PEMODELAN ASURANSI JIWA BERDASARKAN ASUMSI MORTALITA WEIBULL

Des Alwine Zayanti
JurusanMatematika, FMIPA, UniversitasSriwijaya
Email : dalwinezayanti@yahoo.com

ABSTRAK

Pemodelan asuransi jiwa berdasarkan asumsi mortalita Weibull diawali dengan memodelkan fungsi-fungsi aktuaria, seperti fungsi survival, fungsi densitas, dan peluang hidup berdasarkan laju mortalita(*force of mortality*)dengan asumsi mortalita Weibull. Selanjutnya fungsi-fungsi aktuaria tersebut dipergunakan untuk menghitung mean dan variansi dari nilai sekarang(*present value*) asuransi berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Weibull Selain itu juga akan diperhitungkan bentuk mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka n tahun. Berdasarkan nilai sekarang aktuaria(*Actuarial Present Value*) dan anuitas hidup, diperoleh pemodelan premi asuransi jiwa berdasarkan asumsi Mortalita Weibull. Sehingga model ini dapat menjadi alternatif bagi perhitungan asuransi jiwa.

Kata Kunci :laju mortalita, fungsi survival, fungsidensitas, anuitas, hukummortalita Weibull.

1. PENDAHULUAN

Asuransi adalah pengalihan risiko dari pihak tertanggung kepadapihak penanggung. Upaya pengalihan risiko bertujuan untuk mengurangi beban tertanggung apabila terjadi risiko terhadap tertanggung pada suatu waktu. Pihak penanggung akan memberikan menfaat dengan syarat tertanggung harus membayar premi. Pembayaran premi disesuaikan dengan jumlah manfaat (*benefit*) yang ingin diperoleh ketika terjadi risiko.

Artikel hasil penelitian ini memodelkan fungsi-fungsi aktuaria pada asuransi jiwa berdasarkan asumsi mortalita Weibull. Sehingga dapat merupakan alternatif perhitungan pada asuransi jiwa, khususnya asuransi jiwa berjangka n tahun untuk benefit yang dibayarkan diakhir tahun kematian.

2. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Memperoleh hubungan *force of mortality*berdasarkan asumsi mortalita Gompertzdenganfungsi-fungsi aktuaria lainya, seperti: fungsi survival, fungsi densitas, peluang hidup dan peluang kematian.

2. Memperoleh bentuk bentuk mean dan variansi dari *APV* asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Gompertz.
3. Memperoleh bentuk bentuk mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka n tahun dengan variabel tingkat bunga i berdasarkan asumsi Gompertz.
4. Memodelkan premi asuransi berjangka n tahun berdasarkan asumsi Gompertz. dengan variabel tingkat bunga

3. PEMBAHASAN

Memodelkan hubungan laju mortalita berdasarkan asumsi Weibull :

$\mu(x) = kx^n$, dengan $k>0$, $n>0$, $x \geq 0$

Atau

$\mu_{x+t} = = k(x+t)^n$

hubungan dengan fungsi-fungsi aktuaria lainnya, seperti :

i. fungsi survival

$$\mu(x) = \frac{-\frac{d}{dy}s(x)}{s(x)}$$

$$= \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

$$\mu(y) = \frac{-s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{d}{dy}[\ln\ s(y)]$$

$$-\mu(y)dy = d[\ln\ s(y)]$$

mengintegralkansuatupernyataandari x ke x + n, sehinggadidapat

$$-\int_0^x \mu(y)dy = \int_0^x d[\ln s(y)]$$

$$-\int_0^x \mu(y)dy = \ln s(x) - \ln s(0)$$

$$s(x) = exp\left[-\int_0^x \mu(s)\, ds\right]$$

BerdasarkanasumsiWeibull :

$\mu(x) = kx^n$, dengan $k>0$, $n>0$, $x\geq 0$ dan$k$tetapan;

$$s(x) = exp\left[-\int_0^x ks^n\, ds\right]$$

$s(x) = exp\left[-ux^{n+1}\right]$ dengan $u= \frac{k}{n+1}$

ii.Peluang hidup dan peluang kematian

Peluang hidup dihitung dengan pendekatan *force of mortality* :

$$\mu(y) = \frac{-s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{s'(y)}{s(y)}$$

$$-\mu(y) = \frac{d}{dy}[\ln\ s(y)]$$

$$-\mu(y)dy\ = d[\ln\ s(y)]$$

mengintegralkansuatupernyataandari x ke x + n, sehinggadidapat

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \int_x^{x+n} d[\ln s(y)]$$

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln s(x+n) - \ln s(x)$$

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln\frac{S(x+n)}{S(x)}$$

$$-\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \ln({}_nP_x)$$

sehinggadiperoleh

$$\cdot_n P_x = exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right]$$

dengan $s = y - x$. Sehinggadiperoleh :

$$_nP_x = exp\left[-\int_0^n \mu(x+s)\, ds\right]$$

BerdasarkanasumsiWeibull :

$\mu(x) = kx^n$, dengan $k>0$, $n>0$, $x\geq 0$ dan$k$tetapan;

Atau

$\mu_{x+t} = k(x+t)^n$

$$_tP_x = exp\left[-\int_0^t k(x+s)^n\, ds\right]$$

$_tP_x = \exp\left[-u\left((x+t)^{n+1} - x^{n+1}\right)\right]$ dengan$u$= $\dfrac{k}{n+1}$.

iii.fungsi densitas

$F_{T(x)}(t)$ dan$f_{T(x)}(t)$ menunjukkanmasing-masingfungsidistribusidanfungsikepadatanpeluangdari T(x), sisaumurdari x. Dan dapat dinotasikanbahwa $F_{T(x)}(t)$ = t =$_tq_x$.

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x$$

$$F_{T(x)}(t) = 1 - {}_tp_x$$

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Sehingga,

$$F'_{T(x)}(t) = f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right]$$

$$f_{T(x)}(t) = \frac{-s'(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{-s'(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f_{T(x)}(t) = \quad {}_tP_x \, \mu(x+t)$$

Berdasarkan asumsi Weibull:

$$f_T(t) = \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]}$$

Memodelkan nilai sekarang aktuaria untuk asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi mortalita Weibull.

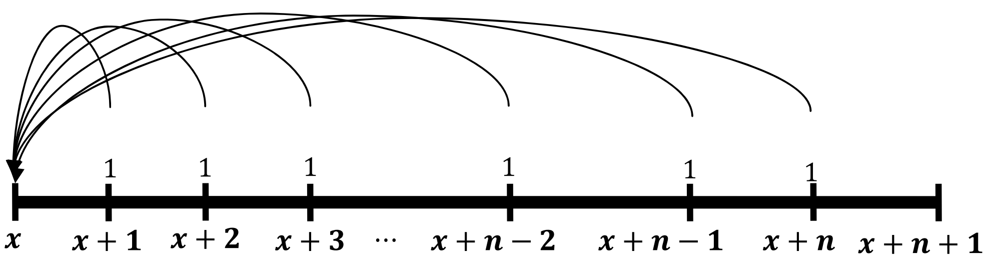
Asuransijiwaberjangkamengasumsikanbahwaseseorang yang berusia (x) akan mendapatkan 1 (satu) unit manfaatketika orang tersebutmengalamirisikoselama$n$ tahun masa kontrak, sehingga jika orang tersebut tidak mengalami risikohinggaakhir masa kontrakmaka orang tersebuttidakakanmendapatkanmanfaat.

Asuransi berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian,dengan asumsi benefit dibayarkan sebesar 1 unit. Dalam kasus initerdapat 3 fungsi yang digunakan, yaitufungsi benefit b_{k+1}, fungsi discount V_{k+1}, danstatistikprobabilitas Z_{k+1}.

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } k = 0,1,2,3,\ldots n-1 \\ 0, \text{ untuklainnya} \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$z_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, \text{untuk } k = 0,1,2,3,\ldots n-1 \\ 0, \text{ untuklainnya} \end{cases}$$



Gambar1.GarisBilanganNilaiSekarangAktuariaAsuransiJiwaBerjangka

Nilai sekarang aktuaria yang diperolehadalah

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 \cdot v^1 \cdot {}_0p_x \cdot q_x + 1 \cdot v^2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} + 1 \cdot v^3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + \cdots$$
$$+ 1 \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-2}p_x \cdot q_{x+n-2} + 1 \cdot v^n {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} + 0 \cdot v^n \cdot {}_np_x$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k}.$$

Secara umum untuk benefit sebesar b :

$$\mathrm{E[Z]} = A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \; {}_{k}p_x \cdot q_{x+k}.$$

Berdasarkan asumsi mortalita Weibull :

$$\mathrm{E[Z]} = A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^{n}exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]}\, dt$$

danbesar moment ke-2,

$$\mathrm{E[Z^2]} = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot b_{k+1}^{2} \int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^{n}exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]}\, dt.$$

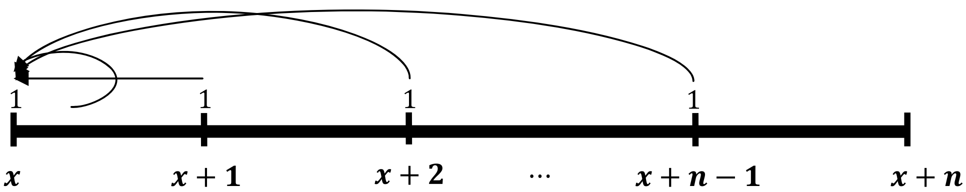
VariansidariAsuransi berjangka n-tahun adalah

$$Var(Z) = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} - (A^{1}_{x:\overline{n}|})^{2}$$

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot b_{k+1}^{2} \int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^{n}exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]}\, dt - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot b_{k+1} \int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^{n}exp[-u((x+t)^{n+1} - x^{n+1})]}\, dt \right)^{2}$$

Memodelkan mean dan variansi dari anuitas hidup berjangka n tahun berdasarkan asumsi Weibull.

Anuitashidup yang digunakanuntukpembayaranpremiperlindunganialahanuitas*due*berjangka$n$ tahun untuk seseorang yang berusia (x). Tertanggung akanmelakukanpembayaranpremiperlindungan di usia (x) jika tertanggung bertahan hidup di usia (x), dan tertanggung akan melakukan pembayaran premi perlindungan di usia $(x+1)$ jika tertanggung bertahan hidup dari usia (x) hingga $(x+1)$, dan seterusnya. Seluruhkemungkinantertanggungmembayarkanpremiperlindunganharusdiperhitungkan di awalkontrakatau di usia (x) sehingga kemungkinan tersebut dipengaruhi oleh besarnya faktor diskonto dengan interval waktu yang disesuaikan. Berikut garis bilangan untuk anuitas*due*berjangka$n$ tahun



Gambar2.Anuitas*Due* untukAnuitasHidupBerjangka$n$ Tahun

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = 1 \cdot v^0 \cdot {}_0p_x + 1 \cdot v^1 \cdot {}_1p_x + 1 \cdot v^2 \cdot {}_2p_x + \cdots + 1 \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x$$

$$= v^0 \cdot {}_0p_x + v^1 \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x.$$

Nilaisekarangdaripeubahacak Anuitas*Due* untukAnuitasHidupBerjangka$n$ Tahundaripembayaran sebesar 1unit pertahunadalah

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} & 0 \le K < n \\ & \ddot{a}_{\overline{n}|} K \ge n \end{cases}$$

danpremitunggalbersihnyaadalah

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E[Y]} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x .$$

Penjumlahan per bagiandapatdigunakanuntukmentransformasimenjadi

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x \ ,$$

Karena*Y* = (*1-Z*) / *d* ,dimana

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & 0 \le K < n \\ & v^n K \ge n \end{cases}$$

Merupakannilaiawalpeubahacakuntuksebuah unit asuransidwiguna, yang dibayarkanpadaakhirtahunkematian, sehingga

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-\mathrm{E}[\mathrm{Z}]}{d} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

Dapat dinyatakan :

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left\{1-\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1}-x^{n+1})]}\, dt\right\}$$

Memodelkan premi asuransi berjangka n tahun berdasarkan asumsi Weibull.

Premiasuransijiwaberjangka yang harusdibayarolehtertanggungsupayamendapatkan 1 unit manfaatketikaterjadirisikoadalah :

$$P^{1}_{x:\bar{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$$

Premi asuransi berjangka n tahun dengan variabel tingkat bunga berdasarkan asumsi Weibull :

$$P^{1}_{x:\bar{n}|} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\cdot b_{k+1}\int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1}-x^{n+1})]}\, dt}{\frac{1}{d}\left\{1-\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1}-x^{n+1})]}\, dt\right\}}$$

4. KESIMPULAN

Premi Asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit dibayarkan diakhir tahun kematian berdasarkan asumsi Weibull :

$$P^{1}_{x:\bar{n}|} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\cdot b_{k+1}\int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1}-x^{n+1})]}\, dt}{\frac{1}{d}\left\{1-\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\int_{k}^{k+1} \mathrm{u(n+1)(x+t)^n exp[-u((x+t)^{n+1}-x^{n+1})]}\, dt\right\}}$$

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N.L. 1997. *Actuarial Mathematics.*The Society of Actuaries. Schaumburg: Illinois.

Kellison, S.G. 2005. *The Theory of Interest*. Singapore: Library of Congress Cataloging.

Liyan W, Zhang Xiaodong, 2009, *Increasing Endowment Assurance Policy Actuarial Models under Random Rate of Interest,* Second International Workshop on Computer Science, 178 – 181

Nofridawati, Nova, 2013, PremiAsuransiJiwapadaAkhirKematiandanpadaSaatKematianTerjadi. *Matematika*, 1, (2): 79-84.

Ping H., Wei Xiang, 2009, *Discrete life insurance Actuarial Models with Variable interest Rate Based on Moivre's and Makeham's Law of Mortality*, IEEE. Computer Society, 160 – 163.

Sholahudin, T. 2013. Teori Tingkat Suku Bunga. *http://thoifursholahudin.blogspot.com/2013/03/teori-tingkat-suku-bunga.html*. Diaksespadatanggal 18 September 2013.

Syamrilaode. 2010. PengertianPremiAsuransi. *http://id.shvoong.com/writing-and-speaking/presenting/2063124-pengertian-premi-asuransi/#ixzz2kegdr9Xa*. Diakses