TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION DUA SISI DENGAN KERNEL $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$ DAN SIFAT-SIFATNYA

MUH. NUR
Jurusan Matematika, Universitas Hasanuddin, Makassar

Email : nur_math@yahoo.com

Pada tulisan ini, kita membahas sifat-sifat Transformasi *Fourier Quaternion* (TFQ) dua sisi dengan menggunakan kernel $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$. Sifat-sifat TFQ itu antara lain sifat linear kiri, pergeseran, skala, modulasi, teorema Plancheral dan Parseval serta teorema Konvolusi TFQ.

Kata kunci : Tranformasi *Fourier Quaternion* (*TFQ*), Plancheral, Parseval, Konvolusi.

PENDAHULUAN

Aljabar Quaternion pada $\mathbb{R}$ dilambangkan $\mathbb{H}$ merupakan kombinasi linear skalar real dan tiga satuan imajiner ortogonal (dilambangkan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$) dengan koefisien-koefisien real yang dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} := \{q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 | q_0, q_1, q_3 \in \mathbb{R}\} \qquad (1.1)$$

yang memenuhi perkalian Hamilton

$$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}^2 = -\boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1. \qquad (1.2)$$

Dengan menggunakan Persamaan (1.2), perkalian dua buah quaternion qp adalah

$$qp = q_0p_0 + \boldsymbol{q}.\boldsymbol{p} + q_0\boldsymbol{p} + p_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}, \qquad (1.3)$$

dimana $\boldsymbol{q}.\boldsymbol{p} = -(q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3)$ adalah perkalian skalar dan $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{i}(q_2p_3 - q_3p_2) + \boldsymbol{j}(q_3p_1 - q_1p_3) + \boldsymbol{k}(q_1p_2 - q_2p_1)$ adalah perkalian silang.

Konjugat quaternion dari quternion q adalah

$$\bar{q} = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3, \qquad q_0, q_1, q_3 \in \mathbb{R} \qquad (1.4)$$

dan mempunyai sifat anti involusi, yaitu

$$\overline{qp} = \overline{pq} \ . \qquad (1.5)$$

Dari Persamaan (1.4) kita mendefinisikan modulus $q \in \mathbb{H}$ sebagai berikut

$$|q| = \sqrt{q\,\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \qquad (1.6)$$

dengan menggunakan penurunan yang sederhana diperoleh

$$|pq| = |p||q|, \ \forall p, q \in \mathbb{H}\,. \qquad (1.7)$$

Dengan menggunakan Persamaan (1.4) dan (1.5) maka invers quaternion $q \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ dinyatakan sebagai

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \tag{1.8}$$

Ini menunjukkan bahwa $\mathbb{H}$ adalah aljabar pembagian. Selanjutnya diperkenalkan hasil kali dalam dua fungsi nilai quaternion $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ sebagai berikut

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{g(x)}d^2x. \tag{1.9}$$

Lebih jauh, jika $f = g$ maka diperoleh norm pada fungsi quaternion yakni

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 d^2x. \tag{1.10}$$

Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) menyatakan generalisasi transformasi fourier real dan kompleks dengan menggunakan aljabar quaternion. TFQ pada signal quaternion dua dimensi pertama-tama diperkenalkan oleh Ell (1993). Kemudian diaplikasikan oleh B$\ddot{u}$low (1999). Ada tiga jenis TFQ yakni TFQ sisi kiri, TFQ sisi kanan dan TFQ dua sisi. Lebih jauh dapat dipelajari (Mawardi, 2010; Mawardi dkk, 2008 ; Mawardi dkk, 2010 ; Hitzer, 2007).

Dalam paper ini kita akan mengkonsentrasikan pada TFQ dua sisi dengan menggunakan kernel $\mu_1 = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$. Lalu menurunkan sifat-sifat TFQ sisi kiri yakni linearitas kiri, pergeseran, skala, modulasi, sifat konvolusi dan membuktikan teorema Plancheral dan Parseval dalam TFQ dua sisi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Definisi TFQ dua sisi dan sifat-sifatnya

Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) dikenal secara luas sebagai perluasan transformasi Fourier ke aljabar quaternion.

Definisi 1 *Misalkan f adalah suatu fungsi 2D bernilai quaternion. TFQ dua sisi pada $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$ adalah fungsi $\mathcal{F}_q\{f\}:\mathbb{R} \to \mathbb{H}$ yang didefinisikan*

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega x} f(\boldsymbol{x}) e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega x} d^2\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

dimana $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2$ *dan* $e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega x}$ *disebut kernel fourier quaternion.*

Teorema 2 *TFQ dua sisi adalah transformasi yang dapat diinverskan dan inversnya diberikan oleh*

$$\mathcal{F}_q^{-1}[\mathcal{F}_q\{f\}](\boldsymbol{x}) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})e^{\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}d^2\boldsymbol{\omega} \qquad (2.2)$$

Bukti. Dapat di lihat pada (Mawardi dkk, 2008).

1.1 Sifat Linearitas kiri

Dengan menggunakan definisi dari TFQ dua sisi, dengan mudah kita dapat menunjukkan lemma berikut ini:

Lemma 3 *Misalkan $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$. TFQ bersifat linear kiri, yakni*

$$\mathcal{F}_q\{\alpha f_1 + \beta f_2\}(\boldsymbol{\omega}) = \alpha\mathcal{F}_q\{f_1\}(\boldsymbol{\omega}) + \beta\mathcal{F}_q\{f_2\}(\boldsymbol{\omega}) \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{H}. \qquad (2.3)$$

Catatan: Pada TFQ dua sisi tidak berlaku sisi kanan.

1.2 Sifat Pergeseran

Lemma 4 *TFQ dari sebuah fungsi geser diberikan oleh*

$$\mathcal{F}_q\{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\}(\boldsymbol{\omega}) = e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot b}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{H}). \qquad (2.4)$$

Bukti. Pada Persamaan (2.1) diberikan

$$\mathcal{F}_q\{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})d^2\boldsymbol{x}\,.$$

Subtitusi $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_q\{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot(t+b)}f(\boldsymbol{t})d^2\boldsymbol{t}\\ &= e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot b}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot t}f(\boldsymbol{t})d^2\boldsymbol{t}\\ &= e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot b}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

Ini membuktikan Persamaan (2.4).■

1.3 Sifat Skala

Lemma 5 *Misalkan $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. TFQ fungsi skala $f_a(\boldsymbol{x}) = f(a\boldsymbol{x})$ adalah*

$$\mathcal{F}_q\{f_a\}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|a|^2}\mathcal{F}_q\{f_a\}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{a}\right). \qquad (2.5)$$

Bukti. Pertama-tama kita mengasumsikan bahwa $a > 0$. Dari Definisi 1 diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} f(a\boldsymbol{x})d^2\boldsymbol{x}.$$

Misalkan $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{x}$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{a^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega}{a}\cdot\boldsymbol{u}\right)} f(\boldsymbol{u})d^2\boldsymbol{u}.$$

$$= \frac{1}{a^2}\mathcal{F}_q\{f\}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{a}\right).$$

Sedangkan untuk $a < 0$ diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(-a)^2}\mathcal{F}_q\{f\}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{a}\right),$$

yang melengkapi bukti Persamaan (2.5). ■

1.4. Sifat Modulasi

Lemma 6 *Misalkan* $\boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbb{R}^2$ *dan* $F_0(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ *maka*

$$\mathcal{F}_q\{F_0\}(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0). \tag{2.6}$$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 1 diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{F_0\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\omega}_0\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})d^2\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_0)\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})d^2\boldsymbol{x}$$

$$= \mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0).$$ ■

2. Sifat utama TFQ

Dalam bagian ini akan dibahas mengenai sifat yang paling penting dari TFQ sisi kiri yakni teorema Plancheral dan teorema konvolusi. Pertama-tama kita bahas dulu mengenai teorema Plancheral.

Teorema 7 *(Plancheral TFQ sisi kiri).* *Misalkan* $f, g \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{H})$ *maka persamaan berikut berlaku*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2}\langle \mathcal{F}_q\{f\}, \mathcal{F}_q\{g\}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})}. \tag{3.1}$$

Secara khusus, jika $f = g$ *maka* $\|f\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2}\|\mathcal{F}_q\{f\}\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})}$.

Persamaan ini disebut teorema Parseval.

Bukti. Diketahui bahwa $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}d^2\boldsymbol{x}$. Dengan menggunakan *invers* dari TFQ dan sifat anti involusi pada Persamaan (1.5) serta sifat pertukaran integral pada fungsi Lebesgue, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})d^2\boldsymbol{\omega}\overline{g(\boldsymbol{x})}\right]d^2\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})\left[\overline{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}g(\boldsymbol{x})d^2\boldsymbol{x}}\right]d^2\boldsymbol{\omega}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})\left[\overline{\mathcal{F}_q\{g\}(\boldsymbol{\omega})}\right]d^2\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2}\langle\mathcal{F}_q\{f\},\mathcal{F}_q\{g\}\rangle_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})}.\end{aligned}$$

Lebih jauh, dengan mengganti $f = g$ pada proses pembuktian diatas diperoleh $\|f\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left\|\mathcal{F}_q\{f\}\right\|_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})}$, yang melengkapi bukti pada Teorema 6. ∎

Sifat yang penting pada TFQ dalam aplikasi dalam proses signal 2D adalah sifat konvolusi. Tapi sebelumnya diperkenalkan definisi konvolusi berikut ini

Definisi 8 *Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$. Konvolusi $f * g$ didefinisikan oleh*

$$(f*g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d^2\boldsymbol{y}. \qquad (3.2)$$

Catatan: secara umum $f * g \neq g * f$. Ini disebabkan sifat dari perkalian dua buah quaternion tidak komutatif yakni $f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \neq g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})$.

Teorema 9 *Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$ dimana*

$$f(\boldsymbol{x}) = f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})$$
$$g(\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}g_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}g_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}g_3(\boldsymbol{x})$$

Maka konvolusi TFQ $f * g$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_q\{f*g\}(\boldsymbol{\omega}) = {}&\mathcal{F}_q\{g\}(\boldsymbol{\omega})\mathcal{F}_q\{f_0\}(\omega) + \boldsymbol{i}\mathcal{F}_q\{g\}(\omega)\mathcal{F}_q\{f_1\}(\omega) + \boldsymbol{j}\mathcal{F}_q\{g\}(\omega)\mathcal{F}_q\{f_2\}(\omega)\\ &+ \boldsymbol{k}\mathcal{F}_q\{g\}(\boldsymbol{\omega})\mathcal{F}_q\{f_3\}(\omega)\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 1 pada Persamaan (2.1) diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{f*g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot x}\left[\int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}\quad\boldsymbol{y})d^2\boldsymbol{y}\right]d^2\boldsymbol{x}. \qquad (3.5)$$

Misalkan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, maka Persamaan (3.5) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_q\{f*g\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot(z+y)}\left[\int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{y})g(z)d^2\boldsymbol{y}\right]d^2\boldsymbol{z}\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot y}f(\boldsymbol{y})\left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot z}g(z)d^2\boldsymbol{z}\right]d^2\boldsymbol{y}\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot y}\left(f_0(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{y})\right)\left[\mathcal{F}_q\{g\}(\boldsymbol{\omega})\right]d^2\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i+j}{\sqrt{2}}\omega\cdot y}\Big(f_0(y)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + i f_0(y)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + j f_2(y)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + k f_3(y)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega)\Big)\, d^2y \qquad (3.6)$$

Sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}_q\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}_q\{f_0\}(\omega)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + i\mathcal{F}_q\{f_1\}(\omega)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + j\mathcal{F}_q\{f_2\}(\omega)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) + k\mathcal{F}_q\{f_3\}(\omega)\mathcal{F}_q\{g\}(\omega). \qquad \blacksquare$$

Dengan mengunakan invers TFQ pada Persamaan (2.2) dan sifat pertukaran integral pada fungsi $L^2(\mathbb{H};\mathbb{R})$ diperoleh:

Akibat 10 *Misalkan $\mathcal{F}_q\{g\}(\omega) \in \mathbb{R}$. maka kita punya*

$$\mathcal{F}_q^{-1}\Big\{\mathcal{F}_q\{f\}\mathcal{F}_q\{g\}\Big\}(x) = (f * g)(x) \qquad (3.7)$$

KESIMPULAN

Dengan menggunakan konsep atau sifat-sifat dasar mengenai quaternion, kita memperkenalkan konsep tentang Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) dua sisi. Dalam sifat perkalian dua buah quaternion $\mathbb{H}$ tidak komutatif akibatnya beberapa sifat penting dalam transformasi Fourier klasik harus dimodifikasi. Adapun sifat-sifat yang dimodifikasi dalam TFQ dua sisi berupa sifat linear kiri, pergeseran, skala, modulasi Teorema Plancheral dan Parseval dan konvolusi pada TFQ sisi kiri dengan menggunakan kernel $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$. Menarik juga dipelajari kedepannya mengenai sifat diferensial TFQ sisi kiri serta aplikasi dari TFQ sisi. Dimulai dengan menggunakan contoh aplikasi sederhana sampai aplikasi yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Bülow,T. 1999. Hyperomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images. Dissertation. Germany: University of Kiel.

Ell,T.A. 1993. Quaternion Fourier transform for analysis for two-dimensional linear time-invariant partial differential system. Proceeding of the 32nd conference on decision and control, San Antonio, Texas.Pp: 1830-1841.

Hitzer, E. 2007: Quaternion Fourier transform on quaternion fields and generalizations. *Advances in Applied Clifford algebras*. 17: 497-517.

Mawardi, B. 2010. A generalized windowed Fourier transform for quaternionic. *Far East Journal of Applied Mathematics*. 42: 35-47.

Mawardi, B., dkk. 2008. An generalized uncertainty principle for quaternion Fourier transform. *Computer and mathematics with application*. 56: 2398-2410.

Mawardi, B., dkk. 2010. Windowed Fourier transform of two-dimensional quaternionic signal, Applied Mathematics and Computation. 216: 2366-2379.