merupakan salah satu contoh fraktal, dalam seksi ini kita berupaya mempelajari elemen-elemen penting yang dimiliki fraktal.

Ada dua elemen penting fraktal yaitu kontraksi dan iterasi. Pada himpunan Cantor kita memperoleh pemetaan kontraksi pada setiap iterasi. Titik tolak himpunan Cantor adalah garis real dalam interval $E_0 = [0, 1]$. Iterasi pertama menghilangkan sepertiga tengah interval tersebut. Sehingga dihasilkan $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Iterasi kedua menghasilkan $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Uraian teks Bahasa Indonesia mengenai himpunan Cantor dapat diperoleh pada Soemantri (2004 hal. 3.11 – 3.15)

Kita dapat memandang interval $[0, \frac{1}{3}]$ pada iterasi pertama sebagai pemetaan kontraksi pertama dari himpunan interval E_0, sedangkan hasil dari pemetaan kontraksi yang kedua menghasilkan interval $[\frac{2}{3}, 1]$. Pemetaan kontraksi pertama dapat disimbolkan dengan f_1 dan yang kedua f_2. Baik f_1 dan f_2 mengkontraksi E_0 dengan skala masing-masing $\frac{1}{3}$. Jadi

$$f_1[E_0] = [0, \frac{1}{3}]$$

$$f_2[E_0] = [\frac{2}{3}, 1]$$

$$E_1 = f_1[E_0] \cup f_2[E_0]$$

Kemudian

$$f_1[E_1] = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$$

$$f_2[E_1] = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

$$E_2 = f_1[E_1] \cup f_2[E_1]$$

Iterasi dapat dilakukan berkali-kali sampai tak hingga, sehingga himpunan Cantor yang diperoleh adalah (kita simbolkan dengan $\mathcal{C}$)

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \mathcal{C}$$

Pada $\mathcal{C}$ berlaku ketentuan

$$\mathcal{C} = f_1[\mathcal{C}] \cup f_2[\mathcal{C}]$$

Persamaan dengan bentuk di atas disebut **persamaan referensi diri** (*self-referential equation*). Sedangkan himpunan Cantor ($\mathcal{C}$) disebut **atraktor atau himpunan invarian**. Fungsi-fungsi f_1 dan f_2 merupakan pemetaan kontraksi dengan skala kontraksi $r_1 = \frac{1}{3}$ dan $r_2 = \frac{1}{3}$. Pemetaan kontraksi pada dasarnya adalah **keserupaan diri** (*self-similiarity*) karena petanya "serupa" dengan domainnya, hanya berbeda skalanya saja. Bila himpunan invarian dipandang sebagai bangunan geometri, maka pemetaan kontraksi menyusutkan ukuran bangun tersebut namun mengkonservasi keseluruhan bentuknya.

Sifat dari himpunan Cantor adalah tertutup, terbatas, tak terbilang, dan ukuran "panjangnya" nol (Soemantri, 2004, 3.13). Hal ini merupakan kejanggalan, sebab fakta ini merupakan contoh penyangkal (*counterexample*) atas teori ukuran. Dalam teori ukuran (Lebesgue) dinyatakan bahwa suatu himpunan berukuran nol apabila kardinalitasnya terbilang atau terhitung (*countable*), sedangkan himpunan Cantor berkardinalitas tak terhitung (*uncountable*) (Gordon, 1994 hal. 2). Kejanggalan ini merupakan suatu motivasi untuk mencari ukuran "yang lebih baik" yang kemudian dalam makalah ini ditawarkan oleh ukuran Hausdorff.

Kemudian kita akan menuju kepada pengertian yang lebih formal. Namun sebelum itu perlu disinggung sedikit mengenai ruang metrik. Karena kita berurusan dengan kontraksi, maka perlulah kita memiliki pemahaman tentang ukuran jarak sehingga kita dapat menilai bahwa suatu himpunan menyusut (berkontraksi) ukurannya. Fraktal adalah himpunan bagian dari suatu ruang metrik. Penulis dalam hal ini merujuk pada teks standar yang digunakan di Universitas Terbuka.

Definisi **ruang metrik** (Soemantri, 2012, hal. 5.15) adalah himpunan S yang dilengkapi dengan suatu **metrik**. Sedangkan apa yang dimaksud dengan metrik adalah suatu fungsi $d: S \times S \to R$ yang memenuhi sifat:

a. $d(x, y) \geq 0$

b. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c. $d(x, y) = d(y, x)$

d. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Suatu sistem himpunan $\mathcal{A}$ yang berada dalam ruang metrik S disebut **aljabar $\boldsymbol{\sigma}$** atau **lapangan $\boldsymbol{\sigma}$** apabila memenuhi sifat (cf. Rogers, 1970, hal. 5; Edgar, 2008, hal. 147):

a. $\emptyset \in \mathcal{A}$

b. Jika $A \in \mathcal{A}$, maka $S \backslash A \in \mathcal{A}$

c. Jika $A_i \in \mathcal{A}$ untuk $i = 1, 2, \ldots$, maka $\bigcup_{i=1}^{i=\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Himpunan Borel dari S adalah himpunan aljabar σ minimal yang memuat himpunan terbuka dalam S (cf. Rogers, 1970, hal. 22; Edgar, 2008, hal. 147).

Akibat penambahan aljabar σ dan himpunan Borel pada ruang metrik S, menyebabkan suatu himpunan (bagian) F dari ruang metrik tersebut dapat ditutupi oleh **selimut-selimut** (*covers*) terbuka sedemikian rupa sehingga berlaku hubungan

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Jika setiap selimut terbuka A untuk F memuat subselimut berhingga maka F dari ruang metrik S dikatakan **kompak** (Soemantri, 2012, hal. 6.22). Menyebut suatu himpunan kompak sama saja dengan mengatakan bahwa himpunan itu **kompak barisan**, memiliki **sifat Heine-Borel**, dan memiliki **sifat Bolzano-Weierstrass** (cf. Soemantri, 2012, hal. 6.28).

Sifat selanjutnya yang akan didiskusikan adalah **sifat dapat dipisahkan** (*separable*). Sifat ini dapat dinyatakan dalam tiga proposisi yang ekuivalen berikut: (1) ruang metrik S dapat dipisahkan apabila terdapat himpunan terhitung D yang merupakan densitas (*dense*) dalam S; (2) terdapat basis himpunan-himpunan terbuka dalam S yang terhitung; (3) setiap selimut terbuka S memiliki subselimut yang terhitung (Edgar, 2008, hal. 57 – 58). Bukti ketiga proposisi ini dapat dilihat pada Edgar (2008 hal. 58). Kumpulan himpunan terbuka adalah basis jika setiap himpunan terbuka ruang tersebut merupakan gabungan yang mungkin tak hingga dari himpunan-himpunan terbuka dari suatu basis (Hurewicz & Wallman, 1941 hal. 157).

Jika $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ merupakan dua sistem himpunan, $\mathcal{B}$ dikatakan subordinat (*subordinate*) dari $\mathcal{A}$ apabila untuk setiap $B \in \mathcal{B}$ terdapat $A \in \mathcal{A}$ di mana berlaku $B \subseteq A$. Melalui ketentuan ini $\mathcal{B}$ juga disebut sebagai **penghalusan** (*refinement*) dari $\mathcal{A}$ (Edgar, 2008 hal. 86). Untuk $n \geq -1$,

orde (*order*) dari $\mathcal{A}$ adalah $\leq n$ jika terdapat himpunan kosong pada setiap $n+2$ irisan himpunan bagiannya (Edgar, 2008 hal. 91). Jika $n \geq 0$, maka $\mathcal{A}$ berorde n jika ia memiliki orde $\leq n$, namun bukan $\leq n+1$.

Pada seksi di bawah akan dijelaskan bagaimana keterkaitan metrik dengan ukuran dan akhirnya dimensi suatu himpunan. Untuk menghitung ukuran suatu himpunan kita perlu mendekomposisi himpunan itu atas himpunan-himpunan bagian yang dalam hal ini erat kaitannya dengan selimut-selimut. Pada seksi di bawah melalui restriksi kita dapat memperoleh $F = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Pada ilustrasi himpunan Cantor $\mathcal{C}$ di atas, kita melihat bahwa $\mathcal{C}$ dapat didekomposisi atas himpunan-himpunan bagian yang merupakan peta kontraksinya. Dengan kata lain selimut-selimut dari F dapat dipandang sebagai hasil peta-peta dari pemetaan kontraksi atas F. Hal ini membuat penting pembahasan pemetaan atau fungsi dari ruang metrik ke ruang metrik.

Suatu fungsi $f: S \to S$ dinamakan **kontraksi** dari F jika terdapat bilangan positif $r < 1$ (dinamakan **rasio kontraksi**) sedemikian sehingga (cf. Soematri, 2012, hal. 7.22, Edgar, 2008)

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq r\, d(x, y), \forall x, y \in F$$

Fungsi tersebut dikatakan **fungsi Lipschitz** memenuhi **kondisi Lipschitz** apabila terdapat sembarang bilangan B di mana

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq B\, d(x, y), \forall x, y \in F$$

Mudah untuk mengatakan bahwa fungsi kontraksi memenuhi kondisi Lipschitz. Fungsi kontraksi ini disebut juga **keserupaan**.

Sampai di sini penulis ingin memberikan catatan bahwa pada umumnya pemetaan dari ruang metrik ke ruang metrik dapat melibatkan dua ruang metrik yang berbeda atau yang dapat diekspresikan sebagai $f: S \to T$. Namun pada makalah ini penulis membatasi diri pada kasus $T = S$, yang merupakan pemetaan kontraksi pada ruang metrik yang sama.

Selanjutnya suatu fungsi $f: S \to S$ dikatakan **kontinu pada titik** x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dan untuk semua $y \in S$ berlaku hubungan jika $d(x, y) < \delta$ maka $d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ (cf. Edgar, 2008, hal. 50). Apabila f kontinu pada $\forall x \in S$, maka f disebut **fungsi kontinu**. Jika terdapat $B\delta < \varepsilon$, maka fungsi Lipschitz adalah fungsi kontinu dan demikian pula fungsi kontraksi merupakan fungsi kontinu.

Sekarang kita telah siap untuk memberikan pengertian yang lebih formal terhadap fraktal melalui sistem fungsi teriterasi. Suatu **sistem fungsi teriterasi** (*iterated system function*) yang merealisasikan kumpulan rasio kontraktif $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$ dalam ruang metrik S adalah kumpulan fungsi $(f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n)$, di mana $f_i: S \to S$ merupakan keserupaan dengan rasio r_i.

Nilai keserupaan dari suatu kumpulan rasio kontraktif $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$ adalah bilangan positif s yang berlaku hubungan

$$\sum_{i=1}^{n} r_i{}^s = 1$$

Melalui pengertian formal di atas kita dapat menjelaskan beberapa contoh fraktal lainnya. Yang pertama **kurva Koch**. Pandang suatu interval tertutup yang dengan faktor kontraksi $\frac{1}{3}$ kita menghilangkan $\frac{1}{3}$ bagian tengah interval tersebut dan menyisakan 2 interval di sisi kiri dan kanan seperti pada iterasi himpunan Cantor yang berukuran sama. Tetapi pada kurva Koch bagian tengahnya kita tambahkan dua ruas garis berukuran yang sama dengan salah satu ujung tiap ruas berhubungan dengan ujung ruas lain yang berdekatan. Jadi bagian tengahnya berbentuk segitiga sama sisi dengan basis dihilangkan. Dengan demikian pada tiap iterasi kita memperoleh kurva terdiri 4 ruas garis berukuran sama dengan skala kontraksi $\frac{1}{3}$ dari interval awal.

Persamaan referensi diri pada kurva Koch ($\mathcal{K}$) diperoleh melalui jalan

$$K_1 = f_1[K_0] \cup f_2[K_0] \cup f_3[K_0] \cup f_4[K_0]$$

$$K_2 = f_1[K_1] \cup f_2[K_1] \cup f_3[K_1] \cup f_4[K_1]$$

$$\mathcal{K} = \lim_{n\to\infty} K_n$$

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{i=4} f_i[\mathcal{K}] \ , r_i = \frac{1}{3} \ , n = 4$$

Karpet Sierpinski adalah fraktal yang awal iterasinya dimulai dari suatu segitiga sama sisi. Dengan skala kontraksi $\frac{1}{2}$ pada tiap sisinya maka segitiga sama sisi awal dapat disusun atas 4 segitiga sama sisi yang berukuran $\frac{1}{4}$ kalinya, yakni segitiga atas, tengah, kiri dan kanan. Pada tiap iterasi karpet Sierpinski bagian segitiga tengah dari tiap segitiga yang tersisa dihilangkan. Jadi pada tiap iterasi kita memperoleh 3 segitiga dengan skala kontraksi $\frac{1}{2}$ pada ketiga sisi segitiga di awal iterasi.

Persamaan referensi diri pada karpet Sierpinski ($\mathcal{S}$) diperoleh melalui jalan

$$S_1 = f_1[S_0] \cup f_2[S_0] \cup f_3[S_0]$$

$$S_2 = f_1[S_1] \cup f_2[S_1] \cup f_3[S_1] \cup f_4[S_1]$$

$$\mathcal{S} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{i=3} f_i[\mathcal{S}] \;, r_i = \frac{1}{2} \;, n = 3$$

Contoh terakhir adalah **spons Menger**. Ia dibentuk dari awal iterasi oleh suatu kubus. Dengan skala kontraksi $\frac{1}{3}$ pada setiap sisi kubus awal, maka ia dapat dikomposisi oleh 27 kubus yang berukuran sama. Pada iterasi spons Menger, tiap iterasinya menghilangkan 7 kubus yakni 6 kubus pada bagian tengah di keenam muka kubus dan 1 kubus dibagian tengah dalam, sehingga tersisa 20 kubus.

Persamaan referensi diri pada spons Menger ($\mathcal{M}$) diperoleh melalui jalan

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{i=20} f_i[M_0]$$

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^{i=20} f_i[M_1]$$

$$\mathcal{M} = \lim_{n\to\infty} M_n$$

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{i=20} f_i[\mathcal{M}] \;, r_i = \frac{1}{3} \;, n = 20$$

Kita melihat bahwa pada contoh-contoh di atas pada setiap iterasi selalu ada bagian himpunan awal yang dihilangkan. Mandelbrot menyebutkan bagian yang dihilangkan tersebut sebagai **trema** dari bahasa Yunani yang berarti lubang (Edgar, 2008 hal. 8). Fraktal seringkali menghasilkan ilustrasi bangun geometris yang menarik bahkan memukau. Meski dalam makalah ini penulis tidak menampilkan gambar-gambar, namun penulis mendorong pembaca agar melihat gambar-gambar fraktal pada literatur-literatur terkait seperti dalam Edgar (2008), Mandelbrot (1983), Falconer (1990 & 2003) dan lainnya atau melalui internet.

Dimensi Topologis

Sebelum kita mendiskusi lebih lanjut perihal dimensi fraksional pertama-tama penulis dalam seksi ini bermaksud untuk mengangkat pengertian dimensi biasa yang bernilai bulat. Dimensi ini disebut dimensi topologis (*topological dimension*). Ada 3 jenis dimensi topologis: dimensi induktif kecil, dimensi induktif besar, dan dimensi selimut Lebesgue.

Bagaimana kita menentukan bahwa garis berdimensi 1, bidang berdimensi 2 dan ruang dimensi 3? Menjawab hal ini, ahli matematika Prancis Poincaré pada tahun 1912 berpendapat bahwa apabila kita dapat memotong kontinuum suatu bangun dengan bangun berdimensi 1 maka bangun tersebut berdimensi 2, bila suatu kontinuum bangun dapat dipotong dengan bangun berdimensi 2 bangun tersebut berdimensi 3 (cf. Hurewicz & Wallman, 1941 hal. 3). Jadi suatu bidang berdimensi 2 sebab ia dapat dipotong oleh garis yang berdimensi 1. Garis sendiri dapat dipotong oleh titik, sehingga titik dianggap sebagai bangun yang berdimensi 0. Demikian pula suatu ruang dapat dipotong oleh bidang yang berdimensi 2 sehingga ruang berdimensi 3.

Bila kita umumkan pendapat Poincaré tersebut maka kita mengatakan suatu bangun geometri berdimensi n apabila kontinuum bangun tersebut dapat dipotong oleh bangun berdimensi $n-1$. Bangun berdimensi $n-1$ yang memotong kontinuum tersebut sering dikaitkan juga dengan batas atau permukaan dari bangun yang berdimensi n.

Konsep batas (*boundary*) di atas merupakan bagian penting untuk mendefinisikan dimensi induktif kecil (disimbolkan ind). Jika k adalah bilangan bulat tak negatif $(0, 1, 2, ...)$ kita mengatakan **dimensi induktif kecil dari ruang metrik S** atau $ind\ S \leq k$ apabila terdapat basis bagi himpunan-himpunan terbuka dalam S yang terdiri dari himpunan-himpunan U dengan $\partial U \leq k-1$ (Edgar, 2008 hal. 104). ∂U merupakan batas dari himpunan U, bila himpunan U ditafsirkan sebagai bangun geometris, maka ∂U adalah permukaannya. $ind\ S = k$ apabila $ind\ S \leq k$ namun $ind\ S \nleq k-1$ dan jika $ind\ S \leq k$ tidak berlaku untuk semua bilangan bulat, maka $ind\ S = \infty$. Dimensi induktif kecil juga disebut **dimensi Urysohn-Menger**.

Melalui pengertian di atas kita mengamati bahwa bila U merupakan kumpulan titik yang diskrit (berdimensi 0), maka batas dari masing-masing titik-titik tersebut tersebut adalah himpunan kosong $\emptyset$ yang memiliki nilai $\partial U = 0 - 1 = -1$. Ini berarti bahwa dimensi dari himpunan kosong adalah -1. Karena batasnya nol, titik-titik terbatas pada diri mereka sendiri sehingga titik-titik atau ruang berdimensi nol merupakan himpunan terbuka tapi sekaligus tertutup.

Selanjutnya kita mengatakan **dimensi induktif besar dari ruang metrik S** atau $Ind\ S \leq k$ apabila dua himpunan tertutup yang tidak beririsan dalam S dapat dipisahkan oleh himpunan L dengan $\partial L \leq k-1$ (Edgar, 2008, hal. 107). $Ind\ S = k$ apabila $Ind\ S \leq k$ namun $Ind\ S \nleq k-1$ dan jika $Ind\ S \leq k$ tidak berlaku untuk semua bilangan bulat, maka $Ind\ S = \infty$. Dimensi induktif besar juga dapat disebut dengan nama **dimensi Čech**.

Pada ruang metrik S, jika $n \geq -1$, **dimensi selimut Lebesgue** atau disimbolkan dengan $\dim S$ adalah $\dim S \leq n$ jika setiap selimut terbuka hingga dari S memiliki penghalusan yang berorde $\leq n$ (cf. Edgar, 2008 hal. 92). $\dim S = n$ jika $\dim S \nleq n-1$ dan jika $\dim S \nleq n$ untuk semua bilangan bulat, maka $\dim S = \infty$. Bila dimensi selimut Lebesgue suatu himpunan bernilai

n, mengingat ia juga berorde n, maka himpunan kosong dapat diperoleh dari sejumlah irisan $n + 2$ selimut.

Secara umum untuk S suatu ruang metrik, $ind\ S \leq Ind\ S = \dim S$. Namun pada ruang metrik kompak S berlaku $ind\ S = Ind\ S = \dim S$. Selanjutnya untuk ruang metrik kompak penulis menyamakan sebutan dimensi topologis dengan dimensi selimut Lebesgue.

Himpunan Cantor terdiri dari titik-titik terisolasi yang merupakan himpunan terbuka dan sekaligus tertutup sehingga dapat dibuat selimut-selimut di mana irisan tiap 2 selimutnya diperoleh himpunan kosong. Jadi himpunan Cantor berdimensi topologis 0 (Edgar, 2008 hal. 105). Karpet Sierpinski berdimensi topologis 1 (bukti lihat Edgar, 2008 hal. 97). Kurva Koch berdimensi topologis 1 (Edgar, 2008 hal. 114). Spons Menger berdimensi topologis 1.

Jadi dari sudut pandang dimensi topologis himpunan Cantor "disamakan" dengan himpunan titik-titik diskrit (terisolasi). Kurva Koch, Karpet Sierpinski dan spons Menger "disamakan" dengan garis. Kita akan melihat di bawah bahwa dimensi fraksional dari contoh-contoh fraktal di atas pada kenyataanya melebih dimensi topologisnya.

Ukuran dan Dimensi Hausdorff

Panjang suatu garis, luas suatu area dan volume suatu benda padat dapat diperumum ke dalam konsep ukuran (*measures*). Ukuran pada dasarnya adalah fungsi himpunan. Ia mengukur himpunan. Garis, area dan benda padat dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik. Ukuran Lebesgue dipergunakan untuk himpunan berdimensi n, di mana n merupakan bilangan bulat lebih besar atau sama dengan -1.

Dalam makalah ini penulis tidak akan membahas teori ukuran. Bagi pembaca yang berminat dapat membaca literatur klasik mengenai topik ini yang dipersiapkan khusus untuk sebagai pengantar kepada ukuran Hausdorff seperti Ferderer (1969) dan Rogers (1970), serta yang lebih modern seperti Krantz & Parks (2008) dan Edgar (2008).

Untuk mengukur objek-objek atau himpunan berdimensi fraksional seperti yang telah dicontohkan di atas, ukuran Lebesgue tidak lagi memuaskan. Untuk itu dikembangkan ukuran "baru" yang memberikan nilai yang lebih akurat pada fraktal. Nilai dimensi Lebesgue selalu berupa bilangan bulat, sedangkan dimensi untuk fraktal nilai dapat berupa bilangan irasional.

Ada beberapa pendekatan untuk menghitung ukuran himpunan berdimensi fraksional. Krantz & Parks (2008) menyebutkan ada delapan jenis ukuran. Sedangkan Edgar (2008) membahas dengan cukup panjang lebar dua ukuran untuk himpunan berdimensi fraksional yakni dimensi Hausdorff dan dimensi bungkus (*packing dimension*), serta sedikit membahas tentang dimensi kotak (*box dimension*). Di antara berbagai ukuran tersebut, Taylor dan Tricot berpendapat bahwa ukuran fraktal yang paling baik diketahui adalah ukuran Hausdroff (c.f. Edgar, 1994). Dalam makalah ini hanya akan dibahas ukuran Hausdorff.

Ambilah suatu bangun geometri yang dapat dipandang sebagai suatu himpunan F (dapat berupa fraktal) dalam ruang metrik S, maka kita dapat menutup F dengan selimut-selimut (*covers*) atau dapat dinotasikan sebagai

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Di sini $\mathcal{A}$ adalah sistem himpunan yang dilengkapi dengan aljabar σ. Ukuran F dapat diperoleh dengan mengoptimalisasi jumlah ukuran selimut-selimutnya.

Bila ukuran luar (dapat berupa ukuran luar Lebesgue) dari himpunan A adalah $(diam\ A)^p \leq \varepsilon$ kita mendefinisikan **ukuran luar Hausdorff** (*Hausdorff outer measure*) atas F sebagai

$$\bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{p}(F) = inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (diam\ A)^p$$

Yang dimaksud p di atas tidak lain dan tidak bukan adalah nilai dimensi Hausdorff (H) yang merupakan salah satu dimensi fraksional. Secara intuitif “volume” atau ukuran A yang berdimensi p kita tuliskan sebagai $(diam\ A)^p$, sehingga $diam\ A$ dapat ditafsirkan sebagai “panjang sisi” bangun A. Kita dapat memandang juga $diam\ A$ sebagai jarak dalam ruang metrik S dengan ketentuan metrik $d(x, y) = |x - y|$ untuk $\forall x, y \in S$, dan $diam\ A = \sup d(x, y) = \sup|x - y|$ untuk $\forall x, y \in A$ dan A merupakan himpunan bagian dari S (Morgan, 2000 hal. 8; Edgar, 2008 hal. 45).

Ukuran luar Hausdorff akan mencapai optimal melalui penghalusan $\varepsilon \to 0$ dan dapat dituliskan sebagai berikut

$$\bar{\mathcal{H}}^{p}(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{p}(F) = sup_{\varepsilon > 0} \bar{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{p}(F)$$

Selanjutnya akan diandaikan F dapat direduksi sedemikian rupa sehingga ia dapat dipartisi oleh himpunan-himpunan bagian atau selimut-selimut yang terhitung yang mengakibatkan

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

di mana $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan n dapat tidak hingga. Hal ini menyebabkan ukuran (Hausdorff) menjadi bersifat aditif terhitung (*countably additive*) yang dapat diekspresikan sebagai berikut

$$\mathcal{H}^p(F) = \sum_{i=1}^{n} (diam\ A_i)^p$$

Di sini $\mathcal{H}^p$merupakan restriksi $\overline{\mathcal{H}}^p$ atas F di mana F merupakan keluarga atau sistem himpunan yang dilengkapi dengan aljabar σ dan bersifat aditif terhitung (Edgar, 2008, hal. 150 – 152, 166).

Karena fraktal dicirikan pula dengan adanya pemetaan kontraksi dan sistem fungsi teriterasi, untuk itu dapat diandaikan bahwa sistem fungsi teriterasi terdiri dari pemetaan kontraksi $(f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n)$ yang memenuhi kondisi Lipschitz. Sedangkan $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$ merupakan rasio kontraksi dari sistem tersebut. Sebagaimana telah dipaparkan pada seksi sebelumnya bahwa pada sistem fungsi teriterasi berlaku persamaan

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^s = 1$$

Bila kita kalikan persamaan di atas dengan $\mathcal{H}^p(F)$ akan menghasilkan

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^s\, \mathcal{H}^p(F) = \mathcal{H}^p(F)$$

Tetapi kita ingat bahwa F dapat dipartisi menjadi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^s\, \mathcal{H}^p(F) = \mathcal{H}^p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^p\,(A_i)$$

Dari persamaan di atas kita memperoleh hubungan

$${r_i}^s \mathcal{H}^p(F) = \mathcal{H}^p(A_i) = (diam\ A_i)^p$$

Karena $A_i \subset F$, maka kita dapat mengambil suatu pemetaan kontraksi $g_i: F \to A_i$ dengan rasio kontraksi q_i sehingga $A_i = g_i[F]$

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^s\, \mathcal{H}^p(F) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^p\,(g_i[F]) = \sum_{i=1}^{n} (diam\ A_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (q_i\ diam\ F)^p = (diam\ F)^p \sum_{i=1}^{n} (q_i)^p$$

Solusi untuk persamaan di atas dapat diperoleh jika $\mathcal{H}^p(F) = (diam\ F)^p$ dan $q_i = r_i$, sehingga $g_i = f_i$. Kemudian dari hubungan ${r_i}^s \mathcal{H}^p(F) = \mathcal{H}^p(A_i) = (diam\ A_i)^p$ kita akan mendapatkan

$${r_i}^s \mathcal{H}^p(F) = \mathcal{H}^p(f_i[F]) = (r_i\ diam\ F)^p = {r_i}^p (diam\ F)^p = {r_i}^p \mathcal{H}^p(F)$$

Solusi persamaan terakhir ini dapat diperoleh saat $s = p$. Dengan demikian jika F adalah fraktal dengan sistem fungsi teriterasi f_i, r_i merupakan rasio kontraksinya dan s nilai keserupaannya, maka dimensi Hausdorff (H) dari F adalah $H(F) = s$. Kita juga dapat mengatakan bahwa _pada fraktal nilai dimensi fraksionalnya (Hausdorff) sama dengan nilai keserupaannya_. Ketentuan ini berlaku saat antar selimut tidak banyak saling tumpang tindih (*overlap*). Pada kenyataannya selimut-selimut yang dikonstruksi di atas bersifat aditif terhitung atau irisan antar selimut-selimut adalah himpunan kosong.

Pada kasus terjadi tumpang tindih yang cukup besar antar selimut, maka dimungkinkan $H(F) < s$ (Edgar, 2008, hal 185). Hal ini juga berlaku pada dimensi selimut Lebesgue sehingga mengakibatkan $\dim(F) < H(F) = s$ untuk $F = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{n+1} U_i \neq \emptyset$, saat F merupakan ruang metrik kompak. Bukti lengkap atas perrnyataan ini dapat diperoleh pada Edgar (2008, hal. 183 – 184). Ini membuktikan pernyataan Mandelbrot bahwa fraktal adalah himpunan F di mana berlaku dimensi Hausdroff melampaui dimensi topologis atau $\dim(F) < H(F)$.

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep dimensi Hausdorff pada contoh-contoh fraktal yang disebutkan dalam makalah ini. Pada contoh-contoh di sini semua bagian bangun yang disusutkan memiliki rasio kontraksi yang sama, jadi $r_i = r_j = r$ sehingga melalui rumusan nilai keserupaan diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} {r_i}^s = nr^s = 1$$

$$s = \frac{\log \frac{1}{n}}{\log r}$$

Dalam formula di atas n adalah jumlah bangun yang dikontraksikan pada setiap iterasi. Pada himpunan Cantor $r = \frac{1}{3}$ dan $n = 2$, maka $H = s = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{3}} \approx 0{,}6309$; kurva Koch $r = \frac{1}{3}$ dan $n = 4$, maka $H = s = \frac{\log\frac{1}{4}}{\log\frac{1}{3}} \approx 1{,}262$; karpet Sierpinski $r = \frac{1}{2}$ dan $n = 3$, maka $H = s = \frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{2}} \approx 1{,}585$; spons Menger $r = \frac{1}{3}$ dan $n = 20$, maka $H = s = \frac{\log\frac{1}{20}}{\log\frac{1}{3}} \approx 2{,}7268$.

Jadi bila dipandang dari perspektif dimensi fraksional himpunan Cantor berdimensi melebihi dimensi titik-titik, tapi ia masih di bawah dimensi garis. Ia bukan titik, namun bukan juga garis. Ia merupakan bangun geometris yang hakekatnya berada di antara keduanya. Karpet Sierpinski dan kurva Koch berdimensi lebih tinggi daripada dimensi garis, namun masih di bawah dimensi bidang. Dimensi fraksional karpet Sierpinski > dimensi fraksional kurva Koch, sehingga dengan demikian ia dapat ditafsirkan sebagai bangun geometris yang “lebih mendekati bidang” daripada kurva Koch. Untuk itu barangkali tepat bila sebutan “kurva” memperlihatkan sifat yang “lebih mendekati garis” atau kurva (dim 1), sedangkan sebutan “karpet” menunjukan sifat “lebih mendekati bidang” (dim 2). Spons Menger (dim 1) melampaui dimensi topologisnya dua kali. Ia melampaui dimensi garis (dim 1), dan ia melampaui juga dimensi bidang (dim 2). Ia merupakan bangun geometris yang berdimensi mendekati ruang.

Kesimpulan

Fraktal menurut Mandelbrot adalah himpunan yang dimensi fraksionalnya (Hausdorff) melebihi dimensi topologisnya. Elemen penting dari fraktal ialah bahwa ia memiliki sistem fungsi teriterasi f_i di mana r_i merupakan realisasi rasio kontraksi dari fungsi tersebut dan antar rasio tersebut dihubungkan melalui persamaan $\sum_{i=1}^{n} r_i{}^s = 1$. Di sini s adalah nilai keserupaan.

Dimensi Hausdorff yang merupakan dimensi fraksional yang dibahas di sini dapat didefinisikan melalui ukuran Hausdorff dari suatu himpunan. Ukuran Hausdorff atas suatu himpunan F dinyatakan sebagai berikut

$$\mathcal{H}^p(F) = \sum_{i=1}^{n} (diam\ A_i)^p$$

Di sini $diam\ A_i$ adalah ukuran atau jarak metrik terpanjang dari selimut-selimut F dan p adalah dimensi Hausdorff.

Dimensi Hausdorff nilainya sama dengan nilai keserupaan atau $H = p = s$. Dan pada kasus di mana selimut-selimut F tidak saling tumpang tindih atau saat ($A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$), maka $H\ (F) > \dim F$. Pada kasus di mana semua rasio kontraksi sama (r) pada sistem fungsi teriterasi berlaku

$$H = s = \frac{\log \frac{1}{n}}{\log r}$$

dan n dapat dipandang sebagai jumlah F yang dikontraksikan oleh sistem fungsi teriterasi. Untuk beberapa contoh fraktal yang dipelajari dalam makalah ini, kita dapat menampilkan perbandingan dimensi topologis dan dimensi fraksional (Hausdroff) dalam tabel sebagai berikut:

Tabel Perbandingan Dimensi Topologis ($dim\, F$) dan Dimensi Fraksional - Hausdorff ($H(F)$)

Fraktal ($\boldsymbol{F}$)	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{dim}\, \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{F})$
Himpunan Cantor	1/3	2	0	$0{,}6309$
Kurva Koch	1/3	4	1	$1{,}262$
Karpet Sierpinski	1/2	3	1	$1{,}585$
Spons Menger	1/3	20	1	$2{,}7268$

Daftar Pustaka

Edgar, Gerald, *Packing Measure as A Gauge Variation*, Proceedings of American Mathematical Society, Vol. 122, No. 1, Sept. 1994

Edgar, Gerald, *Classics on Fractals*, Colorado, Westview Press, 2004

Edgar, Gerald, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, 2nd edition, Springer, 2008

Falconer, Kenneth, *Fractal Geometry, Mathematical Foundation and Application*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990

Falconer, Kenneth, *Fractal Geometry, Mathematical Foundation and Application*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Chichester, 2003

Federer, Herbert, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969

Gordon, Russel A., *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, 1994

Hurewicz, Witold, Wallman, Henry, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1941

Mandelbrot, Benoit B., *The Fractal Geometry of Nature, Updated and Augmented*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983

Morgan, Frank, *Geometric Measure Theory, A Beginner's Guide*, 3rd edition, Academic Press, California 2000

Krantz, Stevan G., Parks, Harold R., *Geometric Integration Theory*, Birkhauser, Boston, 2008

Rogers, C. A., *Hausdorff Measures*, Cambridges University Press, 1970

Soemantri, R., *Analisis II*, Edisi Kesatu, Pusat Penerbitan Universitas Terbuka, 2004

Soemantri, R., *Analisis II*, Edisi Kedua, Penerbit Universitas Terbuka, Tangerang Selatan, 2012