MODUL 1

Pendiferensialan

Prof. R. Soemantri

PENDAHULUAN

Dalam modul ini dibahas fungsi bernilai real yang didefinisikan pada suatu interval. Definisi derivatif suatu fungsi dimulai dengan derivatif di suatu titik, kemudian didefinisikan fungsi terdiferensial pada subhimpunan suatu interval. Selanjutnya ditunjukkan bahwa kekontinuan suatu fungsi merupakan syarat perlu agar fungsi terdiferensial. Teknik pendiferensialan tidak dibahas dalam modul ini.

Modul ini lebih menekankan segi teorinya daripada penggunaan praktis hitung diferensial. Dua teorema yang sangat penting yaitu Teorema Rolle dan Teorema Nilai Rata-rata mengawali pembahasan teori hitung diferensial ini, selanjutnya dikembangkan untuk membahas Aturan L'Hospital tentang penghitungan limit, Teorema Taylor, dan masalah nilai ekstrem. Kaitan antara keterdiferensialan suatu fungsi dengan fungsi korespondensi satu-satu maupun dengan fungsi monoton disajikan khusus sebagai suatu teorema. Adanya nilai derivatif di antara dua nilai derivatif suatu fungsi ditunjukkan sebagi Teorema Darboux.

Contoh soal maupun soal-soal dalam latihan diharapkan mengajak para pembaca lebih memahami teori hitung diferensial, dan mengingat kembali konsep-konsep dan teorema-teorema dalam analisis yang pernah dipelajari dalam buku Analisis I.

Setelah mempelajari modul ini pembaca diharapkan dapat:
(a) memahami definisi derivatif suatu fungsi;
(b) memahami dan menggunakan teorema nilai rata-rata;
(c) memahami dan menggunakan tanda nilai fungsi derivatif;
(d) menggunakan teorema L'Hospital; dan
(e) menggunakan teorema Taylor.

KEGIATAN BELAJAR 1

Derivatif

Dalam Buku Materi Pokok Analisis I telah dibahas perihal fungsi, mulai dari fungsi yang bernilai real yang didefinisikan pada $\mathbf{N}$, yaitu barisan, kemudian yang didefinisikan pada subhimpunan dari $\mathbf{R}$. Tentang nilai fungsi dikenal nilai definisi, yaitu nilai menurut definisi fungsi itu, dan nilai limit. Jika c anggota domain $D \subset \mathbf{R}$ fungsi f dan juga titik limit domain itu, didefinisikan f kontinu di c apabila $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Fungsi f dikatakan kontinu pada D jika f kontinu di setiap titik anggota D. Dalam Analisis I telah dibahas panjang lebar tentang sifat-sifat fungsi kontinu. Dalam Modul 1 ini akan dibahas tentang fungsi terdiferensial (*differentiable*). Untuk maksud ini akan dibahas konsep derivatif suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu interval.

A. DERIVATIF

Definisi 1.1

Diberikan fungsi $f: a,b \to \mathbf{R}$.

Untuk $c \in [a,b]$ dibentuk fungsi $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ $\left(a \le x \le b, x \ne c\right)$

Jika $\lim\limits_{x \to c} \varphi(x)$ ada dan real (berhingga) maka f dikatakan *terdiferensial* (*differentiable*) di c . Nilai $\lim\limits_{x \to c} \varphi(x)$ dinotasikan dengan $f'(c)$ yang dinamakan *derivatif* fungsi f di titik c . Jika $f'(c)$ ada dan real untuk setiap $c \in E \subset [a,b]$ dikatakan f terdiferensial pada E . Jadi, f' terdefinisikan di titik-titik pada $[a,b]$ di mana limit $\varphi(x)$ untuk x mendekati titik itu ada dan real, dan dinamakan *fungsi derivatif* dari f .

Tentu saja Anda memahami di ujung interval $[a,b]$ fungsi f terdiferensial di a atau di b apabila limit kanan $\lim\limits_{x \to a^+} \varphi(x)$ ada dan limit kiri $\lim\limits_{x \to a^-} \varphi(x)$ ada.

Contoh 1.1
Mudah pembaca pahami bahwa fungsi konstan $f(x)=k$ dan $g(x)=x$ terdiferensial pada $\mathbf{R}$ dengan $f'(x)=0$ dan $g'(x)=1, \forall x \in \mathbf{R}$.

Contoh 1.2
Tentukan fungsi derivaif f' untuk $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ dengan $f(x)=\sqrt{x}$

Jawab:
Untuk $0<x<\infty$ maka

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{x}}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Akan tetapi, $f'(0)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}}{t}$ tidak ada di dalam $\mathbf{R}$, jadi f tidak terdiferensial di 0.

Fungsi $f(x)=\sqrt{x}$ terdiferensial pada $(0,\infty)$ dan $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ untuk $0<x<\infty$

Contoh 1.3
Buktikan jika $f(x)=\sin x$ dan $g(x)=\cos x$ maka $f'(x)=\cos x$ dan $g'(x)=-\sin x, \forall x\in\mathbf{R}$.

Bukti:
Untuk $x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{t-x}=\cos x.$$

Demikian juga mudah dibuktikan bahwa $g'(x)=-\sin x$.

Teorema 1.1

Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ terdiferensial di suatu titik $c\in[a,b]$ maka f kontinu di c.

Bukti:

$$\lim_{t\to c}\left[f(t)-f(c)\right]=\lim_{t\to c}\frac{f(t)-f(c)}{t-c}.\lim_{t\to c}\left(t-c\right)=f'(c).0=0$$

Jadi, $\lim\limits_{t\to c} f(t) = f(c)$ sehingga f kontinu di c.

Tetapi sebaliknya tidak benar. Fungsi $g(x) = |x|$ kontinu tetapi tidak terdiferensial di 0.

Fungsi $g(x) = \begin{cases} x, \text{ jika } x \geq 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$, jadi $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -1$ dan $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = 1$, sehingga $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ tidak ada dan g tidak terdiferensial di 0 meskipun kontinu di 0.

Teorema tentang rumus-rumus derivatif kombinasi dari dua fungsi terdiferensial berikut ini buktinya sudah pembaca kenal dalam kalkulus.

Teorema 1.2

Jika fungsi f dan g didefiniskan pada $[a,b]$ dan terdiferensial di titik $c \in [a,b]$ maka

$$f+g,\ f-g,\ fg \text{ dan } \frac{f}{g}$$

terdiferensial di c dan

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c);$$
$$(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c);$$
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c); \text{ dan}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{\left(g(c)\right)^2} \text{ asalkan } g(c) \neq 0.$$

Teorema 1.3 (Aturan Rantai)

Diberikan fungsi $f:[a,b] \to [c,d]$, dan $g:[c,d] \to \mathbf{R}$ dan $c \in [a,b]$.
Jika f terdiferensial di c dan g terdiferensial di $f(c)$ maka fungsi komposisi $g \circ f$ terdiferensial di c dan mempunyai derivatif
$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$.

Bukti:
Dibentuk fungsi

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(c))}{y-f(c)}-g'(f(c)) & \text{jika } y\neq f(c), y\in[c,d]\\ 0 & \text{jika } y=f(c), y\in[c,d]\end{cases}$$

Maka $h:[c,d]\to\mathbf{R}$ kontinu di $f(c)$ karena diketahui bahwa g terdiferensial di $f(c)$.

Demikian juga karena diketahui f terdiferensial di c maka f kontinu di c sehingga fungsi komposisi $h\circ f$ kontinu di c.

Jadi, $\lim\limits_{x\to c}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(c)=0$.

Jadi, $\lim\limits_{x\to c}\left[(h\circ f)(x)+g'(f(c))\right]\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=g'(f(c)).\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$=g'(f(c)).f'(c)$$

Di lain pihak

$$\lim_{x\to c}\left[(h\circ f)(x)+g'(f(c))\right].\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)}.\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c}=(g\circ f)'(c).$$

Dengan demikian diperoleh $(g\circ f)'(c)=g'(f(c))f'(c)$.

Contoh 1.4

Didefinisikan $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{, untuk } x\neq 0\\ 0 & \text{, untuk } x=0\end{cases}$

Tentukan $f'(x)$ untuk $x\in\mathbf{R}$.

Jawab:
Fungsi f kontinu di 0, sebab untuk $x\neq 0$ diperoleh

$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|$ sehingga $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ dan f kontinu di 0,

sedangkan untuk $x\neq 0$ fungsi f merupakan hasil kali dua fungsi kontinu

jadi juga kontinu. Dengan demikian, f kontinu pada **R**, sehingga syarat perlu untuk keterdiferensialan f dipenuhi (lihat Teorema 1.1).
Untuk $x \neq 0$ dengan menggunakan aturan pendiferensialan hasilkali dua fungsi dan aturan rantai diperoleh

$$f'(x) = 1.\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ untuk } x \neq 0 .$$

Untuk $x = 0$ dengan definisi derivatif, dihitung

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ tidak ada.}$$

Jadi, f tidak terdiferensial di 0. Dengan demikian f terdiferensial pada $\mathbf{R} - \{0\}$.

Contoh 1.5

Buktikan fungsi f dengan $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$ terdiferensial pada **R**.

Bukti:
Fungsi f jelas kontinu untuk $x \neq 0$ sebab merupakan hasilkali dua fungsi kontinu.

Untuk $x \neq 0$, $|f(x)| = |x|^2 \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|^2$ sehingga $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ dan f kontinu di 0.
Syarat perlu untuk adanya derivatif di titik pada **R** dipenuhi.

Untuk $x \neq 0$ maka $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$ dan

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$ Jadi, f terdiferensial pada **R**.

Dua teorema berikut sangat penting dalam penelahan fungsi real. Penggunaan kedua teorema ini menghasilkan manfaat dalam teori optimisasi, deret Taylor, letak nilai nol fungsi dan dalam kawasan lainnya.

Teorema 1.4a (Teorema Rolle)

Jika $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan terdiferensial pada interval terbuka (a,b), dan $f(a)=f(b)$ maka terdapat $\xi\in(a,b)$ sehingga $f'(\xi)=0$.

Bukti:

Jika $f(x)=f(a),\forall x\in[a,b]$ maka $f(x)$ konstan pada $[a,b]$ sehingga $f'(x)=0.$

Jika f tidak konstan maka menurut teorema tentang fungsi kontinu pada interval tertutup terbatas, terdapat x_1 dan x_2 dalam (a,b) sehingga $f(x_1)=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$ dan $f(x_2)=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$ .Untuk titik x_1 maka $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le 0$ jika $x_1-\delta<x<x_1$ dan $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge 0$ jika $x_1<x<x_1+\delta$ untuk suatu $\delta>0$. Jadi $\lim\limits_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le 0$ dan $\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge 0$. Karena diketahui f terdiferensial di x_1 maka kedua nilai limit ini harus sama, jadi $f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=0$.

Teorema 1.4b (Teorema Nilai Rata-rata)

Jika $f;[a,b]\to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka terdapat $\xi\in(a,b)$ dengan $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bukti:

Dibentuk fungsi $F(x)=f(x)+Ax+B$ pada $[a,b]$ dengan A dan B dipilih sehingga $F(a)=F(b)=0$, jadi $A=\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ dan

$$B=-f(a)+a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

Jadi F kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) dengan $F(a)=F(b)$. Menurut Teorema Rolle, terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga $F'(\xi)=0$, jadi $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dalam bukti Teorema Rolle tersimpul suatu langkah penting tentang nilai minimum (maksimum) di titik interior interval $[a,b]$ yang kita angkat menjadi lemma berikut.

Lemma 1.1

Jika fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) mempunyai nilai maksimum (minimum) di **titik interior** $x_0 \in (a,b)$ maka $f'(x_0)=0$.

Contoh 1.6

Buktikan untuk $h>0$ dan $\alpha>1$ berlaku $(1+h)^{\alpha} > 1+\alpha h$.

Bukti:

Ditinjau fungsi $f(x)=x^{\alpha}$ yang kontinu dan terdiferensial pada $[1,1+h]$.
Menurut Teorema nilai Rata-rata terdapat $\xi \in (1,1+h)$ dengan

$$f'(\xi)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\text{, jadi } (1+h)^{\alpha}-1=hf'(\xi)=h\alpha\xi^{\alpha-1}>\alpha h$$

karena diketahui $\xi>1$ dan $\alpha-1>0$.

Teorema berikut adalah sebagai akibat teorema nilai rata-rata.

Teorema 1.5

Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka

(i) $f'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ fungsi korespondensi 1-1 pada $[a,b]$.

(ii) $f'(x)=0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ konstan.

(iii) $f'(x)>0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ naik tegas pada $[a,b]$.

(iv) $f'(x)<0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ turun tegas pada $[a,b]$.

(v) $f'(x)\geq 0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ naik pada $[a,b]$.

(vi) $f'(x)\leq 0,\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ turun pada $[a,b]$.

Bukti:

(i) Fungsi $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ adalah fungsi korespondensi 1-1 jika $x\neq y\in[a,b]$ maka $f(x)\neq f(y)\in f([a,b])$. Untuk $a\leq x<y\leq b$ maka $\exists\xi\in(x,y)$ dan $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)\neq 0$ karena diketahui bahwa $f'(t)\neq 0,\forall t\in(a,b)$. Jadi f korespondensi 1-1 pada $[a,b]$.

(ii) Untuk $a\leq x<y\leq b,\exists\xi\in(x,y)$ sehingga $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)=0$. Jadi $f(x)$ konstan sama dengan $f(a)$.

(iii) Karena $f'(t)>0,\forall t\in(a,b)$ maka $a\leq x<y\leq b\Rightarrow\exists\xi\in(x,y)$, $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)>0$. Jadi $a\leq x<y\leq b\Rightarrow f(x)<f(y)$ sehingga f naik tegas pada $[a,b]$.

(v) Untuk $a\leq x<y\leq b,\exists\xi\in(x,y)$ sehingga $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)\geq 0$. Jadi f naik pada $[a,b]$.

(iv) dan (vi) berturut-turut dibuktikan seperti (iii) dan (v).

Lemma 1.2

Jika f dan g fungsi bernilai real yang kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b), dan jika $f'(x)=g'(x),\forall x\in(a,b)$ maka terdapat $k\in\mathbf{R}$ sehingga $f(x)=g(x)+k$, $\forall x\in[a,b]$.

Bukti: Gunakan Teorema 1.5 (ii) untuk fungsi $f-g$.

Contoh 1.7

Jika f fungsi dari **R** ke dalam **R** dan $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^p$ untuk suatu $p>1$, buktikan bahwa f konstan.

Bukti:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^{p-1} \text{ dengan } p-1>0\,.$$

Jadi $\lim\limits_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \lim\limits_{x\to y}|x-y|^{p-1}=0$ sehingga $f'(x)=0$ untuk sembarang $x\in\mathbf{R}$. Menurut Teorema 1.5(ii) maka f konstan.

Contoh 1.8

Jika $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ terdiferensial pada (a,b) dan terdapat $M>0$ sehingga $|f'(x)|\le M, \forall x\in(a,b)$ buktikan bahwa:

(a) f kontinu seragam pada (a,b)

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ ada.

Bukti:

(a) Karena $\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(x)$ maka $\lim\limits_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=|f'(x)|$.

$\exists\eta>0, \forall y\in(a,b),$

$$0<|y-x|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|<|f'(x)|+1\le M+1.$$

$\forall y\in(a,b), 0<|y-x|<\eta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<(M+1)|y-x|$ ini berlaku $\forall x\in(a,b)$.

Karena f terdiferensial [jadi f kontinu, maka $\lim\limits_{y\to x} f(y)=f(x)$]

sehingga untuk semua $x,y\in(a,b)$ dan

$|x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<(M+1)|x-y|$.

Jika diberikan $\varepsilon>0$ dan $\delta=\min\left\{\eta,\frac{\varepsilon}{M+1}\right\}$ maka $\forall x,y\in(a,b)$,

$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$

Terbukti f kontinu seragam pada (a,b).

(b) $\forall x, y \in (a, a+\delta) \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon$. Jika y tetap maka
$f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$.
Jadi $E = \{ f(x) : x \in (a, a+\delta) \}$ terbatas sehingga $A = \inf E$ dan $B = \sup E$ ada. Tergantung kepada sifat fungsi f maka $\lim_{x \to a^+} f(x)$ adalah A atau B. Dengan cara yang serupa ditentukan $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Contoh 1.9

Buktikan bahwa persamaan $x^3 - 3x + b = 0$ paling banyak mempunyai satu akar di dalam $[-1,1]$.

Bukti:

Ditinjau fungsi kontinu dan terdiferensial pada $[-1,1]$. Fungsi derivatif $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in (-1,1)$. Menurut Teorema 1.5(i) dan (iv) f fungsi korespondensi 1-1 dan turun tegas pada $[-1,1]$. Karena $f(-1) = 2 + b > f(1) = -2 + b$ dan f kontinu pada $[-1,1]$ maka persamaan tidak mempunyai akar di dalam $[-1,1]$ apabila $b - 2 > 0$ atau $b + 2 < 0$. Jika $-2 \le b \le 2$ dan mengingat f turun tegas, yaitu jika $b \ge -2$ dan $b < 2$, atau jika $b \le 2$ dan $b > -2$ maka persamaan mempunyai tepat satu akar di dalam $[-1,1]$. Jadi untuk semua nilai dari b persamaan $x^3 - 3x^2 + b = 0$ paling banyak mempunyai satu akar di dalam $[-1,1]$.

Contoh 1.10

Jika f fungsi terdiferensial dari **R** ke dalam **R** dengan $f(0) = 0$ dan $\left| f'(x) \right| \le \left| f(x) \right|, \forall x \in \mathbf{R}$, buktikan bahwa $f(x) = 0$ pada **R**.

Bukti:

Diandaikan bahwa f tidak konstan nol pada **R**. Karena f kontinu pada **R** maka himpunan $Z = \{ x : f(x) = 0 \}$ tertutup. Menurut Teorema 5.10, Analisis I, Z^C memuat (a,b) dengan a atau b atau keduanya dalam Z dan $f(x) \ne 0$, boleh dimisalkan $f(x) > 0, a < x < b$. Ambil titik $c \le b$ dan $c - a < 1$ dan $f(d) = \text{maks} \left\{ f(x) : x \in [a,c] \right\}$. Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata dan mengingat $f(d) > 0$ dan $f(a) = 0$, maka

$$\left|f(d)\right| = f(d) = (d-a)f'(\xi) \le (d-a)\left|f'(\xi\right| \le (d-a)\left|f(\xi)\right|$$
$$= (d-a)f(\xi) \le (d-a)f(d)$$

dengan ξ nilai tertentu di antara *a* dan *d*. Jadi $0 < f(d) \le (d-a)f(d)$. Terjadi kontradiksi karena $(d-a) < 1$.

Contoh 1.11

Fungsi f dan g mempunyai derivatif yang kontinu pada interval I. Tunjukkan bahwa jika $fg' - gf' \ne 0$ pada I, maka nilai-nilai nol f dan g satu dengan yang lain saling terpisah.

Bukti:

Karena f dan g mempunyai derivatif yang kontinu pada I, maka fungsi $fg' - gf'$ kontinu pada I. Karena itu $fg' - gf'$ tidak mungkin berubah tanda pada I, sebab untuk perubahan tanda ini fungsi ini harus bernilai nol di suatu titik pada I, kontradiksi dengan $fg' - gf' \ne 0$ pada I.

Andaikan *a* dan *b* dua nilai nol yang berturutan dari f. Akan dibuktikan terdapat tepat satu nilai nol *c* dari g dan $a < c < b$. Jadi $f(x) \ne 0$ untuk $a < x < b$. Karena $fg' - gf' \ne 0$ dan $f(a) = 0$ maka $g(a) \ne 0$.

Diasumsikan $f(x) > 0$ untuk $a < x < b$ dan $g(a) > 0$. Maka fungsi $\frac{f}{g}$ terdiferensial pada (a,b) dan $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f(x)g'(x) - g(x)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$. Jika $fg' - gf' > 0$ maka $\frac{f}{g}$ naik tegas pada (a,b), dan ini tidak mungkin terjadi karena $\lim_{x \to a^+}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = +\infty$. Jadi $fg' - gf' < 0$ dan $\frac{f}{g}$ turun tegas pada (a,b) mulai dari $+\infty$ melalui 0 menuju ke $-\infty$. Jadi $\frac{f}{g}$ bernilai 0 di tepat satu titik $c \in (a,b)$ dan tepat ada satu nilai nol dari *g* di antara dua nilai nol dari f. Karena peran f dan g dalam masalah ini simetris, maka di antara dua nilai nol yang berturutan terdapat satu nilai nol dari f.

Tiga kasus untuk asumsi yang lain dibahas dengan cara yang semacam.

Teorema 1.6 (Teorema Nilai Rata-rata Umum)

Jika fungsi f dan g kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b), maka terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Bukti:
Dibentuk fungsi $h(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$. Maka h kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) lagi pula $h(a) = h(b)$. Menurut Teorema Rolle terdapat $\xi \in (a,b)$ dengan $h'(\xi) = 0$ dan terbuktilah teorema di atas.

Sebagai akibat dari teorema nilai rata-rata umum adalah Aturan L'Hospital yang sangat bermanfaat untuk menghitung jenis-jenis tertentu tentang limit.

B. ATURAN L'HOSPITAL

Teorema 1.7 (Aturan L'Hospital)

Diberikan fungsi f dan $g : (a,b) \to \mathbf{R}$ dan $g'(x) \neq 0$ untuk $x \in (a,b)$,

dan $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Jika

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \qquad \text{(i)}$$

atau

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty \qquad \text{(ii)}$$

maka $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Bukti:
Diberikan $0 < \varepsilon < 1$. Maka $\exists \delta > 0$ sehingga untuk $a < x < a + \delta$ ketiga ketaksamaan berikut ini berlaku.

(1) $\quad -\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

(2) $\quad -\varepsilon < g(x) < \varepsilon$

(3) $\quad L-\varepsilon < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < L+\varepsilon$

Jika $a < x < y < a+\delta$ maka menurut Teorema 1.6 $\exists \xi \in (x,y)$ sehingga

$$L-\varepsilon < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L+\varepsilon \qquad (4)$$

Karena $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ dan jika dalam (4) diambil $x \to a$ maka $f(x) \to 0$ dan $g(x) \to 0$ sehingga diperoleh $\left|\dfrac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \varepsilon$ untuk $a < y < a+\delta$.

Jadi, jika diberikan $\varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sehingga $\forall x, 0 < x < \delta$ berlaku $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$. Jadi terbukti $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$ diambil y tetap dalam (4) dan dibetuk fungsi

$$\psi(x) = \frac{1-\dfrac{g(y)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(y)}{f(x)}}.$$

Maka $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{g(x)-g(y)}{f(x)-f(y)}\right) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$, sehingga

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < x < y < a+\delta).$$

Oleh karena (ii) maka $\lim\limits_{x\to a^+} \psi(x) = 1$ sehingga $\exists \eta, 0 < \eta < \delta$ berlaku $|\psi(x) - 1| < \varepsilon$ untuk $a < x < a+\eta$. Karena $0 < \varepsilon < 1$ maka $|\psi(x)| \le 2$ untuk $a < x < a+\eta$. Mengingat (ii) dan (4) maka $|\psi(x)| \le 2$, $|\psi(x)-1| < \varepsilon$ dan $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \varepsilon$ untuk $a < x < a+\eta$, sehingga diperoleh

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|=\left|\psi(x)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|=\left|\psi(x)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\psi(x)+L\psi(x)-L\right|$$

$$\leq|\psi(\xi)|\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|+|L||\psi(x)-1|<\left(2+|L|\right)\varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ maka jika diberikan $0<\varepsilon<1$ tedapat $\eta>0$, $\forall x\in(a,a+\eta)$ berlaku $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\left(2+|L|\right)\varepsilon$.

Dengan demikian telah dibuktikan $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Jelas bahwa hasil di atas berlaku juga untuk limit kiri, selanjutnya hasil yang diperoleh untuk limit satu arah mudah diperluas untuk limit dua arah. Aturan L'Hospital juga berlaku untuk limit tak hingga dan limit di tak hingga.

Teorema 1.8

Diberikan fungsi f dan g terdiferensial pada (a,b) dengan $g(x)\neq 0$ dan $g'(x)\neq 0$ untuk $x\in(a,b)$ dan $\lim\limits_{z\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ (atau $-\infty$).

(i) jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ maka $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (atau $-\infty$);

(ii) jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ maka $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (atau $-\infty$).

Bukti:

(i) Diberikan $\varepsilon>0$ dan $M>0$.

Maka terdapat $\delta>0$ sehingga $-\varepsilon<f(x)<\varepsilon$, $-\varepsilon<g(x)<\varepsilon$, dan $\frac{f'(x)}{g'(x)}>M$ untuk $x<y<a+\delta$. Pilih y dan $a<x<y<a+\delta$ maka

$$\exists\xi\in(x,y) \text{ dan } \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>M$$

Jika diambil $y \to a^+$ maka diperoleh $\dfrac{f(x)}{g(x)} > M$. Jadi diberikan $M > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $a < x < a + \delta$ berlaku $\dfrac{f(x)}{g(x)} > M$.

Jadi, $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(ii) Diberikan $M > 0$. Maka $\exists \delta > 0$ sehingga berlaku tiga ketaksamaan

$$f(x) > M, g(x) > M, \frac{f'(x)}{g'(x)} > M \ , \ \ \forall x \in (a, a+\delta).$$

Dipilih y dan $a < y < x < a + \delta$, maka $\exists \xi, x < \xi < y$ dan fungsi

$$\psi(x) = \frac{1 - \dfrac{f(x)}{f(y)}}{1 - \dfrac{g(x)}{g(y)}} \quad \text{sehingga} \quad \psi(x)\frac{f(y)}{f(x)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Jadi, untuk $y \to a^+$ diperoleh $\displaystyle\lim_{c \to a^+} \psi(x) = 1$ dan

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(y)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \infty.$$

Teorema 1.9

Jika f dan g terdiferensial pada (b, ∞) dengan $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ untuk $x \in (b, \infty)$ dan $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ (atau $-\infty$).

(i) jika $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ maka $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

(ii) jika $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ maka $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Dengan mengadakan perubahan seperlunya teorema juga berlaku untuk $x \to -\infty$.

Bukti:

Dengan mengadakan pengubahan variabel $x = \frac{1}{t}$ perhatikan fungsi F dan G untuk $t \in \left(0, \frac{1}{b}\right]$ dengan $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ dan $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ untuk $0 < t < \frac{1}{b}$.

Maka kita mempunyai fungsi F dan G terdiferensial pada $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ dengan

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} F(t)$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} G(t)$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(x)(-1/t^2)}{g'(x)(-1/t^2)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ jadi } \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Dengan pengubahan variabel ini Teorema 1.9 berubah menjadi Teorema 1.8.

Catatan : Untuk mudahnya Aturan L'Hospital ini digunakan untuk menghitung limit berbentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ dari $\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan menghitung $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ untuk a bilangan real, atau $\pm\infty$.

Aturan L'Hospital digunakan untuk menghitung limit bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ dan bentuk tak tentu yang lain yang dapat dibawa ke bentuk itu $\infty - \infty$, $\infty.0$, 1^∞, 0^0, dan ∞^0 dengan melakukan manipulasi aljabar atau menggunakan fungsi logaritma atau eksponensial. Sesungguhnya teknik penghitungan limit dengan menggunakan aturan L'Hospital sudah diberikan dalam kuliah kalkulus, sehingga tidak perlu diulang lagi di sini. Namun, ada baiknya diberikan beberapa contoh.

Contoh 1.12

(a) Bentuk $\frac{0}{0}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=1/2;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1\,.$

(b) Bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0;$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)}{\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)}{x}}=\dfrac{1}{1}=1.$

(c) Bentuk $\infty-\infty$ dibawa ke bentuk $\dfrac{0}{0}$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x--x\sin x}=\frac{0}{2}=0\,.$$

(d) Bentuk $0.\infty$ dibawa ke bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0\,.$

(e) Bentuk 0^0

9. Mengingat kekontinuan fungsi $f(t)=e^t$ maka

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1 .$$

(f) Bentuk 1^∞

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$, karena

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 .$$

(g) Bentuk ∞^0

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$, karena

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0.$$

C. PENDIFERENSIALAN FUNGSI INVERS

Diberikan fungsi f fungsi korespondensi 1-1 pada interval $[a,b]$. Maka tentu saja f mempunyai fungsi invers, dan jika f juga terdiferensial, wajar jika timbul pertanyaan tentang adanya derivatif dari fungsi invers.

Teorema 1.10

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ yang terdiferesial pada $[a,b]$ dengan $f'(x)\neq 0$ untuk semua $x\in[a,b]$. Maka f^{-1} ada dan terdiferensial pada $f([a,b])$ dengan $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}, \forall x\in[a,b]$.

Bukti:

Eksistensi fungsi f^{-1} sebagai akibat dari Teorema 1.5(a).
Jika $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ dan $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ maka $f([a,b]) = [m,M]$.
Dimisalkan $y_0 \in [m,M]$ dengan $f^{-1}(y_0) = x_0$ dan $< y_n >$ barisan dengan $y_n \in [m,M]$, $y_n \neq y_0, y_n \to y_0$.
Dibentuk barisan $< x_n >$ dengan $x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbf{N}$. Menurut teorema fungsi f^{-1} kontinu pada $[m,M]$ sehingga barisan $< x_n = f^{-1}(y_n) >$ konvergen ke $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Karena f fungsi 1-1 maka $x_n \neq x_0$. Ini berakibat bahwa

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Jadi, untuk $x_0 = f^{-1}(y_0)$, atau $y_0 = f(x_0)$ terbukti bahwa

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Contoh: $y = f(x) = \tan x$ terdiferensial pada $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) = \sec^2 x \neq 0$.

$$x = f^{-1}(y) = \arctan y,$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}, y \in (-\infty, \infty).$$

Teorema berikut adalah Teorema Nilai Antara untuk fungsi derivatif.

Teorema 1.11 (Teorema Darboux)

> Jika f terdiferensial pada $[a,b]$ dan λ suatu bilangan di antara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka paling sedikit ada satu titik $c \in (a,b)$ dan $f'(c) = \lambda$.

Bukti:
Diandaikan $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Didefinisikan g pada $[a,b]$ oleh $g(x) = \lambda x - f(x)$ untuk x pada $[a,b]$ Karena g kontinu maka g mencapai nilai maksimum pada $[a,b]$. Karena $g'(a) = \lambda - f'(a) > 0$, maka menurut Lemma 1.1 nilai maksimum tidak terjadi di $x = a$. Dengan cara sama karena $g'(b) = \lambda - f'(b) < 0$ maka nilai maksimum tidak terjadi di $x = b$. Oleh

karena itu g mencapai maksimum di suatu titik $c \in (a,b)$. Sekali lagi menurut Lemma 1.1 karena g mencapai maksimum di titik interior interval $[a,b]$ di mana g terdiferensial maka $0 = g'(c) = \lambda - f'(c)$. Jadi $f'(c) = \lambda$.

Contoh 1.13
Diberikan restriksi fungsi signum g dari $[-1,1]$ ke dalam **R**

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x > 0 \\ 0, & \text{untuk } x = 0 \\ -1, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

Apakah ada fungsi yang terdiferensial pada $[-1,1]$ yang derivatifnya sama dengan $g(x)$?

Jawab:
Andaikan ada fungsi f dengan $f'(x) = g(x)$ pada $[-1,1]$ Jadi $f'(0) = 0$ dan $f'(1) = 1$. Dengan demikian tidak ada nilai $f'(x)$ di antara $f'(0)$ dan $f'(1)$. Kontradiksi dengan Teorema 1.11 sebab diandaikan f terdiferensial pada $[-1,1]$ jadi juga pada [0,1]. Jadi tidak mungkin ada fungsi yang derivatifnya sama dengan $g(x)$ pada $[-1,1]$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Diberikan fungsi f dari **R** ke dalam **R** dengan
   $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
   Buktikan bahwa f fungsi konstan.
2. Diberikan fungsi terdiferensial g dari **R** ke dalam **R** dengan derivatif yang terbatas. Ditentukan $\varepsilon > 0$ dan didefinisikan fungsi

$f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Buktikan bahwa f fungsi korespondensi 1-1 jika ε cukup kecil.

3. Diberikan fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ yang terdiferensial di $c \in [a,b]$. Buktikan untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk $0 < |x - y| < \delta$ dan $a \le x \le c \le y \le b$ berlaku
$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y) \right| < \varepsilon .$$

4. Buktikan bahwa untuk $0 < \alpha < 1$ dan $x \ge 0$ maka $x^\alpha \le \alpha x + (1 - \alpha)$. Kemudian untuk $a > 0$ dan $b > 0$ buktikan $a^\alpha b^{1-\alpha} \le a\alpha + (1-\alpha)b$ dan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.
Petunjuk: Tinjaulah fungsi kontinu $g(x) = x^\alpha - \alpha x$ pada $[0, \infty)$ dan terdiferensial pada $(0, \infty)$.

5. Jika $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ konstanta real dan jika
$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_n}{(n+1)} = 0 .$$
Buktikan bahwa persamaan $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = 0$ paling sedikit mempunyai satu akar di antara 0 dan 1.

6. Diberikan $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b). Buktikan jika $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A$ maka $f'(a)$ ada dan sama dengan A.

7. Fungsi terdiferensial $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ dikatakan **terdiferensial seragam pada** $[a,b]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall x, y \in [a,b]$ dan $0 < |x - y| < \delta$ berlaku
$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(y) \right| < \varepsilon .$$
Buktikan bahwa jika f terdiferensial seragam pada $[a,b]$ maka f' kontinu pada $[a,b]$.

8. Diberikan fungsi $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ yang kontinu pada $[0,2]$ dan terdiferensial pada $(0,2)$, dengan $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=1$.
   Buktikan terdapat:
   (a) $x_1\in(0,1)$ dan $f'(x_1)=1$;
   (b) $x_2\in(1,2)$ dan $f'(x_2)=0$; dan
   (c) $x_3\in(0,2)$ dan $f'(x_3)=\dfrac{1}{3}$.

9. Tentang fungsi f diketahui bahwa : kontinu pada $[0,\infty)$; terdiferensial pada $(0,\infty)$, $f(0)=0$; dan f' naik monoton.
   Dibentuk fungsi $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ untuk $x>0$.
   Buktikan bahwa g naik monoton.

10. Apakah fungsi yang didefinisikan oleh $f(x)=\begin{cases}1, \text{ jika } x \text{ rasional}\\ 0, \text{ jika } x \text{ irasional}\end{cases}$ untuk $x\in[0,1]$ dapat menjadi derivatif sesuatu fungsi?

Petunjuk Penyelesaian Latihan

1. Diberikan $\varepsilon>0$. Pilihlah $\delta=\varepsilon$ maka untuk
   $0<|x-y|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<\varepsilon$ untuk y sembarang.
   Jadi $f'(y)=0,\forall y\in\mathrm{R}$ sehingga f konstan.

2. Terdapat $M>0$ sehingga $|g'(x)|\le M,\forall x\in\mathbf{R}$. Maka
   $|f'(x)-1|=\varepsilon|g'(x)|\le\varepsilon M$
   Untuk $\varepsilon=\frac{1}{2}M$ maka $\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le\dfrac{3}{2}$. Jadi $f'(x)\ne 0,\forall x\in\mathbf{R}$ dan menurut Teorema 1.5(i) f korespondensi 1-1.
3. Diberikan
   $\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<|t-c|<\delta\Rightarrow f'(c)-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c}<f'(c)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ ... (1)

Untuk $a \le x \le c \le y \le b$ dan $0 < |x-y| < \delta$ maka
$c-\delta < x \le c \le y < c+\delta$.

Jika x tetap maka $\lim\limits_{y \to c^+} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ sebab f fungsi kontinu.

Jadi,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mengingat (1), maka

$$f'(c)-\varepsilon < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2} < f'(c)+\varepsilon.$$

Terbukti $\left| \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(c) \right| < \varepsilon.$

4. Ditinjau $g(x) = x^{\alpha} - \alpha x, x \ge 0$. Karena $0 < \alpha < 1$ maka $g(x)$ kontinu dan terdiferensial dengan $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$ untuk $x \ge 0$. Untuk $0 < x < 1$ nilai $g'(x) > 0$ dan untuk $1 < x < \infty$ nilai $g'(x) < 0$. Karena g fungsi kontinu dan $g(x)$ naik tegas pada $(0,1)$ maka $g(x) < g(1)$ atau $x^{\alpha} < \alpha x + (1-\alpha)$. Sekaligus terbukti bahwa dalam ketaksamaan $x^{\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha)$ kesamaan hanya terjadi untuk $x = 1$.

   Jika diamb $x = \dfrac{a}{b}$ untuk $a > 0$ dan $b > 0$ maka diperoleh

   $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \le a\alpha + (1-\alpha)b$ dan kesamaan hanya terjadi untuk $\dfrac{a}{b} = 1$ yaitu $a = b$.

5. Tinjaulah fungsi $f(x) = c_0 x + \dfrac{c_1}{2} x^2 + \ldots\ldots + \dfrac{c_{n-1}}{n} x^n + \dfrac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ dan gunakan Teorema Rolle.

6. Diberikan $\varepsilon > 0$ maka $\exists \delta > 0$ sehingga untuk $a < \xi < a+\delta$ berlaku $|f'(\xi) - A| < \varepsilon$.

Karena f kontinu pada $[a, a+\delta]$ dan terdiferensial pada $(a, a+\delta)$, maka untuk $a < x < a+\delta$ terdapat $\xi \in (a, x)$ dan

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$ (Teorema Nilai Rata-rata)

Jadi diberikan $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - A\right| < \varepsilon,$

jadi $f'(a) = A$.

7. Karena f terdiferensial seragam pada $[a,b]$ jika diberikan $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a,b]$ dan $0 < |x-y| < \delta$ maka

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jadi

$$|f'(x)-f'(y)| = \left|\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right] + \left[f'(x) - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

untuk semua $x, y \in [a,b]$ dan $0 < |x-y| < \delta$.

Karena $f'(x) = f'(y)$ untuk $x = y$ maka

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f'(x)-f'(y)| < \varepsilon)$.

Jadi f' kontinu seragam pada $[a,b]$ sehingga kontinu pada $[a,b]$.

8. (a) Gunakan Teorema Nilai Rata-rata pada interval $[0,1]$.
   (b) Gunakan Teorema Nilai Rata-rata pada interval $[1,2]$.
   (c) Pada $[x_1, x_2]$ fungsi f terdiferensial dengan $f'(x_1) = 1$ dan $f'(x_2) = 0$. Menurut Teorema 1.11 terdapat $x_3 \in (x_1, x_2) \subset (0,2)$ sehingga $f'(x_3) = \dfrac{1}{3}$ karena $f'(x_1) > \dfrac{1}{3} > f'(x_2)$.

9. Untuk $x > 0$ maka $g'(x) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Jadi untuk $0 < x < y$, $g(y) - g(x) = \dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}(y-x)$ untuk suatu ξ dan $x < \xi < y$.

Menurut Teorema Nilai Rata-rata $f(\xi) - f(0) = \xi f'(\xi_1)$, jadi $f(\xi) = \xi f'(\xi_1)$ dengan $0 < \xi_1 < \xi$ sebab diketahui $f(0) = 0$.

Karena f' naik monoton maka $f'(\xi) - f'(\xi_1) \geq 0$.
Jadi untuk $0 < x < y$ berlaku

$$g(y) - g(x) = \frac{\xi f'(\xi) - \xi f'(\xi_1)}{\xi^2} = \frac{f'(\xi) - f'(\xi_1)}{\xi} \geq 0.$$

Terbukti $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ naik monoton untuk $x > 0$.

10. Kontradiksi dengan Teorema 1.11 (Darboux), karena jika h terdiferensial pada $[0,1]$ dan $h'(x) = f(x)$ maka $h'\left(\frac{1}{\pi^2}\right) = 0$ dan $h'(1) = 1$, tetapi tidak ada $x \in \left(\frac{1}{\pi^2}, 1\right)$ sehingga $h'(x) = \lambda$ dengan $h'\left(\frac{1}{\pi^2}\right) < \lambda < h'(1)$. Jadi tidak mungkin ada fungsi $f(x)$ menjadi fungsi derivatif dari fungsi yang manapun pada $\left[\frac{1}{\pi^2}, 1\right]$ jadi juga pada $[0,1]$.

RANGKUMAN

1. Fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ terdiferensial di $c \in [a,b]$ maka f kontinu di c.
2. Teorema Rolle:
   Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) dan $f(a) = f(b)$ maka terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga $f'(\xi) = 0$.
3. Teorema Nilai Rata-rata:
   Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
4. Jika fungsi f kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensiabel pada (a,b) mempunyai nilai maksimum (minimum) di titik interior $x_0 \in (a,b)$ maka $f'(x_0) = 0$.
5. Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ kotinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka
   (i) $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ korespondensi 1-1 pada $[a,b]$

(ii) $f'(x)=0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ konstan pada $[a,b]$
(iii) $f'(x)>0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ naik tegas pada $[a,b]$
(iv) $f'(x)<0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ turun tegas pada $[a,b]$
(v) $f'(x)\geq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ naik pada $[a,b]$
(vi) $f'(x)\leq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ turun pada $[a,b]$

6. Teorema Nilai Rata-rata Umum:
   Jika f dan g kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
7. Aturan L'Hospital digunakan untuk menghitung limit berbentuk $\dfrac{0}{0}$ atau $\dfrac{\infty}{\infty}$ dari $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan menghitung $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ untuk a real atau $\pm\infty$ (lihat Teorema 1.7, 1.8, 1.9.)
8. Teorema Darboux: Jika f terdiferensial pada $[a,b]$ dan λ di antara $f'(a)$ dan $f'(b)$ maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c)=\lambda$.

TES FORMATIF 1

Coba kerjakan sendiri terlebih dahulu, sebelum melihat jawaban!

1. Diberikan fungsi $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ terdiferensial pada (a,b) dan terdapat $M>0$ sedemikian hingga $|f'(x)|\leq M$, $\forall x \in (a,b)$ buktikan bahwa:
   (i) f kontinu seragam pada (a,b).
   (ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ ada.
2. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan $\sqrt{1+h} < 1+\dfrac{h}{2}$ untuk $h>0$. Apakah ada cara yang lebih mudah untuk mengerjakan ini?
3. Diberikan fungsi f dengan rumus $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{jika } x & \textit{rasional} \\ 0, \text{jika } x & \textit{irasional} \end{cases}$.

   Apakah $f(0)$ ada? Apakah $f'(x)$ ada untuk $x\neq 0$?

4. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^p} = 0$ dan $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^p} = 0$ untuk setiap bilangan bulat positif p.
5. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x - 1/x)$ dan $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$.
6. Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ terdiferensial dalam (a,b) dan $x_0 \in (a,b)$ hitunglah $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Teorema Taylor

Jika f suatu fungsi real yang terdiferensial pada $[a,b]$ mungkin bahwa f' juga fungsi terdiferensial pada beberapa atau semua titik pada $[a,b]$.

A. DERIVATIF TINGKAT TINGGI

Jika x_0 titik yang dimaksudkan itu maka derivatif dari f' di titik x_0 dinyatakan dengan $f''(x_0)$ dan dinamakan *derivatif tingkat kedua* dari f di titik x_0. Perlu diperhatikan bahwa agar $f''(x_0)$ ada, $f'(x_0)$ harus ada di suatu kitar dari x_0. Derivatif-derivatif tingkat tinggi didefinisikan secara induktif dengan $f^{(0)} = f$ dan $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ untuk $k = 0,1,2,\ldots$.

B. SUKU BANYAK TAYLOR

Jika $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$ suatu sukubanyak berderajat $n \geq 0$, maka

$P^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k\ldots 2a_{k+1}x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k)a_nx^{n-k}$ dan

$P^{(k)}(0) = k!a_k$.

Kita peroleh $a_k = P^{(k)}(0)/k!$ sehingga $P(x)$ menjadi

$$\begin{aligned}P(x) &= P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k .\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa penyajian $P(x)$ dalam pangkat-pangkat $(x - x_0)$ dapat diperoleh $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Jika fungsi $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ mempunyai derivatif sampai tingkat n di $x_0 \in (a,b)$ maka bentuk yang sama untuk fungsi f, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

dinamakan *sukubanyak Taylor derajat* n untuk fungsi f di sekitar x_0. Jika P fungsi sukubanyak derajat n dalam x maka $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, tetapi tidak demikian halnya untuk fungsi f yang bukan sukubanyak derajat n. Untuk fungsi f ini $f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ di mana $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ dinamakan *sukusisa* di x_0. Mudah dihitung bahwa $R_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_o)=0$ untuk $k=0,1,2,\ldots,n$.

Akan kita tentukan bagaimana bentuk sukusisa $R_n(x)$. Kita bentuk fungsi $Q(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Pehatikan bahwa $R_n^{(k)}(x_0)=0$ dan $Q^{(k)}(x_0)=0$ untuk $k=0,1,2,\ldots,n$. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Umum (Teorema 1.6) diperoleh,

$$\frac{R_n(x)}{Q(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{Q(x)-Q(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{Q'(\xi_1)} \text{ untuk suatu } \xi_1 \text{ di antara } x_0 \text{ dan } x.$$

$$\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{Q'(\xi_1)-Q'(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{Q'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{Q''(\xi_2)} \text{ untuk suatu } \xi_2 \text{ di antara } x_0 \text{ dan } \xi_1.$$

Demikian seterusnya diperoleh

$$\frac{R_n(x)}{Q(x)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{Q'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{Q''(\xi_2)}=\frac{R_n'''(\xi_3)}{Q'''(\xi_3)}=\ldots\ldots=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{Q^{(n)}(\xi_n)}$$

di mana ξ_k suatu titik di antara x_0 dan ξ_{k-1}.

Akan tetapi, $R_n^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0)$ dan $Q^{(n)}(t)=(n+1)!(t-x_0)$ sehingga

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\xi_n)-f^{(n)}(x_0)}{\xi_n-x_0}.$$

Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata pada bentuk terakhir ini, diperoleh

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

di mana ξ suatu titik di antara x_0 dan x.

Uraian di atas disajikan sebagai Teorema Taylor dengan suku sisa sebagai berikut.

Teorema 1.12 (Teorema Taylor dengan Suku Sisa)

Diberikan $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ yang mempunyai derivatif sampai tingkat $n+1$ pada (a,b) dan $x_0\in(a,b)$. Maka

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+........+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dengan ξ suatu titik tertentu di antara x_0 dan x, dan $R_n(x)$ dinamakan suku sisa ke-*n* dalam penyajian $f(x)$ ke dalam sukubanyak Taylor dalam pangkat-pangkat $(x-x_0)$.

Catatan **:** Dalam kasus *n* = 0 Teorema Taylor ini menjadi Teorema Nilai rata-rata.

Untuk $x_0=0$ deret Taylor dinamakan deret Maclaurin. Teorema Taylor memotivasi kita kepada suatu pertanyaan berikut. Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ mempunyai derivatif dari segala tingkat dalam (a,b), fungsi semacam ini dikatakan *terdiferensial tak hingga* (*infinitely differentiable*), apakah hubungan antara $f(x)$ dengan deret tak hingga $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$? Deret ini dinamakan deret Taylor untuk *f* di sekitar titik x_0. Fungsi $f(x)$ dan deret ini akan sama jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ untuk semua $x\in(a,b)$.

Teorema 1.13

Jika fungsi *f* mempunyai derivatif dari semua tingkat dalam (a,b) dan terdapat $M>0$ sehingga $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$, $\forall k=0,1,2,\ldots,\forall x\in(a,b)$ untuk $x_0\in(a,b)$ maka berlaku

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ ,\quad \forall x\in(a,b) \tag{1}$$

Bukti:
Syarat perlu dan cukup agar (1) benar adalah $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \forall x \in (a,b)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

dengan

$$\left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \le \frac{M\left|x-x_0\right|^k}{k!} \text{ dan } \left|R_n(x)\right| \le \frac{M\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+!)!} .$$

Bandingkan dengan deret suku positif konvergen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\left|x-x_0\right|^n}{n!}$ di mana $\left|R_n(x)\right|$ adalah suku ke-(n+1), jadi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{M\left|x-x_0\right|^n}{n!} = 0, \forall x \in (a,b) .$$

Contoh 1.14
Berikut ini diberikan beberapa deret Maclaurin yang terkenal**:**

(a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)$

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in (-\infty, \infty)$

(c) $\sin x = x - \frac{x^3}{s!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in (-\infty, \infty)$

(d) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in (-\infty, \infty)$

(e) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in (-\infty, \infty)$

(f) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \forall x \in (-1,1)$

(g) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \forall x \in (-1,1)$

Bukti:

(a) $f(x)=e^x$ terdiferensial pada $(-\infty,\infty)$ dan $f^{(k)}(x)=e^x, \forall x \in (-\infty,\infty)$ untuk semua $k=0,1,2,\ldots$ dan $f^{(k)}(0)=1$. Jadi untuk x tertentu dalam $\mathbf{R}$ berlaku

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \text{ dengan } R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dan ξ nilai tertentu di antara 0 dan x.

Harus dibuktikan untuk nilai x tertentu ini $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Jika telah ditetapkan x maka terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga $|x| \le N$.

Jadi,

$$|R_N(x)| \le \frac{e^{\xi}}{(N+1)!} N^{N+1} = M\ .$$

$$|R_{N+1}(x)| = \frac{e^{\xi}}{(N+2)!} x^{N+2} = |R_N(x)| \frac{|x|}{N+2} \le M \frac{N}{N+2} = M\lambda$$

$$\text{dengan } 0 < \lambda = \frac{N}{N+2} < 1 .$$

$$|R_{N+2}(x)| = |R_{N+1}(x)| \frac{|x|}{N+3} \le M\lambda \frac{N}{N+3} < M\lambda^2 .$$

Demikian seterusnya diperoleh $|R_{N+p}(x)| < M\lambda^p$ dengan $0<\lambda<1$.

Jadi $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{p\to\infty} |R_{N+p}(x)| \le M \lim_{p\to\infty} \lambda^p = 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ untuk setiap x yang diberikan.

Dengan demikian untuk setiap $x \in \mathbf{R}$ terbukti $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

(b) $f(x)=\cos x$, $f^{(4k)}(x)=\cos x$, $f^{(4k+1)}(x)=-\sin x$, $f^{(4k+2)}(x)=-\cos x$, $f^{(4k+3)}(x)=\sin x$,

Jadi $\left|f^{(k)}(x)\right| \le 1, \forall k=0,1,\ldots, \forall x \in \mathbf{R}$, maka menurut Teorema 1.13 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Karena $f^{(4k)}(0)=1, f^{(4k+1)}(0)=0, f^{(4k+2)}(0)=-1, f^{(4k+3)}(0)=0$ maka $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$.

Jadi

$$f(x)=\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,\forall x\in\mathbf{R}$$

(f) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1},\ f'(x)=1.(1-x)^{-2}, f''(x)=2!(1-x)^{-3},\ldots$

$$f^{(k)}(x)=k!(1-x)^{-(k+1)}.$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k+R_n(x),\qquad(-1<x<1).$$

$$R_n(x)=\frac{1}{1-x}-[1+x+\ldots+x^n]=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x},(-1<x<1).$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

dan terbukti bahwa $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+\ldots+x^n+\ldots(-1<x<1).$

Rumus-rumus Maclaurin yang lainnya buktinya diserahkan kepada pembaca.

C. NILAI EKSTREM

Fungsi $f:D\to\mathbf{R}$ dengan $D\subset\mathbf{R}$ dikatakan mempunyai *maksimum lokal* di titik $x_0\in D$, jika terdapat $\delta>0$ dan untuk semua $x\in D\cap N(x_0,\delta)$ berlaku $f(x)\le f(x_0)$. Minimum lokal didefinisikan dengan cara yang semacam. Fungsi f dikatakan mempunyai ekstrem di x_0 jika di titik itu f mempunyai maksimum atau minimum.

Dalam Lemma 1.1 telah disajikan syarat perlu adanya ekstrem dari fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) di titik interior $x_0\in(a,b)$ adalah $f'(x_0)=0$. Bahwa syarat ini tidak cukup dapat diambil contoh $f(x)=x^3$ meskipun terdiferensial pada $[-1,1]$ dan $f'(0)=0$ tetapi f tidak mencapai ekstrem titik interior 0.

Baiklah kita tulis lagi lemma tersebut.

Lemma 1.3

Jika $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ mempunyai ekstrem lokal di titik $x_0 \in (a,b)$ dan jika f terdiferensial di x_0 maka $f'(0)=0$.

Bukti:
Diandaikan f mempunyai minimum lokal di x_0. Untuk x cukup dekat dengan x_0 dan $x > x_0$ akan kita jumpai bahwa $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ yang berakibat $f'(x_0)\geq 0$. Untuk $x < x_0$ maka $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ sehingga $f'(x_0)\leq 0$.

Teorema 1.14

Jika $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan mempunyai derivatif sampai tingkat $(n+1)$ pada (a,b) dan di titik interior $x_0\in(a,b)$ berlaku $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$ dan $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0,$ $f^{(n+1)}$ kontinu di x_0 dan n *gasal* maka f mempunyai ekstrem lokal di x_0, dan ekstrem minimum jika $f^{(n+1)}(x_0)>0,$ dan ekstrem maksimum jika $f^{(n+1)}(x_0)<0.$ Jika n *genap* maka tidak terjadi ekstrem untuk f di titik x_0.

Bukti:
(a) Kasus untuk n *gasal*, jadi $n+1$ *genap*.

Maka $f(x)-f(x_0)=R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ untuk $a<x<b$ dan ξ di antara x_0 dan x. Untuk $\delta>0$ yang cukup kecil tanda dari $f^{(n+1)}(\xi)$ sama dengan tanda dari $f^{(n+1)}(x_0)$ untuk $|x-x_0|<\delta$ karena $f^{(n+1)}$ kontinu di x_0. O karena $n+1$ *genap* maka untuk $|x-x_0|<\delta$ ini nilai $f(x)-f(x_0)\geq 0$ jika $f^{(n+1)}(x_0)>0$ dan $f(x)-f(x_0)\leq 0$ jika $f^{(n+1)}(x_0)<0$.

Jadi, f mempunyai minimum di x_0 jika $f^{(n+1)}(x_0)>0$ dan maksimum jika $f^{(n+1)}(x_0)<0$.

(b) Kasus untuk *n genap*, jadi $n+1$ *gasal*.
Dalam hal ini tanda dari $f(x)-f(x_0)$ untuk $x_0-\delta<x<x_0$ tidak sama dengan untuk $x_0<x<x_0+\delta$, sehingga tidak terjadi ekstrem untuk f di titik x_0.

Contoh 1.15
Dalam Teorema 1.14 untuk $n=1$ kita mempunyai teorema yang sangat terkenal dalam kalkulus: Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ di titik interior $x_0\in(a,b)$ mempunyai nilai $f'(x_0)=0$ dan $f''(x_0)\neq 0$ maka f mempunyai nilai ekstrem di x_0, ekstrem itu maksimum jika $f''(x_0)<0$ dan minimum jika $f''(x_0)>0$.

Contoh 1.16
Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ terdiferensial dan mempunyai maksimum (minimum) lokal di a, apakah perlu $f'(a)=0$? Jika tidak nyatakan dan buktikan syarat perlu untuk maksimum (minimum) lokal di a. Bagaimanakah keadaannya di b?

Jawab:
Tidak perlu $f'(a)=0$. Fungsi f maksimum lokal di a jika diberikan $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in[a,b],a<x<a+\delta$ berlaku $f(a)\geq f(x)$, jadi $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$. Karena $f'(a)$ ada maka $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$.
Dengan demikian agar f mencapai maksimum lokal di a haruslah $f'(a)\geq 0$. Syarat perlu untuk minimum lokal di a adalah $f'(a)\leq 0$.
Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa syarat perlu untuk maksimum lokal di b adalah $f'(b)\geq 0$ dan untuk minimum lokal di b adalah $f'(b)\leq 0$.

Syarat itu tidak cukup, misalnya $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\in\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right], f(0)=0.$ Maka

$f'(0)=0$, $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$, $f'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{4}{\pi}$. Karena $f\left[\dfrac{2}{\pi(1+4k)}\right]=\dfrac{4}{\pi^2(1+4k)^2}$

dan

$f\left[\frac{2}{\pi(4k+3)}\right]=-\frac{4}{\pi^2(4k+3)^2}$, $k=0,1,2,\ldots$ maka f tidak mencapai maksimum atau minimum lokal di 0 meskipun $f'(0)=0$, tetapi f mencapai maksimum lokal di $\frac{2}{\pi}$.

Contoh 1.17

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) kecuali mungkin di titik $x_0\in(a,b)$. Jika $\lim_{x\to x_0} f'(x)=L$ ada, tunjukkan bahwa f terdiferensial di x_0 dan $f'(x_0)=L$.

Bukti:

Diberikan $\varepsilon>0$, maka terdapat $\delta>0$ sehingga untuk $\forall x\in(a,b)$, $0<|x-x_0|<\delta$ berlaku

$$|f'(x)-L|<\varepsilon \tag{1}$$

Karena f kontinu di x_0, maka f kontinu pada $[x_0-\delta,x_0]$ dan $[x_0,x_0+\delta]$ terdiferensial pada $(x_0-\delta,x_0)$ dan $(x_0,x_0+\delta)$. Menurut teorema nilai rata-rata untuk $x_0-\delta<x<x_0$ atau $x_0<x<x_0+\delta$ berlaku $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$ untuk suatu ξ di antara x_0 dan x.

Karena $0<|\xi-x_0|<\delta$ maka berlaku (1), yakni

$$|f'(\xi)-L|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|<\varepsilon \text{ untuk } \forall x, 0<|x-x_0|<\delta .$$

Jadi $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$.

Contoh 1.18

Jika diberikan $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{untuk } x\neq 0\\ 0 & \text{untuk } x=0\end{cases}$

buktikan bahwa $f'(0)=0$. [Petunjuk : gunakan Contoh 1.17]

Bukti:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

Dengan mengganti variabel $t = \dfrac{1}{x}$ maka untuk $x \to 0^+$ diperoleh $t \to \infty$ dan untuk $x \to 0^-$ diperoleh $t \to -\infty$. Jadi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{e^{t^2}} = 0$.

Karena $f(0) = 0$ maka f kontinu di $x = 0$. Dengan demikian f kontinu pada $[-1,1]$ dan terdiferensial pada interval $(-1,1)$ kecuali mungkin di titik $x_0 = 0$ di dalam $(-1,1)$.

Untuk $x \neq 0$ diperoleh $f'(x) = \dfrac{2}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}$, maka $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2t^3}{e^{t^2}}$.

Dengan aturan L'Hospital untuk bentuk $\dfrac{\infty}{\infty}$ diperoleh $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Menurut Contoh 1.17 maka $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Contoh 1.19 (Aturan Leibnitz)

Buktikan $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C(n,k) f^{(k)} g^{(n-k)}$, $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k))!}$.

Bukti :
Akan dibuktikan dengan induksi matematik.
Rumus benar untuk $n = 1$ sebab

$$(fg)^{(1)} = C(1,0) f^{(1)} g^{(0)} + C(1,1) f^{(0)} g^{(1)} = f'g + fg'.$$

Diasumsikan rumus benar untuk $n = r$, jadi

$$(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{k=r} C(r,k) f^{(k)} g^{(r-k)} \text{ benar.}$$

Berdasarkan asumsi ini dibuktikan $(fg)^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{k=r+1} C(r+1,k) f^{(k)} g^{(r+1-k)}$ benar.

$$(fg)^{(r+1)} = \left(\sum_{k=0}^{k=r} C(r,k) f^{(k)} g^{(r-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{k=r} C(r,k)[f^{(k+1)} g^{(r-k)} + f^{(k)} g^{(r+1-k)}]$$

$$= \sum_{k=0}^{k=r} C(r,k) f^{(k+1)} g^{(r-k)} + \sum_{k=0}^{k=r} C(r,k) f^{(k)} g^{(r+1-k)},$$

dengan mengganti indeks $k+1$ dengan s pada penjumlahan yang pertama dan k dengan s pada yang kedua, diperoleh

$$\left(fg\right)^{(r+1)} = \sum_{s=1}^{s=r+1} C(r,s-1) f^{(s)} g^{(r+1-s)} + \sum_{s=0}^{s=r} C(r,s) f^{(s)} g^{(r+1-s)}$$
$$= C(r,r) f^{(r+1)} g^{(0)} + C(r,0) f^{(0)} g^{(r+1)} + \sum_{s=1}^{s=r} [C(r,s-1)+C(r,s)] f^{(s)} g^{(r+1-s)}.$$

Tetapi $C(r,r) = C(r+1,r+1)$ dan $C(r,0) = C(r+1,0)$ dan

$$C(r,s)+C(r,s-1) = \frac{r!}{s!(r-s)!} + \frac{r!}{(s-1)!(r-s+1)!} =$$
$$\frac{r!}{(s-1)!(r-s)!}[1/s+1/(r-s+1)] = \frac{(r+1)!}{s!(r+1-s)!} = C(r+1,s).$$

Jadi $(fg)^{(r+1)} = \sum_{s=0}^{s=r+1} C(r+1,s) f^{(s)} g^{(r+1-s)}$ dan terbuktilah rumus Leibnitz.

Contoh 1.20

Gunakan Teorema Taylor dengan $n=2$ untuk mendekati $\sqrt[3]{1+x}$, $x>1$.

Diambil fungsi $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ di titik $x_0 = 0$ dan $n=2$. Karena $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ dan $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$ maka $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$ sehingga

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + R_2(x)$$

dengan $R_2 = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{5}{81}(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}$ untuk suatu ξ di antara 0 dan x.

Jika diambil $x = 0{,}3$ maka nilai pendekatan untuk $\sqrt[3]{1{,}03}$ adalah $P_2(0{,}3) = 1{,}09$. Karena $\xi > 0$ maka $(1+\xi)^{-\frac{8}{3}} < 1$ dan

$$R_2(x) \le \tfrac{5}{81}(0{,}3)^3 = \tfrac{1}{600} < 0{,}17 \times 10^{-2}.$$

Jadi kita peroleh $\left|\sqrt[3]{1{,}03} - 1{,}09\right| < 0{,}05$ sehingga nilai pendekatan kita teliti dua desimal di belakang koma.

Contoh 1.21

Dekati nilai bilangan e dengan ralat kurang dari 10^{-5}.

Diambil $f(x) = e^x$ dan $x_0 = 0$ dan $x = 1$. Karena $f^{(n)}(x) = e^x$ maka

$$e^x = P_n(x) + R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

dengan $R_n(x) = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}$ untuk suatu ξ di antara 0 dan 1.

Karena $e < 3$ kita harus mencari n sedemikian hingga $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Jika dihitung $9! = 362880 > 3(10^5)$ sehingga $n = 8$ cukup memenuhi syarat untuk ralat yang diminta. Karena $8! = 40320$ maka tidak ada n yang lebih kecil lagi dapat digunakan untuk nilai n.

Jadi, kita peroleh

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \tfrac{1}{2!} = \ldots + \tfrac{1}{8!} = 2,71828$$

dengan ralat kurang dari 10^{-5}.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Carilah suku banyak Taylor $P_3(x)$ dengan suku sisa $R_3(x)$ untuk fungsi f di x_0.
   (a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dan $x_0 = 0$,
   (b) $f(x) = \sin x$ dan $x_0 = 0$,
   (c) $f(x) = 1/(1+x)$ dan $x_0 = 0$.
2. Tunjukkan bahwa jika $x > 0$ maka $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$
3. Tunjukkan bahwa $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ untuk semua $x \in \mathbf{R}$.
4. Kita ingin mendekati sinus dengan suku banyak pada $[-1,1]$ sehingga ralatnya kurang dari 0,001. Tunjukkan bahwa diperoleh
   $$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \text{ untuk } |x \leq 1|.$$
5. Diandaikan bahwa $I \subset \mathbf{R}$ suatu interval terbuka dan $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Jika $c \in I$, tunjukkan bahwa bagian grafik fungsi f pada I tidak pernah di bawah garis singgung pada grafik di titik $(c, f(c))$.

Petunjuk Penyelesaian Latihan

1. (a) $f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3,\ R_3(x) = 0.$

   (b) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_3(x),\ R_3(x) = \frac{1}{24}x^4 \sin\xi$ dan ξ suatu bilangan di antara 0 dan x.

   (c) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_3(x),\ R_3(x) = \frac{1}{24}x^4 \cos\xi$ dan ξ suatu bilangan di antara 0 dan x.

2. Diambil $f(x) = \sqrt{1+x},\ x > 0.$

   $f(0) = 1,\ f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\ f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}.$

   $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + R_1(x),\ f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_2(x)$.

   $R_1(x) = -\frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2,\ R_2(x) = \frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}x^3$ dengan ξ bilangan tertentu di antara 0 dan x.

   Karena $R_1(x) < 0,\ R_2(x) > 0$ maka $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

3. $f(x) = \cos x$ untuk $x \in \mathbf{R}$.

   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + R_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$

   dengan $R_2(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3 = \dfrac{\sin\xi}{6}x^3.$

   Untuk $0 \le x \le \pi$ maka $0 \le \xi < \pi$ maka $R_2(x) \ge 0$. Demikian juga untuk $-\pi \le x \le 0$ maka $-\pi < \xi \le 0$ diperoleh $R_2(x) \ge 0$. Jadi, $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x$ untuk $|x| \le \pi$.

   Jika $|x| \le \pi$ maka $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 \le \cos x$ maka ketaksamaan $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x$ dengan sendirinya benar. Jadi ketaksamaan berlaku untuk semua $x \in \mathbf{R}$.

4. $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,$

   $f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,\ \ldots$

   $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1$

   $f^{(6)}(0) = 0,\ f^{(7)}(0) = -1,\ \ldots.$

   $R_6(x) = \dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7$, suatu ξ di antara 0 dan x, sehingga

   $|R_6(x)| \le \dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040} < 0{,}001$, karena $x \in [-1,1]$, sedangkan $\dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720}$.

Jadi, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$, dan untuk $x \in [-1,1]$ maka

$\left|\sin x - (x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right| < \dfrac{1}{5040} < 0{,}001$.

5. Grafik fungsi f mempunyai persamaan $y = f(x),\ x \in I$
   Garis singgung di $(c, f(c))$ adalah $y = g(x)$ dengan
   $g(x) = f'(c)(x-c) + f(c),\quad x \in I$.
   Untuk $x \in I$, $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(\xi)}{2}$ dan ξ suatu bilangan di antara c dan x.
   Karena $f''(x) \geq 0$ untuk $x \in I$ maka $f(x) - g(x) = \tfrac{1}{2} f''(\xi) \geq 0$, dan grafik f tidak pernah di bawah garis singgung di titik $(c, f(c))$.

RANGKUMAN

1. Teorema Taylor
   Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ mempunyai derivatif sampai tingkat $n+1$ dan $x_0 \in (a,b)$ maka

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)\ ,\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

   dan ξ titik tertentu di antara x_0 dan x.
   Deret Taylor: $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
2. Teorema Nilai Ekstrem
   Jika $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu pada $[a,b]$ dan mempunyai derivatif sampai tingkat $n+1$ pada (a,b) dan di titik interior $x_0 \in (a,b)$ berlaku

   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$ dan $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$,
   $f^{(n+1)}$ dan x_0 dan n gasal,

   maka f mempunyai ekstrem lokal di x_0, ekstrem itu minimum jika $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ dan maksimum jika $f^{(n+1)}(x_0) < 0$.
   Jika n genap tidak terjadi ekstrem di x_0.

TES FORMATIF 2

Coba kerjakan sendiri terlebih dahulu, sebelum melihat jawaban!

1. Jika $f(x)=|x|^3$ hitunglah untuk $x\in\mathbf{R}$ nilai $f'(x)$ dan $f''(x)$. Tunjukkan bahwa $f'''(0)$ tidak ada.
2. Mengapa $1-|x-1|$ tidak memenuhi konklusi Teorema Rolle pada $[0,2]$?
3. Didefinisikan fungsi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ oleh $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{jika } x \ \ \textit{rasional} \\ 0, \text{jika } x \ \ \textit{irasional}\end{cases}$.

   Apakah $f(0)$ ada? Apakah $f'(x)$ ada untuk $x\neq 0$?
4. Jika $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ terdiferensial pada (a,b) dan $x_0\in(a,b)$ tentukan
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$
5. Tunjukkan bahwa $e^x\leq\dfrac{1}{(1-x)}$ untuk $x<1$.
6. Jika $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ buktikan $g=(f^+)^2$ terdiferensial di t dengan $g'(t)=2f^+(t)f'(t)$ jika $f^+(x)=\text{maks}\{f(x),0\}$.

   Petunjuk: Gunakan fungsi $\varphi(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ 0, x<0\end{cases}$.
7. Diketahui $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ dan terdiferensial pada $(0,\infty)$ dan diketahui bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=L$. Buktikan bahwa:

   (a) untuk sembarang $h > 0$ maka $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=L$;

   (b) jika $f(x)\to k$ untuk $x\to\infty$ maka $L = 0$;

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=L$.
8. Diberikan $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ terdiferensial sedemikian hingga tidak ada x di mana $f(x)=f'(x)=0$. Buktikan bahwa himpunan $Z=\{x: f(x)=0\}$ berhingga.

9. Diberikan $f:[a,b]\to[a,b]$ terdiferensial pada (a,b) dan terdapat $\alpha,\ 0<\alpha<1,$ sehingga $\left|f'(t)\right|\le\alpha$ untuk $t\in(a,b)$. Buktikan bahwa f mempunyai titik tetap yang tunggal dalam $[a,b]$.
10. Diberikan fungsi $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ terdiferensial dalam [0,1] dan $\left|f'(x)\right|\le 1, \forall x\in(0,1)$. Buktikan barisan $<x_n>$ konvergen jika $x_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Modul berikutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2 ini, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

***Tes Formatif* 1**

1. (i) Untuk sembarang $x < y$ di dalam (a,b) maka

   $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$ untuk suatu $\xi \in (x,y)$.

   Jadi $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y-x| \leq M|y-x|$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka $\forall x, y \in (a,b)$ dengan $|x-y| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   Terbukti f kontinu seragam pada (a,b).

   (ii) Fungsi f terbatas pada $(a, a+\delta)$, sebab untuk $x, y \in (a, a+\delta)$ dan y tetap berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tergantung pada kelakuan fungsi di dekat a maka $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada yakni supremum atau infimum dari himpunan nilai $f(x)$ disekitar dekat a itu. Anda buktikan sendiri bahwa $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ ada.

2. Dipandang fungsi $f(x) = \sqrt{1+x}$ untuk $x \in [0,h]$, maka

   $f(h) - f(0) = \dfrac{h}{2\sqrt{1+\xi}}$ untuk suatu $\xi \in (0,h)$. Jadi

   $f(h) = f(0) + \dfrac{h}{2\sqrt{1+\xi}} < 1 + \dfrac{h}{2}$.

   Untuk $a \geq 0$ dan $b \geq 0$ berlaku $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Karena $\sqrt{1+h} > 0$ dan $1 + \dfrac{h}{2} > 0$ dan karena $\sqrt{1+h}^{\,2} < \left(1 + \dfrac{h}{2}\right)^2$ benar maka $\sqrt{1+h} < 1 + \dfrac{h}{2}$ juga benar.

3. $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)}{h} - 0 = |h|$. Diberikan $\varepsilon > 0$.

   Untuk h rasional $\left|\dfrac{f(h) - f(0)}{h} - 0\right| = |h|$, untuk h irasional

   $\left|\dfrac{f(h) - f(0)}{h} - 0\right| = 0$. Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $0 < \delta = \varepsilon$

sehingga untuk $0<|h|<\delta$ berlaku $\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-0\right|=\varepsilon$, yang berarti bahwa $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$.

Sekarang diselidiki untuk $x\neq 0$. Dibedakan untuk x rasional dan x irasional.

(i) Jika x rasional dan h rasional maka

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$; jika h irasional maka $\lim\limits_{h\to 0}\frac{0-x^2}{h}$ tidak ada. Jadi untuk $x\neq 0$ dan irasional $f'(x)$ tidak ada.

(ii) Untuk $x\neq 0$ irasional

Untuk y rasional maka $\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim\limits_{y\to x}\frac{y^2-0}{y-x}$ tidak ada,

untuk y irasional maka $\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim\limits_{y\to x}\frac{0}{y-x}$. Jadi untuk $x\neq 0$ dan irasional maka $f'(x)$ tidak ada.

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa untuk $x\neq 0$ maka $f'(x)$ tidak ada.

4. Dengan aturan L'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{px^{p-1}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p!}{e^x}=0;$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{px^p}=0 .$$

5. Dengan aturan L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}(\cot x-1/x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{-2}x}{\tan x+x\cos^{-2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x\cos x+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\dfrac{x}{\sin x}}=\frac{0}{1+1}=0 .$$

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

6. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\tfrac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

$$=f'(x_0)\,.$$

***Tes Formatif* 2**

1. $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{jika } x\ge 0,\\ -x^3 & \text{jika } x<0,\end{cases}$ maka $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{jika } x\ge 0\\ -3x^2 & \text{jika } x<0\end{cases}$ dan

   $f''(x)=\begin{cases} 6x & \text{jika } x\ge 0,\\ -6x & \text{jika } x<0.\end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{6x}{x}=6$, sedangkan

   $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-6x}{x}=-6$.

   Karena kedua nilai limit ini tidak sama maka $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}$ tidak ada, jadi $f'''(0)$ tidak ada.

2. Karena $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\ge 1\\ x, & x<1\end{cases}$, maka $f'(x)=\begin{cases} -1, & 1<x\le 2\\ 1, & 0\le x<1\end{cases}$ dan $f'(1)$ tidak ada. Meskipun f kontinu pada $[0,2]$ dan $f(0)=f(2)$ tetapi tidak terdiferensial pada $(2,2)$ (sebab $f'(1)$ tidak ada), jadi hipotesis dalam Teorema Rolle tidak dipenuhi oleh f, sehingga konklusi bahwa terdapat $\xi\in(0,2)$ dan $f'(\xi)=0$ tidak dipenuhi.

3. Nilai $f(0)=0$.

   Untuk $x\ne 0$ dan x rasional, ada barisan $<y_n>$, y_n irasional, dan $y_n\to x$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=0\ne f(x)=x^2$. Demikian juga untuk $x\ne 0$ dan x irasional dapat dibuat barisan rasional $<z_n>$, $z_n\to x$ tetapi $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=x^2\ne f(x)=0$. Kedua pernyataan ini menunjukkan bahwa

f diskontinu di $x \neq 0$ (lihat Teorema 8.2 (b), buku Analisis I). Karena f tidak kontinu di $x \neq 0$ maka $f'(x)$ tidak ada (lihat Teorema 1.1). Agar $f''(0)$ ada perlu $f'(x)$ ada di sekitar 0, karena $f'(x)$ tidak ada untuk $x \neq 0$, jadi $f''(0)$ pasti tidak ada.

4. Untuk $h > 0$, dan mengingat f terdiferensial di x_0 maka

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[f'(x_0) + f'(x_0)\right] = f'(x_0).$$

5. $f(x) = e^x(1-x)$, $x < 1$.

   $f'(x) = -xe^x$

   Untuk $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ dan $f(x)$ turun tegas pada $(0,1)$.

   Untuk $x < 0$, $f(x) > 0$ dan $f(x)$ naik tegas $(-\infty, 0)$.

   $f(0) = 1$ dan $f(1) = 0$. $f(x)$ mencapai maksimum di $x = 0$

   Jadi $e^x(1-x) \leq 1$, $\forall x \in (-\infty, 1]$ dan $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}, \forall x \in (-\infty, 1]$.

6. Fungsi $\varphi(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ mempunyai derivatif $\varphi'(t) = \begin{cases} 2t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

   $g(x) = [f^+(x)]^2 = \varphi(f^+(x)$ dan $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$.

   Jadi

   $$g'(x) = \varphi'(t)(f^+)'(x) = 2t.f'(x) = 2f^+(x)f'(x) = \begin{cases} 2f(x)f'(x), & \text{jika } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{jika } f(x) < 0 \end{cases}.$$

7. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $M > 0$ sehingga $\forall x > M$ maka $\left|f'(x) - L\right| < \varepsilon$.

   a. Untuk $x > M$ dan $h > 0$ maka $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(\xi)$ untuk suatu ξ dan $x < \xi < x+h$. Karena $\xi > M$ maka $\forall x > M$ berlaku

$\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\right|=\left|f'(\xi)-L\right|<\varepsilon$. Terbukti bahwa

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=L$.

b. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$ maka $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$.

c. Untuk $x>M$ menurut Teorema Nilai Rata-rata $f(x)=f(M)+f'(\xi)(x-M)$ untuk suatu ξ dan di antara M dan x. Maka $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(M)}{x}+(1-\dfrac{M}{x})f'(\xi)$.

$$\left|\frac{f(x)}{x}-L\right|\le\left|\frac{f(M)}{x}\right|+\left|1-\frac{M}{x}\right|\left|f'(\xi)-\frac{L}{1-\frac{M}{x}}\right|$$

$$<\left|\frac{f(M)}{x}\right|+1\left|(f'(\xi)-L)+L(1-\frac{1}{1-\frac{M}{x}}\right|.$$

Jadi, $\left|\dfrac{f(x)}{x}-L\right|<\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|+\left|f'(\xi)-L\right|+\left|L\right|\left|\dfrac{1}{1-\frac{M}{x}}\right|$

Dapat dipilih $K>M$ sehingga $\left|\dfrac{f(M)}{x}\right|<\varepsilon$ dan $\left|1-\dfrac{1}{1-\frac{M}{x}}\right|<\dfrac{\varepsilon}{|L|}$ untuk $x>K$. Dengan demikian untuk $\forall x>K>M$ berlaku $\left|\dfrac{f(x)}{x}-L\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$. Jadi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=L$.

8. Diandaikan $Z=\{x\in[0,1]: f(x)=0\}$ tak hingga. Oleh karena $[0,1]$ kompak maka mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, yakni setiap *infinite subset* dari $[0,1]$ mempunyai titik limit di dalam $[0,1]$. Jadi $\exists p\in[0,1]$ dan p titik limit Z. Untuk setiap $\varepsilon>0$ kitar $N(p,\varepsilon)$ memuat takhingga titik-titik Z. Menurut teorema Rolle di antara dua

titik Z memuat titik nol dari f'. Jadi $N(p,\varepsilon)$ memuat tak hingga titik-titik di mana derivatif f' bernilai nol.

Jadi p titik limit himpunan $F=\{x\in[0,1]: f'(x)=0\}$. Karena f kontinu pada $[0,1]$ maka Z tertutup jadi $p\in Z$ dan $f(p)=0$. Untuk setiap $\eta>0, \exists\delta>0, \forall x\in[0,1]$ dan

$$0<|x-p|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right|=\left|\frac{f(x)}{x-p}-f'(p)\right|<\eta \text{ sebab}$$

f terdiferensial di p dan $f(p)=0$.

Tetapi p titik limit Z sehingga $\exists y\in Z$, jadi $f(y)=0$ dan

$$0<|y-p|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(y)}{y-p}-f'(p)\right|=|f'(p)|<\eta.$$ Jadi $f'(p)=0$.

Dengan demikian jika Z tak hingga terdapat titik $p\in[0,1]$ dengan $f(p)=f'(p)=0$. Terjadi kontradiksi sehingga Z harus berhingga.

9. Untuk x dan y dalam $[a,b]$, $\exists\xi$ di antara x dan y dan $|f(x)-f(y)|=|x-y||f'(\xi)|$. Jadi, $\forall x,y\in[a,b]$ berlaku $|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|$ dengan $0<\alpha<1$. Menurut Definisi 9.4, Analisis I, f fungsi kontraksi dari himpunan kompak $[a,b]$ kepada $[a,b]$ sehingga f mempunyai titik tetap yang tunggal di dalam $[a,b]$ (Teorema 9,8, Analisis I).

10. $$|x_{n+1}-x_n|=\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n(n+1}|f'(\xi)|\le\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2},$$

$$\frac{1}{n(n+1)}<\xi<\frac{1}{n}.$$ Jadi $\forall n\in\mathbf{N}$ berlaku

$$-\frac{1}{n^2}<x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n^2}\Rightarrow -S_n<\sum_{k=1}^{k=n}\left(x_{k+1}-x_k\right)<S_n,$$ dengan $<S_n>$

barisan suku-suku positif yang konvergen, sebab $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^p}$ dan $p=2>1$ yang konvergen (Lihat Contoh 4.4, Modul 4, Analisis I).

Jadi $\forall n\in\mathbf{N}$ berlaku $x_1-S_n<x_n<x_1+S_n$ dan terbukti bahwa barisan $<x_n>$ konvergen.

Daftar Pustaka

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (1992). *Introducton to Real Analysis.* John Wiley & Sons, Inc.

DePree, John D. & Swartz, Charles W. (1988). *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons, Inc.

Rudin, Walter. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.