LAPORAN PENELITIAN

METODE PENGALI LAGRANGE UNTUK MEMECAHKAH MASALAH OPTIMASI

Oleh :

Drs. Zulmahdi Dailami
Dra. Dwi Astuti Aprijani
Dra. Asmara Iriani Tarigan

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS TERBUKA
2001

Lembar Pengesahan
Laporan Penelitian Lembaga Penelitian UT

1. a. Judul Penelitian	:	Metode Pengali Lagrange Untuk Memecahkan Masalah Optimasi
b. Bidang Penelitian	:	Bidang Ilmu
c. Klasifikasi Penelitian	:	Penelitian Mandiri
d. Bidang Ilmu	:	Matematika Murni
2. Ketua Peneliti		
a. Nama	:	Drs. Zulmahdi Dailami
b. N I P	:	131 643 904
c. Golongan Kepangkatan	:	III/d
d. Jabatan Akademik	:	Lektor Madya
e. Fakultas / Unit Kerja	:	FMIPA / Jurusan Matematika
3. Anggota Tim Peneliti		
a. Jumlah Anggota	:	2 (dua) orang
b. Nama / Unit Kerja	:	1. Dra. Dwi Astuti Aprijani / FMIPA 2. Dra. Asmara Iriani Tarigan / FMIPA
4. Lama Penelitian	:	6 (enam) bulan
5. Biaya Penelitian	:	Rp.3.090.000,- (Tiga Juta Sembilanpuluh Ribu Rupiah)
6. Sumber Biaya	:	Lembaga Penelitian UT

Pondok Cabe, Juli 2001

Mengetahui,
Dekan FMIPA UT

Dr. Djati Kerami
NIP.130 422 587

Ketua Peneliti,

Drs. Zulmahdi Dailami
NIP. 131 643 904

Mengetahui,
Ketua Lembaga Penelitian UT

Dr. W B P Simanjuntak
NIP. 130 212 017

Menyetujui,
Kepala PSI UT

Dr. Tian Belawati
NIP. 131 569 974

ABSTRAK

Bidang Ilmu : Matematika

Judul : Metode Pengali Lagrange Untuk Memecahkan Masalah Optimasi

Penulis : Dailami, Z.; Aprijani, D.A.; Tarigan, A.I.

Tahun : 2001

Sumber Abstraksi : Laporan Hasil Penelitian

Lokasi Laporan : Lembaga Penelitian, Perpustakaan Universitas Terbuka

Abstraksi :

Dalam praktek *Metode Pengali Lagrange* lebih sering digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dibandingkan dengan *Metode Substitusi.* Analisis yang didasarkan pada studi literatur tentang konsep fungsi, fungsi maksimum dan fungsi minimum, serta penurunan dan perumusan formula menjawab masalah ini.

Dengan membandingkan cara penyelesaian antara *Metode Substitusi* dan *Metode Pengali Lagrange*, diketahui penggunaan *Metode Pengali Lagrange* tidak melibatkan banyak fungsi, tidak ada kendala apabila terjadi kesalahan dalam pengambilan variabel bebas, dan tidak perlu membentuk fungsi-fungsi parameter apabila tidak ditemukan titik-titik kritis.

Hasil analisis menunjukkan bahwa *Metode Pengali Lagrange* menggunakan pendekatan geometri sehingga muncul unsur λ. Unsur ini membuat fungsi menjadi lebih sederhana.

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang

Masalah-masalah dalam matematika sering melibatkan fungsi maksimum dan minimum. Berikut ini ada contoh sederhana mengenai masalah optimasi. Satu petak kebun sebenarnya dapat ditanami sebanyak 4500 pohon, namun sekarang baru ditanami 1000 pohon. Penambahan jumlah pohon yang akan ditanam menghambat perkembangan pohon-pohon yang sudah ditanam sebelumnya, karena pohon-pohon yang baru akan menyerap sinar matahari dan air. Keuntungan rata-rata per tahun sekarang ini adalah $40, tetapi karena ada penambahan pohon maka keuntungan rata-rata akan turun satu sen per satu pohon. Permasalahannya adalah berapa jumlah pohon baru yang harus ditanam agar memperoleh keuntungan maksimum. Untuk menyelesaikan permasalahan ini biasanya digunakan *metode substitusi* atau *metode pengali Lagrange.* Yang menjadi perhatian dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui kapan suatu masalah diselesaikan dengan *metode substitusi* dan kapan diselesaikan dengan *metode pengali Lagrange* dengan cara membandingkan metode penyelesaiannya. Penelitian ini lebih menekankan pada *Metode pengali Lagrange.* Metode ini ditemukan oleh seorang matematikawan dari Perancis bernama Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

I.2. Batasan dan Perumusan Masalah

Batasan telaahan dalam penelitian ini adalah menyelesaikan masalah optimasi dengan satu fungsi kendala yang berbentuk persamaan kuadrat dan fungsi obyektifnya merupakan fungsi kuadrat.

I.3. Tujuan Penelitian

Untuk melihat faktor apa yang menjadi kelebihan *metode pengali Lagrange* sehingga sering digunakan untuk mencari solusi masalah optimasi.

I.4. Manfaat Hasil Penelitian

Penelitian ini banyak menggunakan fungsi-fungsi maksimum dan minimum yang mana aplikasinya sangat bermanfaat antara lain dalam bidang ekonomi. Sebagai contoh dapat digunakan untuk menghitung biaya produksi yang minimal agar memperoleh keuntungan yang maksimal.

Selain itu diperoleh pula manfaat:

1. pengalaman melakukan penelitian,
2. menambah wawasan serta meningkatkan kemampuan dalam "proses pembelajaran" bidang matematika.

II. TINJAUAN PUSTAKA

II.1. Nilai Maksimum Dan Minimum dari suatu Fungsi dengan Satu Variabel

Untuk mengetahui kapan suatu fungsi dikatakan mempunyai nilai maksimum atau minimum, perhatikan definisi berikut ini.

Definisi 1. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif pada c jika ada interval buka yang mengandung c, dimana f didefinisikan, sedemikian sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval. (Leithold, 1981).

Definisi 2. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif pada c jika ada interval buka yang mengandung c, dimana f didefinisikan, sedemikian sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x dalam interval. (Leithold, 1981).

Jika fungsi f mempunyai nilai maksimum relatif atau minimum relatif pada c, maka f dikatakan mempunyai ekstremum relatif pada c. Untuk mendapatkan nilai c yang mungkin merupakan ekstremum relatif, digunakan teorema 3.

Teorema 3. Jika $f(x)$ ada untuk semua nilai x dalam interval buka (a, b) dan jika f mempunyai ekstremum relatif pada c, dimana $a < b < c$, maka jika $f'(c)$ ada, $f'(c) = 0$

Interpretasi geometri dari teorema 3 adalah jika f mempunyai ekstremum relatif pada c dan jika $f'(c)$ ada, maka grafik $y = f(x)$ pasti mempunyai garis tangen horizontal pada titik $x = c$. Jika f fungsi yang dapat diturunkan atau $f'(c)$ ada, maka satu-satunya nilai x yang mungkin dimana f dapat mempunyai ekstremum relatif adalah titik dimana $f'(x)=0$. Namun $f'(x)$ bisa saja sama dengan nol untuk suatu nilai x, tetapi f tidak mempunyai ekstremum relatif pada titik ini, itulah sebabnya peryataan "$f'(c)$ ada" dicantumkan. Akan tetapi kondisi ini belum cukup. Perhatikan definisi 4 berikut ini.

Definisi 4. Jika c di dalam domain dari fungsi f dan jika $f'(c)=0$ atau $f'(c)$ tidak ada, maka c disebut titik kritis dari f.

Definisi 5. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum absolut pada suatu interval jika ada beberapa bilangan c dalam interval sedemikian sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval.

Definisi 6. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum absolut pada suatu interval jika ada beberapa bilangan c dalam interval sedemikian sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x dalam interval.

Teorema 7. Misalkan fungsi f kontinu pada interval tutup $[a, b]$ dan diferensiabel pada interval buka (a, b)

$f'(x) > 0$ untuk semua x di dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$

$f'(x) < 0$ untuk semua x di dalam (a, b), maka f turun pada $[a, b]$

Teorema 8. Test Turunan Pertama untuk Ekstrema Relative

Misalkan fungsi f kontinu pada semua titik dalam interval buka (a, b) yang mengandung bilangan c, dan misalkan bahwa f' ada pada semua titik dalam (a, b) kecuali pada c:

jika $f'(x) > 0$ untuk semua nilai x dalam suatu interval buka di mana c merupakan titik akhir di sebelah kanan dan jika $f'(x) < 0$ untuk semua nilai

x dalam suatu interval buka di mana c merupakan titik akhir di sebelah kiri, maka f mempunyai nilai maksimum relatif pada c.

jika $f'(x) < 0$ untuk semua nilai x dalam suatu interval buka di mana c merupakan titik akhir di sebelah kanan dan jika $f'(x) > 0$ untuk semua nilai x dalam suatu interval buka di mana c merupakan titik akhir di sebelah kiri, maka f mempunyai nilai minimum relatif pada c.

Teorema 9. Test Turunan Kedua untuk Ekstrema Relative

Misalkan c adalah titik kritis suatu fungsi f di mana $f'(c) = 0$, dan misalkan f' ada untuk semua nilai x dalam suatu interval buka $(a,\ b)$ yang mengandung c. Jika $f''(c)$ ada dan

jika $f''(c) < 0$, maka f mempunyai nilai maksimum relatif pada c

jika $f''(c) > 0$, maka f mempunyai nilai minimum relatif pada c

Teorema 10. Misalkan fungsi f kontinu pada interval I yang mengandung bilangan c. Jika $f(c)$ ekstremum relatif dari f pada I dan c adalah satu-satunya bilangan dalam I di mana f mempunyai ekstremum relatif, maka $f(c)$ adalah ekstremum absolut dari f pada I. Dengan demikian:

jika $f(c)$ adalah nilai maksimum relatif dari f pada I, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum absolut

jika $f(c)$ adalah nilai minimum relatif dari f pada I, maka $f(c)$ adalah nilai minimum absolut

II.2. Nilai Maksimum Dan Minimum dari suatu Fungsi dengan Dua Variabel

Definisi 11. Fungsi f dari dua variabel dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif pada titik (x_0, y_0) jika ada piringan buka (*open disk*)

$B\left((x_0, y_0); r\right)$ sedemikian sehingga $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ untuk semua (x, y) dalam B.

Definisi 12. Fungsi f dari dua variabel dikatakan mempunyai nilai minimum relatif pada titik (x_0, y_0) jika ada *open disk* $B\left((x_0, y_0); r\right)$, sedemikian sehingga $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk semua (x, y) dalam B.

Teorema 13. Jika $f(x, y)$ ada pada semua titik pada *open disk* $B\left((x_0, y_0); r\right)$ dan jika f mempunyai ekstremum relatif pada (x_0, y_0), maka jika $f_x(x_0, y_0)$ dan $f_y(x_0, y_0)$ ada,

$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Definisi 14. Suatu titik (x_0, y_0) dimana $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$ disebut titik kritis.

Teorema 15. Test Turunan Kedua

Misalkan f suatu fungsi dari dua variabel sedemikian sehingga f dan turunan parsial pertama dan turunan parsial keduanya adalah kontinu pada *open disk* $B\left((a, b); r\right)$. Lebih lanjut misalkan bahwa $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Maka

f mempunyai nilai minimum relatif pada (a, b) jika

$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}{}^2 > 0$ dan $f_{xx}(a, b) > 0$

f mempunyai nilai maksimum relatif pada (a, b) jika

$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}{}^2 > 0$ dan $f_{xx}(a, b) < 0$

$f(a, b)$ bukan ekstremum relatif jika

$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}{}^2 < 0$

tidak dapat diambil kesimpulan jika

$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}{}^2 = 0$

Definisi 16. Fungsi f dengan dua variabel dikatakan mempunyai nilai maksimum absolut pada domain D dalam bidang xy jika ada beberapa titik (x_0, y_0) dalam D sedemikian sehingga $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ untuk semua (x, y) dalam D. Dalam kasus demikian $f(x_0, y_0)$ adalah nilai maksimum absolut dari f pada D.

Definisi 17. Fungsi f dengan dua variabel dikatakan mempunyai nilai minimum absolut pada domain D dalam bidang xy jika ada beberapa titik (x_0, y_0) dalam D sedemikian sehingga $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk semua (x, y) dalam D. Dalam kasus demikian $f(x_0, y_0)$ adalah nilai minimum absolut dari f pada D.

II.3. Metode Pengali Lagrange

Misalkan akan dicari ekstrema relatif dari suatu fungsi dengan 3 variabel x, y, dan z dengan kendala $g(x, y, z) = 0$. Maka dibentuk suatu fungsi pembantu F dengan variabel λ (disebut pengali Lagrange):

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z)$$

Titik-titik kritis dari F adalah nilai-nilai x, y, z, dan λ dimana:

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \qquad F_\lambda = 0$$

III. METODE PENELITIAN

1. Studi Literatur tentang konsep fungsi, fungsi maksimum dan fungsi minimum

2. Penurunan dan perumusan formula

3. Pembuatan Laporan.

IV. PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Validitas metode pengali Lagrange dapat ditunjukkan dengan mempertimbangkan problem umum Ekstrema Kendala. Misalkan kita ingin mencari ekstrema relatif dari suatu fungsi dengan 3 variabel *x, y*, dan *z* dengan kendala

$$g(x,y,z)=0 \qquad \dots (1^*)$$

Asumsikan bahwa $g(x,y,z)=0$ dapat dipecahkan untuk *z* untuk memperoleh

$$z=h(x,y) \qquad \dots (2^*)$$

dimana *h* didefinisikan pada *open disk* $B\,((x_0,y_0);r)$ dan $f(x,y,h(x,y))$ mempunyai ekstremum relatif pada $(x_0,y_0,h(x_0,y_0))$. Juga asumsikan bahwa turunan parsial pertama dari *f, g*, dan *h* **ada** pada *B* dan $g_3(x,y,h(x,y))\neq 0$ pada *B*. Karena *f* mempunyai suatu ekstremum relatif pada $(x_0,y_0,h(x_0,y_0))$, turunan parsial pertama $f=0$ disini.

Kita hitung turunan parsial pertama dengan aturan rantai.

Pada $(x_0,y_0,h(x_0,y_0))$

$$f_1+f_3\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad \text{dan} \quad f_2+f_3\frac{\partial h}{\partial y}=0 \qquad \dots (3^*)$$

Jika dalam (1) diturunkan secara implisit terhadap *x*, kemudian terhadap *y* dan mempertimbangkan *z* sebagai fungsi diferensiabel dari *x* dan *y*, maka pada titik (*x, y*) dalam open disk *B*

$$g_1+g_3\frac{\partial h}{\partial x}=0 \qquad \text{dan} \qquad g_2+g_3\frac{\partial h}{\partial y}=0 \quad \text{atau, ekivalen,}$$

karena $g_3\neq 0$ pada open disk *B*, dengan: pada (*x, y*) dalam *B*

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{g_1}{g_3} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{g_2}{g_3} \qquad \dots (4^*)$$

dimana nilai fungsi dari g_1,g_2,g_3 adalah pada $(x,y,h(x,y))$.

Jika nilai-nilai dari $\frac{\partial h}{\partial x}$ dan $\frac{\partial h}{\partial y}$ dari (4) disubstitusikan ke (3) maka pada

$(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, $f_1 + f_3(-\frac{g_1}{g_3}) = 0$ dan $f_2 + f_3(-\frac{g_2}{g_3}) = 0$.

selanjutnya $f_3 - g_3(\frac{f_3}{g_3}) = 0$ dimana $g_3 \neq 0$.

Jadi pada $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$,

$$f_1 + g_1(-\frac{f_3}{g_3}) = 0$$

$$f_2 + g_2(-\frac{f_3}{g_3}) = 0 \qquad \ldots (5^*)$$

$$f_3 + g_3(-\frac{f_3}{g_3}) = 0$$

jika $\lambda = -\frac{f_3}{g_g}$ maka (5) dapat ditulis sebagai

$$f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$f_2 + \lambda g_2 = 0 \qquad \ldots (6^*)$$

$$f_3 + \lambda g_3 = 0$$

Lebih lanjut, karena f mempunyai ekstremum relatif pada $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ dan ekstremum ini dibatasi oleh kendala $g(x, y, z) = 0$ maka

$$g(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0 \qquad \ldots (7^*)$$

Jika

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \qquad \ldots (8^*)$$

Dan jika $z_0 = h(x_0, y_0)$ maka (6) dan (7) ekivalen dengan persamaan

$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \qquad F_\lambda = 0$ pada (x_0, y_0, z_0)

Oleh sebab itu dapat disimpulkan bahwa titik (x_0, y_0, z_0) pada suatu fungsi, mempunyai ekstremum relatif pada titik-titik kritis dari fungsi f yang didefinisikan oleh (8*).

Untuk lebih jelasnya, perhatikan beberapa contoh berikut ini di mana untuk menyelesaikan masalah ini digunakan dua metode: *Metode Subsitusi* dan *Metode Pengali Lagrange.*

Contoh 1. Carilah ukuran relatif dari suatu kotak tanpa tutup yang mempunyai volume tertentu dengan menggunakan bahan seminimal mungkin.

Penyelesaian:

1. Metode Minimum dan Maksimum

Misalkan x adalah panjang kotak, y adalah lebar kotak, z adalah tinggi kotak.
S adalah luas kotak, $S = xy + 2xz + 2yz$.
V adalah volume kotak, $V = xyz$

Jadi dalam soal ini diketahui dua persamaan, yaitu:

$$S = xy + 2xz + 2yz \qquad (1)$$

$$V = xyz. \qquad (2)$$

Dari (2) diperoleh $z = \dfrac{V}{xy}$, substitusikan z ke (1):

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

Samakan turunan parsial pertama S dengan nol:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} x^2 y - 2V = 0 \\ xy^2 - 2V = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} \quad \text{dan} \quad y = \sqrt[3]{2V}$$

Untuk $x = \sqrt[3]{2V}$ dan $y = \sqrt[3]{2V}$,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} = \frac{4V}{4V} = 2 > 0 \text{ dan}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\right)^2 = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} \cdot \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} - 1 = 3 > 0$$

Maka dari Teorema 15 (i), S mempunyai nilai minimum relatif pada $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$

Perhatikan bahwa x dan y berada pada interval $(0,+\infty)$ dan dari persamaan (3), S sangat besar jika x dan y mendekati 0 atau x dan y sangat besar. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa nilai minimum relatif ini adalah nilai minimum absolut dari S.

Jika $x = \sqrt[3]{2V}$ dan $y = \sqrt[3]{2V}$, maka $z = \dfrac{V}{xy} = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$

Jadi ukuran kotak tersebut adalah: $\sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{2V} \times \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

2. Metode Pengali Lagrange

Misalkan $f(x,y,z) = S = xy + 2xz + 2yz$ dan $g(x,y,z) = xyz - V$.

Bentuk fungsi pembantu F:

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$$
$$= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$$

Untuk memperoleh titik-titik kritis dari F, harus dicari turunan parsial dari F terhadap x, y, z, dan λ, kemudian samakan dengan 0.

$$F_x = y + 2z + \lambda yz = 0 \qquad (4)$$

$$F_y = x + 2z + \lambda xz = 0 \qquad (5)$$

$$F_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \qquad (6)$$

$$F_\lambda = xyz - V = 0 \qquad (7)$$

(1) – (2), diperoleh:

$$y - x + \lambda(yz - xz) = 0$$

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

$$y = x \qquad (8)$$

atau

$$\lambda = -\frac{1}{z} \qquad (9)$$

substitusikan (9) ke (5):

$x + 2z + (-\frac{1}{z})xz = 0 \Rightarrow z = 0$, hal ini tidak mungkin karena $z \in (0, +\infty)$

substitusikan (8) ke (6):

$$2x + 2x + \lambda xx = 0 \Rightarrow 4x = -\lambda x^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{x} \text{ (karena } x \neq 0\text{)}$$

jika $\lambda = -\frac{4}{x}$ maka dari (5) diperoleh:

$$x + 2z + (-\frac{4}{x})xz = 0 \Rightarrow x = 2z \Rightarrow z = \frac{x}{2} \qquad (10)$$

substitusikan (8) dan (10) ke (7):

$$x \cdot x(\frac{1}{2}x) - V = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}$$

Dengan demikian diperoleh $y = \sqrt[3]{2V}$ dan $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

Contoh 2. Tentukan maksimum absolut dan minimum absolut dari

$f(x, y) = 2x - 3y$

di dalam daerah $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

Penyelesaian:

1. Metode Minimum dan Maksimum

$f(x, y) = 2x - 3y \Rightarrow f_x = 2$ dan $f_y = -3$, tidak ditemukan titik kritis pada fungsi *f*. Karena itu maksimum dan minimum absolut pasti terjadi pada batas-batasnya (*boundary*). Untuk mencarinya, harus ditentukan persamaan parameter dari ellips $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, yaitu:

$$x = 2 \cos t \quad \text{dan} \quad y = \sin t, \quad \text{dimana } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Kemudian substitusi persamaan parameter ellips ke fungsi *f*, sehingga diperoleh

$$f(x, y) = g(t) = 4 \cos t - 3 \sin t$$

Turunkan $g(t)$, kemudian samakan dengan nol, diperoleh:

$$\frac{dg}{dt} = -4\sin t - 3\cos t \Rightarrow -4\sin t - 3\cos t = 0 \Rightarrow \tan t = -\frac{3}{4}$$

$$\tan t = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin t = \frac{3}{5}, \cos t = -\frac{4}{5} \text{ dan } \sin t = -\frac{3}{5}, \cos t = \frac{4}{5}$$

Sehingga diperoleh titik-titik batasnya, yaitu $(-\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ dan $(\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$. Untuk titik $(-\frac{8}{5},\frac{3}{5})$, nilai fungsi f adalah $f(-\frac{8}{5},\frac{3}{5}) = -5$. Untuk titik $(\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$, nilai fungsi f adalah $f(\frac{8}{5},-\frac{3}{5}) = 5$.

Dengan demikian maka fungsi f mempunyai nilai maksimum absolut pada titik $(\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$ dan minimum absolut pada titik $(-\frac{8}{5},\frac{3}{5})$

2. Metode Pengali Lagrange

Misalkan $f(x,y) = z = 2x - 3y$ dan $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$.

Bentuk fungsi pembantu F:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda g(x,y) \\ &= 2x - 3y + \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1) \end{aligned}$$

$$F_x = 2 + \frac{2x}{4}\lambda = 0 \qquad \Rightarrow x = -\frac{4}{\lambda} \qquad (11)$$

$$F_y = -3 + 2y\lambda = 0 \qquad \Rightarrow y = \frac{3}{2\lambda} \qquad (12)$$

$$F_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \qquad (13)$$

Substitusikan (11) dan (12) ke (13) diperoleh:

$$\lambda^2 = \frac{25}{4} \text{ atau } \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

Untuk $\lambda = \frac{5}{2}$:

$$x = -\frac{4}{\lambda} = -\frac{8}{5} \quad \text{dan} \quad y = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$$

Untuk $\lambda = -\frac{5}{2}$:

$$x = -\frac{4}{\lambda} = \frac{8}{5} \quad \text{dan} \quad y = \frac{3}{2\lambda} = -\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$$

Pada titik $(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ nilai fungsi f adalah $f(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}) = -5$.

Pada titik $(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ nilai fungsi f adalah $f(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}) = 5$.

Dengan demikian maka fungsi f mempunyai nilai maksimum absolut pada titik $(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ dan minimum absolut pada titik $(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$

Contoh 3. Carilah titik $P(x, y, z)$ yang terdekat dengan titik pangkal pada bidang

$$2x + y - z - 5 = 0$$

Penyelesaian:

1. Metode Minimum dan Maksimum

Mencari titik terdekat berarti mencari jarak minimum, fungsi jarak adalah:

$$f(x,y,z) = \vec{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Jika x dan y dianggap sebagai variabel bebas, maka $z = 2x + y - 5$, berarti harus dicari nilai minimum dari fungsi:

$$h(x,y) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x + 4(2x + y - 5) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x + 4y = 20 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y + 2(2x + y - 5) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 4y = 10 \qquad (15)$$

Dari (14) dan (15) diperoleh

$x = \frac{5}{3}$ dan $y = \frac{5}{6}$

Kemudian substitusikan nilai x dan y ini ke persamaan

$$z = 2x + y - 5 = -\frac{5}{6}$$

Jadi, titik terdekat dengan titik pangkal pada bidang $2x + y - z - 5 = 0$ adalah titik

$$P(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$$

dan jaraknya adalah

$$\vec{OP} = \sqrt{(\frac{5}{3} - 0)^2 + (\frac{5}{6} - 0)^2 + (-\frac{5}{6} - 0)^2} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

2. Metode Pengali Lagrange

Misalkan $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan $g(x,y,z) = 2x + y - z - 5$.

Bentuk fungsi pembantu F:

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2x + y - z - 5)$$

$$F_x = 2x + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\lambda \qquad (16)$$

$$F_y = 2y + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\lambda \qquad (17)$$

$$F_z = 2z - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}\lambda \qquad (18)$$

$$F_\lambda = 2x + y - z - 5 = 0 \qquad (19)$$

Jika (16), (17), dan (18) disubstitusi ke (19), maka diperoleh

$$-2\lambda - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda - 5 = 0 \text{ atau } \lambda = -\frac{5}{3}.$$

Dari (16), (17), dan (18) diperoleh $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{5}{6}$, $z = -\frac{5}{6}$.

Contoh 4. Carilah titik yang terdekat dengan titik pangkal pada silinder hiperbolik

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

Penyelesaian:

I Metode Minimum dan Maksimum

Mencari titik terdekat dengan titik pangkal berarti mencari jarak minimum.

Kuadrat fungsi jarak ke titik pangkal adalah

$$f(x,y,z) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Jika x dan y dianggap sebagai variabel bebas, maka $z^2 = x^2 - 1$, berarti harus dicari nilai minimum dari fungsi:

$$h(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \qquad (21)$$

Dari (20) dan (21) diperoleh $x = 0$ dan $y = 0$. Akan tetapi, titik (0,0) tidak terletak pada silinder hiperbolik.

Kesalahan terjadi dalam pengambilan variabel bebas. Jika y dan z dianggap sebagai variable bebas, maka $x^2 = z^2 + 1$. Sekarang harus dicari titik kritis dari fungsi:

$$k(y,z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = 4z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4z = 0 \qquad (23)$$

dari (22) dan (23) diperoleh $y = 0$ dan $z = 0$.

Substitusikan nilai y dan z ini ke dalam persamaan

$$x^2 = z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Jadi, titik yang dicari adalah titik $(\pm 1, 0, 0)$.

Dari pertidaksamaan $k(y,z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$ terlihat bahwa titik $(\pm 1, 0, 0)$ ini merupakan nilai minimum untuk $k(y,z)$ dan jarak terpendek dari titik pangkal adalah 1.

V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa *Metode Pengali Lagrange* lebih mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dibandingkan dengan *Metode Subsitusi*. Hal ini disebabkan *Metode Pengali Lagrange* mempunyai beberapa keunggulan sebagai berikut:

1. Tidak melibatkan banyak fungsi.
2. Tidak ada kendala apabila terjadi kesalahan dalam pengambilan variabel bebas untuk substitusi (contoh 4).
3. Tidak perlu membentuk fungsi parameter apabila tidak ditemukan titik kritis (contoh 2).

Keunggulan-keunggulan tersebut di atas dimungkinkan karena adanya unsur λ yang membuat fungsi menjadi lebih sederhana. Unsur λ ini muncul karena *Metode Pengali Lagrange* memakai pendekatan secara geometri, yaitu memanfaatkan vektor tangen, vektor normal, dan bidang tangen.

DAFTAR PUSTAKA

1. Cozzens, Margaret B. & Richard D. Porter (1987). *Mathematics and Its Applications*. Toronto: D.C. Heath and Company.

2. Edwards, C. Henry & David E. Penney (1998). *Calculus With Analytic Geometry*, fifth edition: Prentice Hall International, Inc.

3. Leithold, Louis (1981). *The Calculus With Analytic Geometry*, fourth edition: Harper & Row, Publisher, Inc.

4. Soemartojo, N. (1986). *Kalkulus I*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

5. Spence, Lawrence E. & Charles Vanden Eynden (1990). *Applied Mathematics For Management, Life, and Social Sciences*. London: Scott, Foresman and Company.

6. Thomas, George B., Jr. & Ross L. Finney (1996). *Calculus And Analytic Geometry*, 9th edition: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

7. Varberg, Dale & Edwin J. Purcell (1997). *Calculus*, 7th edition: Prentice Hall International, Inc.

RIWAYAT HIDUP PENELITI

1. ***Ketua Peneliti*:**

Nama	:	Drs. Zulmahdi Dailami
N I P	:	131643904
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA - UT
Tempat / tanggal lahir	:	Tanjung Alam / 6 April 1957
Pendidikan	:	S1, Matematika, ITB, 1985
Pengalaman Penelitian	:	Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen Dengan Koeffisien Konstanta. Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi Tak Homogen Dengan Koeffisien Konstanta

2. ***Anggota Peneliti*:**

Nama	:	Dra. Dwi Astuti Aprijani
N I P	:	132205572
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA - UT
Tempat / tanggal lahir	:	Probolinggo / 15 April 1967
Pendidikan	:	S1, Matematika, UI, 1992
Pengalaman Penelitian	:	Metode Matriks untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi Tak Homogen Dengan Koeffisien Konstanta

3. ***Anggota Peneliti*:**

Nama	:	Dra. Asmara Iriani Tarigan
N I P	:	132174679
Unit	:	Jurusan Matematika FMIPA - UT
Tempat / tanggal lahir	:	Biak / 1 Januari 1966
Pendidikan	:	S1, Matematika, USU, 1989
Pengalaman Penelitian	:	Metode Matriks Untuk Menentukan Solusi Partikulir Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi Tak Homogen Dengan Koeffisien Konstanta