LAPORAN PENELITIAN

UJI UMUR DAN PENAKSIRAN KEANDALAN ALAT-ALAT YANG BERDISTRIBUSI EKSPONENSIAL DENGAN PENDEKATAN BAYES

Oleh :

Drs. Herman , MA

Universitas Terbuka
Lembaga Penelitian
Pusat Studi Indonesia
1997

Lembar Pengesahan
Laporan Penelitian PSI-UT

1. a. Judul Penelitian : Uji Umur dan Penaksiran Keandalan Alat-alat yang Berdistribusi Eksponensial dengan Cara Bayes
   b. Bidang Penelitian : Statistika

2. Ketua Peneliti
   a. Nama lengkap dan gelar : Drs. Herman. MA
   b. NIP : 131-628-379
   c. Golongan kepangkatan : III/c
   d. Jabatan Fungsional : Lektor Muda
   e. Fakultas/Unit Kerja : FMIPA/Statistika Terapan

3. Anggota tim peneliti
   a. Jumlah anggota : 0 orang

4. Lama Penelitian : 6 bulan

5. Biaya Penelitian : Rp.1.833.000,-
   (Satu juta delapan ratus tiga puluh tiga ribu rupiah).

Pondok Cabe, 4 Agustus 1997

Mengetahui,
Dekan FMIPA

Dr. Djati Kerami
NIP 130 422 587

Ketua Peneliti

Drs. Herman. MA
NIP 131 628 379

Menyetujui,
Kepala PSI-UT

Dr. Tian Belawati
NIP 131 569 974

Menyetujui,
Ketua Lembaga
Penelitian UT

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS TERBUKA

WBP Simanjuntak, MEd, PhD
130 212 017

Abstrak

Penelitian ini diturunkan berdasarkan penelitian dari Bhattacharya (1967) yang berjudul *Bayesian Approach to Life Testing and Reliability Estimation*. Masalah yang diteliti adalah menaksir parameter dan keandalan alat-alat yang mempunyai distribusi eksponential yang berbentuk :

$$p(x) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-\alpha)/\theta} \delta(x-\alpha)$$

$$\textit{dengan}: \alpha \geq 0, \theta \geq 0, \ \textit{dan} \ \delta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

Oleh Bhattacharya penaksiran parameter α,θ dan penaksiran keandalan dari alat-alat tersebut dilakukan dengan 3 cara, yaitu Maximum Likelihood Estimation, Minimum Variance Unbiased Estimation dan penaksiran dengan cara Bayes. Untuk besar sampel berukuran tertentu maka hasil yang diperoleh adalah ketiga pendekatan itu menujukkan hasil yang "sama". Penelitian ini menjabarkan penurunan rumus-rumus yang didapatkan oleh Bhattacharya dan juga penjelasan tentang beberapa teori yang dipakai yang tidak diberikan pada penelitian tersebut.

Daftar Isi

UJI UMUR DAN PENAKSIRAN KEANDALAN ALAT-ALAT YANG BERDISTRIBUSI EKSPONENSIAL DENGAN PENDEKATAN BAYES

I. PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Apakah yang dimaksud dengan teori keandalan (reliability theory) secara matematik ? Barlow, dan Proschan (1965) menjawab pertanyaan itu sebagai *kerangka ide-ide, model matematika, dan metode metode yang ditujukan dan diarahkan untuk mencari solusi problem problem di dalam menaksir atau mengoptimalkan peluang untuk survive, umur rata-rata komponen / sistim, atau menaksir distribusi hidup dari suatu komponen / sistim.*

Problem problem yang diperhatikan dalam teori keandalan adalah problem yang melibatkan peluang berfungsinya sistim pada waktu yang ditentukan / waktu sebarang atau proporsi waktu dari sistim dimana sistim tersebut akan berfungsi sebagaimana mestinya. Distribusi yang paling terkenal pada teori reliabiliti adalah distribusi eksponensial.

Distribusi eksponensial sudah sering dipakai untuk menyelidiki umur tabung elektonik ataupun beberapa peralatan elektronik lainnya. Penelitian oleh Bhattacharya (1967) adalah menaksir nilai-nilai parameter yang ada pada distribusi eksponensial yang mempunyai dua parameter dan menaksir keandalan alat alat yang diuji dengan tiga cara. Cara-cara tersebut adalah Maximum Likelihood Estimation (MLE), Minimum Variance Unbiased Estimation (MVUE) dan penaksiran parameter dengan pendekatan Bayes.

Pada penelitian ini bentuk distribusi yang dipelajari adalah :

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x) = \dfrac{1}{\theta}\, e^{-(x-\alpha)/\theta}\, \delta(x-\alpha) \\ \textit{dengan}:\ \alpha \geq 0, \theta \geq 0,\ \textit{dan}\ \ \delta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \end{array}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

Parameter α pada (1.1) dapat diartikan sebagai :

1. Hidup (umur) minimum yang diukur pada saat $\alpha = 0$.
2. "Saat lahir", yaitu hidup yang diukur pada saat $\alpha > 0$.

Suatu Penaksiran akan "baik" bilamana data yang dipakai untuk pengamatan "cukup besar". Sudah tentu bila cara ini dipakai maka biaya yang dibutuhkan untuk itu akan besar. Salah satu jalan keluar agar dengan data yang tidak begitu banyak tetapi penaksiran diharapkan akan baik adalah dengan menggunakan "Censored Sample". Perlu diketahui bahwa penelitian ini tidak melakukan eksperimen. Data (dari censored sample) diambil dari penelitian yang sudah pernah dilakukan. Pada penelitian ini penaksiran hanya dibatasi untuk penaksiran titik saja.

I.2 Perumusan Masalah

Bhattacharya (1967) menggunakan suatu fungsi distribusi prior untuk α dan θ yang berbentuk eksponensial dan mirip dengan fungsi kepadatan untuk alat-alat yang diuji. Dari fungsi tersebut, ia mendapatkan taksiran untuk parameter parameter α dan θ serta taksiran untuk keandalannya. Pada penelitian itu, ia memberikan formula taksiran untuk α dan θ serta keandalan dengan cara MLE MVUE dan cara Bayes. Masalahnya adalah bagaimana ia sampai ke formula-formula tersebut ?.

I.3 Tujuan Penelitian

Penelitian in pada dasarnya berasal dari penelitian Bhattacharya (1967). Karena itu, tujuan penelitian ini adalah mengupas teori teori yang dipakai dan membuktikan formula-formula yang dituliskan oleh peneliti sebelumnya. Pembuktian dilakukan untuk taksiran parameter-parameter dari distribusi eksponensial dengan cara MLE, MVUE dan dengan cara Bayes. Data yang dipakai untuk mambandingkan hasil taksiran diambil dari data yang dikumpulkan oleh Battacharya (1967).

I.4 Manfaat Penelitian

Penilitian ini bermanfaat untuk menambah pengetahuan si peneliti dalam menentukan distribusi prior untuk pendekatan Bayes. Disamping itu penelitian ini juga menambah pengetahuan dan wawasan si peneliti sehingga akan meningkatkan kemampuannya di dalam melakukan penelitian. Tujuan lainnya adalah untuk mengembang ilmu statistik yang dipakai di industri.

II. Metodologi Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian (studi) literatur untuk menurunkan rumus rumus yang dipakai dalam menaksir parameter parameter dari distribusi eksponensial di atas. Ada 3 macam pendekatan yang dipakai untuk menaksir parameter tersebut. Karena itu tidak ada eksperimen sama sekali. Data yang dipakai untuk membandingkan hasil penaksiran diambil dari data yang sudah didapatkan oleh peneliti lain dalam percobaan mereka.

Karena ada 3 pendekatan untuk menaksir parameter parameter serta keandalan maka banyak formula matematik yang diturunkan. Variabel yang dipakai untuk studi ini adalah umur dari alat elektronik dimana sampel diambil berdasarkan censored sample.

Data hasil sampling didapatkan dari data sekunder yang berasal dari salah satu referensi yang dipakai. Dengan data ini lalu dihitung taksiran parameter dan keandalan yang berasal dari ke tiga metode penaksiran, lalu hasilnya dibandingkan. Adapun langkah langkah yang dilakukan :

1. Studi literatur untuk pemahaman teorema Bayes, MLE, MVUE.
2. Studi journal-journal yang berkaitan dengan penelitian ini.
3. Penurunan formula matematik yang dipakai.
4. Pembuatan Laporan.

III. Tinjauan Pustaka

Distribusi kegagalan memperlihatkan suatu usaha untuk menjelaskan umur kehidupan dari suatu material, alat, atau suatu struktur (sistem) secara matematik. Model kegagalan item yang dibuat akan mempengaruhi bentuk analitis dari distribusi kegagalan (Barlow & Proschan, 1965).

Perlu diketahui bahwa material dan struktur dapat gagal karena berbagai sebab, dimana satu atau lebih jenis kegagalan dapat terjadi pada waktu yang sama. Jenis kegagalan yang dapat dijadikan contoh adalah patahnya penyangga boks sewaktu pengisian barang, tidak stabilnya suatu struktur sehingga beban tidak merata yang mengakibatkan rusaknya suatu sistim, karatan, haus, dan sebagainya.

Pada alat alat listrik kegagalan dapat disebabkan oleh dilampauinya titik titik kritis dari parameter parameter diatas tingkat yang dapat ditoleransi karena faktor waktu, suhu, kelembaban serta ketinggian. Biasanya kegagalan alat pada tingkat awal disebabkan oleh tidak benarnya suatu disain, tidak benarnya pembuatan di pabrik, dan kesalahan pada waktu pemakaian. Sayangnya, pemilihan suatu distribusi kegagalan berdasarkan pertimbangan pertimbangan phisik seperti diatas masih tetap merupakan suatu *seni* (Barlow & Proschan, 1965). Akan tetapi dalam beberapa kasus, hubungan antara mekanisme kegagalan dan fungsi kegagalan dapat digunakan untuk menentukan pilihan.

Pengambilan sampel digunakan karena penelitian biasanya tidak mengukur keseluruhan data (populasi). Karena itu sampling haruslah mewakilkan populasi yang diteliti. Ada beberapa macam sampling. Tetapi disini sampling yang dipakai adalah *Censoring*. Kapur dan Lamberson (1977) menjelaskan ada 2 macam jenis *censored sample*. Yang pertama adalah censoring type II. Disini ada n data yang umurnya diteliti bersama-sama. Penelitian dihentikan setelah r ($r \leq n$) data tidak berfungsi lagi (gagal). Item yang gagal tidak diganti. Pada censoring data type I , penelitian dibatasi oleh waktu. Misalkan ada n data yang diteliti. Waktu penelitian misalkan t. Kalau sebelum waktu t ada alat yang gagal, maka ia akan diganti. Pada penelitian ini censoring yang digunakan adalah type II.

Crowder, Kimber, Smith dan Sweeting (1991) menyatakan bahwa metodologi yang dikenalkan oleh Bayes untuk menganalisa reliabilitas data semakin sering dipakai. Pada cara Bayes, pendekatan inferensi statistik untuk parameter yang tidak diketahui dibuat bersyarat. Karena itu, disini parameter θ dibuat sebagai variabel random. Kunci yang dipakai adalah menentukan distribusi peluang θ sebelum observasi data. Distribusi ini dikenal dengan *distribusi prior* dari θ. Distribusi ini ditentukan secara subjektif. Setelah distribusi prior ditentukan dan data dikumpulkan maka *distribusi posterior* (distribusi dimana data sudah diperhitungkan) dapat ditentukan.

Bhattacharya (1967) meneliti pendekatan Bayes untuk suatu distribusi kepadatan. Pada penelitian tersebut juga ditaksir keandalan dari alat yang digunakan. Tiga macam pendekatan penaksiran digunakan oleh Bhattacharya, yaitu *maximum likelihood estimation, minimum varianced unbiased estimation* dan *bayessian estimation.* Pada pendekatan Bayes, Bhattacharya mengunakan distribusi prior untuk parameter-pameter yang akan ditaksir dalam bentuk fungsi eksponential. Dia menemukan bahwa untuk parameter α dan θ , serta untuk keandalan alat ke tiga pendekatan tersebut hasilnya "hampir sama" untuk ν mendekati r. Dengan perkataan lain ke tiga pendekatan tersebut menghasilkan "besaran" yang sama.

IV. Latar Belakang Teori

IV.1 Penaksiran Bayes

Hogg dan Craig (1978) menjelaskan teorema Bayes seperti dibawah ini. Misalkan X suatu variabel random yang distribusinya bergantung pada parameter $(\omega \in \Omega)$ yang tidak diketahui. Sekarang pandang variabel random Θ, yang mempunyai fungsi distribusi peluang dengan domain Ω. Sebagaimana diketahui x adalah nilai yang mungkin dari variabel X. Dengan cara yang sama dimisalkan ω sebagai nilai yang mungkin dari Θ, sehingga distribusi X bergantung pada ω yang ditentukan secara random dari Θ. Fungsi distribusi peluang dari Θ diberi notasi $h(\omega)$ dengan $h(\omega) = 0$, $\omega \notin \Omega$.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ adalah sampel random yang distribusinya bergantung pada ω dan misalkan Y adalah fungsi dari $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$. Fungsi distribusi peluang Y dapat ditentukan untuk setiap ω yang diberikan dan fungsi distribusi peluang Y diberikan $\Theta = \omega$ diberi notasi $g(y/\omega)$. Karena itu distribusi gabungan dari Y dan Θ adalah : $k(\omega, y) = h(\omega) \cdot g(y/\omega)$.
Jika Θ adalah variabel random dengan tipe kontinu, fungsi distribusi peluang marginal Y adalah :

$$k_1(y) = \int_{\Omega} h(\omega).g(y/\omega)\, d\omega$$

Bilamana Θ adalah variabel random tipe diskrit, fungsi distribusi peluang marginal dari Y adalah :

$$k_1(y) = \sum_{\Omega} h(\omega).g(y/\omega)$$

Sedangkan fungsi distribusi peluang bersyarat dari Θ diberikan Y = y adalah :

$$k_1(\omega / y) = \frac{k(y,\omega)}{k_1(y)} = \frac{h(\omega).g(y/\omega)}{k_1(y)} \qquad , k_1(y) > 0$$

Hubungan diatas adalah salah satu bentuk dari formula Bayes. Pada statistik Bayes, fungsi $h(\omega)$ disebut fungsi distribusi peluang prior dari Θ dan fungsi $k(\omega/y)$ disebut fungsi distribusi peluang posterior dari Θ. Alasannya adalah karena $h(\omega)$ adalah fungsi distribusi peluang awal (mula-mula) dari Θ untuk pengamatan Y. Sedangkan $k(\omega/y)$ adalah fungsi distribusi peluang dari Θ setelah pengamatan Y dibuat. Pada umumnya $h(\omega)$ tidak diketahui. Karena itu pemilihan $h(\omega)$ akan mempengaruhi fungsi distribusi peluang $k(\omega/y)$. Sehingga untuk menentukan $h(\omega)$, semua pengetahuan awal dari pengamatan harus diperhitungkan. Sudah tentu pemilihan $h(\omega)$ disini sangat subjektif sekali.

Andaikata parameter ω ingin ditaksir dengan taksiran titik, maka dengan cara Bayes haruslah dipilih f sebagai fungsi keputusan sedemikian hingga $f(y)$ adalah penaksir ω. Pemilihan fungsi keputusan tersebut bergantung pada fungsi kerugian $L(\omega, f(y))$. Diharapkan agar nilai $f(y)$ "mendekati" nilai ω. Untuk itu pilihlah $f(y)$ yang meminimumkan ekspektasi fungsi kerugian. Dengan kata lain

$$E(L(\Theta, f(y))/Y=y) = \int L(\omega, f(y)) \,.\, k(\omega/y)\, d\omega \quad \text{.........................} \quad (4.1)$$

harus minimum.
Sebagai contoh :
Jika fungsi kerugiannya $L(\omega, f(y)).= (\omega - f(y))^2$ maka solusi Bayes adalah $f(y) = E(\Theta/y)$, yaitu mean dari distribusi bersyarat Θ, bila diketahui $Y=y$.

Jika fungsi kerugiannya $L(\omega, f(y)).= |\omega - f(y)|$ maka solusi Bayes diberikan oleh median dari distribusi bersyarat Θ bila diketahui $Y = y$.

IV.2 Censored Sample

Misal sebuah sampel sebesar n diambil dari populasi yang akan diuji umurnya. Pengujian akan dihentikan setelah terjadi r kegagalan. Besar r ditetapkan sebelumnya dan nilai $r < n$. Karena itu akan didapatkan waktu kegagalan $t_1, t_2, \ldots, t_r$.
Uji seperti ini disebut "***Censored***" (tipe II).

V. Pembahasan

V.1 Likelihood dari Censored Sample

Misalkan x_i menyatakan umur atau waktu kegagalan yang ke-i, (i = 1,2,.....r), maka menurut Bhattacharya (1967) likelihood dari censored sample adalah :

$$U(X/\alpha,\theta) = \frac{C}{\theta^r} e^{-(S-n\alpha)/\theta}\,\delta(M-\alpha) \quad \text{.............................} \quad (5.2)$$

dengan :

$$S = \sum x_i + (n-r)x_r \quad \text{...} \quad (5.3)$$

$$C = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$M = x_1$$

Bukti untuk (5.2) :

Dari n data, terdapat r data yang diuji, sehingga ada $\frac{n!}{(n-r)!}$ *kemungkinan susunan data. Fungsi distribusi peluang untuk r data adalah* $\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\alpha)/\theta}$. *Untuk (n-r) data yang tersisa, fungsi distribusi peluangnya adalah* $\frac{1}{\theta}e^{-(n-r)(x_r-\alpha)/\theta}$. *Sehingga fungsi likelihoodnya adalah :*

$$\frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta}e^{-(x_1-\alpha)/\theta}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-(x_2-\alpha)/\theta}\cdots\cdots\frac{1}{\theta}e^{-(x_r-\alpha)/\theta}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-(n-r)(x_r-\alpha)/\theta},$$

atau $$U(X/\alpha,\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}e^{-\left(\sum_{i=1}^{r} x_i+(n-r)x_r-n\alpha\right)/\theta}\,\delta(x_1-\alpha)$$

Tuliskan: $M = x_1$

$$S = \sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)x_r$$

$$C = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$X = x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_r$$

V.2 Distribusi Prior Sekawan dari p(x/α,θ)

Distribusi prior sekawan untuk α,θ oleh Bhattacharya (1967) ditetapkan sebagai berikut :

$$g(\alpha,\theta) \sim \frac{1}{\theta^{\nu+1}} e^{-(\mu-\lambda\alpha)/\theta}\, \delta(\eta-\alpha) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.4)$$

$\alpha \geq 0$

$\theta \geq 0$

Persamaan (5.4) adalah anggota keluarga sekawan yang tegas dari (1.1)
bilamana : $\mu > 0$
$\theta > 0$
ν,λ bilangan bulat positif $\ni \quad \nu \leq \lambda < \mu/\eta$

Pemakaian distribusi sekawan akan menguntungkan karena bentuk fungsi distribusi posterior akan sama dengan bentuk fungsi distribusi prior. Apabila $\lambda = \mu/\eta$ maka (I.4) bukan lagi distribusi prior yang tegas terhadap (1.1).

Dalam hal $\lambda = \mu = 0$ dan $\eta \to \infty$ maka (5.4) akan menjadi

$$g(\alpha) \sim \frac{1}{\theta^{\nu+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.5)$$

dengan $\alpha \geq 0$ dan $\theta > 0$
Dalam hal ini (5.5) disebut bentuk kepadatan prior yang semu.
α dan θ dari (5.5) saling bebas, dengan α dan θ berdistribusi seragam terhadap garis bilangan real.

Untuk mempermudah perhitungan, akan didifinisikan hal-hal berikut ini :

$$M' = \min(M,\eta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.6)$$

$$P_k = 1 - \frac{(n+\lambda)(M'-k)}{(S+\mu)-(n+\lambda)k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.7)$$

$$H_k(m) = 1 - P_k^m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.8)$$

$$H_0(m) = h(m) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.9)$$

V.3 Distribusi Posterior Gabungan dari α dan θ bila diketahui X

Distribusi posterior gabungan α,θ bila diketahui X dapat dicari dengan menggabungkan (I.2) dan (I.4) yaitu $g^*(\alpha,\theta/X) \propto U(X/\alpha,\theta)\,.\,g(\alpha,\theta)$, sehingga didapat :

$$g^*(\alpha,\theta/X) = \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} e^{-[S-\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,\delta(M'-\alpha) \quad \text{.................} \quad (5.10)$$

dengan $\alpha \geq 0$; $\theta \geq 0$

$S+\mu > (n+\lambda)M'$ .... (5.11)

$r+\nu > 1$ .... (5.12)

$C_2 = ((S+\mu)P_0)^{r+\nu-1}/h(r+\nu-1)$ .... (5.13)

Bukti untuk (5.10) :

$$(X/\alpha,\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r} e^{-(S-n\alpha)/\theta}\,\delta(M-\alpha)$$

$$g(\alpha,\theta) \sim \frac{1}{\theta^{\nu+1}} e^{-(\mu-\lambda\alpha)/\theta}\,\delta(\eta-\alpha)$$

$$g^*(\alpha,\theta/X) \sim U(X/\alpha,\theta).g(\alpha,\theta)$$

$$g^*(\alpha,\theta/X) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{C}{\theta^{r+\nu+1}} e^{-(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)/\theta}\,\delta(M'-\alpha)$$

Untuk mencari nilai C, digunakan sifat fungsi distribusi peluang yaitu:

$\int_A f(x)\,dx = 1$, dengan f(x) adalah fungsi distribusi peluang untuk $x \in A$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\alpha,\theta/X)\,d\alpha\,d\theta = 1$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{M'} \frac{n!.C}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}} e^{(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)/\theta}\,d\alpha\,d\theta = 1$$

$$\frac{n!.C}{(n-r)!}\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}\left\{\int_0^{M'} e^{-(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)/\theta}\right\}d\theta = 1$$

$$\frac{n!.C}{(n-r)!}\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}\left\{\frac{\theta}{n+\lambda} e^{-(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)/\theta}\Big/_{0}^{M'}\right\}d\theta = 1$$

$$\frac{C.n!}{(n+\lambda)(n+r)!}\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{r+v}}\left\{e^{-(S+\mu-(n+\lambda)M')/\theta}-e^{-(S+\mu)/\theta}\right\}d\theta=1$$

$$\text{Pandang: }\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{r+v}}e^{-(S+\mu-(n+\lambda)M')/\theta}\,d\theta \quad \text{.................. (1)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{r+v}}e^{-(S+\mu)/\theta}\,d\theta \quad \text{.......................... (2)}$$

$$\text{misalkan:} S+\mu-(n+\lambda)M'=k$$

$$(1).\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{r+v}}e^{-k/\theta}\,d\theta=\int_0^\infty \theta^{-(r+v)}\frac{\theta^2}{k}de^{-k/\theta}=\frac{1}{k}\int_0^\infty \theta^{-(r+v-2)}\,de^{-k/\theta}=\frac{1}{k}$$

Jika proses ini dilanjutkan maka akan didapat :

$$\frac{(r+v-2)(r+v-3)......1}{k^{r+v-1}}\int_0^\infty de^{-k/\theta}=\frac{(r+v-2)!}{k^{r+v-1}}\left(e^{-k/\theta}\Big|_0^\infty\right)=\frac{(r+v-2)!}{k^{r+v-1}}=$$

$$\frac{\Gamma(r+v-1)}{(S+\mu-(n+\lambda)M')^{r+v-1}}$$

(2). *Misalkan*: $S+\mu=b$, *maka dengan cara seperti pada* (1) *didapat*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{r+v}}e^{-b/\theta}\,d\theta=\frac{\Gamma(r+v-1)}{b^{r+v-1}}=\frac{\Gamma(r+v-1)}{(S+\mu)^{r+v-1}}$$

$$\frac{C.n!}{(n+\lambda)(n-r)!}\left\{\frac{\Gamma(r+v-1)}{(S+\mu-(n+\lambda)M')^{r+v-1}}-\frac{\Gamma(r+v-1)}{(S+\mu)^{r+v-1}}\right\}=1$$

$$\frac{C.n!}{(n+\lambda)(n-r)!}\Gamma(r+v-1)\left\{\frac{(S+\mu)^{r+v-1}-[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+v-1}}{(S+\mu)^2-[(S+\mu)(n-\lambda)M']^{r+v-1}}\right\}=1$$

$$C=\frac{(n-r)!}{n!}\,\frac{n+\lambda}{\Gamma(r+v-1)}\,\frac{[(S+\mu)^2-(S+\mu)(n+\lambda)M']^{r+v-1}}{(S+\mu)^{r+v-1}-[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+v-1}}$$

$$g^*(\alpha,\theta/X)=\frac{n!.C}{(n-r)!}\,\frac{1}{\theta^{r+v-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,\delta(M'-\alpha)$$

masukkan C ke dalam persamaan di atas maka didapat :

$$g^*(\alpha,\theta/X)=\frac{[(S+\mu)^2-(S+\mu)(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{(S+\mu)^{r+\nu-1}-[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}\,\frac{n+\lambda}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,\delta(M'-\alpha)$$

$$Pandang:\ \frac{[(S+\mu)^2-(S+\mu)(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{(S+\mu)^{r+\nu-1}-[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}=$$

$$\frac{(S+\mu)^{r+\nu-1}[(S+\mu)-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{(S+\mu)^{r+\nu-1}-[(S+\mu)-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}=$$

$$\frac{[(S+\mu)-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{\dfrac{(S+\mu)^{r+\nu-1}}{(S+\mu)^{r+\nu-1}}-\dfrac{1}{(S+\mu)^{r+\nu-1}}[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}=$$

$$\frac{\left((S+\mu)\,\dfrac{(S+\mu)-(n+\lambda)M'}{S+\mu}\right)^{r+\nu-1}}{1-\left(\dfrac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu}\right)^{r+\nu-1}}=\frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}=C_2$$

$$dengan:\ P_0=\frac{(S+\mu)-(n+\lambda)M'}{S+\mu}=1-\frac{(n+\lambda)M'}{S+\mu}$$

$$h(r+\nu-1)=1-P_0^{r+\nu-1}$$

$$g^*(\alpha,\theta/X)=C_2\,\frac{n+\lambda}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,\delta(M'-\alpha)$$

V.4 Penaksiran Titik untuk Parameter θ

Dari distribusi posterior gabungan (5.10) untuk α,θ dapat dicari distribusi posterior marginal dari θ yaitu :

$$g^*(\theta/X)=\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu}}\,e^{-(S+\mu)P_0/\theta}\left(1-e^{-(n+\lambda)M'/\theta}\right)\quad ....\ (5.14)$$

untuk $\theta > 0$

Bukti untuk (5.14):

$$g^*(\theta / X) = \frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu+1}} e^{-(S+\mu)/\theta} \int_0^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\, d\alpha$$

$$= \frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu+1}} e^{-(S+\mu)/\theta} \left\{ \frac{\theta}{n+\lambda} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta} \Big/_{0}^{M'} \right\}$$

$$= \frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu}} e^{-(S+\mu)/\theta} \left\{ e^{(n+\lambda)M'/\theta} - 1 \right\}$$

Pandang: $P_0 = 1 - \dfrac{(n+\lambda)M'}{S+\mu} = \dfrac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu}$

$$(S+\mu)P_0 = S+\mu-(n+\lambda)M$$

$$-(S+\mu)/\theta = -(S+\mu)P_0/\theta - (n+\lambda)M/\theta$$

$$g^*(\theta / X) = \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu}} e^{-(S+\mu)P_0/\theta}\, e^{-(n+\lambda)M'/\theta} \left\{ e^{(n+\lambda)M'/\theta} - 1 \right\}$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu}} e^{-(S+\mu)P_0/\theta} \left\{ 1 - e^{-(n+\lambda)M'/\theta} \right\}$$

Mean dari distribusi ini adalah :

$$E(\theta / X) = \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)\, h(r+\nu-1)} \qquad \text{.......................................} \qquad (5.15)$$

untuk $r+\nu > 2$

Bukti untuk (5.15)

$$E(\theta / X) = \int_0^{\infty} \theta \frac{C^2}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu}} e^{-(S+\mu)P_0/\theta} (1 - e^{-(n+\lambda)M'/\theta})\, d\theta$$

misalkan : $\dfrac{C^2}{\Gamma(r+\nu-1)} = k$

$$(S+\mu)P_0 = a$$

$$(S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M' = b$$

$$E(\theta / X) = k\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-1)} e^{-a/\theta} d\theta - k\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-1)} e^{-b/\theta} d\theta$$

$$Pandang: k\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-1)}e^{-a/\theta}d\theta = k\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-1)}(\theta^2/a)\,de^{-a/\theta}$$

$$\frac{k}{a}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-3)}de^{-a/\theta} = \frac{k}{a}\left\{\theta^{-(r+\nu-3)}e^{-a/\theta}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}e^{-a/\theta}d\theta^{-(r+\nu-3)}\right\} =$$

$$\frac{k}{a}\int_0^{\infty}(r+\nu-3)\theta^{-(r+\nu-2)}e^{-a/\theta}d\theta = \frac{k(r+\nu-3)}{a}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-2)}\frac{\theta^2}{a}de^{-a/\theta} =$$

$$\frac{k(r+\nu-3)}{a^2}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-4)}de^{-a/\theta}, \textit{jika proses ini diteruskan maka didapat}$$

$$\frac{k(r+\nu-3)!}{a^{(r+\nu-2)}}\int_0^{\infty}de^{-a/\theta} = \frac{k(r+\nu-3)!}{a^{(r+\nu-2)}}\left(e^{-a/\theta}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{k\Gamma(r+\nu-2)}{a^{(r+\nu-2)}} =$$

$$\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\frac{\Gamma(r+\nu-2)}{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-2}} = \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)\Gamma(r+\nu-1)}\frac{\Gamma(r+\nu-2)}{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-2}}$$

$$= \frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1))}$$

Dengan cara yang sama seperti di atas didapat :

$$k\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-1)}e^{-b/\theta}d\theta = \frac{k(r+\nu-3)!}{b^{r+\nu-2}} = \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\frac{(r+\nu-3)!}{[(S+\mu)P_0+(n+\lambda)M']^{r+\nu-2}}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)\Gamma(r+\nu-1)}\frac{(r+\nu-3)!}{[(S+\mu)P_0+(n+\lambda)M']^{r+\nu-2}}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}\frac{1}{[(S+\mu)P_0+(n+\lambda)M']^{r+\nu-2}}$$

$$\frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}\frac{1}{[(S+\mu)P_0+(n+\lambda)M']^{r+\nu-2}/[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-2}}$$

karena $S+\mu = (S+\mu)P_0+(n+\lambda)M'$ *maka:*

$$\frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}\frac{1}{[(S+\mu)/(S+\mu)P_0]^{r+\nu-2}} = \frac{(S+\mu)P_0.P_0{}^{r+\nu-2}}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}$$

$$\frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}\left(1-h(r+\nu-2)\right) =$$

$$\frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)} - \frac{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}$$

$$E(\theta / X) = \frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)} - \frac{(S+\mu)P_0}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)} + \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)h(r+\nu-1)}, \textit{untuk } r+\nu > 2$$

Sedangkan variansi dari distribusi ini adalah :

$$V(\theta / X) = \frac{(S+\mu)P_0^2)}{(r+\nu-2)^2(r+\nu-3)} \left\{ (r+\nu-2)\frac{h(r+\nu-3)}{h(r+\nu-1)} - (r+\nu-3)\frac{h^2(r+\nu-2)}{h^2(r+\nu-1)} \right\}$$

untuk $r+\nu > 3$ .... (5.16)

Bukti untuk (5.16):

$$V(\theta / X) = E(\theta / X)^2 - [E(\theta / X)]^2$$

$$E(\theta / X)^2 = \int_0^{\infty} \theta^2 \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu}} e^{-(S+\mu)P_0/\theta}(1 - e^{-(n+\lambda)M'/\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-(S+\mu)P_0/\theta}\,d\theta$$

$$- \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-[(S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M']/\theta}\,d\theta$$

$$\textit{Misalkan}: \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} = a$$

$$(S+\mu)P_0 = b$$

$$(S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M' = c$$

Pandang : $a\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-b/\theta} d\theta$ ....(1)

$a\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-c/\theta} d\theta$ ....(2)

(1). $a\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-b/\theta} d\theta = a\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} \frac{\theta^2}{2} de^{-b/\theta} = \frac{a}{b}\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-4)} de^{-b/\theta}$

$$= \frac{a}{b}\left(\theta^{-(r+\nu-4)} e^{-b/\theta} - \int_0^{\infty} e^{-b/\theta} d\theta^{-(r+\nu-4)} \right) = \frac{a}{b}(r+\nu-4)\int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-3)} e^{-b/\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{a(r+\nu-4)}{b} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-3)} \frac{\theta^2}{b} \, de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-4)}{b^2} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-5)} \, de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a(r+\nu-4)}{b^2} \left(\theta^{-(r+\nu-5)} e^{-b/\theta} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-b/\theta} \, d\theta^{-(r+\nu-5)} \right)$$

$$= \frac{a(r+\nu-4)(r+\nu-5)}{b^2} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-4)} e^{-b/\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{a(r+\nu-4)(r+\nu-5)}{b^2} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-4)} \frac{\theta^2}{b} \, de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a(r+\nu-4)(r+\nu-5)}{b^3} \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-6)} \, de^{-b/\theta}$$

Jika proses ini dilanjutkan maka akan didapat :

$$\frac{a}{b^{r+\nu-3}} (r+\nu-4)! \int_0^{\infty} de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-4)!}{b^{r+\nu-3}} = \frac{C_2(r+\nu-4)!}{\Gamma(r+\nu-1).[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-3}}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1).[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-3}} = \frac{[(S+\mu)P_0]^2.(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

(2). *Dengan cara yang sama seperti pada* (1) *didapat:*

$$a \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu-2)} e^{-c/\theta} d\theta = \frac{a.(r+\nu-4)!}{c^{r+\nu-3}} = \frac{C_2(r+\nu-4)!}{\Gamma(r+\nu-1).[(S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M']^{r+\nu-3}}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)} \frac{(r+\nu-4)!}{[(S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M']^{r+\nu-3}}$$

Ingat (*lihat buku* (5.14)): $S+\mu = (S+\mu)P_0 + (n+\lambda)M'$

$$h(m) = 1 - P_0^m \;\rightarrow\; P_0^m = 1 - h(m)$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)} \frac{(r+\nu-4)!}{(S+\mu)^{r+\nu-3}} = \frac{[(S+\mu)P_0]^2 P_0^{r+\nu-3}(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^2 (1-h(r+\nu-3))(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^2 (r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)} - \frac{[(S+\mu)P_0]^2 h(r+\nu-3)(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

$$E(\theta / X)^2 = \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)} - \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

$$-\frac{[(S+\mu)P_0]^2\,h(r+\nu-3)\,(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1).\Gamma(r+\nu-1)}$$

$$E(\theta / X)^2 = \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,h(r+\nu-3).(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1)\;\Gamma(r+\nu-4)}$$

$$E(\theta / X)]^2 = \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,h^2(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)^2\;h(r+\nu-1)}$$

$$(\theta / X) = \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,h(r+\nu-3).(r+\nu-4)!}{h(r+\nu-1)\;\Gamma(r+\nu-4)} - \frac{[(S+\mu)P_0]^2\,h^2(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)^2\;h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^2}{(r+\nu-2)^2\,(r+\nu-3)}\left\{(r+\nu-2)\frac{h(r+\nu-3)}{h(r+\nu-1)} - (r+\nu-3)\frac{h^2(r+\nu-2)}{h^2(r+\nu-1)}\right\}$$

$$untuk \quad r+\nu > 3$$

Untuk fungsi kerugian yang berbentuk $L(f,\theta) = c(f-\theta)^2$, maka taksiran Bayes bagi θ adalah $E(\theta/X)$. Dari $S+\mu > (n+\lambda)M$, didapat bahwa $0 < P_0 < 1$. Untuk nilai r yang besar dan nilai P_0 yang moderat, maka nilai $h(r)$ akan mendekati 1. Jadi persamaan (5.15) dan (5.16) dapat didekati dengan cara :

$$E(\theta / X) \cong \frac{(S+\mu)P_0}{r+\nu-2} \quad \text{..} \quad (5.17)$$

$$V(\theta / X) \cong \frac{((S+\mu)P_0)^2}{(r+\nu-2)^2\,(r+\nu-3)} \quad \text{..} \quad (5.18)$$

Andaikata (5.5) digunakan sebagai distribusi prior maka akan didapatkan:

$$E(\theta / X) \cong \frac{S-nM}{r+\nu-2} \quad \text{..} \quad (5.19)$$

sebagai suatu pendekatan untuk penaksiran θ dengan cara Bayes, yang dikaitkan dengan fungsi kerugian berbentuk $c(f\text{-}\theta)^2$.

Maximum Likelihood Estimation untuk θ adalah :

$$\theta_{ML} = \frac{S-nM}{r} \quad \text{..} \quad (5.20)$$

Bukti untuk (5.20) :

$$(X/\alpha,\theta) = \frac{C_1}{\theta^r} e^{-(S-n\alpha)/\theta}\,\delta(M-\alpha) \quad \rightarrow \quad \ln U = \ln C_1 - r\ln\theta - (S-n\alpha)/\theta$$

$$\frac{\partial \ln U}{\partial \theta} = -\frac{r}{\theta} + \frac{S-n\alpha}{\theta^2} = 0 \;\; ;\hat{\theta}_{ML} = \frac{S-n\hat{\alpha}}{r} \; ; \hat{\alpha} = M = x_{(1)} \; ; \quad \therefore \; \hat{\theta} = \frac{S-nM}{r}$$

Minimum Variansi Unbiased Estimation untuk θ adalah :

$$\theta_{MVU} = \frac{S-nM}{r-1} \quad \text{..} \quad (5.21)$$

Jika diperhatikan persamaan persamaan (5.19), (5.20) dan (5.21) akan tampak bahwa:

1. Dengan memakai $g(\alpha,\theta) \sim 1/\theta^3$, maka (J.10) akan hampir sama dgn (5.20).
2. Dengan memakai $g(\alpha,\theta) \sim 1/\theta^2$, maka (J.10) akan hampir sama dgn (5.21)

Tabel 1 memperlihatkan nilai numerik dari (5.15) dan (5.17), yaitu taksiran Bayes untuk θ yang eksak dan pendekatannya. Perhitungan ini dibawah distribusi prior yang sebanding dengan $1/\theta^{\nu+1}$, ν = 1,2 dan dihitung pada beberapa nilai r dengan ukuran sampel n=50. Tampak bahwa ekivalensi nilai dari persamaan (5.15) dan (5.17) akan memuaskan bilamana r ≥ 30.

Contoh :

Misal n = 50 ; r = 5 ; $g(\alpha,\theta) \sim 1/\theta^{\nu+1}$; S = 1112,378; ν = 1; M = 7.312, maka :

$$E(\theta/X) = \frac{SP_0\,h(r+\nu-2)}{(r+\nu-2)(r+\nu-1)} = \frac{1112.378\,P_0\,h(4)}{h(5)\,4}$$

$P_0 = 1 - nM/S = 1 - 50(7.312)/1112.378 = 0.6713$

$h(4) = 1 - (0.6713)^4 = 0.7968$

$h(5) = 1 - (0.6713)^5 = 0.8640$

$$\text{Jadi} \quad E(\theta/X) = \frac{(1112.378)(0.6713)(0.7968)}{4\,(0.8640)} = 172.165$$

TABEL 1. Taksiran Eksak Bayes θ serta Pendekatannya n = 50; M = 7.312

r	S	Taksiran Eksak Bayes		Pendekatannya	
		$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 1$	$\nu = 2$
5	1112.378	172.1713	122.9215	186.6945	129.3556
10	1111.168	82.0754	74.0974	82.8409	74.5568
20	1067.657	36.9460	35.1002	36.9504	35.1029
30	1255.764	30.6944	29.6718	30.6953	29.6721
40	1152.136	20.1674	19.6632	20.1676	19.6634
45	1045.670	15.4561	15.1127	15.4561	15.1127

V.5 Penaksiran Parameter α

Dari distribusi posterior gabungan 1.1) untuk α dan θ , dapat dibentuk distribusi posterior marginal untuk α yaitu :

$$g^*(\alpha / X) = \frac{C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)}{(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)^{r+\nu}} \quad , \quad 0 < \alpha < M \quad \text{..................} \quad (5.22)$$

Bukti untuk (5.22) :

$$g^*(\alpha / X) = \int_0^{\infty} g^*(\alpha,\theta / X)\, d\theta = \int_0^{\infty} \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{\theta^{r+\nu+1}} e^{-[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha)/\theta} \, d\theta$$

misalkan : $\dfrac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} = a$

$[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha = b$

$$g^*(\alpha / x) = a \int \theta^{-(r+\nu+1)} \frac{\theta^2}{b} de^{-b/\theta} = \frac{a}{b} \int \theta^{-(r+\nu+1)} de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a}{b} \left\{ \theta^{-(r+\nu+1)} e^{-b/\theta} \Big/_{0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-b/\theta} \, d\theta^{-(r+\nu-1)} \right\}$$

$$= \frac{a}{b} \int_0^{\infty} (r+\nu-1)\theta^{-(r+\nu)} e^{-b/\theta} \, d\theta = \frac{a}{b}(r+\nu-1) \int_0^{\infty} \theta^{-(r+\nu)} \frac{\theta^2}{b} de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a}{b}(r+\nu-1) \int \theta^{-(r+\nu+2)} \, de^{-b/\theta}$$

Jika proses ini dilanjutkan maka akan didapat :

$$g^*(\alpha / X) = \int_0^{\infty} \cancel{a(} \frac{r+\nu-1)!}{b^{r+\nu}} de^{-b/\theta} = \frac{a.\Gamma(r+\nu)}{b^{r+\nu}}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \frac{\Gamma(r+\nu)}{[(S+\mu)-(n+\lambda)\alpha]^{r+\nu}} = \frac{C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)}{[(S+\mu)-(n+\lambda)\alpha]^{r+\nu}}.$$

untuk $0 \le \alpha \le M'$

Mean dari distribusi ini adalah :

$$E(\alpha / X) = \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left(M' - \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-2)}{r+\nu-2}\right) \quad \text{.........................} \quad (5.23)$$

Bukti untuk (5.23) :

$$E(\alpha / X) = \int_0^{M'} \alpha \frac{C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)}{[(S+\mu-(n+\lambda)]^{r+\nu}} d\alpha$$

$$= C_2(n+\lambda)(r+\nu-1) \int_0^{M'} \alpha[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{-(r+\nu)} d\alpha$$

$$= C_2(n+\lambda)(r+\nu-1) \int_0^{M'} \frac{\alpha}{(n+\lambda)(r+\nu-1)} d[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{-(r+\nu-1)}$$

$$= C_2 \int_0^{M'} \alpha\, d[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{-(r+\nu-1)}$$

$$= C_2 \left\{ \alpha[(S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{-(r+\nu-1)} \Big/_0^{M'} - \int_0^{M'} [(S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{-(r+\nu-1)} d\alpha \right\}$$

$$= C_2 \left\{ M'[(S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-1)} - \frac{[(S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \Big/_0^{M'} \right\}$$

$$= C_2 \left\{ M'[(S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-1)} - \frac{[(S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} + \frac{(S+\mu)^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \right\}$$

Pandang : $C_2 = \dfrac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}$

$$P_0 = 1 - \frac{(n+\lambda)M'}{S+\mu} \quad \rightarrow \quad P_0 = \frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu}$$

$$(S+\mu)P_0 = S+\mu-(n+\lambda)M$$

$$h(r+\nu-2) = 1 - P_0^{r+\nu-2}$$

$$E(\alpha / X) = \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)} \{M'[S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-1)}$$
$$- \frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} + \frac{(S+\mu)^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\Bigg\}$$
$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)} \Bigg\{ M'[(S+\mu)P_0]^{-(r+\nu-1)} - \frac{[(S+\mu)P_0]^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}$$
$$+ \frac{(S+\mu)^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}$$
$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)} \left\{ M' - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} + \frac{(S+\mu)P_0^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \right\}$$
$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)} \left\{ M' - \frac{(S+\mu)P_0(1-P_0^{r+\nu-2})}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \right\}$$
$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)} \left\{ M' - \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-2)}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \right\}, \textit{untuk} \ \ r+\nu > 2$$

Sedangkan Variansinya adalah :

$$(\alpha / X) = \frac{1}{h(r+\nu-1)} \left\{ M'^2 - \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \left(M'^2 - \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-3)}{(n+\lambda)(r+\nu-3)} \right) \right\} - E^2(\alpha / X)$$

$\textit{untuk}\ r+\nu > 3$

.... (5.24)

Bukti untuk (5.24) :

$$(\alpha / X) = E[(\alpha / X)]^2 - [E(\alpha / X)]^2$$
$$E[(\alpha / X)]^2 = \int_0^{M'} \alpha^2 \frac{C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)}{[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]^{r+\nu}} d\alpha$$

misalkan : $C_2(n+\lambda)(r+\nu-1) = a$

$S+\mu = b$

$(n+\lambda) = k$

$$E[(\alpha / X)]^2 = \int_0^{M'} \alpha^2 \frac{a}{(b-k\alpha)^{r+\nu}} d\alpha = a \int_0^{M'} \alpha^2 (b-k\alpha)^{-(r+\nu)} d\alpha$$
$$= a \int_0^{M'} \alpha^2 \frac{1}{k(r+\nu-1)} d(b-k\alpha)^{-(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{a}{k(r+\nu-1)}\left\{\alpha^2 (b-k\alpha)^{-(r+\nu-1)} \Big/_{0}^{M'} - \int_0^{M'} (b-k\alpha)^{-(r+\nu-1)}\, d\alpha^2\right\}$$

$$= \frac{a}{k(r+\nu-1)}\left\{M'^2 (b-kM')^{-(r+\nu-1)} - 2\int_0^{M'} \alpha\,(b-k\alpha)^{-(r+\nu-1)}\, d\alpha\right\}$$

$$= \frac{a\,M'(b-kM')^{-(r+\nu-1)}}{k(r+\nu-1)} - \frac{2a}{k(r+\nu-1)}\int_0^{M'} \frac{1}{k(r+\nu-2)}\,\alpha\, d(b-k\alpha)^{-(r+\nu-2)}$$

$$= \frac{aM'^2 (b-kM')^{-(r+\nu-1)}}{k(r+\nu-1)} - \frac{2a}{k^2(r+\nu-1)(r+\nu-2)}\left\{\alpha(b-k\alpha)^{(r+\nu-2)} \Big/_{0}^{M'} - \int_0^{M'} (b-k\alpha)^{(r+\nu-2)}\, d\alpha\right\}$$

$$= \frac{aM'^2 (b-kM')^{-(r+\nu-1)}}{k(r+\nu-1)} - \frac{2a}{k^2(r+\nu-1)(r+\nu-2)}\left\{\left[M'(b-kM')^{(r+\nu-2)} - \frac{(b-k\alpha)^{-(r+\nu-3)}}{k(r+\nu-3)} \Big/_{0}^{M'}\right]\right\}$$

$$= \frac{aM'^2 (b-kM')^{-(r+\nu-1)}}{k(r+\nu-1)} - \frac{2aM'(b-kM')^{-(r+\nu-2)}}{k^2(r+\nu-1)(r+\nu-2)} + \frac{2a}{k^3(r+\nu-1)(r+\nu-2)(r+\nu-3)}\left[(b-k\alpha)^{-(r+\nu-2)} - b^{-(r+\nu-3)}\right]$$

Masukkan kembali a,b, k kepersamaan yang semula:

$$E(\alpha/X)^2 = \frac{C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)M'^2\,[S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-1)}}{(n+\lambda)(r+\nu-1)} - \frac{2C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)M'[S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)^2(r+\nu-1)(r+\nu-2)} + \frac{2C_2(n+\lambda)(r+\nu-1)\{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{-(r+\nu-2)} - (S+\mu)^{-(r+\nu-3)}}{(n+\lambda)^3(r+\nu-1)(r+\nu-2)(r+\nu-3)}$$

Ganti C_2 dengan $[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}/h(r+\nu-1)$ dan $S+\mu-(n+\lambda)M'$ dengan $(S+m)P_0$

$$E[(\alpha / X)^2] = \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1} M'^2 [(S+\mu)P_0]^{-(r+\nu-1)}}{h(r+\nu-1)}$$

$$-\frac{2[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1} M'[(S+\mu)P_0]^{-(r+\nu-2)}}{(n+\lambda)(r+\nu-2)\,h(r+\nu-1)}$$

$$+\frac{2[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}\{[(S+\mu)P_0]^{-(r+\nu-2)}(S+\mu)^{-(r+\nu-3)}}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)\,h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{M'^2}{h(r+\nu-1)} - \frac{2M'(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)\,h(r+\nu-1)}$$

$$+\frac{2[(S+\mu)P_0]^2}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)\,h(r+\nu-1)}$$

$$-\frac{2[(S+\mu)P_0]^2\, P_0^{r+\nu-3}}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)\,h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 - \frac{2M'(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} + \frac{2[(S+\mu)P_0]^2}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)} + \frac{2[(S+\mu)P_0]^2\, P_0^{r+\nu-3}}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 - \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\left[M' - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-3)} \frac{(S+\mu)P_0\, P_0^{r+\nu-3}}{(n+\lambda)^2(r+\nu-2)(r+\nu-3)}\right]\right\}$$

Ganti $P_0^{r+\nu-3}$ *dengan* $1-h(r+\nu-3)$

$$E[(\alpha / X)^2] = \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 - \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\left[M'^2 - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-3)} + \frac{(S+\mu)P_0[1-h(r+\nu-3)}{(n+\lambda)(r+\nu-3)}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 - \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\left[M'^2 - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-3)} + \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-3)} - \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-3)}{(n+\lambda)(r+\nu-3)}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\left[M' - \frac{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-3)}{(n+\lambda)\quad(r+\nu-3)}\right]\right\}$$

untuk $r+\nu>3$

$$\therefore \quad V(\alpha / X) = \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{M'^2 \frac{2(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\left[M' - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)}\frac{h(r+\nu-3)}{(r+\nu-3)}\right]\right\}$$

$$-[E(\alpha / X)]^2 \text{ ,} \textit{dengan } r+\nu > 3$$

Untuk r besar dan P_0 moderat maka $h(r+\nu-3) \rightarrow 1$, selain itu,

$$E(\alpha / X) \approx M' - \frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)} \quad \text{.................................} \quad (5.25)$$

$$(\alpha / X) \approx \frac{r+\nu-1}{r+\nu-3}\left(\frac{(S+\mu)P_0}{(n+\lambda)(r+\nu-2)}\right)^2 \quad \text{.......................................} \quad (5.26)$$

E(α/X) adalah taksiran Bayes untuk α yang memenuhi fungsi kerugian $c(f-\alpha)^2$.

Sedangkan taksiran minimum variansi unbiased dari α adalah :

$$\alpha_{MVU} = M - \frac{S-nM}{n(r-1)} \quad \text{...} \quad (5.27)$$

Bukti untuk (5.27) :

$$\theta_{ML} = \frac{S-n\alpha}{r} \quad \rightarrow \alpha = \frac{S-r\theta_{ML}}{n}$$

$$\textit{ganti}\,\theta_{ML}\ \textit{dengan}\,\theta_{MVU} = \frac{S-nM}{r-1}$$

$$\alpha_{MVU} = \frac{\left(S - r\dfrac{S-nM}{r-1}\right)}{n} = \frac{(r-1)S - r(S-nM)}{n(r-1)} = \frac{rS - S - rS + rnM}{n(r-1)}$$

$$= \frac{rnM - nM + nM - S}{n(r-1)} = \frac{n(r-1)M + nM - S}{n(r-1)} = M + \frac{nM-S}{n(r-1)}$$

$$= M - \frac{S-nM}{n(r-1)}$$

(5.25) akan hampir sama dengan (5.27) bilamana distribusi prior sebanding dengan $1/\theta^2$.

Taksiran maximum likelihood untuk α adalah :

$$\alpha_{ML} = M \quad \text{...} \quad (5.28)$$

Hubungan antara E(α/X) dengan E(θ/X) dapat dibuat sebagai berikut :

$$E(\alpha / X) = \frac{S + \mu - (r + \nu - 1)\, E(\theta / X)}{n + \lambda} \qquad \text{.................................} \qquad (5.29)$$

Bukti untuk (5.29) :

$$E(\alpha / X) = \frac{1}{h(r + \nu - 1)} \left[M' - \frac{(S + \mu) P_0\, h(r + \nu - 2)}{(n + \lambda)(r + \nu - 2)} \right]$$

$$E(\theta / X) = \frac{(S + \mu) P_0\, h(r + \nu - 2)}{(r + \nu - 2)\, h(r + \nu - 1)} \qquad ; \quad M' = \frac{S + \mu - (S + \mu) P_0}{n + \lambda}$$

$$E(\alpha / X) = \frac{1}{h(r + \nu - 1)} \left[\frac{S + \mu - (S + \mu) P_0}{n + \lambda} - \frac{(S + \mu) P_0\, h(r + \nu - 2)}{(n + \lambda)(r + \nu - 2)} \right]$$

$$= \frac{1}{n + \lambda} \left[\frac{S + \mu}{h(r + \nu - 1)} - \frac{(S + \mu) P_0}{h(r + \nu - 1)} - E(\theta / X) \right]$$

$$= \frac{1}{n + \lambda} \left[\frac{S + \mu}{h(r + \nu - 1)} - \frac{(S + \mu) P_0\, h(r + \nu - 2)}{(r + \nu - 2)\, h(r + \nu - 1)} \, \frac{r + \nu - 2}{h(r + \nu - 2)} - E(\theta / X) \right]$$

$$= \frac{1}{n + \lambda} \left[\frac{S + \mu}{h(r + \nu - 1)} - \frac{r + \nu - 2}{h(r + \nu - 2)} E(\theta / X) - E(\theta / X) \right]$$

Pandang $h(m) = 1 - P_0^m \;\rightarrow\; 1 = h(m) - P_0^m$

$$E(\alpha / X) = \frac{1}{n + \lambda} \left\{ \frac{(S + \mu)[h(r + \nu - 1) + P_0^{r+\nu-1}]}{h(r + \nu - 1)} \right.$$

$$\left. - \frac{r + \nu - 2}{h(r + \nu - 2)} E(\theta / X)\, [h(r + \nu - 2) + P_0^{r+\nu-2}] - E(\theta / X) \right\}$$

$$= \frac{1}{n + \lambda} \left[S + \mu + \frac{(S + \mu) P_0^{r+\nu-1}}{h(r + \nu - 1)} - (r + \nu - 2) E(\theta / X) \right.$$

$$\left. - \frac{(r + \nu - 2)\, P_0^{r+\nu-2}}{h(r + \nu - 2)} E(\theta / X) - E(\theta / X) \right]$$

$$= \frac{1}{n + \lambda} \left[S + \mu + \frac{(S + \mu) P_0^{r+\nu-1}}{h(r + \nu - 1)} - \frac{(r + \nu - 2)\, P_0^{r+\nu-2}}{h(r + \nu - 1)} \right.$$

$$\left. \frac{(S + \mu) P_0\, h(r + \nu - 2)}{(r + \nu - 2) h(r + \nu - 1)} - (r + \nu - 1) E(\theta / X) \right]$$

$$= \frac{1}{n+\lambda}\left[S+\mu+\frac{(S+\mu)P_0^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}-\frac{(S+\mu)P_0^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}-(r+\nu-1)E(\theta/X)\right]$$

$$= \frac{S+\mu-(r+\nu-1)E(\theta/X)}{n+\lambda}$$

V.6 Penaksiran Keandalan

Keandalan didifinisikan sebagai : "Peluang bahwa suatu alat dapat bekerja dalam batas waktu tertentu dan kondisi yang tertentu pula".

Secara matematik, keandalan pada waktu t adalah :

$$R(t) = P(x \geq t/\omega) \qquad \text{.......................................} \quad (5.30)$$

dimana x adalah variabel random yang menunjukkan umur dari alat. Bilamana distribusi umur alat seperti pada (1.1) maka fungsi keandalannya adalah :

$$R(t) = \begin{cases} e^{-(t-\alpha)/\theta} & ,t \geq \alpha \\ 1 & ,t < \alpha \end{cases} \qquad \text{.......................................} \quad (5.31)$$

Bukti untuk (5.31) :

untuk $t \geq \alpha$

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\alpha)/\theta} dx = -\int_t^{\infty} d\, e^{-(x-\alpha)/\theta} = -[e^{-(x-\alpha)/\theta}]_t^{\infty} = e^{-(t-\alpha)/\theta}$$

untuk $t < \alpha$

$$R(t) = P(x \geq t/w) = 1 - P(x < t/w) = 1 - \int_0^t 0\,dt = 1 - 0 = 1$$

Penaksiran Maximum Likelihood dari (5.31) adalah :

$$R_{ML} = \begin{cases} e^{-\frac{t-M}{(S-nM)/r}} & t \geq \alpha \\ 1 & t < \alpha \end{cases} \qquad \text{.......................................} \quad (5.32)$$

Bukti untuk (5.32) :

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t-\alpha}{\theta}} & ,\textit{untuk}\ t \geq \alpha \\ 1 & ,\textit{untuk}\ t < \alpha \end{cases}$$

$$ambil\,\theta_{ML} = \frac{S-nM}{r} \quad ; \; \alpha_{ML} = M, \; sehingga$$

$$R_{ML}(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t-M}{(S-nM)/r}} & ,t \geq \alpha \\ 1 & ,t < \alpha \end{cases}$$

Taksiran Minimum Variansi Unbiased dari (5.31) adalah :

$$R_{MVU}(t) = \begin{cases} 1 & ,t < M \\ \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t-m}{S-nM}\right)^{r-2} & ,M \leq t < S-(n-1)M \\ 0 & ,t \geq S-(n-1)M \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (5.33)$$

Bukti untuk (5.33) diberikan oleh Basu (1964).

Taksiran R(t) dengan cara Bayes terhadap fungsi kerugian $c(f\text{-}R)^2$ adalah : E(R(t)/X). Dengan memakai persamaan 3.1 dapat dibuktikan bahwa :

$$E(R(t)/X) = \begin{cases} \frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\left(1-\frac{t-M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right)^{r+\nu-1}\phi_{1,M'}(r+\nu-1) & ,t \geq M' \\ \left(H_t(r+\nu-1)+\frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}P_t^{r+\nu-1}\phi_{1,t}(r+\nu-1)\right)/h(r+\nu-1) & ,t < M' \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.34)$$

dengan $\psi_{l,k} = 1-\frac{r+\lambda+1}{S+\mu+lt}k$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.35)$

$$\phi_{1,k}(m) = 1-\psi_{l,k}^{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.36)$$

Bukti untuk (5.34) :

$$R(t) = \begin{cases} e^{-(t-\alpha)/\theta} & ,t \geq \alpha \\ 1 \quad , & t < \alpha \end{cases}$$

$$E[R(t)/X] = \iint R(t)\,g(\alpha,\theta/X)\,d\alpha\,d\theta$$

(1). *untuk* $t \geq M'$

$$E[R(t)/X] = \int_0^{\sim}\int_0^{M'} e^{-(t-\alpha)/\theta}\,\frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\sim}\frac{e^{-(t+S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\int_0^{M'} e^{(n+\lambda+1)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-(t+S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}} \left[\frac{\theta}{(n+\lambda+1)} e^{(n+\lambda+1)\alpha/\theta} \Big|_0^{M'} \right] d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-(t+S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}} \frac{\theta}{(n+\lambda+1)} [e^{(n+\lambda+1)M'/\theta} - 1] d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-[S+\mu+t-(n+\lambda+1)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu}} d\theta$$

$$- \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} \int \frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}} d\theta$$

Pandang: $\frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-[S+\mu+t-(n+\lambda+1)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu}} d\theta$ .... (i)

$\frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} \int \frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}} d\theta$ .... (ii)

(i) *misal* : $\frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} = a$

$S+\mu+t-(n+\lambda+1)M' = b$

$$a\int \theta^{-(r+\nu)} e^{-b/\theta} d\theta = a\int \theta^{-(r+\nu)} \frac{\theta^2}{b} de^{-b/\theta} = \frac{a}{b}\int \theta^{-(r+\nu-2)} de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a}{b}\left\{ \left[\theta^{-(r+\nu-2)} e^{-b/\theta} \right]_0^{\sim} - \int_0^{\sim} e^{-b/\theta} d\theta^{-(r+\nu-2)} \right\} = \frac{a}{b}\int_0^{\sim} e^{-b/\theta}(r+\nu-2)\theta^{-(r+\nu-1)} d\theta$$

$$= \frac{a}{b}(r+\nu-2)\int_0^{\sim} \theta^{-(r+\nu-1)} \frac{\theta^2}{b} de^{-b/\theta} = \frac{a}{b^2}(r+\nu-2)\int_0^{\sim} \theta^{-(r+\nu-3)} de^{-b/\theta}$$

Jika proses ini dilanjutkan maka akan diperoleh :

$$= \frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}} \int_0^{\sim} de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}} = \frac{\Gamma(r+\nu-1)}{b^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)\Gamma(r+\nu-1)}{\Gamma(r+\nu-1)(n+\lambda+1)} \frac{1}{[S+\mu+t-(n+\lambda+1)M']^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)} \frac{[(S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)} \frac{1}{[S+\mu+t-(n+\lambda+1)M']^{r+\nu-1}}$$

(ii) *misal* : $\frac{C_2(n+\lambda)\Gamma(r+\nu-1)}{(n+\lambda+1)} = a$

$a\int_0^{\infty} e^{-k/\theta}\, d\theta$ *dapat dicari dengan menggunakan cara seperti pada (i),*

sehingga didapat :

$$a\int_0^{\infty} e^{-k/\theta}\, d\theta = \frac{a\,(r+\nu-2)!}{k^{r+\nu-1}} = \frac{a\,\Gamma(r+\nu-1)}{k^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)\,\Gamma(r+\nu-1)}{(n+\lambda+1)\,\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{(S+\mu+t)^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}\,\frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\,\frac{1}{(S+\mu+t)^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t}\right]^{r+\nu-1}$$

$(i)-(ii)$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left\{\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right]^{r+\nu-1} - \left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left\{\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right]^{r+\nu-1}\left[1-\left[\frac{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}{S+\mu+t}\right]^{r+\nu-1}\right]\right\}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left\{\left[\frac{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'-t+M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right]^{r+\nu-1}\left[1-\left(1-\frac{n+\lambda+1}{S+\mu+t}M'\right)^{r+\nu-1}\right]\right\}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left[1-\frac{t-M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right]^{r+\nu-1}(1-\psi_{1,M'}^{r+\nu-1})$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left[1-\frac{t-M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right]^{r+\nu-1}\phi_{1,M'}(r+\nu-1)$$

untuk $t < M'$, *maka* $0 \le \alpha \le t$ *atau* $t < \alpha < M'$

E[R(t)/X] utk $t < M'$ = *E(R(t)/X) utk* $0 \le \alpha \le t$ + *E(R(t)/X) utk* $t \le \alpha \le M'$

E(R(t)/X) utk $0 \le \alpha \le t$ *adalah :*

$$E(R(t)/X) = \int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-(t-\alpha)/\theta}\,\frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)]/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[\int_0^{t} e^{(n+\lambda+1)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[\frac{\theta}{n+\lambda+1}\,e^{(n+\lambda+1)\alpha/\theta}\Big|_0^{t}\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\left[e^{(n+\lambda+1)t/\theta}-1\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\left[\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu-(n+\lambda)t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta - \int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta\right]$$

Pandang: $\dfrac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu-(n+\lambda)t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta$ .... *(iii)*

$\dfrac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu+t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta$ .... *(iv)*

(iii) *misal*: $\dfrac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} = a$

$S+\mu-(n+\lambda)t = b$

$$a\int_0^{\infty} e^{-b/\theta}\,\theta^{-(r+\nu)}\,d\theta = a\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{b}\,\theta^{-(r+\nu)}\,de^{-b/\theta} = \frac{a}{b}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-2)}\,de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a}{b}\left[\theta^{-(r+\nu-2)}e^{-b/\theta}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-b/\theta}\,d\theta^{-(r+\nu-2)}\right] = \frac{a}{b}\int_0^{\infty}(r+\nu-2)\,e^{-b/\theta}\,\theta^{-(r+\nu-2)}\,d\theta$$

$$= \frac{a}{b}(r+\nu-2)\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{b}\,\theta^{-(r+\nu-1)}\,de^{-b/\theta} = \frac{a}{b^2}(r+\nu-2)\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-3)}\,de^{-b/\theta}$$

Jika proses ini dilanjutkan maka akan didapat :

$$\frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}}\int_0^{\infty} de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}} = \frac{a\,\Gamma(r+\nu-1)}{b^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{\Gamma(r+\nu-1)}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\,\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}\,\frac{1}{h(r+\nu-1)}$$

$$(iv)\; misal: \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)} = a$$

$$S+\mu+t = k$$

$a\int_0^{\infty}\frac{e^{-k/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta$, *dapat dicari dengan cara (iii) sehingga didapat :*

$$a\int_0^{\infty} e^{-k/\theta}\,\theta^{-(r+\nu)}\,d\theta = \frac{a\,\Gamma(r+\nu-1)}{k^{r+\nu-1}} = \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{\Gamma(r+\nu-1)}{(S+\mu+t)^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}\,\frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\,\frac{1}{(S+\mu+t)^{r+\nu-1}}$$

$(iii)-(iv)$

$$\frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left\{\left(\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right)^{r+\nu-1} - \left(\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t}\right)^{r+\nu-1}\right\}$$

E(R(t)/X) untuk $t < \alpha < M'$ adalah :

$$E(R(t)/X) = \int_0^{\infty}\int_t^{M'} 1\,\frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-1)}e^{-(S+\mu)/\theta}\left[\int_t^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-1)}e^{-(S+\mu)/\theta}\left[\frac{\theta}{n+\lambda}e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big|_t^{M'}\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-(S+\mu)/\theta}\left[e^{(n+\lambda)M'/\theta} - e^{(n+\lambda)t/\theta}\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left[\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-[(S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}\,d\theta - \int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-[(S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}\,d\theta\right]$$

$$pandang: \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-[(S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}\,d\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(v)$$

$$\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-[(S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}\,d\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(vi)$$

$$(v)\, misal: \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} = a \quad dan$$

$$S+\mu-(n+\lambda)M' = b$$

$$a\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}e^{-b/\theta}\,d\theta = a\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{b}\theta^{-(r+\nu)}\,de^{-b/\theta} = \frac{a}{b}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-2)}\,de^{-b/\theta}$$

$$= \frac{a}{b}\left[\theta^{-(r+\nu-2)}\,e^{-b/\theta}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}e^{-b/\theta}d\theta^{-(r+\nu-2)}\right] = \frac{a}{b}\int_0^{\infty}(r+\nu-2)\theta^{-(r+\nu-1)}e^{-b/\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{a(r+\nu-2)}{b}\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{b}\theta^{-(r+\nu-1)}\,de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-2)}{b^2}\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu-3)}de^{-b/\theta}$$

Jika proses ini diteruskan maka akan didapat :

$$\frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}}\int_0^{\infty}de^{-b/\theta} = \frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}}(1-0) = \frac{a(r+\nu-2)!}{b^{r+\nu-1}} = \frac{a\,\Gamma(r+\nu-1)}{b^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{C_2\,\Gamma(r+\nu-1)}{\Gamma(r+\nu-1)}\left[\frac{1}{S+\mu-(n+\lambda)M'}\right]^{r+\nu-1}$$

$$= \frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}\left[\frac{1}{S+\mu-(n+\lambda)M'}\right]^{r+\nu-1} = \frac{1}{h(r+\nu-1)}$$

$$(vi)\, misal: \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)} = a$$

$$S+\mu-(n+\lambda)t = k$$

$a\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}\,e^{-k/\theta}\,d\theta$ *dapat dicari dengan cara seperti pada (v), sehingga didapat :*

$$a\int_0^{\infty}\theta^{-(r+\nu)}\,e^{-k/\theta}\,d\theta = \frac{\Gamma(r+\nu-1)}{k^{r+\nu-1}} = \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\Gamma(r+\nu-1)\frac{1}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}$$

$(v)-(vi)$, *didapat* $E(R(t)/X)$ *untuk* $t<\alpha<M'$

$$E(R(t)/X)_{t<\alpha<M'} = \frac{1}{h(r+\nu-1)} - \frac{C_2}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)} - \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left[\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu-(n+\lambda)t]}\right]^{r+\nu-1}$$

$$E(R(t)/X)_{t<\alpha<M'} = E(R(t)/X)_{0\le\alpha\le t} + E(R(t)/X)_{t<\alpha<M'}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)} - \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left[\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu-(n+\lambda)t]}\right]^{r+\nu-1}$$

$$+\frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)h(r+\nu-1)}\left\{\left[\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu-(n+\lambda)t]}\right]^{r+\nu-1}\left[\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu+t]}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{1-\left[\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu-(n+\lambda)t]}\right]^{r+\nu-1}\right.$$

$$\left.++\frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)}\left[\left(\frac{[S+\mu-(n+\lambda)M']}{[S+\mu-(n+\lambda)t]}\right)^{r+\nu-1}-\left(\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t}\right)^{r+\nu-1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{1-\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right.$$

$$\left.+\frac{n+\lambda}{(n+\lambda+1)}\left[\left(\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right)^{r+\nu-1}\left(1-\left(\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu+t}\right)^{r+\nu-1}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{1-\left[1-\frac{(n+\lambda)(M'-t)}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right.$$

$$\left.+\frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\left[1-\frac{(n+\lambda)(M'-t)}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\left[1-\left(1-\frac{n+\lambda+1}{S+\mu+t}\right)^{r+\nu-1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left[H_t(r+\nu-1)+\frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}P_t^{r+\nu-1}\,\phi_{1,t}(r+\nu-1)\right], t<M'$$

Dari (J.2) dapat dilihat bahwa $0 < P_t < 1$, jika $t < M'$
dan $0 < \psi_{1,k} < 1$, untuk (i) $k = M'$, jika $t \geq M'$
(ii) $k = t$, jika $t < M'$

Karena itu untuk r yang besar dan P_0, P_t, $\psi_{1,k}$ ($k = M'$, t) moderat, maka (5.34) akan menjadi :

$$E(R(t)/X) \approx \begin{cases} \frac{n+\lambda}{n+\lambda+1}\left(1-\frac{t-M'}{S+\mu+t-(n+\lambda+1)M'}\right)^{r+\nu-1} & ,t \geq M' \\ 1 & ,t < M' \end{cases} \quad \text{.... (5.37)}$$

TABEL 2: MLE, MVUE dan Taksiran Bayes untuk Keandalan dengan $t = 10$

r	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{MVU}$	Taksiran Bayes yang Eksak $\nu = -1$	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$
5	0.97943	0.96946	0.97952	0.97392	0.96872	0.96389
10	0.96459	0.95209	0.95428	0.95041	0.94667	0.94302
20	0.92628	0.91461	0.91530	0.91180	0.90831	0.90484
30	0.91339	0.90042	0.90101	0.89830	0.89559	0.89290
40	0.87223	0.86045	0.86117	0.85824	0.85532	0.85241
45	0.83706	0.82653	0.82743	0.82417	0.82093	0.81770

TABEL 2 dihitung berdasarkan TABEL 1, dan dapat dilihat bahwa untuk $r > 5$, MVUE untuk keandalan terletak pada taksiran Bayes antara $\nu = -1$ dan $\nu = 0$. Juga dapat dilihat bahwa MLE untuk keandalan tidak terlalu dekat dengan taksirannya dengan cara Bayes.

Bagaimana dengan pendekatan Bayes untuk keandalan dengan menggunakan distribusi prior yang sama tetapi dengan fungsi kerugian yang lain ?. Untuk itu pandang bentuk fungsi kerugian sebagai berikut :

$L_1(f,R) = c(\ln f - \ln R)^2$ .... (5.38)

dan

$L_2(f,R) = c(f - R)^2/R$ .... (5.39)

Taksiran Bayes $\quad R^*_L(t) = E(\ln R(t) / X)$

Dengan menggunakan distribusi posterior (5.10) didapat :

$$\ln R^*_{L_1}(t) = \begin{cases} -\left(\dfrac{r+\nu-1}{(S+\mu)P\,.h(r+\nu-1)}((t-M')h(r+\nu)+M'P_0^{r+\nu})+\dfrac{1}{n+\lambda}\right) & ,t \geq M' \\ \dfrac{-1}{h(r+\nu-1)}\left(\dfrac{r+\nu-1}{S+\mu}P_0^{r+\nu-1}(-t)+\dfrac{\phi_{0,t}(r+\nu-1)}{n+\lambda}P_t^{r+\nu-1}\right) & ,t < M' \end{cases}$$

.... (5.40)

Bukti untuk (5.40) :

$$R(t) = \begin{cases} e^{-(t-\alpha)/\theta} & ,t \geq \alpha \\ 1 & ,t < \alpha \end{cases}$$

$\ln R(t) = -(t-\alpha)/\theta$, *untuk* $t \geq \alpha$

$$E(\ln R(t)/X) = \int_0^{\infty}\int_0^{M'} \ln R(t)\; g^*(\alpha,\theta/X)\,d\alpha\,d\theta$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{M'} \frac{\alpha - t}{\theta}\,\frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{[S+\mu-(n+\nu)\alpha]/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}}\left[\int_0^{M'} \alpha e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$-\frac{C_2 t(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}}\left[\int_0^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

Pandang (i) : $\dfrac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}}\left[\int_0^{M'}\alpha e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}}\left[\int_0^{M'}\alpha\,\frac{\theta}{n+\lambda}\,de^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\alpha e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_0^{M'} - \int_0^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[M' e^{(n+\lambda)M'/\theta} - \frac{\theta}{n+\lambda}e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_0^{\infty}\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2 M'}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\,d\theta$$

$$-\frac{C_2}{(n+\lambda)\Gamma(r+\nu-1)}\left[\int_0^{\infty}\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\,d\theta + \int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\,d\theta\right]$$

$$= \frac{C_2 M'}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu}}$$

$$-\frac{C_2}{(n+\lambda)\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}$$

$$+\frac{C_2}{(n+\lambda)\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu]^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1} M'(r+\nu-1)!}{h(r+\nu-1)\Gamma(r+\nu-1)} \frac{1}{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu}}$$

$$- \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)\, h(r+\nu-1)} \frac{1}{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}} + \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)\, h(r+\nu-1)} \frac{1}{(S+\mu)^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{M'(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)} - \frac{1}{(n+\lambda)\, h(r+\nu-1)} + \frac{P_0^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)\, h(r+\nu-1)}$$

Pandang (*ii*) : $\dfrac{C_2(n+\lambda)t}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \dfrac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}} \left[\int_0^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta} d\alpha \right] d\theta$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)t}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}} \left(\frac{\theta}{n+\lambda} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta} \Big|_0^{M'} \right) d\theta$$

$$= \frac{C_2\, t}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\sim} \frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}} \left(e^{(n+\lambda)M'/\theta} - 1 \right) d\theta$$

$$= \frac{C_2\, t}{\Gamma(r+\nu-1)} \left[\int_0^{\sim} \frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}} d\theta - \int_0^{\sim} \frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-2}} d\theta \right]$$

$$= \frac{C_2\, t}{\Gamma(r+\nu-1)} \left[\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu}} - \frac{(r+\nu-1)!}{(S+\mu)^{r+\nu}} \right]$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)} t \left\{ \frac{r+\nu-1}{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu}} - \frac{r+\nu-1}{(S+\mu)^{r+\nu}} \right\}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)t}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)} - \frac{(r+\nu-1)t\, P_0^{r+\nu-1}}{(S+\mu)\, h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)t}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)} - \frac{(r+\nu-1)t\, P_0^{r+\nu}}{(S+\mu)\, P_0\, h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)t}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)} \left(1 - P_0^{r+\nu}\right) = \frac{(r+\nu-1)\, t\, h(r+\nu)}{(S+\mu)\, P_0\, h(r+\nu-1)}$$

$(i)-(ii)$

$$= \frac{(r+\nu-1)\, M'}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)} - \frac{1}{(n+\lambda)h(r+\nu-1)} + \frac{P_0^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)h(r+\nu-1)}$$

$$- \frac{(r+\nu-1)\, t\, h(r+\nu)}{(S+\mu)P_0\, h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)\,M'}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)} - \frac{1}{(n+\lambda)\,h(r+\nu-1)}\left(1-P_0^{r+\nu-1}\right) - \frac{(r+\nu-1)\,t\,h(r+\nu)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[M'-t\,h(r+\nu)\right] - \frac{1}{n+\lambda}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[M'-M'\,P_0^{r+\nu}+M'\,P_0^{r+\nu}-t\,h(r+\nu)\right] - \frac{1}{n+\lambda}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[M'(1-P_0^{r+\nu})+M'\,P_0^{r+\nu}-t\,h(r+\nu)\right] - \frac{1}{n+\lambda}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[M'\,h(r+\nu)+M'\,P_0^{r+\nu}-t\,h(r+\nu)\right] - \frac{1}{n+\lambda}$$

$$= \frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[(M'-t)\,h(r+\nu)+M'\,P_0^{r+\nu}\right] - \frac{1}{n+\lambda}$$

$$= -\left\{\frac{(r+\nu-1)}{(S+\mu)P_0\,h(r+\nu-1)}\left[(t-M')\,h(r+\nu)-M'\,P_0^{r+\nu}\right]+\frac{1}{n+\lambda}\right\},\ jika\ t \ge M$$

$\ln R^{*}_{L_1}(t)$ *untuk* $t < M'$ *adalah*

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\sim}\int_0^{t}\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,\frac{\alpha-t}{\theta}\,d\alpha\,d\theta =$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+2}}\left[\int_0^{t}\alpha\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta - t\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+2}}\left[\int_0^{t}e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta\right\}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+2}}\left[\int_0^{t}\alpha\,\frac{\theta}{n+\lambda}\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta - t\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+2}}\left[\frac{\theta}{n+\lambda}\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_0^{t}\right]d\theta\right\}$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[\alpha\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_0^{t}-\int_0^{t}e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta - t\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[e^{(n+\lambda)t/\theta}-1\right]d\theta\right\}$$

$$= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[t\,e^{(n+\lambda)t/\theta}-\frac{\theta}{n+\lambda}\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_0^{t}\right]d\theta - t\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)-(n+\lambda)t/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\,d\theta - \int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\,d\theta\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)\alpha/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[t\,e^{(n+\lambda)t/\theta}-\frac{\theta}{n+\lambda}e^{(n+\lambda)t/\theta}+\frac{\theta}{n+\lambda}\right]d\theta-\right.\\
&\qquad\left. t\left[\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu}}-\frac{(r+\nu-1)!}{(S+\mu)^{r+\nu}}\right]\right\}\\
&= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{t\int_0^{\infty}\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}d\theta-\frac{1}{n+\lambda}\int_0^{\infty}\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}}{\theta^{r+\nu}}d\theta\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{n+\lambda}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}d\theta-t\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu}}+t\frac{(r+\nu-1)!}{(S+\mu)^{r+\nu}}\right\}\\
&= \frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{t\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu}}-\frac{1}{n+\lambda}\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{n+\lambda}\frac{(r+\nu-2)!}{(S+\mu)^{r+\nu-1}}-t\frac{(r+\nu-1)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu}}+t\frac{(r+\nu-1)!}{(S+\mu)^{r+\nu}}\right\}\\
&= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu}}{(r+\nu-2)!\,h(r+\nu-1)}\left\{-\frac{1}{n+\lambda}\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{n+\lambda}\frac{(r+\nu-2)!}{(S+\mu)^{r+\nu-1}}+t\frac{(r+\nu-1)!}{(S+\mu)^{r+\nu}}\right\}\\
&= -\frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{\frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{(n+\lambda)[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}-\frac{P_0^{r+\nu-1}}{n+\lambda}-\frac{t(r+\nu-1)P_0^{r+\nu-1}}{S+\mu}\right\}\\
&= -\frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{\frac{1}{n+\lambda}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}-\frac{1}{n+\lambda}\left[\frac{(S+\mu)P_0}{S+\mu}\right]^{r+\nu-1}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{t(r+\nu-1)P_0^{r+\nu-1}}{S+\mu}\right\}\\
&= -\frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{-\frac{t(r+\nu-1)P_0^{r+\nu-1}}{S+\mu}+\frac{1}{n+\lambda}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{n+\lambda}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu}\right]^{r+\nu-1}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{-t\frac{r+\nu-1}{S+\mu}P_0^{r+\nu-1} + \frac{1-\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)t}{S+\mu}\right]^{r+\nu-1}}{n+\lambda}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{-t\frac{r+\nu-1}{S+\mu}P_0^{r+\nu-1} + \frac{1}{n+\lambda}\phi_{0,t}(r+\nu-1).P_t^{r+\nu-1}\right\}$$

$$dengan : 1-\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)t}{S+\mu}\right]^{r+\nu-1} = \phi_{0,t}(r+\nu-1)$$

$$\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1} = P_t^{r+\nu-1}$$

Untuk r yang besar serta P_0, P_t, $\psi_{0,t}$ moderat, akan didapat :

$$R^*_{L_1}(t) \approx \begin{cases} e^{-\left(\frac{t-M'}{(S+\mu)p_0/(r+\nu-1)}\right)} & ,t \geq M' \\ 1 & ,t < M' \end{cases} \qquad \text{.....} \quad (5.41)$$

(5.41) ekivalen dengan MLE (5.32) bila distribusi priornya berbentuk $1/\theta^2$.

Taksiran Bayes untuk R(t) terhadap L_2 adalah :

$$R^*_{L_2}(t) = (E(R^{-1}(t)/X))^{-1}$$

Dengan menggunakan (5.10) akan didapat :

$$(R^*_{L_2}(t))^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{h(r+\nu-1)}(H_t(r+\nu-1) + \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}P_t^{r+\nu-1}.\phi_{-1,t}(r+\nu-1), & t < M' \\ \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}\left(1-\frac{t-M'}{(S+\mu)P_0}\right)^{-(r+\nu-1)}\frac{\phi_{-1,M'}(r+\nu-1)}{h(r+\nu-1)}, & M' \leq t < (S+\mu)P_0 + M' \\ \sim & ,t \geq (S+\mu)P_0 + M' \end{cases}$$

.... (5.42)

Bukti untuk (5.42) :

$$R(t) = \begin{cases} e^{-(t-\alpha)/\theta} & ,t \geq \alpha \\ 1 & ,t < \alpha \end{cases}$$

$$R^{-1}(t)=\begin{cases} e^{(t-\alpha)/\theta} & ,t\geq\alpha \\ 1 & ,t<\alpha \end{cases}$$

$\left\{E\left[R^{-1}(t)/X\right]\right\}^{-1}$ *untuk* $t<M'$ *adalah*:

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{(t+\alpha)/\theta}\,\frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$-\int_0^\infty\int_0^{M'}\frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\,\frac{1}{\theta^{r+\nu-1}}\,e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\,d\theta$$

$$=\frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\int_0^t e^{(n+\lambda-1)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta-\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\int_0^{M'} e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta\right.$$

$$=\frac{C_2\,(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\frac{\theta}{n+\lambda-1}\,e^{(n+\lambda-1)\alpha/\theta}\Big/_0^t\right]d\theta\right.$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu-1}}\left[\frac{\theta}{n+\lambda}\,e^{(n+\lambda)\alpha/\theta}\Big/_t^{M'}\right]d\theta\Bigg\}$$

$$=\frac{C_2\,(n+\lambda)}{(n+\lambda+1)\,\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\left[e^{(n+\lambda-1)t/\theta}-1\right]d\theta$$

$$+\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^\infty\frac{e^{-(S+\mu)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\left[e^{(n+\lambda)M'/\theta}-e^{(n+\lambda)t'/\theta}\right]d\theta$$

$$=\frac{C_2\,(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\,\Gamma(r+\nu-1)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta-\int_0^\infty\frac{e^{(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta\right]$$

$$+\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)M']/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta-\int_0^\infty\frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)t]/\theta}}{\theta^{r+\nu}}\,d\theta\right]$$

$$=\frac{C_2\,(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\,\Gamma(r+\nu-1)}\left[\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}-\frac{(r+\nu-2)!}{(S+\mu-t)^{r+\nu-1}}\right]$$

$$+\frac{C_2}{\Gamma(r+\nu-1)}\left[\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}}-\frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}\right]$$

$$= \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)h(r+\nu-1)[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}} - \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)h(r+\nu-1)[S+\mu-t]^{r+\nu-1}}$$

$$+ \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)[S+\mu-(n+\lambda)M']^{r+\nu-1}} - \frac{[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)[S+\mu-(n+\lambda)t]^{r+\nu-1}}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda-1)h(r+\nu-1)}\left\{\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1} - \left[\frac{(S+\mu)P_0}{S+\mu-t}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{1-\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$= \frac{n+\lambda}{(n+\lambda-1)h(r+\nu-1)}\left\{P_t^{r+\nu-1} - \left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M}{S+\mu-t}\right]^{r+\nu-1}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)t}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{h(r+\nu-1)} - \frac{P_t^{r+\nu-1}}{h(r+\nu-1)}\frac{n+\lambda-1}{n+\lambda-1}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{\frac{P_{tr}^{\ +\nu-1}}{n+\lambda-1}\frac{1}{n+\lambda-1}\right.$$

$$\left. - \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)t}{S+\mu-t}\right]^{r+\nu-1}\left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)t}{S+\mu-(n+\lambda)t}\right]^{r+\nu-1} + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left(\frac{P_{tr}^{\ +\nu-1}}{n+\lambda-1} - \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}\psi_{r-1,t}^{\ +\nu-1}P_{tr}^{\ +\nu-1} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left\{\frac{P_t^{r+\nu-1}}{n+\lambda-1} - \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}\left[1-\phi_{-1,t}(r+\nu-1)\right]P_t^{r+\nu-1} + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left[1 - P_t^{r+\nu-1} + \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}P_t^{r+\nu-1}\phi_{-1,t}(r+\nu-1)\right]$$

$$= \frac{1}{h(r+\nu-1)}\left[H_t(r+\nu-1) + \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}P_t^{r+\nu-1}\phi_{-1,t}(r+\nu-1)\right]$$

$\{E[R^{-1}(t)/X]\}^{-1}$ untuk $M' \le t < (S+\mu)P_0 + M'$ adalah :

$$= \int_0^{\sim}\int_0^{M'} e^{(t+\alpha)/\theta}\frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\frac{1}{\theta^{r+\nu+1}}e^{-[S+\mu-(n+\lambda)\alpha]/\theta}\,d\alpha\, d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)}\int_0^{\sim}\frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}}\left[\int_0^{M'} e^{(n+\lambda-1)\alpha/\theta}\,d\alpha\right]d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}} \left[\frac{\theta}{n+\lambda-1} e^{(n+\lambda-1)\alpha/\theta} \Big/_{0}^{M'} \right] d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\Gamma(r+\nu-1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}} \left[e^{(n+\lambda-1)M'/\theta} - 1 \right] d\theta$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\Gamma(r+\nu-1)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-[S+\mu-(n+\lambda)M'-(t-M')]/\theta}}{\theta^{r+\nu}} d\theta - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(S+\mu-t)/\theta}}{\theta^{r+\nu+1}} d\theta \right\}$$

$$= \frac{C_2(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\Gamma(r+\nu-1)} \left\{ \frac{(r+\nu-2)!}{[S+\mu-(n+\lambda)M'-(t-M')]^{r+\nu+1}} - \frac{(r+\nu-2)!}{(S+\mu-t)^{r+\nu+1}} \right\}$$

$$= \frac{(n+\lambda)[(S+\mu)P_0]^{r+\nu-1}}{(n+\lambda-1)\; h(r+\nu-1)} \left\{ \frac{1}{[S+\mu-(n+\lambda)M'-(t-M')]^{r+\nu+1}} - \frac{1}{(S+\mu-t)^{r+\nu+1}} \right\}$$

$$= \frac{(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\; h(r+\nu-1)} \left\{ \left[\frac{(S+\mu)P_0}{(S+\mu)P_0-(t-M')} \right]^{r+\nu+1} - \left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-t} \right]^{r+\nu+1} \right\}$$

$$= \frac{(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)\; h(r+\nu-1)} \left\{ \left[\frac{(S+\mu)P_0}{(S+\mu)P_0-(t-M')} \right]^{r+\nu+1} \right.$$

$$\left. - \left[\frac{S+\mu-(n+\lambda)M'}{S+\mu-t} \right]^{r+\nu+1} \left[\frac{(S+\mu)P_0-(t-M')}{(S+\mu)P_0-(t-M')} \right]^{r+\nu+1} \right\}$$

$$= \frac{(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)} \left\{ \left[\frac{(S+\mu)P_0}{(S+\mu)P_0-(t-M')} \right]^{r+\nu+1} \right.$$

$$\left. - \left[\frac{(S+\mu)P_0}{(S+\mu)P_0-(t-M')} \right]^{r+\nu+1} \left[\frac{(S+\mu)P_0-(t-M')}{S+\mu-t} \right]^{r+\nu+1} \right\} \frac{1}{h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{(n+\lambda)}{(n+\lambda-1)} \left\{ \left[1-\frac{t-M'}{(S+\mu)P_0} \right]^{-(r+\nu-1)} \right.$$

$$\left. - \left[1-\frac{t-M'}{(S+\mu)P_0} \right]^{-(r+\nu-1)} \left[\frac{(S+\mu)P_0-(t-M')}{S+\mu-t} \right]^{r+\nu+1} \right\} \frac{1}{h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1} \left[1-\frac{t-M'}{(S+\mu)P_0} \right]^{-(r+\nu-1)} \left\{ 1-\left[\frac{(S+\mu)P_0-(t-M')}{S+\mu-t} \right] \right\} \frac{1}{h(r+\nu-1)}$$

$$= \frac{n+\lambda}{n+\lambda-1} \left[1-\frac{t-M'}{(S+\mu)P_0} \right]^{-(r+\nu-1)} \frac{\phi_{-1,M'}(r+\nu-1)}{h(r+\nu-1)}$$

Untuk nilai r yang besar P_0, P_t, $\psi_{-1,k}$ $(k=M',t)$ moderat (5.42) akan menjadi :

$$R^*_{L_2}(t) \approx \begin{cases} 1, & t < M \\ \dfrac{n+\lambda-1}{n+\lambda}\left(1-\dfrac{t-M}{(S+\mu)R_0}\right)^{r+\nu-1}, & M \le t < (S+\mu)R_0+M \\ 0, & t \ge (S+\mu)R_0+M \end{cases} \qquad \text{... (5.43)}$$

(5.43) ekivalen dengan MVUE (5.33) bilamana distribusi prior dari α dan θ adalah saling bebas dan masing masing mempunyai distribusi uniform pada garis bilangan bilangan real yang positif.

VI. Cara Mencari Taksiran Titik Memakai Pendekatan Bayes

Andaikan ada suatu parameter θ yang nilainya tidak diketahui. Misalkan X adalah variabel random yang distribusinya bergantung pada θ. Akan ditaksir nilai real dari fungsi θ (misalkan $\gamma(\theta)$ dari sampel random).

Seandainya $X=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ adalah sampel random berukuran n maka taksiran $f(X)$ membuat fungsi kerugian $L(f, \gamma)$ ada.

Misalkan $U(X/\theta)$ adalah likelihood dari X bila diketahui θ, dan misalkan $g(\theta)$ adalah distribusi prior dari θ. Dengan menggunakan teorema Bayes maka akan didapatkan distribusi posterior dar θ yaitu :

$$g^*(\theta/X)=g(\theta).\frac{U(X/\theta)}{k(X)}$$

$$\text{dengan } k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)U(X/\theta)d\theta$$

Pandang ekspektasi fungsi kerugian $L(f, \gamma)$ jika diketahui X, sebagai :

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(f,\gamma).g^*(\theta/X)d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1)$$

Penaksir Bayes didifinisikan sebagai fungsi f dimana (1) ada dan minimum.

Andaikan (1) ada dan cukup syarat-syarat untuk didiferensiasi dibawah tanda integral, maka taksiran Bayes untuk solusi parsamaan adalah :

$$\int \frac{\partial L(f,\gamma)}{\partial f} g^*(\theta/X)d\theta = 0$$

Contoh :

).*Misal* $L(f,\gamma) = c(f-\gamma)^2$

$$\frac{\partial c(f-\gamma)^2}{\partial f} = 2c(f-\gamma)$$

$$2c\int (f-\gamma)\, g^*(\theta/X)d\theta = 0$$

$$2c\, f\int g^*(\theta/X)d\theta = 2c\int \gamma\, g^*(\theta/X)d\theta$$

$$f = \frac{\int \gamma\, g^*(\theta/X)d\theta}{\int g^*(\theta/X)d\theta} = \frac{\int \gamma\, g^*(\theta/X)d\theta}{1} = E(\gamma/X)$$

2). *Misal* $L(f,\gamma) = c(\ln f - \ln\gamma)^2$

$$\frac{\partial c(\ln f - \ln\gamma)^2}{\partial f} = \frac{2c(\ln f - \ln\gamma)}{f}$$

$$\int \frac{2c(\ln f - \ln\gamma)}{f} g^*(\theta / X)d\theta = 0$$

$$2c\int \frac{\ln f}{f} g^*(\theta / X)d\theta = 2c\int \frac{\ln\gamma}{f} g^*(\theta / X)d\theta$$

$$\ln f = \frac{\int \ln\gamma\, g^*(\theta / X)d\theta}{\int g^*(\theta / X)d\theta} = \frac{\int \ln\gamma\, g^*(\theta / X)d\theta}{1} = E(\ln\gamma / X)$$

3). *Misal* $L(f,\gamma) = c(f-\gamma)^2 / \gamma$

$$\frac{\partial[c(f-\gamma)^2 / \gamma]}{\partial f} = 2c(f-\gamma)/\gamma$$

$$\int 2c(f-\gamma)/\gamma\; g^*(\theta / X)d\theta = 0$$

$$2c\,f\int \frac{g^*(\theta / X)d\theta}{\gamma} = 2c\int g^*(\theta / X)d\theta$$

$$f = \frac{\int g^*(\theta / X)d\theta}{\int \frac{g^*(\theta / X)d\theta}{\gamma}} = \frac{1}{\int \frac{1}{\gamma} g^*(\theta / X)d\theta} = \frac{1}{E[(1/\gamma)/X]}$$

$$f = [E(\gamma^{-1} / X)]^{-1}$$

VII. Kesimpulan

Untuk suatu populasi yang mempunyai distribusi eksponensial dengan dua parameter, sebagai berikut :

$$p(x/\alpha,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-\alpha)/\theta} \delta(x-\alpha)$$

dengan $\alpha \geq 0$; $\theta > 0$

$$\delta(u) = \begin{cases} 1 & , u \geq 0 \\ 0 & , u < 0 \end{cases}$$

serta pengujian sampel secara censored, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1). Dengan menggunakan distribusi prior berbentuk : $g(\alpha/\theta) \sim \frac{1}{\theta^{\nu+1}}$ dengan fungsi kerugian $L(f,\theta) = c(f - \theta)^2$, maka :

a). $\hat{\theta}_{ML}$ akan hampir sama dengan $\hat{\theta}$ yang memakai cara Bayes untuk $\nu = 2$.

b). $\hat{\theta}_{MVU}$ akan hampir sama dengan $\hat{\theta}$ yang memakai cara Bayes untuk $\nu = 1$.

2). Dengan memakai distribusi prior yang sebanding dengan $1/\theta^2$ maka : $E(\alpha/X)$ dari (K.4) akan hampir sama dengan α_{MVU} (K.6).

3). Dengan menggunakan distribusi prior yang sebanding dengan $1/\theta^2$ dan fungsi kerugian berbentuk ; $L_1(f,R) = c(\ln f - \ln R)^2$ maka : $R^*_{L_1}(t)$ akan hampir sama dengan $\hat{R}_{ML}(t)$.

4). Dengan menggunakan distribusi prior yang sebanding dengan $1/\theta^{\nu+1}$ dan fungsi kerugian berbentuk $L_2(f,R) = c(f - R)^2/R$ maka $R^*_{L_2}(t)$ akan hampir sama dengan $\hat{R}_{MVU}(t)$.

5). Tampaknya pemilihan distribusi prior yang berbentuk eksponensial adalah karena mudah dalam aplikasinya. Misalnya, kalau distribusi priornya berbentuk exponensial maka distribusi posteriornyapun jadi berbentuk eksponential. Juga suatu fungsi eksponensial kalau didiferensialkan ataupun diintegralkan akan tetap berbentuk eksponensial.

VIII. Daftar Pustaka

Crowder, M.J, Kimber, A.C, Smith, R.L & Sweeting, T.J (1991). Statistical Analysis of Reliability Data. Chapman & Hall: London

Barlow, E.R, Proschan, F & Hunter, L.C (1965). Mathematical Theory of Reliability. John Willey & Sons, Inc: New York

Basu, A.P (1964). Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. Technometrics, 6, 215-219.

Bhattacharya, S.K (1967). Bayesian Approach to Life Testing and Reliability Estimation. Journal of The American Statistical Association, 62, 48 - 62.

Hoog,R.V. & Craig,A.T (1978). Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan Publishing Co. Inc: New York. 227 - 229.

Kapur, K.C and Lamberson, L.R (1977). Reliability in Engineering Design. John Willey & Sons, Inc: New York

Riwayat Hidup Peneliti

Nama	: Drs. Herman, MA
Unit	: Jurusan Statistika FMIPA - UT
Tempat / Tgl. Lahir	: Palembang / 25 Mei 1956
Pendidikan	: S1, Matematika, ITB, 1984 S2, Educational Psychology, University of Victoria, 1993
Pengalaman Penelitian	: - A Study of Relationship between Achievement in Prerequisite Course in Applied Statistics and Economics Study Programs at Universitas Terbuka, 1993. - Uji Umur dan Penaksiran Keandalan Alat-alat yang Berdistribusi Eksponensial dengan Pendekatan Bayes, 1997. - Item Analisis, Statistika dan Penurunan Rumus Item Analisis, 1997.

Ucapan Terima Kasih

Sehubungan dengan selesainya penulisan laporan ini , penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak pihak yang sudah membantu kelancaran penyelesai penelitian ini.

Pertama-tama penulis mengucapkan terima kasih kepada Dekan FMIPA Universitas Terbuka, Dr. Djati Kerami yang sudah meluangkan waktunya dalam memberikan kritik dan saran untuk penelitian ini.

Selain itu juga penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Kepala Lembaga Penelitian UT, Dr. WBP Simanjuntak dan Kepala Pusat Studi Indonesia, Dr. Tian Belawati yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk mengikuti seleksi pembiayaan penelitian di Universitas Terbuka ini.

Tidak lupa juga penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan yang sudah membantu penelitian ini, baik berupa kritik dan saran ataupun peminjaman buku-buku yang diperlukan.