LAPORAN PENELITIAN

FUNGSI GREEN UNTUK MASALAH STRUM-LIOUVILLE

Oleh :

Dra. Nuraini Soleiman M.Ed.
Dra. Dyah Paminta Rahayu

Universitas Terbuka
Lembaga Penelitian
Pusat Studi Indonesia
1997

Lembar Pengesahan
Laporan Penelitian PSI-UT

1. a. Judul Penelitian	: Fungsi Green untuk masalah Strum-Liouville
b. Bidang Penelitian	: Matematika
2. Ketua Peneliti	
a. Nama lengkap dan gelar	: Dra. Nuraini Soleiman M.Ed.
b. NIP	: 131-573-167
c. Golongan kepangkatan	: III/c
d. Jabatan Fungsional	: Lektor Muda
e. Fakultas/Unit Kerja	: FMIPA/Matematika
3. Anggota tim peneliti	
a. Jumlah anggota	: 2 orang 1. Dra. Dyah Paminta Rahayu 2. Nining S (staf administrasi Puskom)
4. Lama Penelitian	: 6 bulan
5. Biaya Penelitian	: Rp.3.120.000,- (Tiga juta seratus dua puluh ribu rupiah)

Pondok Cabe, 12 Agustus 1997

Mengetahui,
Dekan FMIPA

Dr. Djati Kerami
NIP 130 422 587

Ketua Peneliti

Dra. Nuraini Soleiman M.Ed.
NIP 131 573 167

Menyetujui,
Kepala PSI-UT

Dr. Tian Belawati
NIP 131 569 974

Menyetujui,
Ketua Lembaga
Penelitian UT

WBP Simanjuntak, MEd, PhD
NIP 130 212 017

Abstrak

Masalah dalam fisika matematika biasanya berbentuk persamaan differensial biasa atau persamaan differensial parsial, dimana masalah syarat batas termasuk didalamnya. Salah satu bentuk permodelan dari masalah syarat batas dituangkan dalam masalah Strum-Liouville.

Penyelesaian dari masalah Strum-Liouville dapat diperoleh dengan beberapa metoda, salah satunya adalah dengan membangun fungsi green untuk masalah Strum-Liouville. Keberadaan fungsi Green untuk masalah Strum-Liouville menjadi tinjauan dalam penelitian ini.

Daftar Isi

BAB I
PENDAHULUAN

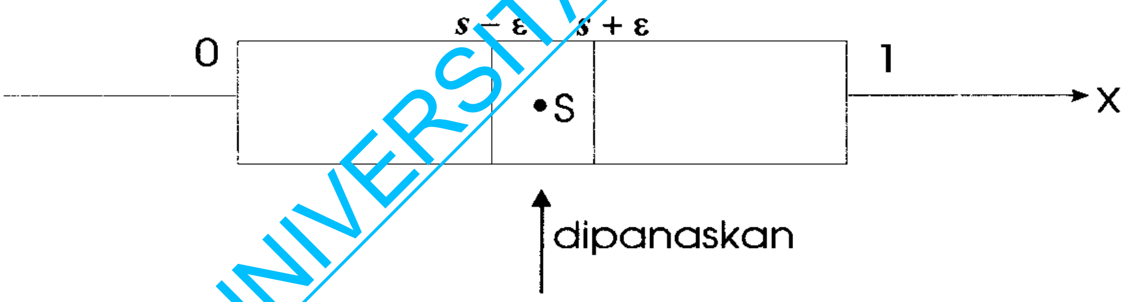
1.1 Latar Belakang

Masalah dalam fisika matematika berbentuk persamaan differensial biasa atau persamaan differensial parsial. Penyelesaian dari masalah ini menggunakan banyak metoda , salah satunya adalah dengan mengkonstruksi operator invers dari operator differensial bersangkutan, yang disebut operator integral, dengan kernel adalah fungsi Green (Soleiman, 1984).

Secara fisika fungsi Green dapat diartikan sebagai berikut :

Misalkan $Ly = f(x)$, $0<x<1$: dengan L adalah operator diferensial, menyatakan suatu sistem fisika yang dipengaruhi oleh input f, contohnya f adalah panas yang diberikan pada batangan logam (Guenther & Lee,1988).

Pada $f = f_S(x)$ adalah input unit pada titik s .



Gambar 1.1

Asumsikan $f_s(x) = 0$ untuk $|x-s|>\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ dan

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_S(x)dx = 1$$

Misalkan $y(x) = g_\varepsilon(x,s)$ adalah akibat yang disebabkan oleh $f_s(x)$.

Sebagai contoh, pada masalah panas $g_\varepsilon(x,s)$ adalah temperatur pada x yang dihasilkan oleh panas yang dilokalisir disekitar titik s. Jika $\varepsilon \to 0$, maka distribusi temperatur

$g_{\varepsilon}(x,s)$ akan konvergen pada *g(x,s)* yang berkaitan dengan panas yang diberikan pada titik s.

Jika input pada $x = s$ itu besarnya *f(s)* , maka apabila *L* linier, respon pada *x* adalah *G(x,s)f(s)*, *G* adalah himpunan $g_{\varepsilon}(x,s)$.

Misalkan pada selang $[0,1]$ bekerja input *f(x)*. Jika selang ini dibagi atas *n* buah selang, $0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots\ldots\le x_{i-1} \le x_i \le \ldots\ldots\le x_n = 1$

dengan $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, ε bilang positif. Dalam sub selang $|x_{i-1}, x_i|$ input dapat dianggap sama, yaitu f (ξ_i) dengan ξ_i adalah sebarang titik pada selang tersebut.

Sehingga input dalam selang tersebut menjadi $f(\xi_i)\Delta\xi_i$; $\Delta\xi_i = x_i - x_{i-1}$.

Pengaruh input pada titik $\xi_i = g(x,\xi_i)f(\xi_i)\Delta\xi_i$.

L adalah operator linier maka , pengaruh pada titik x yang diakibatkan oleh input $f(\xi_i)\Delta\xi_i$ pada titik ξ_i untuk I = 1,2,......,n adalah $\sum_{i=1}^{n} g(x,\xi_i)f(\xi_i)\Delta\xi_i$

Jika n $\to \infty$ dan $\Delta\xi \to 0$ akan diperoleh respon dari sistem yang diakibatkan oleh input $f(x)$, yaitu

$$y(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x,\xi_k)f(\xi_k)\Delta\xi = \int_0^1 g(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (1)$$

Pandang persamaan diferensial dengan syarat batas berbentuk seperti berikut,

$$\begin{cases} Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = f(x) & ,0 < x < 1 \\ \begin{cases} y(0) - h_0 y'(0) = 0 \\ y(1) - h_1 y'(1) = 0 \end{cases} & \end{cases} \qquad (2)$$

Dengan $p(x) \neq 0; p'(x), q(x) \, dan \, f(x)$ kontinu pada $0 \le x \le 1$

h_0, h_1 adalah konstanta. L adalah operator diferensial, masalah nilai batas diatas biasa disebut masalah Strum-Liouville.

Masalah Strum-Liouville juga disebut masalah nilai karakteristik dimensi satu (Zauderer,1983), sehingga penyelesaian dari masalah ini melibatkan pengertian nilai karakteristik dan fungsi karakteristik. Cara lain untuk menentukan penyelesaian dari masalah Strum-Liouville adalah dengan membentuk fungsi Green dari persamaan ini.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahannya apakah penyelesaian masalah nilai batas (2) dapat ditulis sebagai persamaan (1). Berikutnya bagaimana eksistensi fungsi Green , $g(x,s)$, untuk masalah Strum-Liouville. Persyaratan apa yang dibutuhkan untuk keberadaan fungsi Green.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

Dalam penelitian ini dibicarakan transformasi linier. Kruider & Kuller, 1966, memberikan beberapa definisi mengenai hal tersebut. Definisi tersebut diuraikan dibawah ini.

(1) Definisi

Suatu transformasi linier atau operator linier dari suatu ruang vektor V_1 pada ruang vektor V_2 adalah suatu fungsi A demikian sehingga setiap $x \in V_1$ ada vektor $A(x) \in V_2$ yang memenuhi

(i) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

dan

(ii) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

$\forall x_1, x_2 \in V_1$ *dan* $\forall \alpha$ *skalar*

(2) Suatu transformasi linier $L{:}C^n(I) \to C(I)$

dikatakan sebagai operator diferensial linier dengan orde n pada interval I jika L dapat ditulis dalam bentuk

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

dengan

$a_0(x) \dots\dots a_n(x)$ kontinu pada I , $a_n(x) \neq 0$, *pada* I .

Secara umum dapat ditulis dalam bentuk :

$$Ly = a_n(x)y^n + \dots\dots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y$$

(3) Teorema : Eksistensi dan unikness untuk persamaan differensial linier

Misal $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + \dots\dots + a_0(x)y = h(x)$

terdefinisi pada interval I; $a_n(x) \neq 0$ pada interval I; x_0 sebarang titik pada I

Maka, jika $y_0, \dots\dots, y_{n-1}$ sebarang bilangan riil,

maka ***ada satu dan hanya satu penyelesaian*** $y(x)$ ***yang memenuhi***

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y' \dots\dots\dots\dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

(4) Jika $L : C^n(I) \to C(I)$ adalah operator differensial normal dengan orde n, maka ada unik operator invers $G : C(I) \to C^n(I)$, demikian sehingga

(i) $L(G(h)) = h, \ \forall\ h \in C(I)$

(ii) $G(h)(x_0) = y_0 \ ; \ G(h'(x_0)) = y_1$

$$G(h)^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

(5) $C[a,b]$: ruang dari semua fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$.

Disamping itu Kruider & Kuller , 1966 , juga memberikan pengertian hasil kali dalam sebagi berikut. Hasil kali dalam $f \bullet g$ didefinikan sebagai

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

> $\int_a^b \alpha\, f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad , \alpha \in R$

> $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]g(x)dx = \int_a^b f_1(x)g(x)dx + \int_a^b f_2(x)g(x)dx$

> $\mathrm{f} \bullet \mathrm{f} = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$

dan

$\mathrm{f} \bullet \mathrm{f} = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{f} = 0$

Persamaan differensial parsial dapat ditulis dalam bentuk operator differensial. Dalam penelitian ini operator differensial yang ditelaah adalah operator differensial linier orde-2.

2.2 Masalah Strum-Liouville

Suatu persamaan differensial yang memenuhi syarat batas tertentu disebut masalah nilai batas. Zauderer, 1983, menjelaskan salah satu bentuk masalah nilai batas sebagai berikut. Pandang persamaan differensial berikut ini:

$$L[v(x)] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)v(x) = \lambda\rho(x)v(x); 0 < x < \ell \qquad (1)$$

$v(x)$ memenuhi syarat batas :

$$\begin{aligned} \alpha_1 v(0) - \beta_1 v'(0) &= 0 \\ \alpha_2 v(\ell) - \beta_2 v'(\ell) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dengan : $p(x) > 0\,;\rho(x) > 0; q(x) \geq 0$

$p(x), \rho(x), q(x)$ *dan* $p'(x)$ *kontinu dalam interval tutup* $0 \leq x \leq \ell$

Persamaan (1) yang memenuhi syarat batas (2) disebut masalah strum-liouville. Jadi masalah Strum-Liouville adalah salah satu bentuk masalah nilai batas. Masalah Strum-Liouville juga disebut masalah nilai karakteristik dimensi satu (Zauderer,1983), sehingga penyelesaian dari masalah ini melibatkan pengertian nilai karateristik dan fungsi karakteristik.

Menurut Samijono, 1990, penyelesaian dari masalah strum-liouville adalah :

a) $v(0) \equiv 0 \qquad \forall x \in \qquad 0 < x < \ell \qquad \forall \lambda$

disebut penyelesaian trivial.

b) $v \neq 0$, jika penyelesaian ini ada, disebut fungsi karakteristik atau fungsi eigen. Nilai λ yang berhubungan dengan penyelesaian ini disebut nilai karakteristik atau nilai eigen dari masalah strum-liouville.

Seperti dijelaskan diatas bahwa penyelesaian masalah Strum-Liouville disebut fungsi karakteristik atau fungsi eigen dan nilai λ yang berhubungan dengan fungsi ini disebut nilai eigen, berikut ini Zauderer, 1983, memberikan beberapa sifat penting dari nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah Strum Liouville.

1) Fungsi-fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen yang berbeda, saling orthogonal.

Misalkan λ_i *dan* λ_j adalah 2 nilai eigen dan $v_i(x)$ *dan* $v_j(x)$ adalah fungsi-fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen yang dimaksud.

Maka :

$$\int_{o}^{\ell}\left[v_i L v_j - v_j L_{vi}\right]dx = \int_{o}^{\ell}\left[v_j\left(pv_i'\right)' - v_i\left(pv_j'\right)'\right]dx$$
$$= \int_{o}^{\ell}\frac{d}{dx}\left[pv_j v_i' - pv_i v_j\right]dx = 0 \qquad \dots (11)$$

(dengan menggunakan sarat batas)

$$\int_{o}^{\ell}\left[v_i L v_j - v_j L v_i\right]dx = \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\int_{o}^{\ell}\rho v_i v_j\, dx$$

$$= \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\left(v_i, v_j\right)$$

$$\textit{karena } \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \left(v_i, v_j\right) = 0 \qquad \dots (12)$$

$$\textit{jadi } \left(v_i(x), v_j(x)\right) = 0 \qquad \textit{artinya orthogonal}$$

2) Nilai-nlai eigen adalah riil dan tidak negatip : fungsi eigen dapat dipilih sebagai nilai riil.

Misalkan λ_i adalah bernilai komplex

Maka $\overline{\lambda}_i = \lambda_j$ menampilkan (merupakan) nilai eigen yang kedua.

Karena koefisien dalam operator L bernilai riil fungsi eigen yang berhubungan λ_i dan $\lambda_j = \overline{\lambda}_i$ adalah $v_j(x)$ dan $v_j(x) = \overline{v_i(x)}$

dimana $v_j(x)$ diperoleh dari complex konyugasi dalam persamaan untuk $v_i(x)$.

karena $\lambda_i \neq \lambda_j$

maka $\left(v_i(x), v_j(x)\right) = \left(v_j(x), \bar{v}_i(x)\right) = \int_{o}^{1}\rho(x)\left|v_i(x)\right|^2 dx$

$$= 0$$

tapi $v_i(x) \neq 0$ jadi Kontradiksi.

Karena koefisien dan nilai eigen dari persamaan (1) bernilai riil, penyelesaian yang bernilai riil ataupun imajiner pasti memenuhi (fungsi eigen).

Sehingga fungsi eigen dapat hanya yang bernilai riil.

Membuktikan bahwa nilai eigen tidak negatif

Misalkan $v(x)$ adalah fungsi eigen maka

$$(1)\quad \begin{aligned}\left(v,\frac{1}{\rho}Lv\right) &= -\int_{o}^{1} v\frac{d}{dx}(pv')\,dx+\int_{o}^{1} q\,v^{2}\,dx \\ &= -\,pvv'\int_{o}^{1}+\int_{o}^{1} pv'^{2}\,dx+\int_{o}^{1} q\,v^{2}\,dx \geq 0\end{aligned}$$

pada $x=\ell$

$$-p(\ell)v(\ell)v'(\ell)=\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}\right)p(\ell)v'(\ell)\geq 0 & \beta_2>0\\ 0 & \beta_2=0\end{cases}$$

hal yang sama akan diperoleh untuk $x=0$.

Disamping itu dipunyai

$$(2)\quad \left(v,\frac{1}{\rho}Lv\right)=(v,\lambda v)=\lambda(v,v)=\lambda\|v\|^{2}$$

$\|v\|>0, dengan\ asumsi$

$$\lambda=\frac{\left(v,\dfrac{1}{\rho}Lv\right)}{\|v\|^{2}}\geq 0$$

Nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah strum liouville dapat diperoleh sebagai berikut :

Misalkan $v(x,\lambda)$ dan $w(x,\lambda)$ adalah penyelesaian-penyelesaian dari masalah nilai awal.

$$v(0;\lambda)=1\ ;\ v'(0;\lambda)=0 \qquad \ldots (13)$$

$$w(0;\lambda)=0\ ;\ w'(0;\lambda) \qquad \dots (14)$$

Untuk masing-masing persamaan (1).

Maka fungsi $v(x;\lambda)=\beta_1 v(x;\lambda)+\alpha_1 w(x;\lambda)$ ... (15)

adalah penyelesaian persamaan (1) yang memenuhi sarat batas (2) pada $x=0$.

Untuk memenuhi kondisi pada $x=l$ diperoleh:

$$\alpha_2\beta_1 v(\ell;\lambda)+\alpha_2\alpha_1 w(\ell;\lambda)+\beta_2\beta_1 v'(\ell;\lambda)+\beta_2\alpha_1 w'(\ell;\lambda)=0 \qquad \dots (16)$$

[diperoleh dengan substitusi (15) pada (2)].

Nilai eigen dari masalah strum liouville diperoleh dari akar persamaan (16).

Fungsi eigen yang berhubungan dengan nilai eigen yang dimaksud diberikan sebagai:

$$v_k(x)=v(x;\lambda_k)=\beta_1 v(x;\lambda_k)+\alpha_1 w(x;\lambda_k) \qquad k=1,2,\dots \qquad \dots (17)$$

2.3 Fungsi Green

Penyelesaian masalah Strum-Liouville dapat pula diperoleh dengan memformulasikan persamaan integral dari persamaan differensial yang diberikan. Persamaan integral tersebut mengaitkan fungsi Green sebagai fungsi yang berpengaruh (influence function) bagi masalah nilai batas (Guenther & Lee, 1988). Untuk menjelaskan fungsi Green Zauderer, 1983, menulis persamaan differensial dalam bentuk umum sebagai berikut :

$$Lu=-\nabla(p\nabla u)+qu=\rho F \qquad (1)$$

yang bekerja pada batas daerah G , dengan syarat batas

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial G}=B \qquad (2)$$

∇ = operator gradien

Dalam dimensi satu persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut :

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + qu = \rho F$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

G = interval, $0 < x < \ell$

Selanjutnya Zauderer, 1983, memformulasikan kembali persamaan differensial (1) dalam bentuk persamaan integral dengan mengambil suatu fungsi *w(x)* demikian sehingga

$$\iint_G (wLu - uLw)dv = -\iint_G \nabla(pw\nabla u - pu\nabla w)dv \qquad (3)$$

$$= -\int_{\partial G} p(w\nabla u - u\nabla w)\cdot n\, ds$$

$$= \int_{\partial G} p\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

Misalkan *w(x)* adalah solusi dari persamaan

$Lw = \delta(x-\xi)$, ξ sebarang titik pada G (4)

$\delta(x-\xi)$ adalah fungsi Dirac-delta.

Sifat substitusi dari Dirac-Delta memberikan

$$\iint_G uLw\, dv = \iint_G u\delta(x-\xi)dv \qquad (5)$$

$$= u(\xi)$$

Masukkan persamaan pada persamaan (3) diperoleh $\iint_G w\ Lu\, dv = \iint_G p\, w\, f\, dv$ (6)

Akan ditentukan syarat batas untuk *w(x)* pada ∂G demikian sehingga batas integral pada (3) hanya mengandung *w(x)* dan fungsi yang diketahui.

Hal ini dapat diperoleh dengan mempersyaratkan *w(x)* memenuhi syarat batas homogen pada persamaan (2), yaitu

$$\alpha w + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = 0 \qquad (7)$$

jika $\alpha \neq 0$ akan diperoleh :

$$u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\alpha} B \frac{\partial w}{\partial n} \qquad (8)$$

untuk $\alpha = 0$,

$$u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{\beta} B.w \qquad (9)$$

Fungsi *w(x)* disebut fungsi Green untuk masalah nilai batas (1) dengan syarat batas (2).

Untuk menjelaskan kebergantungan fungsi Green pada titik ξ, fungsi Green ditulis sebagai

$$w = K(x,\xi) \qquad (10)$$

Sehingga persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk :

untuk $\alpha \neq 0$

$$u(\xi) - \iint_G \rho KF\, dv = \int_{\partial G} p\left(\frac{1}{\alpha}\; B\frac{\partial K}{\partial n}\right) ds$$

$$\text{atau } u(\xi) = \iint_G \rho KF\, dv - \int_{\partial G} \frac{p}{\alpha} B \frac{\partial K}{\partial n} ds \qquad (11)$$

untuk $\alpha = 0$

$$u(\xi) = \iint_G \rho K F \, dv + \int_{\partial G} \frac{p}{\beta} B K \, dv \tag{12}$$

Jadi fungsi Green $K(x;\xi)$ memenuhi persamaan

$$-\nabla(p\nabla K) + qK = \delta(x-\xi) \tag{13}$$

dengan $x, \xi \in G$

Dengan syarat batas :

$$\alpha K + \beta \frac{\partial K}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{14}$$

Inti dari penjelasan diatas adalah :

1. Persamaan differensial (1) dapat ditulis atau diformulasikan kembali kedalam persamaan integral (3) dengan melibatkan fungsi *w(x)* yaitu fungsi Green.
2. Fungsi Green *w(x)* atau $w(x) = K(x;\xi)$ memenuhi persamaan differensial awal, dengan melibatkan fungsi Direc-Delta. Fungsi Direc-Delta adalah contoh fungsi diperumum (Generalised Function) yang mempunyai sifat-sifat khusus. Sifat fungsi Direc-Delta ini digunakan untuk menjelaskan fungsi Green.
3. Fungsi Green memenuhi syarat batas homogen.

Jika fungsi Green dapat diperoleh maka solusi dari persamaan (1) dapat langsung diperoleh dari persamaan (11) atau (12).

BAB III
TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah melihat eksistensi dan bentuk fungsi Green untuk masalah Strum Liouville. Penelitian ini tidak menelaah lebih detail sifat fungsi Green untuk masalah Strum-Liouville, namun untuk penelaahan keberadaan fungsi Green disinggung sedikit tentang sifat kesimetrian fungsi Green.

3.2 Manfaat Penelitian

Penelitian ini mempunyai beberapa manfaat. Pertama untuk pengembangan bidang matematika khususnya persamaan diferensial parsial yang mempunyai beberapa cara untuk mencari penyelesaiannya.

Manfaat kedua adalah untuk peneliti sebagai pendalaman bidang ilmu matematika. Tambahan pula penelitian ini menambah wawasan peneliti dalam melaksanakan penelitian bidang ilmu. Sehingga diharapkan peneliti dapat melakukan penelitian yang lebih baik lagi dimasa mendatang.

Selanjutnya manfaat dari penelitian adalah menambah kemampuan pengajaran matematika khususnya pada topik persamaan differensial parsial.

BAB IV
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian ini pertama, dengan melakukan studi literatur dari beberapa buku dan tulisan yang berhubungan dengan fungsi Green dan masalah Strum-Liouville. Studi literatur ini dilakukan pada topik yang berkaitan dengan :

1. Persamaan differensial secara umum dan masalah nilai batas.
2. Masalah fisika dan pemodelan matematikanya menggunakan persamaan differensial parsial.
3. Fungsi Green dan persamaan integral.

Kedua, dilakukan evaluasi terhadap hasil studi literatur yang dituangkan dalam tulisan, yang selanjutnya menjadi bahan diskusi.

Ketiga, dilakukan diskusi dan seminar dengan staf akademik FMIPA UT, untuk memperoleh tambahan masukkan. Diskusi ini dilaksanakan baik secara bebas atau formal yang dikoordinasikan oleh FMIPA UT.

Akhirnya dirangkum dalam pembuatan laporan hasil penelitian yang dituangkan dalam bentuk dibawah ini. Diawali dengan pembahasan dengan mengambil contoh tentang arti fungsi green secara fisika, penjelasan mengenai hal ini diberikan pada bab I.
Bab II menguraikan metodologi penelitian, dan sistematika laporan penelitian.
Bab III merupakan tinjauan pustaka, yang terdiri atas latar belakang teori yang mendukung penelitian ini. Pada awal dari penjelasan, diberikan beberapa pengertian seperti transformasi linier dan operator differensial. Kemudian dilanjutkan dengan uraian mengenai masalah Strum Liouville. Selanjutnya diberikan juga uraian tentang fungsi Green melalui penjelasan operator integral.
Bab IV adalah pembahasan yang memberikan uraian mengenai fungsi green bagi masalah Strum-Liouville. Penekanan lebih pada melihat eksistensi fungsi green.
Bab V merupakan kesimpulan dari hasil telaah literatur dan saran.
Bab VI adalah daftar pustaka yang peneliti gunakan dalam penelitian ini.

BAB V
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pandang masalah Strum-Liouville :

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x) & ,0 < x < 1 \\ \begin{cases} y(0) - h_0 y'(0) = 0 \\ y(1) - h_1 y'(1) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

Dengan $p(x) \neq 0; p'(x), q(x) \, dan \, f(x)$ kontinu pada $0 \leq x \leq 1$

h_0, h_1 adalah konstanta.

Misalkan penyelesaian persamaan (1) berbentuk

$$y(x) = \int_0^1 g(x,s) f(s)\, ds \tag{2}$$

$g(x,s)$ = suatu fungsi kontinu yang disebut fungsi Green.

Lebih tepat lagi dikatakan $g(x,s)$ disebut fungsi Green untuk (1) jika $g(x,s)$ kontinu pada $0 \leq x,s \leq 1$ dan (2) adalah penyelesaian yang unik bagi (1).

Sekarang akan diselidiki keberadaan fungsi Green bagi masalah Strum-Liouville diatas. Jadi akan dibangun penyelesaian (2).

Pandang identitas Lagrange (Langrange Identity) berikut :

$$vLu - uLv = -\frac{d}{dx}\left[p(vu' - uv')\right] \tag{3}$$

- Dengan $u,v \in C^2[0,1]$ terdeferensial 2 kali dalam interval $[0,1]$
- Untuk penyederhanaan ambil pada persamaan (1)

  $h_0 = h_1 = 0$

  sehingga syarat batas menjadi $\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{array}\right\}$ (4)

  Syarat batas ini disebut syarat batas Dirichlet.

- Misalkan dapat diperoleh suatu fungsi $w \neq 0$ *dengan* $Lw = 0$

  Gunakan identitas langrange dengan $v = w$ *dan* $u = y$, penyelesaian (1) dengan

$h_0 = h_1 = 0$, diperoleh :

$$wLy - yLw = -\frac{d}{dx}\left[p(wy' - yw')\right]$$ Karena $Lw = 0$, diperoleh

$$wLy = -\frac{d}{dx}\left[p(wy' - yw')\right]$$

$$wf = -\frac{d}{dx}\left[p(wy' - yw')\right] \qquad (5)$$

Integralkan persamaan (5) akan diperoleh persamaan differensial orde-1 untuk y. Jadi w disebut faktor integral untuk $Ly = f$

Misalkan dapat diperoleh suatu faktor integral u dan v demikian sehingga :

$$\begin{array}{ll} Lu = 0 & u(0) = 0 \\ Lv = 0 & v(1) = 0 \end{array}\Bigg\}$$ setiap faktor integral memenuhi satu dari syarat batas

Substitusikan pada persamaan (5) dengan $w = u$ dan $w = v$.

$$wf = -\frac{d}{dx}\left[p(wy' - w'y)\right]$$

untuk $w = u$ menjadi

$$uf = -\frac{d}{dx}\left[p(uy' - u'y)\right]$$

integralkan dan gunakan syarat batas (4) diperoleh

$$\int_0^x u(s)f(s)ds = -p(x)[uy' - u'y](x) \tag{6}$$

untuk $w = v$

$$\int_0^x v(s)f(s)ds = p(x)[vy' - v'y](x). \tag{7}$$

Untuk mengeliminasi y' kalikan persamaan (6) dan (7) masing-masing dengan $v(x)$ *dan* $y(x)$ dan jumlahkan.

$$\begin{array}{r} v(x)\int_0^x u(s)f(s)ds = -p(x)[uvy' - u'vy](x) \\ u(x)\int_x^1 v(s)f(s)ds = p(x)[uvy' - uv'y](x) \\ \hline v(x)\int_0^x u(s)f(s)ds + u(x)\int_0^1 v(s)f(s)ds = -p(x)(u'v - uv')y(x) \end{array} + \tag{8}$$

$(u'v - uv')$ = Determinan Wronskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} \qquad \textit{dari solusi} - \textit{solusi } u \textit{ dan } v \textit{ bagi } Lw = 0.$$

Lihat persamaan (8) $p(x)W(x) = C$ (9)

Sehingga koefisien dari $y(x)$ adalah -C

$$v(x)\int_0^x u(s)f(s)ds + u(x)\int_x^1 v(s)f(s)ds = -C\,y(x)$$

adalah penyelesaian bagi (1) asalkan $C \neq 0$, untuk syarat batas $h_0 = h_1 = 0$.

Misalkan $C \neq 0$ dan

$v_0(x) = -\dfrac{u(x)}{C}$ dan

$v_1(x) = v(x)$

akan diperoleh :

$$Lv_0 = 0 \qquad , v_0(0) = 0$$
$$Lv_1 = 0 \qquad , v_1(0) = 0$$

$$p(x)W(x) = -1$$

dengan $w(x) =$ Wronskian dari v_0 dan v_1.

Masukkan ke dalam persamaan (8)

$$y(x) = \int_0^x v_1(x)v_0(s)\,ds + \int_x^1 v_0(x)v_1(s)\,ds$$

atau

$$y(x) = \int_0^1 g(x,s)f(s)\,ds$$

dimana :

$$g(x,s) = \begin{cases} v_1(x)v_0(s) & 0 \le s < x \le 1 \\ v_0(x)v_1(s) & 0 \le x < s \le 1 \end{cases} \tag{10}$$

Kesimpulan :

Masalah Strum-Liouville :

$$-[p(x)y']^1 + g(x)y = f(x) \qquad 0<x<1$$

$$\begin{cases} y(0) - h_0 y'(0) = 0 \\ y(1) - h_1 y'(1) = 0 \end{cases}$$

mempunyai penyelesaian :

$$y(x)=\int_0^1 g(x,s)f(x)\,ds$$

dengan $g(x,s)=\begin{cases} v_1(x)v_0(s) & 0\le s\le x\le 1 \\ v_0(x)v_1(s) & 0\le x\le s\le 1 \end{cases}$

asalkan dapat ditemui fungsi-fungsi

v_0 dan v_1 yang memenuhi :

$$\begin{cases} Lv_0=0 & ,v_0 \textit{ memenuhi syarat batas pada } x=0 \\ Lv_1=0 & ,v_1 \textit{ memenuhi syarat batas pada } x=1 \\ pW=-1 & \end{cases} \qquad (11)$$

Jadi, jika dapat ditentukan persamaan (11) maka kita dapat mencari fungsi green yang terdefinisi pada persamaan (10). Sehingga masalah strum-Liouville (1) mempunyai penyelesaian yang dinyatakan oleh (2) dengan

$$g(x,s)=\begin{cases} v_1(x)v_0(s) & 0\le s<x\le 1 \\ v_0(x)v_1(s) & 0\le x<s\le 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa fungsi-fungsi nontrivial v_0 dan v_1 yang memenuhi syarat batas seperti pada persamaan (11) selalu dapat diperoleh.

Ambil $v_i(x)$ sebagai penyelesaian masalah syarat awal

$$Lv=0 \qquad , \left.\begin{matrix} v(i)=0 \\ v'(i)=1 \end{matrix}\right\} i=0,1$$

dengan asumsi $h_0=h_1=0$.

Sehingga eksistensi fungsi green dari masalah ini bergantung pada pencarian syarat $pW=-1$, pada persamaan (11).

Pertanyaannya sekarang, bilamana masalah Strum-Liouville (1) mempunyai fungsi Green.

Teorema 1:

Masalah Strum-Liouville (1) mempunyai fungsi Green jika dan hanya jika masalah homogennya $(pada\, f(x) \equiv 0)$ mempunyai penyelesaian yang trivial $(y \equiv 0)$, fungsi greennya didefinisikan oleh persamaan

$$g(x,s) = \begin{cases} v_1(x)v_0(s) & 0 \le s < x \le 1 \\ v_0(x)v_1(s) & 0 \le x < s \le 1 \end{cases}$$

dan

$$\begin{cases} Lv_0 = 0 & , v_0 \textit{ memenuhi syarat batas pada } x = 0 \\ Lv_1 = 0 & , v_1 \textit{ memenuhi syarat batas pada } x = 1 \;. \\ \quad pW = -1 & \end{cases}$$

Bukti:

(1) Misalkan persamaan (1) mempunyai fungsi green maka $y(x) = \int_0^1 g(x,s) f(s) ds$ adalah penyelesaian unik bagi (1) untuk setiap fungsi *f(x)* yang kontinu.

J(ika $f(x) \equiv 0$ maka $y(x) \equiv 0$ $\forall x$.

(2) Misalkan persamaan homogen $Ly=0$ mempunyai penyelesaian trivial yaitu $y=0$. Ambil v_0 dan v_1 penyelesaian non trivial yang memenuhi

$$v_0 \ne 0 \;,\; Lv_0 = 0 \quad ; v_0 = 0 \quad pada\, x = 0$$
$$v_1 \ne 0 \;,\; Lv_1 = 0 \quad ; v_1 = 0 \quad pada\, x = 0$$

Gunakan Lagrange :

$$v_0\, Lv_1 - v_1 Lv_0 = -\frac{d}{dx}\left[p\left(v_0 v_1' - v_1 v_{01}\right)\right]$$

karena $Lv_1 = 0$ dan $Lv_0 = 0$

$$0 = -\frac{d}{dx}\left[p\left(v_0 v_1' - v_1 v_{01}\right)\right]$$

Integralkan

diperoleh :

$$C = -p\left[v_0 v_1' - v_1 v_0'\right] \qquad (12)$$

$$C = -pW$$

atau $\quad pW = -C$

Misalkan $C=0$ karena $p>0$ maka $W=0$.

Karena $W=0$ maka v_0, v_1 saling bergantung Linier.

Dari syarat batas : $v_0(0) = v_1(1) = 0$ dan v_0, v_1 bergantung Linier maka $v_0(1) = v_1(0) = 0$.

Ini artinya $v_0(x)$ atau $v_1(x)$ juga penyelesaian trivial bagi $Ly=0$.

Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $Ly=0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial $y=0$.

Jadi $\quad C \neq 0$

Ambil $v_0 = -\dfrac{v_0}{C}$

$$C = -p\left[v_0 v_1' - v_1 v_1'\right] \qquad (12)$$

Substitusi ke (12)

$$\frac{C}{C} = -p\left[\frac{v_0 v_1'}{C} + \frac{v_1 v_0'}{C}\right]$$

$$1 = -p\left[-\frac{v_0 v_1'}{C} + \frac{v_1 v_0'}{C}\right] \qquad (13)$$

Ambil $v_0 = -\dfrac{v_0}{C}$ dan substitusi ke (13)

$$1 = -\,p\left[v_0 v_1' + v_1 v_0'\right]$$

$$1 = -\,pW \ atau \ pW = -1$$

Teorema 2

Asumsikan bahwa persamaan (1) yang homogen mempunyai penyelesaian yang trivial. Misalkan $g(x,s)$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh persamaan (11) dan (12).

maka :

(i) $g(x,s)$ kontinu pada daerah $0 \le x,\ s \le 1$ dan mempunyai turunan kedua yang kontinu pada setiap segitiga $0 \le s \le x \le 1$ dan $0 \le x \le s \le 1$. Pada setiap segitiga $Lg = 0$ dimana L adalah fungsi dari x.

(ii) $g(x,s)$ memenuhi syarat batas pada $x = 0 \ dan \ x = 1$

(iii) $\forall s \ dengan \ 0 < s < 1$

$$g_x\left(s^+, s\right) - g_x\left(s^-, s\right) = \frac{-1}{p(s)}$$

Sebaliknya sifat (i) dan (ii) menjadikan suatu fungsi yang unik demikian sehingga persamaan (2) merupakan penyelesaian bagi persamaan (1).

Bukti :

Misalkan $g(x,s)$ di definisikan oleh (11) dan (12).

Dari (12) jelas bahwa sifat (i) dan (ii) demikian oleh $g(x,s)$

Juga $g_x\left(s^+, s\right) - g_x\left(s^-, s\right) = v_1'(s)v_0(s) - v_0'(s)v_1(s) = W(s)$

$$= \frac{-1}{p(s)}$$

dari (12)

Jadi $g(x,s)$ yang didefinisikan oleh (11) dan (12) memiliki sifat yang diinginkan.

Misalkan $\tilde{g}(x,s)$ juga memiliki sifat (i) - (ii) dan membentuk $\Delta_x\left(s^+,s\right)-\Delta_x\left(s^-,s\right)=0$, karena (iii) berlaku bagi $\tilde{g}(x,s)$ ataupun $g(x,s)$.

Karena itu, oleh (i) $z(x)=\Delta_x\left(s^-,s\right)$ untuk s tertentu adalah kontinu dan mempunyai turunan pertama yang kontinu pada silang $0 \le x \le 1$.

Juga oleh (i) $Z''=(-p'z'+qz)/p$ untuk $x \le s$ *dan* $x \ge s$.

Karena : p, p', q, z *dan* z' kontinu pada s, maka z'' juga kontinu pada $0 \le x \le 1$.

Berikutnya, $Lz=0$ dan z memenuhi syarat batas pada persamaan (1) oleh (ii).

Jadi $z(x)=0$ atau $\tilde{g}(x,s)=g(x,s)$, karena persamaan homogen dari persamaan (1) mempunyai penyelesaian yang trivial.

Sifat symetri dari fungsi Green.

$$g(x,s)=g(s,x) \qquad \text{untuk } 0 \le x,s \le 1$$

Secara fisika ini artinya :

Temperatur pada x yang disebabkan oleh satuan sumber panas pada s adalah sama dengan temperatur pada s yang disebabkan oleh unit sumber panas pada x.

Teorema 3:

Fungsi Green untuk masalah Strum-Liouville (1) adalah simetri, asalkan fungsi green ada.

Fungsi Green ada jika $p(x) \ge 0$

$$q(x) \ge 0$$
$$h_0, h_1 \ge 0$$

Bukti :

Misalkan *z(x)* adalah penyelesaian persamaan homogen dari persamaan (1).

$$-(pz')' + gz = 0$$
$$z(0) - h_0 z'(0) = 0, z(1) + h_1 z'(1) = 0$$

1) $$\frac{-(pz')' + qz = 0}{-z(pz')' + qz^2 = 0} \times z$$

2) Integralkan bagian demi bagian

3) Gunakan syarat batas

diperoleh :

$$h_1 p(1) z'(1)^2 + h_0 p(0) z'(0)^2 + \int_0^1 p(x) z'(x)^2 dx + \int_0^1 q(x) z(x)^2 dx = 0 \qquad \text{dimana} \geq 0$$

Haruslah keempat bagian $= 0$

Perhatikan $z'(x) = 0$ atau $z(x) = a$ Suatu konstanta

Maka pada $x = 0$ $\qquad z(0) = 0$

karena $z(x) = 0$ maka Fungsi Green ada.

Bab VI

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Masalah Strum-Liouville :

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x) \qquad ,0 < x < 1$$
$$y(0) - h_0 y'(0) = 0$$
$$y(1) + h_1 y'(1) = 0$$

I. Mempunyai fungsi Green jika :

1) Masalah homogennya ($f(x) = 0$), mempunyai solusi yang trivial.
   Fungsi Green diberikan oleh:

$$g(x,s) = \begin{cases} v_1(x)v_0(s) & 0 \le s < x \le 1 \\ v_0(x)v_1(s) & 0 \le x < s \le 1 \end{cases}$$

   dan

$$Lv_0 = 0 \qquad ,v_0 \quad \textit{memenuhi syarat batas pada } x = 0$$
$$Lv_1 = 0 \qquad ,v_1 \quad \textit{memenuhi syarat batas pada } x = 1$$
$$pW = -1$$

2) $p(x) > 0; q(x) \ge 0; h_0, h_1 \ge 0$

II. Fungsi Green $g(x,s) = g(s,x)$, artinya fungsi Green simetri.

Saran

1. Kesimetrian fungsi Green tidak ditinjau secara mendalam pada penenlitian ini, karena untuk menjelaskan hal ini perlu di uraikan sifat-sifat fungsi Green yang harus dijabarkan melalui fungsi diperumum (generalised function). Untuk tujuan itu maka diusulkan untuk melihat sifat-sifat fungsi Green pada penelitian lebih lanjut.

2. Penelitian lebih lanjut tentang fungsi Green sebagai Kernel operator integral perlu diadakan untuk memperdalam pengertian fungsi ini.

3. Tinjauan perilaku fungsi Green secara numerik pada masalah Strum-Liouville dengan menggunakan software Matlab perlu dilakukan untuk melihat secara visual perilaku fungsi tersebut.

BAB VII

DAFTAR PUSTAKA

1 Zauderer, E., _Partial Differential Equation for Applied Mathematics_, , John Wiley & Sons, USA, 1983.

2 Kreider D.L , Kuller R.G. ,Osterberg D.R & Perkins F.W, _An Introduction to linier Analysis_, , Addilon-wesley, Massachusetts USA, 1966.

3 Guenther,R.B & Lee, J.W., _Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations_, Prentice Hall, New Jersey, 1988.

4 Boyce, W.E., & Diprima, R.C., _Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems_, John Willey & Sons,1986.

5. Soleiman, N., _Fungsi Green_, ITB, 1984.

6. Samijono, S.K., _Persamaan Diferensial Parsial_, Karunika UT, Jakarta, 1990