

APLIKASI METODE MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN (MLPG) PADA PERMASALAHAN MODEL SEDIMENTASI SUNGAI SHAZY SHABAYEK

¹Sofwan Hadi, ²Basuki Widodo

¹Mahasiswa S2 Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya ²Dosen Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Email Korespondensi: mas_sofwan@yahoo.com

ABSTRAK

MLPG merupakan salah satu metode numerik yang mulai dikembangkan akhir-akhir ini. MLPG mempunyai keunggulan karena tidak menggunakan mesh dalam menyelesaikan suatu model. Hal ini tentunya sangat bagus, karena dengan tanpa menggunakan mesh, tingkat ketelitiannya bisa semakin akurat. MLPG bisa diterapkan untuk hal-hal yang berkaitan dengan Fluida. Akan tetapi perlu adanya beberapa penelitian lebih lanjut guna menerapkan metode tersebut. Penelitian ini menerapkan Metode MLPG terhadap kasus model sedimentasi Shazy Shabayek. Model sedimentasi Shazy Sabayek ini melihat aliran (flow) sungai pada percabangan di Sungai utama (mainstream). Sehingga dengan menggunakan MLPG, bisa diketahui pola penyebaran sedimentasi pada percabangan sungai tersebut. Harapannya setelah model sedimentasi ditemukan, bisa diprediksi sejauh mana tingkat sedimentasi di percabangan anak sungai. Berdasarkan informasi sedimentasi tersebut, bisa diolah untuk mengambil keputusan mengatasi masalah- masalah sedimentasi di sungai.

PENDAHULUAN

Sungai merupakan tempat mengalirnya air. Sungai berfungsi sebagai alat transportasi, sumber bahan baku tenaga listrik, tempat pembuangan akhir. Pada perkotaan sungai digunakan sebagai peresap air ketika hujan. Karena itu sungai merupakan bagian yang penting dari suatu kota. Bisa dibayangkan, bagaimana akibat yang ditimbulkan jika sungai dalam suatu kota tersumbat. Bisa terjadi banjir yang diakibatkannya. Ada beberapa alasan kenapa banjir bisa terjadi, salah satunya adalah karena pengendapan sedimentasi pada sungai tersebut. Ada banyak faktor yang bisa mengakibatkan sungai mengalami banjir. Salah satunya pengendapan sungai pada percabangan sungai. Sehingga diperlukan beberapa analisis yang detail guna mengatasi seberapa jauh sedimentasi sungai sehingga mempengaruhi mengakibatkan banjir. Sedimentasi di sungai banyak sekali terjadi di Indonesia. Contohnya Sungai Citandui Jawa Barat, memecahkan rekor dengan sedimentasi pertahun yang terbawa aliran sungai ini mencapai 5 juta m kubik. Sementara, sungai Cikonde mencapai 770 ribu meter kubik yang diendapkan di Segara Anakan. Sedimentasi sungai Barito mencapai mencapai 733 ribu m kubik yang diendapkan di pelabuhan pelabuhan Banjarmasin, Kalimantan. Sedang sungai Mahakam, Kalimantan sedimentasinya mencapai 2,2 juta m kubik.

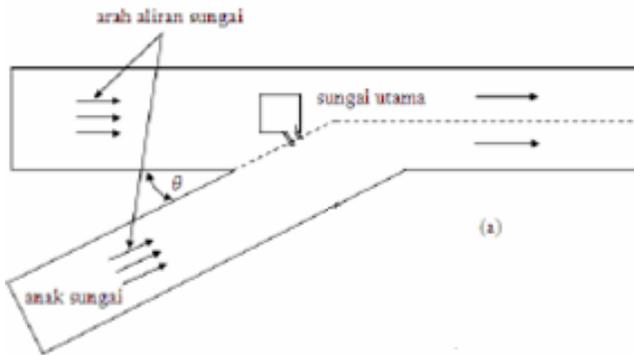
Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) salah satu metode yang digunakan dalam matematika dengan terapannya tanpa menggunakan mesh. Keistimewaan MLPG yang tidak

menggunakan mesh, diharapkan bisa lebih baik dari metode lain yang menggunakan pias. Metode MLPG diharapkan juga bisa menjadi salah satu metode yang terbaik untuk digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan sedimentasi pada sungai. Selain itu, masalah fluida khususnya yang berkaitan dengan sungai kebanyakan masih menggunakan FEM, FDM, dan FVM, karena masih menggunakan mesh untuk menyelesaikan solusinya.

Shabayek menemukan model distribusi sedimentasi pada percabangan sungai (Saidin (2010)). Pada model percabangan sungai didapatkan banyak keadaan yang bisa mengakibatkan terjadinya suatu sedimentasi. Sehingga perlu untuk diamati bagaimana pola distribusi sedimentasi Shabayek tersebut.

Matode Penelitian

Pembuatan model sungai dibuat berdasarkan model sungai pada gambar berikut:



Gambar 1. Gambar Sungai Shazy Shabayek

Model sungai tersebut dipengaruhi oleh beberapa gaya yang mempengaruhi (Apsley(2007)). Model tersebut juga mempunyai dua keadaan yaitu, pada percabangan sungai dan pada sungai utama. Diperoleh bentuk modelnya sebagai berikut ini.

Untuk kekekalan momentum pada aliran utama

Hukum Kekekalan Massa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Hukum Kekontinuan Momentum (Shabayek (2002))

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h \left(\frac{u}{c} \right)^2}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Untuk kekekalan momentum pada aliran percabangan dua sungai.

Hukum kekekalan Massa

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial hu + \rho hv \cos \theta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Hukum Kekontinuan Momentum

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial hu + \rho hv \cos \theta}{\partial x} = \rho Q v \cos \theta \quad (4)$$

Dengan h merupakan ketinggian air sungai, u merupakan kecepatan sungai utama, v kecepatan sungai pada percabangan sungai, θ sudut terkecil yang dibangun oleh dua aliran sungai, Q merupakan momentum percabangan sungai, C^* koefisien pergeseran, ρ massa jenis air, x searah panjang sungai, y searah lebar sungai, dan t waktu

Proses sedimentasi didapatkan bentuk berikut ini: (Yang (1998) dan Wu (2008))

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-\rho)} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

Dari bentuk di atas bisa dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai bentuk berikut ini:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial FU}{\partial x} + \frac{\partial GU}{\partial y} = S \quad (6)$$

Dengan U, FU, GU dan S sebagai berikut pada sungai Utama:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ (1 - R_m') z_b \end{bmatrix}$$

$$FU = \begin{bmatrix} hu \\ h\rho u^2 \\ q_{rx} \end{bmatrix}$$

$$GU = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho h \left(\frac{v}{c^*} \right)^2 \\ (1 - R_m') z_b \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk pertemuan dua sungai didapatkan bentuk U, FU, GU, dan S sebagai bentuk berikut:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu + \rho h v \cos \theta \\ (1 - R_m) z_b \end{bmatrix}$$

$$FU = \begin{bmatrix} hu \\ \rho h \left(\frac{u}{c^*}\right)^2 \\ q_{rx} \end{bmatrix}$$

$$GU = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho h \left(\frac{u}{c^*}\right)^2 \\ (1 - R_m) z_b \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho Q v \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk sederhana diatas akan diselesaikan dengan menggunakan MLPG

Pembentukan local weak, sehingga berbentuk persamaan (6) akan diintegalkan dengan menggunakan bantuan fungsi test sehingga didapatkan bentuk berikut ini.

$$\int \left(\frac{dU}{dt} + \frac{dFU}{dx} + \frac{dGU}{dy} \right) q dV = \int S dV \quad (7)$$

Persamaan (7) didsederhanakan menjadi berikut:

$$\int_x \int_y U' dy dx + \int_y FU'_{xx} dy + \int_x FU'_{yy} dy = \int_x \int_y S dy dx \quad (8)$$

Dengan q nanti merupakan fungsi heavy test, dan $U' = \frac{dU}{dt}$

Penggunaan pendekatan MLS, digunakan untuk menerapkan metode MLPG (digunakan pada penelitian Atluri (2002), Dehgan (2008) dan Careira(2006)) akan didekati dengan pendekatan MLS, adapun dalam pendekatannya dimisalkan beberapa hal sebagai berikut:

$$U_k^s(x, y, t) = P^T(x) a^k, \forall x \in V$$

Dengan $P^T = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ basis monomial berorder m, $a^k(x)$ adalah vector yang memuat koefisien-koefisien fungsi yang diperoleh dengan meminimumkan norm diskrit berbobot l_2 , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$J^k(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [p^T(x^i) a^k(x) - \hat{u}_i^k]^2 = [P \cdot a^k(x) \hat{u}^k]^T \cdot W \cdot [P \cdot a^k(x) \hat{u}^k]$$

dengan $w_i(x)$ adalah fungsi bobot dari titik x_i , dengan $w_i(x) > 0$ untuk semua x yang berada di dalam support dari $w_i(x)$, n adalah banyaknya titik yang berada di dalam domain V

Matriks \tilde{U} , P dan W didefinisikan sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} P^T(x_1) \\ P^T(x_2) \\ \dots \\ P^T(x_n) \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & w_n(x) \end{bmatrix}$$

$$\hat{U} = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \dots \ \hat{u}_n]$$

\hat{u} merupakan titik fiktif, tidak sama dengan titik U_n^k yang dikenal sebagai fungsi trial. Dengan menggunakan stasione J kita dapatkan nilai dari $a^k(x)$. diperoleh sebagai berikut :

$$A(x)a^k(x) = D(x)\hat{U}^k \quad (8)$$

Dengan matriks $A(x)$ dan $D(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A(x) = P^T A P = D(x)P = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i)$$

$$D(x) = P^T W = [w_1 p(x_1) \ w_2 p(x_2) \ \dots \ w_n p(x_n)]$$

Sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan (8) diperoleh nilai Φ sebagai berikut:

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j [A^{-1}(x)D(x)]_j$$

Φ merupakan merupakan fungsi shape. Fungsi bobot bisa didekati dengan fungsi bobot spline sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{\eta_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{\eta_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{\eta_i}\right)^4 & 0 \leq d_i \leq \eta_i \\ 0 & d_i \geq \eta_i \end{cases}$$

Persamaan Local Weak didiskritisasi dengan menggunakan pendekatan MLS sehingga diperoleh bentuk berikut, adapun langkah-langkahnya dengan mendefinisikan fungsi U sebagai berikut:

$$U_k^s(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \phi(x, y) \hat{u}_i$$

Kemudian di substitusi ke persamaan local weak sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\int_{\kappa} \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n \phi(x, y) \hat{u}_i^s dy dx + \int_{\gamma} P \sum_{i=1}^n \phi(x, y) \hat{u}_i^s dy + \int_{\kappa} G \sum_{i=1}^n \phi(x, y) \hat{u}_i^s dy = \int_{\kappa} \int_{\gamma} S dy dx$$

Nilai dari \hat{u} tidak bergantung terhadap daerah domain sehingga, nilai tersebut bisa dikeluarkan dari integral. Sehingga didapatkan bentuk berikut:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{u}_i \int_x \int_y \phi(x,y) dy dx + \sum_{i=1}^n \ddot{u}_i \left(\int_y F\phi(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} dy + \int_x G\phi(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} dx \right) = \int_x \int_y S dy dx \quad (9)$$

Misalkan

$$K = \int_x \int_y \phi(x,y) dy dx$$

$$C = \int_y F\phi(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} dy + \int_x G\phi(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} dx$$

$$f = \int_x \int_y S dy dx$$

Persamaan (9) bisa dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{u}_i K + \sum_{i=1}^n \ddot{u}_i C = f \quad (10)$$

Kalau dibentuk dalam matrik menjadi bentuk berikut:

$$K\ddot{U} + C\ddot{U} = f$$

Bentuk diatas akan diselesaikan secara numerik

Simulasi dan Pembahasan

Dengan menggunakan data sebagai berikut akan disimulasikan matriks di atas sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

kedalaman sungai (hi) = 0,9

kecepatan aliran sungai(ui) = 0.3

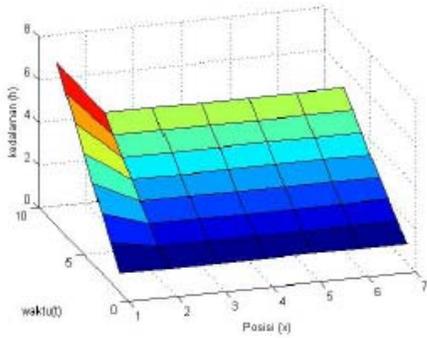
ketinggian sedimen (zbi) = 0,02

kecepatan aliran lateral (vl) = 0,5

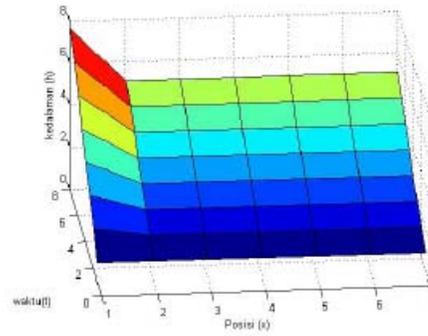
waktu (T) = 5

delta t (dt) = 0,5

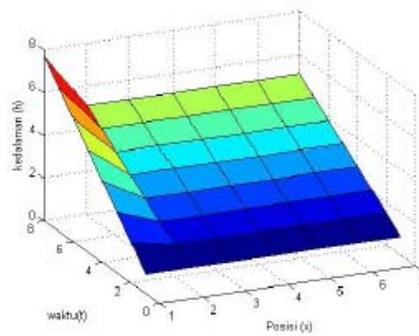
diperoleh hasil simulasi sebagai berikut untuk masing-masing sudut:



Gambar 2. Kedalaman air untuk sudut percabangan sungai = $\pi/6$

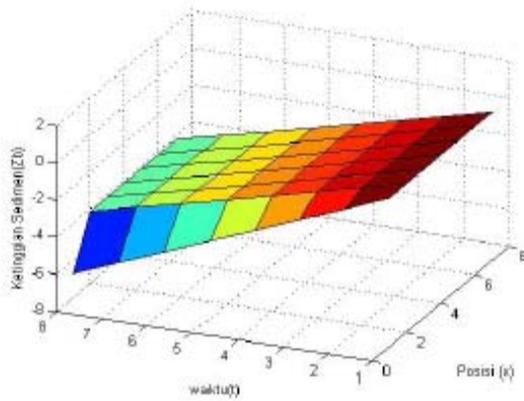


Gambar 3. Kedalaman air untuk sudut percabangan sungai = $\pi/4$

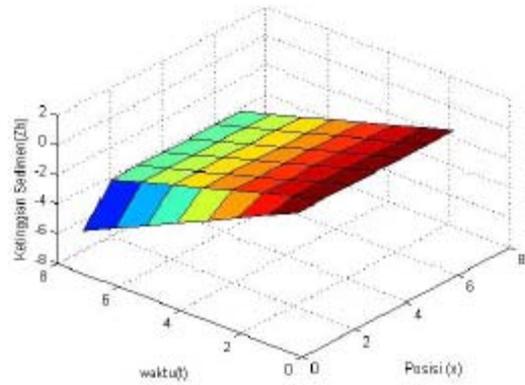


Gambar 4. Kedalaman air untuk sudut percabangan sungai = $\pi/3$

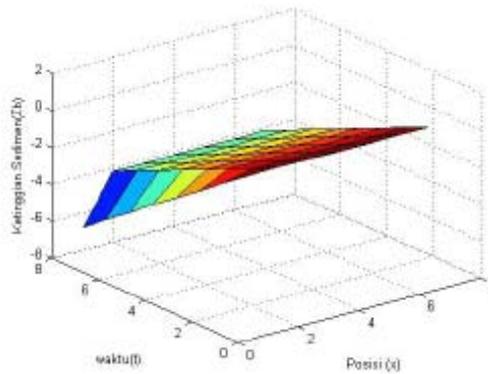
Tingkat sudut pada sungai mempunyai pengaruh kecil dengan sudut yang semakin besar. Terlihat pada jarak 2 dari raentang awal yang merupakan Kedalaman sungai menurun drastis. Untuk ketinggian sedimentasi sungai terhadap watu bisa dilihat dari hasil simulasi berikut:



Gambar 5. Ketinggian Sedimentasi Sungai Pada sudut percabangan $\pi/6$



Gambar 6. Ketinggian Sedimentasi Sungai Pada sudut percabangan $\pi/4$



Gambar 7. Ketinggian Sedimentasi Sungai Pada sudut percabangan $\pi/3$

sedimentasinya semakin kecil, pada tiap posisi. Artinya pada sedimentasi pada waktu misal 0.5 dan 0.7, dari posisi awal sedimentasi lebih besar pada waktu 0.5. Artinya sedimentasi terjadi semakin besar apabila menjauh dari sumbu-x. Untuk perbandingan tiap sudut, sudut yang semakin besar mengakibatkan semakin besar pula kejadian sedimentasi. Bisa dilihat dari kecekungan tiap kurva sudut yang terlihat semakin cekung seiring dengan pertambahan sudut.

KESIMPULAN

Metode MLPG merupakan salah satu alternatif cara yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah permodelan. Langkah-langkah dalam menyelesaikan MLPG, Pertama bentuk model dalam bentuk local weak, selanjutnya, bentuk local weak dididkritkan dengan menggunakan fungsi shape. Baru yang kemudian disusun pendekatan numeriknya. Kedalaman dari sungai berpengaruh kecil terhadap sedimentasi dari sungai, akan tetapi kedalaman sungai bisa berpengaruh jika sudut dari pertemuan dia sungai yang semakin besar. Ketinggian awal sungai mempunyai pengaruh terhadap ketinggian sedimentasi, bisa dilihat dari curva sedimentasi yang melengkung searah pertambahan waktu.

DAFTAR PUSTAKA

- Apsley, David. (2007), Computational Fluid Dynamic, New York: Spring 2007.
- Atlury dan Shen. (2002), The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equation, CMES: vol.2.no.2, pp.117- 142.
- Carreira, X.M. (2006), A twostep TaylorGalerkin algorithm applied to Lagrangian dynamics, UNIVERSITY OF WALES SWANSEA: Thesis.
- Dehghan, Mehdi dan Davoud Mirzaei. (2008), Meshless Local PetrovGalerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity, ScienceDirect: Applied Numerical Mathematics 59 (2009) 10431058
- Ma, Q.W. (2008), Meshless local PetrovGalerkin method for two-dimensional nonlinear water wave problems , ScienceDirect: Journal of Computational Physics 205 (2005) 611625
- Saidin, Miftahus. (2010), Profil Sedimentasi sungai model Shazy Shabayek, Surabaya: Tugas Akhir ITS
- Shabayek, Shazy, Peter Steffler dan Faye Hicks. (2002), Dynamic Model for subcritical Combining Flows in Channel Junctions, DOI: 10.1061/(ASCE)0733- 9429(2002)128:9(821).
- Wu, Weiming. (2008), Computational River Dynamics, London: Taylor and Francis Group.
- Yang, C.T, Timothy J Randle, dan Shiang-Kueen Hsu. (1998), Surface erosion, sediment transport, and reservoir sedimentation., Proceedings of a symposium, IAHS Publ. no. 249 1998.

KEMBALI KE DAFTAR ISI