MODUL 1

Operasi

Dr. Ahmad Muchlis

PENDAHULUAN

Berapakah 97531×86042? Kalau Anda menggunakan kalkulator, jawabannya amat bergantung pada tipe kalkulator yang Anda pakai. Kalkulator ilmiah Casio fx-250 memberikan $8{,}3917623 \times 10^9$. Kalkulator ini adalah kalkulator *10-digit*. Untuk mendapatkan jawaban yang eksak, Anda memerlukan kalkulator dengan *digit* yang lebih banyak.

Sekarang berapakah 195062×43021? Bandingkan jawaban kedua pertanyaan ini. Haruskah Anda mengalikan 195062 dengan 43021 untuk mendapatkan 195062×43021?

Jawaban untuk pertanyaan terakhir adalah tidak. Kita amati bahwa

$$195062 \times 43021 = 97531 \times 2 \times 43021 = 97531 \times 86042 .$$

Kita ingat kembali bahwa kalau kita diberi tiga bilangan bulat *k, m, n* dan diminta menghitung $k \times m \times n$, hasil yang kita peroleh tidak bergantung pada perkalian mana yang kita dahulukan, $k \times m$ atau $m \times n$. Kita katakan bahwa perkalian bilangan bulat bersifat *asosiatif*.

Mempelajari konsep seperti perkalian beserta sifat-sifatnya adalah fundamental dalam aljabar. Dalam modul ini Anda akan diperkenalkan kepada operasi sebagai konsep yang lebih umum dari perkalian dan mengenal beberapa konsep elementer yang dikaitkan dengan operasi. Akan diperkenalkan pula beberapa sifat dasar yang terkait dengan pengertian-pengertian tersebut.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

a. memeriksa apakah suatu pemetaan merupakan operasi;

b. memeriksa apakah suatu operasi bersifat asosiatif, komutatif;

c. memeriksa apakah suatu operasi memiliki unsur identitas;

d. memeriksa apakah unsur-unsur suatu himpunan yang dilengkapi operasi dengan unsur identitas memiliki balikan;

e. memeriksa apakah suatu himpunan (bagian) tertutup terhadap suatu operasi;

f. memanfaatkan sifat-sifat operasi dan pemetaan dalam pembuktian.

KEGIATAN BELAJAR 1

Sistem Bilangan Bulat

Sebagaimana sudah sangat kita ketahui, kita dapat menjumlahkan, mengurangkan atau mengalikan dua bilangan bulat untuk mendapatkan suatu bilangan bulat. Misalnya kita menjumlahkan 3 dan 5 untuk mendapatkan 8. Kita mengalikan 3 dan 5 untuk mendapatkan 15. Sekali pun memberikan bilangan bulat yang sama, 3×5 dan 5×3 memiliki makna yang berbeda. Yang pertama menyatakan $5+5+5$, sementara yang kedua menyatakan $3+3+3+3+3$. Demikian pula halnya dengan $3+5$ dan $5+3$. Mengingat hal itu, kita memandang kedua bilangan bulat yang diberikan sebagai suatu pasangan terurut bilangan bulat. *Pasangan terurut* bilangan bulat m dan n kita tuliskan sebagai (m,n). Himpunan semua bilangan bulat kita simbolkan dengan $\mathbb{Z}$, sedangkan himpunan semua pasangan terurut bilangan bulat kita tuliskan sebagai $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. dengan demikian $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\{(m,n)\ :\ m,n\in\mathbb{Z}\}$.

Diberikan suatu pasangan terurut bilangan bulat, terdapat satu, tidak kurang dan tidak lebih, bilangan bulat yang merupakan hasil penjumlahan kedua bilangan pada pasangan terurut. Dengan kata lain, kita mempunyai *pengaitan* dari pasangan terurut bilangan bulat (m,n) kepada bilangan bulat $m+n$. Secara simbolis, pengaitan ini kita nyatakan dengan

$$(m,n)\ \mapsto\ m+n.$$

Karena m dan n boleh bilangan bulat mana pun, pengaitan tersebut membangun suatu *pemetaan* dari $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Kita katakan bahwa penjumlahan adalah suatu *operasi pada* $\mathbb{Z}$.

Apa yang kita lakukan di atas dapat pula kita lakukan pada pengurangan: kita mempunyai pengaitan

$$(m,n)\ \mapsto\ m-n$$

yang membangun suatu pemetaan dari $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Demikian pula dengan perkalian: kita mempunyai pengaitan

$$(m,n)\ \mapsto\ mn$$

yang membangun suatu pemetaan dari $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Kita katakan pula bahwa pengurangan dan perkalian adalah operasi-operasi pada $\mathbb{Z}$.

Di atas sudah kita nyatakan bahwa dalam perkalian sebarang tiga bilangan bulat $k\times m\times n$, mendahulukan $k\times m$ akan memberikan hasil yang sama dengan mendahulukan $m\times n$. Secara singkat,

$$(k\times m)\times n = k\times(m\times n).$$

Hasil serupa kita peroleh pada penjumlahan tiga bilangan bulat: $(k+m)+n = k+(m+n)$. Akibatnya, penulisan $k+m+n$ tidak menimbulkan kerancuan. Tidak demikian halnya dengan pengurangan: pada $5-6-7$ misalnya, mendahulukan $5-6$ akan menghasilkan $(5-6)-7=-1-7=-8$, sementara mendahulukan $6-7$ akan menghasilkan $5-(6-7)=5-(-1)=6$. Penulisan $5-6-7$ akan menimbulkan kerancuan akan yang dimaksud, $(5-6)-7$ atau $5-(6-7)$. Kita katakan bahwa penjumlahan dan perkalian bersifat asosiatif, sementara pengurangan tidak bersifat asosiatif.

Kita ketahui pula bahwa pada penjumlahan dan perkalian menukar urutan kedua bilangan bulat tidak mengubah hasil. Secara persis,

$$m+n=n+m \quad \text{dan} \quad m\times n=n\times m,$$

untuk sebarang bilangan bulat *m* dan *n*. Kita katakan bahwa kedua operasi ini bersifat *komutatif*. Tidak demikian halnya dengan pengurangan. Kita dapatkan bahwa $5-6=-1$, sedangkan $6-5=1$. Kita katakan bahwa pengurangan tidak bersifat komutatif.

Ketika menjumlahkan dua bilangan bulat, kalau salah satunya adalah bilangan 0, maka hasil penjumlahan adalah bilangan yang satu lagi. Kita dapati pula bahwa hasil perkalian bilangan 1 dengan sebarang bilangan bulat adalah bilangan bulat sebarang tersebut. Secara simbolis,

$$m+0=0+m=m \quad \text{dan} \quad m\times 1=1\times m=m,$$

untuk sebarang bilangan bulat *m*. Kita katakan bahwa 0 adalah *unsur identitas* penjumlahan bilangan bulat dan 1 adalah unsur identitas perkalian bilangan bulat. Pada pengurangan kita menemukan situasi berbeda. Untuk sebarang bilangan bulat *m*, kita peroleh $m-0=m$, akan tetapi $0-m\neq m$, kecuali kalau $m = 0$. Persamaan bilangan bulat $x - m = m$ dalam x senantiasa mempunyai jawab tunggal $2m$, tetapi jawab ini bergantung pada nilai m yang diberikan. Kita katakan bahwa operasi pengurangan bilangan bulat tidak memiliki unsur identitas. Akan tetapi, karena untuk sebarang bilangan bulat m berlaku $m - 0 = m$, kita katakan bahwa operasi pengurangan bilangan bulat memiliki *unsur identitas kanan*, yaitu 0.

Kita perhatikan pula bahwa untuk sembarang bilangan bulat m kedua persamaan $x + m = 0$ dan $m + x = 0$ memiliki jawab bilangan bulat yang sama, yaitu $-m$. Kita katakan bahwa m memiliki *balikan terhadap penjumlahan* bilangan bulat, yaitu $-m$. Hal seperti ini tidak terjadi pada perkalian. Diberikan bilangan bulat m, persamaan $x \times m = 1$ dan persamaan $m \times x = 1$ tidak selalu memiliki jawab bilangan bulat, dan bahkan dalam hal $m = 0$ kedua persamaan tidak memiliki jawab sama sekali. Perhatikan bahwa kedua persamaan memiliki jawab bilangan bulat hanya dalam hal $m = 1$ atau $m = -1$. Kedua bilangan ini memiliki *balikan terhadap perkalian* bilangan bulat, yaitu dirinya sendiri.

Himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi membentuk suatu *sistem matematika*. Bila kita hanya memperhatikan operasi penjumlahan, sistem matematika yang terbentuk kita nyatakan dengan simbol $(\mathbb{Z}, +)$. Sebaliknya, bila kita hanya memperhatikan operasi perkalian, sistem matematika yang terbentuk kita nyatakan sebagai $(\mathbb{Z}, \times)$ atau $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Bila kita memperhatikan kedua operasi penjumlahan dan perkalian, sistem matematika yang terbentuk kita nyatakan dengan notasi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ atau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Belakangan dalam kuliah ini kita akan melihat bahwa operasi pengurangan adalah operasi yang "diturunkan" dari operasi penjumlahan.

Diberikan suatu pasangan terurut bilangan bulat (m, n), kita dapat mencoba mengaitkan pasangan tersebut kepada sesuatu bilangan bulat dengan cara-cara lain. Sebagai contoh adalah dengan pembagian. Kita mengalami kegagalan dalam hal ini, $(1, 2)$ misalnya kita kaitkan kepada $1/2$ yang bukan bilangan bulat. Kalau kita batasi bahwa m dan n hanya boleh 1 atau -1 $\left(\text{secara formal kita nyatakan } m, n \in \{1, -1\}\right)$, maka hasil pembagian m/n adalah bilangan bulat. Lebih dari itu, hasil pembagian tersebut adalah 1 atau -1. Pengamatan ini dapat kita ungkapkan sebagai $m/n \in \{1, -1\}$, untuk setiap $m, n \in \{1, -1\}$. [Perhatikan bahwa pernyataan tersebut ekivalen dengan implikasi jika $m, n \in \{1, -1\}$, maka $m/n \in \{1, -1\}]$. Kita katakan bahwa himpunan $\{1, -1\}$ *tertutup* terhadap pembagian. Kita katakan pula bahwa operasi pembagian *tertutup* dalam $\{1, -1\}$. Di lain pihak, $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap pembagian.

Sebenarnyalah, himpunan $\{1, -1\}$ tidak dapat kita perbesar dengan memasukkan bilangan bulat mana pun ke dalamnya sambil mempertahankan sifat ketertutupan terhadap pembagian. Berikut ini alasan bagi pernyataan di atas. Pertama-tama, kita tidak dapat memasukkan bilangan 0, karena pasangan terurut $(1, 0)$ tidak dapat dikaitkan oleh pembagian kepada bilangan bulat mana pun. Selanjutnya, kita juga tidak dapat memasukkan bilangan asli lain, misalnya m, karena $(1, m)$ dikaitkan oleh pembagian ke $1/m$ yang bukan bilangan bulat. Dengan alasan serupa kita juga tidak dapat memasukkan bilangan bulat negatif lain.

Sebagai contoh lain, kita pandang pemangkatan m^n dengan m, n bilangan-bilangan bulat. Jika m, n adalah bilangan-bilangan asli, maka hasil pemangkatan tersebut juga bilangan asli, tidak hanya sekedar bilangan bulat. Karena itu kita katakan bahwa himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ tertutup terhadap pemangkatan dan bahwa operasi pemangkatan tertutup dalam $\mathbb{N}$. Himpunan ini tidak dapat kita perbesar dengan memasukkan bilangan bulat tidak positif ke dalamnya sambil mempertahankan sifat ketertutupan terhadap pemangkatan.

Sekarang pandang himpunan $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ di mana $n > 1$. Himpunan ini tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat. Kita perkenalkan sekarang operasi penjumlahan baru pada $\mathbb{Z}_n$ sebagai berikut: untuk $a, b \in \mathbb{Z}_n$, kita kaitkan (a, b) dengan sisa pembagian $a+b$ oleh *n*. Sisa pembagian ini merupakan unsur $\mathbb{Z}_n$. Sebagai contoh, dengan $n = 5$, $(4, 4)$ kita kaitkan dengan 3, yaitu sisa pembagian $4+4=8$ oleh 5. Operasi baru ini kita namakan *penjumlahan modulo n*. Selama konteksnya jelas, kita lazim menggunakan notasi penjumlahan biasa untuk operasi ini. Pada contoh di atas, kita akan menuliskan $4+4=3$ dengan mengingat bahwa kita melakukan penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$.

Dengan cara serupa kita dapat mendefinisikan operasi perkalian modulo *n* pada $\mathbb{Z}_n$. Sebagai contoh, pada $\mathbb{Z}_5$ kita memperoleh $4 \cdot 4 = 1$.

Agar tidak menimbulkan kerancuan dengan unsur-unsur Z, kita tuliskan unsur-unsur $\mathbb{Z}_n$ dengan garis di atas bilangan. Dengan demikian, kita mempunyai $\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$. Notasi ini juga memungkinkan kita untuk menuliskan, sebagai contoh, $\overline{4} + \overline{4} = \overline{4+4} = \overline{8} = \overline{3}$ di $\mathbb{Z}_5$. Secara umum, untuk setiap bilangan bulat $a, k \in \mathbb{Z}$, kita mempunyai $\overline{a} = \overline{kn+a}$ di $\mathbb{Z}_n$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Himpunan $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tidak tertutup terhadap pemangkatan. Mengapa?

2) Dapatkan suatu himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ yang tertutup terhadap pengaitan $(m,n) \mapsto \lfloor m/n \rfloor$. Apakah himpunan yang Anda dapatkan masih dapat diperbesar?
   Catatan: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*. Sebagai contoh, $\lfloor 16/3 \rfloor = 5, \lfloor 6 \rfloor = 6$, dan $\lfloor -16/3 \rfloor = -6$.

3) Ulangi soal nomor 2, kali ini dengan pengaitan $(m,n) \mapsto \lceil m/n \rceil$.
   Catatan: $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*. Sebagai contoh, $\lceil 16/3 \rceil = 6, \lceil 6 \rceil = 6$, dan $\lceil -16/3 \rceil = -5$.

4) Jelaskan mengapa $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$ pada $\mathbb{Z}_5$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Himpunan $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tidak tertutup terhadap pemangkatan karena 0^0 tidak terdefinisi.

2) Himpunan yang tertutup terhadap operasi pembagian (biasa) juga tertutup terhadap operasi yang sedang dibicarakan. Karena itu $\{-1,1\}$

adalah satu contoh. Misalkan $C \neq \varnothing$ tertutup. Haruslah $1 \in C$ karena $\lfloor m/m \rfloor = 1$, untuk sembarang $m \in \mathbb{Z}$, sedangkan $0 \notin C$, karena tidak ada pembagian oleh 0. Tidak ada bilangan bulat positif lain di dalam C karena $\lfloor 1/m \rfloor = 0$, untuk setiap $m \in \mathbb{Z}, m > 1$. Jika bilangan bulat $m < 0$ ada dalam *C*, maka $-1 \in C$ karena $\lfloor 1/m \rfloor = -1$. Akibatnya jika bilangan bulat $m < -1$ ada dalam *C*, maka $-m = \lfloor m/(-1) \rfloor$, yang merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, ada dalam *C*. Hal terakhir ini tidak bisa terjadi. Dengan demikian $\{-1,1\}$ adalah himpunan tertutup yang terbesar.

3) Seperti pada soal sebelum ini, $\{-1,1\}$ adalah satu contoh. Misalkan $D \neq \varnothing$ tertutup. Dengan alasan serupa, $1 \in D$ dan $0 \notin D$. Jika bilangan bulat negatif $m < -1$ unsur *D*, maka $\lceil 1/m \rceil = 0$, sehingga bilangan bulat negatif yang dapat dimuat *D* hanyalah –1. Jika $-1 \in D$, maka tidak ada unsur *D* selain –1 dan 1. Ini diperoleh karena jika bilangan bulat positif $m > 1$ unsur D, maka $\lceil -1/m \rceil = 0$. Di lain pihak, jika $-1 \notin D$, maka *D* dapat memuat semua bilangan asli (perhatikan bahwa $\lceil m/n \rceil \geq 1$, untuk semua bilangan asli m, n). Jadi himpunan tertutup terbesar adalah $\{-1,1\}$ dan $\mathbb{N}$.

4) Perhatikan bahwa di $\mathbb{Z}$ kita punyai $4 \cdot 4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$, yaitu sisa pembagian $4 \cdot 4$ oleh 5 adalah 1. Jadi $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$ di $\mathbb{Z}_5$.

RANGKUMAN

1. Pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ kita mengenal operasi-operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian.

2. Operasi penjumlahan dan perkalian bersifat asosiatif dan komutatif, sedangkan operasi pengurangan tidak bersifat asosiatif dan tidak bersifat komutatif.

3. Operasi penjumlahan dan perkalian memiliki unsur identitas, yaitu berturut-turut 0 dan 1, sedangkan operasi pengurangan memiliki unsur identitas kanan, yaitu 0.

4. Setiap bilangan bulat memiliki balikan terhadap penjumlahan, tetapi hanya bilangan 1 dan –1 yang memiliki balikan terhadap perkalian.

5. Himpunan $\{1,-1\}$ tertutup terhadap pembagian dan dapat dikatakan juga operasi pembagian tertutup dalam $\{1,-1\}$, $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap pembagian.

6. Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ tertutup terhadap pemangkatan dan operasi pemangkatan tertutup dalam $\mathbb{N}$.

TES FORMATIF 1

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1) Apakah pengetahuan $(m,n) \mapsto m^2+n^2$ memberikan suatu operasi pada $\mathbb{Z}$? Jika ya, apakah bersifat asosiatif? Komutatif? Memiliki unsur identitas?

2) Berikan subhimpunan *S* dari $\mathbb{Z}$ sehingga pengaitan $(m,n) \mapsto \dfrac{m+n}{2}$ memberikan suatu operasi pada *S*. Dapatkah *S* diperbesar?

3) Lakukan seperti pada soal nomor 2 untuk pengaitan $(m,n) \mapsto \sqrt{mn}$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Operasi

Pada pasal terdahulu telah kita lihat penjumlahan, pengurangan dan perkalian bilangan bulat adalah pemetaan-pemetaan dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Kita katakan pula bahwa ketiga-tiganya adalah operasi pada $\mathbb{Z}$. Sekarang kita berikan pengertian operasi yang lebih umum.

Definisi 1.1 Misalkan *S* adalah himpunan tak kosong. Setiap pemetaan dari $S \times S$ ke *S* adalah *operasi pada S*.

Dalam Definisi 1.1 di atas $S \times S = \{(a,b) \,:\, a,b \in S\}$.

Contoh 1.1

1. Penjumlahan dan perkalian adalah operasi-operasi pada $\mathbb{Z}$, pada $\mathbb{N}$, pada himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan pada himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$.
2. Pengurangan adalah operasi pada $\mathbb{Z}$, pada $\mathbb{Q}$ dan pada $\mathbb{R}$, tetapi pengurangan *bukan* operasi pada $\mathbb{N}$.
3. Pembagian adalah operasi pada $\{1,-1\}$.
4. Pemangkatan adalah operasi pada $\mathbb{N}$.
5. Pembagian adalah operasi pada $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ dan pada $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
6. Penjumlahan dan perkalian modulo *n* adalah operasi-operasi pada $\mathbb{Z}_n$.
7. Dari kalkulus, penjumlahan dan perkalian fungsi adalah operasi-operasi pada himpunan $\mathbb{R}^D$ dari semua fungsi bernilai real dengan daerah asal $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. [Ingat kembali bahwa jika $f, g \in \mathbb{R}^D$, maka $f+g$ dan

$f \cdot g$ adalah fungsi-fungsi yang memetakan sebarang unsur $x \in D$, berturut-turut, kepada unsur-unsur $f(x)+g(x)$ dan $f(x)g(x)$].

8. Dari kalkulus, komposisi fungsi adalah operasi pada himpunan $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dari semua fungsi bernilai real dengan daerah asal $\mathbb{R}$. [Ingat kembali bahwa komposisi fungsi $f \circ g$ di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ adalah fungsi yang memetakan sebarang unsur $x \in \mathbb{R}$ kepada unsur $f(g(x))$].

9. Penjumlahan vektor adalah operasi pada $\mathbb{R}^2$ dan pada $\mathbb{R}^3$.

10. Perkalian silang (*cross product*) vektor adalah operasi pada $\mathbb{R}^3$.

11. Penjumlahan dan perkalian matriks adalah operasi-operasi pada himpunan $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dari semua matriks berukuran 2×2 dengan komponen bilangan real.

12. Misalkan *X* himpunan. Gabungan dan irisan adalah operasi-operasi pada himpunan kuasa dari *X*, yaitu himpunan semua subhimpunan dari *X*. [Himpunan kuasa dari *X* kita tuliskan sebagai 2^X].

Untuk himpunan *S* yang berhingga, khususnya bila *S* memuat sedikit unsur, operasi pada *S* dapat kita sajikan dalam suatu *tabel Cayley* (mengikuti nama matematikawan Inggeris Arthur Cayley yang hidup dalam masa 1821–1895). Pada tabel Cayley untuk operasi $*$ pada *S*, 'sel' di sebelah kanan $a \in S$ dan di bawah $b \in S$ diisi dengan unsur $a * b$.

Contoh 1.2

1. Tabel Cayley untuk operasi pembagian pada $(1,-1)$ adalah

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}.$$

2. Tabel Cayley untuk operasi penjumlahan modulo 4 adalah

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$.

Di lain pihak, suatu operasi dapat didefinisikan melalui tabel Cayley, seperti ditunjukkan dalam contoh berikut.

Contoh 1.3

#	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	3	4	2
2	2	4	1	0	3
3	3	2	4	1	0
4	4	3	0	2	1

mendefinisikan suatu operasi # pada himpunan $\{0,1,2,3,4\}$ di mana $a\#b$ adalah unsur pada 'sel' di sebelah kanan *a* dan di bawah *b*, untuk setiap $a,b\in\{0,1,2,3,4\}$. Sebagai contoh, $2\#1=4$ dan $4\#3=2$.

Sekalipun operasi adalah pemetaan, kita lazim menggunakan simbol untuk menyatakan suatu operasi. Kita sudah biasa menggunakan simbol + untuk penjumlahan, – untuk pengurangan dan × untuk perkalian. Sebagai pemetaan, operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ kita nyatakan dengan $+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa operasi hanya melibatkan dua unsur. Dalam berbagai situasi kita mungkin perlu melakukan operasi lebih dari satu kali dengan melibatkan lebih dari dua unsur. Sebagai contoh, dalam menentukan volum sebuah balok kita mengalikan panjang, lebar dan tinggi balok. Hasil yang diperoleh dengan mengalikan panjang dan lebar lalu mengalikan hasilnya dengan tinggi akankah berbeda dengan hasil mengalikan lebar dan tinggi lalu mengalikan hasilnya kepada panjang?

Definisi 1.2 Operasi $*$ pada S bersifat *asosiatif* jika berlaku

$$(a*b)*c = a*(b*c), \text{ untuk semua } a,b,c \in S.$$

Contoh 1.4

1. Penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ semuanya bersifat asosiatif.

2. Penjumlahan dan perkalian modulo n pada $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif.

3. Penjumlahan dan perkalian fungsi pada $\mathbb{R}^D$ bersifat asosiatif. Sifat asosiatif kedua operasi ini adalah warisan dari sifat asosiatif penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R}$.

4. Komposisi fungsi pada $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bersifat asosiatif.

5. Penjumlahan vektor pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ bersifat asosiatif.

6. Penjumlahan dan perkalian matriks pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bersifat asosiatif.

7. Operasi-operasi gabungan dan irisan himpunan pada 2^X bersifat asosiatif.

8. Pemangkatan pada $\mathbb{N}$ *tidak* bersifat asosiatif, karena
$$2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \neq 64 = 8^2 = \left(2^3\right)^2.$$

9. Perkalian silang vektor di $\mathbb{R}^3$ *tidak* bersifat asosiatif.

Untuk operasi $*$ yang bersifat asosiatif, kita akan dapat menuliskan $a * b * c$ atau bahkan $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ tanpa menimbulkan kerancuan atau keraguan tentang maknanya. Sifat asosiatif menyatakan bahwa dalam melakukan operasi lebih dari satu kali, urutan operasi tidak mempengaruhi hasil.

Definisi 1.3. Operasi $*$ pada S bersifat *komutatif* jika berlaku

$$a * b = b * a, \text{ untuk semua } a * b \in S.$$

Contoh 1.5

1. Penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ semuanya bersifat komutatif.

2. Penjumlahan dan perkalian modulo n pada $\mathbb{Z}_n$ keduanya bersifat komutatif.

3. Penjumlahan dan perkalian fungsi pada $\mathbb{R}^D$ bersifat komutatif. Sifat komutatif kedua operasi ini juga adalah warisan dari sifat komutatif penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R}$.

4. Penjumlahan vektor pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ bersifat komutatif.

5. Operasi-operasi gabungan dan irisan himpunan pada 2^X bersifat komutatif.

6. Komposisi fungsi pada $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *tidak* bersifat komutatif. Perhatikan bahwa untuk $f : x \mapsto x^2$ dan $g : x \mapsto -x$ kita peroleh $f \circ g : x \mapsto x^2$, sedangkan $g \circ f : x \mapsto -x^2$.

7. Penjumlahan matriks pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bersifat komutatif, tetapi perkalian matriks pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *tidak*. Contoh penyangkal untuk pernyataan terakhir ini adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   sedangkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Pemangkatan pada $\mathbb{N}$ juga *tidak* bersifat komutatif, karena

$$3^2 = 9 \neq 8 = 2^3.$$

9. Perkalian silang vektor di $\mathbb{R}^3$ juga *tidak* bersifat komutatif. Sebenarnyalah, $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, untuk semua $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Sifat komutatif menyatakan bahwa dalam melakukan satu operasi, urutan unsur tidak mempengaruhi hasil. Sifat komutatif dapat dikenali pada tabel Cayley dengan memeriksa apakah tabel tersebut, sebagai matriks, simetri terhadap diagonal utamanya. Dengan demikian operasi-operasi pada Contoh 1.2 bersifat komutatif, sementara operasi pada Contoh 1.3 tidak.

Definisi 1.4. Misalkan $*$ suatu operasi pada *S*. Unsur $e \in S$ dinamakan *unsur identitas operasi* $*$ jika berlaku

$$a * e = a = e * a, \quad \text{untuk semua } a \in S.$$

Contoh 1.6

1. Unsur 0 adalah unsur identitas penjumlahan pada $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Penjumlahan pada $\mathbb{N}$ *tidak* memiliki unsur identitas.

2. Unsur 1 adalah unsur identitas perkalian pada $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

3. Unsur $\overline{0}$ adalah unsur identitas penjumlahan modulo *n* pada $\mathbb{Z}_n$, sedangkan $\overline{1}$ adalah unsur identitas perkalian modulo *n* pada $\mathbb{Z}_n$.

4. Fungsi nol, yaitu fungsi yang memetakan setiap unsur di *D* ke 0, adalah unsur identitas penjumlahan fungsi pada $\mathbb{R}^D$. Sedangkan fungsi yang memetakan setiap unsur di *D* ke 1 adalah unsur identitas perkalian fungsi pada $\mathbb{R}^D$.

5. Fungsi identitas, yaitu fungsi yang memetakan setiap unsur di $\mathbb{R}$ kepada dirinya sendiri, adalah unsur identitas komposisi fungsi pada $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6. Vektor $(0,0)$ adalah unsur identitas penjumlahan vektor pada $\mathbb{R}^2$, sedangkan vektor $(0,0,0)$ adalah unsur identitas penjumlahan vektor pada $\mathbb{R}^3$.

7. Matriks nol dan matriks kesatuan adalah unsur-unsur identitas berturut-turut penjumlahan dan perkalian matriks pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

8. Himpunan kosong adalah unsur identitas operasi gabungan himpunan pada 2^X.

9. Himpunan *X* adalah unsur identitas operasi irisan himpunan pada 2^X.

10. Perkalian silang vektor pada $\mathbb{R}^3$ tidak memiliki unsur identitas. Perhatikan bahwa tidak ada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ yang memenuhi

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

dan tidak ada pula $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ yang memenuhi

$$\vec{y} \times \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

11. Pembagian pada $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tidak memiliki unsur identitas. Dalam hal ini $x/1 = x, \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berlaku, tetapi $1/x = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tidak berlaku.

Berikut ini suatu sifat elementer unsur identitas. Hendaknya Anda memahami betul bukti yang diberikan.

Teorema 1.1. *Unsur identitas setiap operasi selalu tunggal*.

Bukti: Misalkan *e* dan *f* adalah unsur-unsur identitas operasi $*$. Karena *e* unsur identitas, maka $e * f = f$, dan karena *f* unsur identitas, maka $e * f = e$. Jadi

$$f = e * f = e.$$

Ini menunjukkan bahwa unsur identitas operasi $*$ tunggal. ■

Ketika membicarakan operasi pengurangan pada $\mathbb{Z}$, kita katakan bahwa 0 adalah unsur identitas kanan operasi tersebut. Secara umum, unsur $e \in S$ adalah *unsur identitas kanan* operasi $*$ pada *S* jika untuk setiap $x \in S$ berlaku $x * e = x$. Dengan demikian, unsur $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adalah unsur identitas kanan operasi pembagian pada Contoh 1.6.11 di atas.

Dengan cara serupa kita definisikan unsur identitas kiri operasi $*$ pada S sebagai unsur $e \in S$ yang memenuhi $e * x = x, \forall x \in S$. Sebagai contoh, operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan melalui $a * b = a^2 b$ mempunyai unsur-unsur identitas kiri 1 dan –1. [Ini merupakan contoh bahwa unsur identitas kiri (atau kanan) tidak harus tunggal. Bandingkan dengan Teorema 1.1].

Berdasarkan definisinya, setiap unsur identitas adalah unsur identitas kanan dan unsur identitas kiri sekaligus. Sudah tentu, jika operasinya bersifat komutatif, maka unsur identitas kiri dan unsur identitas kanan adalah unsur yang sama yang, dengan demikian, merupakan unsur identitas. Secara umum, operasi yang memiliki unsur-unsur identitas kiri dan kanan secara bersamaan mestilah memiliki unsur identitas, dan ketiga macam unsur identitas tersebut sama. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.2. *Misalkan $*$ operasi pada S dengan unsur identitas kanan $e \in S$ dan unsur identitas kiri $f \in S$. Maka $e = f$, dan dengan demikian unsur tersebut adalah unsur identitas operasi.*

Bukti: Misalkan *e* dan *f* seperti dinyatakan di atas. Karena *e* identitas kanan, maka $f * e = f$. Sebaliknya, karena f identitas kiri, maka $f * e = e$. Jadi $e = f * e = f$. Selanjutnya, untuk sebarang $x \in S$ berlaku $x * e = x = f * x = e * x$. Jadi $e = f$ adalah unsur identitas operasi $*$. ■

Definisi 1.5. Misalkan $*$ suatu operasi pada S dengan unsur identitas e. Unsur $a \in S$ dikatakan *mempunyai balikan* jika terdapat unsur $b \in S$ yang memenuhi

$$a * b = e = b * a.$$

Dikatakan pula bahwa *b* adalah *balikan dari a*. [Dengan menukar peran *a* dan *b*, kita mendapatkan *a* adalah balikan dari *b*.]

Perhatikan bahwa menurut definisi di atas, sebelum kita berbicara tentang unsur balikan, operasi yang sedang kita tinjau harus mempunyai unsur identitas. Perhatikan pula bahwa unsur identitas senantiasa memiliki balikan, yaitu dirinya sendiri.

Contoh 1.7

1. Setiap unsur x di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, atau $\mathbb{R}$ mempunyai balikan terhadap operasi penjumlahan. Dalam hal ini balikan dari x adalah $-x$.

2. Setiap unsur $\overline{x}$ di $\mathbb{Z}_n$ mempunyai balikan terhadap operasi penjumlahan modulo *n*. Dalam hal ini balikan dari $\overline{x}$ adalah $\overline{n-x}$.

3. Terhadap operasi perkalian modulo *n*, tidak semua unsur $\mathbb{Z}_n$ memiliki balikan. Unsur $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ mempunyai balikan jika dan hanya jika, sebagai unsur-unsur $\mathbb{Z}, x$ dan n relatif prima. [Bilangan-bilangan bulat *a* dan *b* *relatif prima* jika pembagi sekutu keduanya hanyalah 1 dan -1 .]

4. Terhadap operasi perkalian, setiap unsur $x \neq 0$ di $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ mempunyai balikan, yaitu $1/x$. Sedangkan di $\mathbb{Z}$ hanya unsur-unsur 1 dan -1 yang mempunyai balikan, yaitu dirinya sendiri, sementara di $\mathbb{N}$ hanya unsur 1.

5. Terhadap operasi penjumlahan fungsi, setiap fungsi f di $\mathbb{R}^D$ mempunyai balikan, yaitu fungsi yang memetakan setiap unsur $x \in D$ ke $-f(x)$. Sedangkan terhadap operasi perkalian fungsi, tidak semua fungsi di $\mathbb{R}^D$ mempunyai balikan. Fungsi $f \in \mathbb{R}^D$ yang daerah nilainya tidak memuat $0 \in \mathbb{R}$ mempunyai balikan berupa fungsi yang memetakan setiap unsur $x \in D$ ke $1/f(x)$.

6. Setiap vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ memiliki balikan terhadap penjumlahan vektor.

7. Terhadap operasi penjumlahan matriks, semua matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mempunyai balikan berupa matriks yang setiap komponennya adalah negatif dari komponen matriks *A* pada posisi yang bersesuaian. Terhadap operasi perkalian matriks, hanya matriks-matriks tak singulir di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ yang mempunyai balikan, yaitu berupa matriks inversnya.

8. Terhadap operasi gabungan maupun irisan himpunan, hanya unsur identitas masing-masing yang memiliki balikan.

Apakah unsur balikan itu tunggal? Jawaban untuk pertanyaan ini diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.3. *Misalkan* $*$ *operasi pada* S *dengan unsur identitas* e *dan* $a \in S$ *mempunyai balikan terhadap* $*$. *Jika* $*$ *juga bersifat asosiatif, maka balikan dari* a *tunggal.*

Bukti: Misalkan b dan c adalah balikan-balikan dari a terhadap $*$. Maka $a*b = b*a = e = a*c = c*a$. Jadi

$$\begin{aligned} b &= e*b = (b*a)*b \\ &= b*(a*b) = b*(a*c) \\ &= (b*a)*c = e*c = c. \end{aligned}$$

■

Serupa dengan unsur identitas, kita dapat mendefinisikan balikan kanan atau balikan kiri. Sekali lagi kita mengasumsikan operasi $*$ pada S yang memiliki unsur identitas e. *Balikan kanan* dari $a \in S$ adalah unsur $b \in S$ yang memenuhi $a*b = e$, sedangkan *balikan kiri* dari a adalah unsur $c \in S$ yang memenuhi $c*a = e.$ Kita akan berbicara lebih jauh tentang balikan dalam Pasal 1.3.

Perhatikan kembali operasi penjumlahan. Operasi ini kita dapati antara lain pada $\mathbb{N}$ dan pada $\mathbb{R}$. Perhatikan pula bahwa kedua himpunan tersebut memenuhi hubungan $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Sekalipun bekerja pada himpunan-himpunan yang berbeda, kedua operasi penjumlahan tersebut adalah operasi yang sama. Dengan ungkapan tersebut kita maksudkan hal berikut. Misalkan $a, b \in \mathbb{N}$. Karena $\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$, maka a dan b pun unsur di $\mathbb{R}$. Ada dua cara menjumlahkan keduanya: yang pertama dengan penjumlahan sebagai operasi di $\mathbb{N}$, sedangkan yang kedua dengan penjumlahan sebagai operasi di $\mathbb{R}$. Akan tetapi kedua cara tersebut akan memberikan hasil yang sama. Sekarang kita pandang penjumlahan semata-mata sebagai operasi di $\mathbb{R}$. Kalau operasi ini kita kenakan hanya pada pasangan-pasangan terurut di

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, maka semua hasil operasi adalah unsur-unsur $\mathbb{N}$. Kalimat terakhir tidak lain menyatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Hal serupa juga akan kita peroleh kalau kita ganti $\mathbb{N}$ pada uraian di atas dengan $\mathbb{Z}$ atau $\mathbb{Q}$.

Pengamatan di atas membawa kita kepada definisi berikut.

Definisi 1.6 Misalkan $*$ suatu operasi pada *S*. Misalkan pula $\varnothing\neq S'\subseteq S$ Himpunan S' dikatakan *tertutup* terhadap operasi $*$ jika setiap pasangan terurut di $S'\times S'$ dipetakan oleh $*$ ke S'. [Secara ringkas pernyataan terakhir kita tulis sebagai $*(S'\times S')\subseteq S'$].

Pandang operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}$. Dengan definisi di atas, ketiga himpunan $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan ini.

Pengertian tertutup sudah diperkenalkan pada akhir Pasal 1.1. Di sana diberikan dua contoh. Salah satunya adalah himpunan $\{1,-1\}$ tertutup terhadap pembagian. Dengan sifat ketertutupan ini dan sesuai dengan Definisi 1.1, pembagian adalah suatu operasi pada himpunan $\{1,-1\}$.

Pada bagian tersebut juga dinyatakan bahwa $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap pembagian. Supaya pembagian dapat menjadi operasi yang mengaitkan pasangan terurut bilangan bulat, pertama-tama kita harus mengeluarkan 0 untuk mendapatkan $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Kemudian kita mesti mengimbuhkan bilangan-bilangan yang merupakan hasil pembagian dua bilangan bulat untuk mendapatkan $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Sebagai akibatnya kita peroleh bahwa $\{1,-1\}$ tertutup terhadap operasi pembagian di $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Berikut ini beberapa contoh lain.

Contoh 1.8

1. Himpunan

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;:\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

2. Himpunan

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \ : \ a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$$

tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. [Matriks yang merupakan unsur himpunan ini dikenal dengan nama *matriks segitiga atas*.]

3. Misalkan pada S terdefinisi suatu operasi asosiatif yang memiliki unsur identitas. Misalkan S^{-} himpunan semua unsur di S yang memiliki balikan. Maka S^{-} tertutup terhadap operasi tersebut.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diberikan himpunan tak kosong S dengan operasi $*$ di mana $a * b = b, \ \forall a,b \in S$. Periksa sifat asosiatif dan komutatif operasi $*$. Apakah ia memiliki unsur identitas? Identitas kanan? Identitas kiri?

2) Pada himpunan $S = \{u,v,w,z\}$ didefinisikan operasi berikut.

$*$	u	v	w	z
u	u	v	w	z
v	v	v	u	v
w	w	u	v	u
z	z	z	u	v

Apakah unsur identitas operasi tersebut? Apakah w memiliki balikan? Apakah sifat asosiatif berlaku?

3) Tunjukkan bahwa operasi pemangkatan di $\mathbb{N}$ tidak memiliki unsur identitas. Apakah ia memiliki unsur identitas kanan? Identitas kiri?

4) Buktikan Contoh 1.8.3

5) Diberikan himpunan tak kosong *S* dengan operasi $*$. Bilakah operasi $*$ tidak komutatif ?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a*b)*c = b*c = c = a*c = a*(b*c)$. Jadi sifat asosiatif berlaku. Secara umum, $a*b=b$ dan $b*a=a$, sehingga sifat komutatif tidak berlaku, kecuali dalam hal $|S|=1$. Setiap unsur adalah unsur identitas kiri. Tidak ada unsur identitas kanan, kecuali dalam hal $|S|=1$.

2) Unsur identitas adalah *u*. Unsur *w* memiliki dua balikan, yaitu *v* dan *z*, karena $v*w=u=w*v$ dan $z*w=u=w*z$. Sifat asosiatif tidak berlaku karena $(v*w)*z = u*z = z \neq v = v*u = v*(w*z)$.

   Catatan: Ketidakberlakuan sifat asosiatif dapat diturunkan dari Teorema 1.3 jika sifat asosiatif berlaku, unsur *w* tidak akan memiliki dua balikan.

3) Unsur 1 adalah unsur identitas kanan karena $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$. Akan tetapi 1 bukan identitas kiri karena $1^a = 1, \forall a \in \mathbb{N}$. Tidak ada unsur identitas kiri karena jika terdapat $a \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $a^b = b, \forall b \in \mathbb{N}$, maka $a = a^1 = 1$ (dengan memilih *b* = 1), tetapi sudah kita ketahui bahwa 1 bukan identitas kiri.

4) Misalkan $x, y \in S^-$. Maka $\exists a,b \in S$ demikian, sehingga $x*a=e=a*x$ dan $y*b=e=b*y$.

   Kita peroleh

$$(x*y)*(b*a) = x*(y*b*a) = x*(e*a) = x*a = e$$

   dan

$$(b*a)*(x*y) = (b*a*x)*y = (b*e)*y = b*y = e.$$

   Dengan demikian $b*a$ adalah balikan dari $x*y$, sehingga $x*y \in S^-$. Jadi S^- tertutup.

5) Terdapat $a,b \in S$ demikian, sehingga $a*b \neq b*a$.

RANGKUMAN

Misalkan *S* adalah himpunan berhingga, *S* memuat sedikit unsur maka operasi pada *S* dapat disajikan dalam suatu *tabel Cayley*.
Apabila diberikan Operasi $*$ pada *S* maka bersifat:

- *asosiatif* jika berlaku $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in S$.
- *komutatif* jika berlaku $a*b = b*a$, untuk semua $a,b \in S$.
- *mempunyai unsur identitas* $e \in S$ jika berlaku $a*e = a = e*a$, untuk semua $a \in S$. Unsur identitas setiap operasi selalu tunggal.
- Unsur $e \in S$ adalah *unsur identitas kanan* operasi $*$ pada *S* jika untuk setiap $x \in S$ berlaku $x*e = x$.

Apabila diberikan operasi pengurangan pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ maka dapat dikatakan bahwa 0 adalah unsur identitas kanan operasi tersebut.

Unsur $e \in S$ adalah *unsur identitas kiri* operasi $*$ pada *S* jika untuk setiap $x \in S$ berlaku $e*x = x$. Operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan melalui $a*b = a^2 b$ mempunyai unsur identitas kiri 1 dan -1.

Misalkan $*$ suatu operasi pada *S* dengan unsur identitas *e*. Unsur $a \in S$ dikatakan *mempunyai balikan* jika terdapat unsur $b \in S$ yang memenuhi $a*b = e = b*a$.

Misalkan diberikan operasi $*$ pada *S* yang memiliki unsur identitas *e*. Balikan kanan dari $a \in S$ adalah unsur $b \in S$ yang memenuhi $a*b = e$, sedangkan balikan kiri dari *a* adalah unsur $c \in S$ yang memenuhi $c*a = e$.

Misalkan $*$ suatu operasi pada *S*, misalkan pula $\varnothing \neq S' \subseteq S$. Himpunan S' dikatakan *tertutup* terhadap operasi $*$ jika setiap pasangan terurut di $S' \times S'$ dipetakan oleh $*$ ke S'. Himpunan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

TES FORMATIF 2

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1) Ada berapa operasi yang dapat dibuat pada himpunan S dengan 2 unsur? Berapa banyak yang memiliki unsur identitas?

2) Diberikan himpunan tak kosong S dengan operasi $*$. Bilakah operasi $*$ tidak asosiatif

3) Diberikan himpunan tak kosong S dengan operasi $*$. Bilakah S tidak memiliki unsur identitas?

4) Misalkan $MUU_2(\mathbb{R})$ menyatakan himpunan semua matriks segitiga atas berukuran 2×2 dengan kedua komponen diagonal bernilai 1, yaitu"

$$MUU_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; : \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Tunjukkan bahwa perkalian matriks adalah operasi $MUU_2(\mathbb{R})$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Komposisi Sebagai Operasi

Pada pasal ini kita akan membicarakan suatu kelas operasi yang merupakan sumber yang kaya bagi contoh-contoh operasi, terutama yang tidak komutatif. Akan diberikan beberapa definisi. Demi kelengkapan, definisi-definisi yang diberikan bersifat umum. Sebelum itu dua notasi dan sebuah fakta.

Misalkan X, Y dua himpunan tak kosong. Kita tuliskan himpunan semua pemetaan dari X ke Y sebagai Y^X. Selanjutnya, jika $\alpha \in Y^X$ dan $A \subseteq X$, kita tuliskan himpunan semua peta dari A oleh α sebagai $\alpha(A)$. Jadi $\alpha(A) = \{\alpha(x) \, : \, x \in A\}$.

Definisi 1.6. Misalkan X, Y, U himpunan-himpunan tak kosong. Misalkan pula $\alpha \in Y^X$, yaitu α suatu pemetaan dari X ke Y, dan $\beta \in U^Y$, yaitu β suatu pemetaan dari Y ke U. Maka *komposisi* α dan β adalah pemetaan dari X ke U yang memetakan setiap unsur $x \in X$ ke unsur $\beta(a(x))$.

Komposisi α dan β kita tuliskan dengan notasi $\beta \circ \alpha$. Jadi $\beta \circ \alpha \in U^X$

Definisi 1.7

(i) Pemetaan $\alpha \in Y^X$ dikatakan *pada* jika untuk setiap $y \in Y$ terdapat $x \in X$ yang memenuhi $\alpha(x) = y$.

(ii) Pemetaan $\alpha \in Y^X$ dikatakan *satu-satu* jika $x, y \in Y$, $\alpha(x) = \alpha(y)$ berakibat $x = y$.

Sekarang misalkan X suatu himpunan berhingga yang terdiri dari n unsur $s_1, s_2, \cdots, s_n$, Peta dari unsur-unsur X oleh $\alpha \in Y^X$ adalah $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \cdots, \alpha(s_n)$. Secara umum, peta dari n unsur tersebut boleh ada yang sama. Ini berarti bahwa banyaknya unsur $\alpha(X)$ tidak lebih dari banyaknya unsur X, yaitu $|\alpha(X)| \leq |X|$. Dalam hal α satu-satu, mestilah $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \cdots, \alpha(s_n)$ semuanya berbeda, sehingga $|\alpha(X)| = n = |X|$.

Kita mempunyai sifat berikut.

Sifat 1.1. *Misalkan* $|X| = |Y| < \infty$ (*yaitu X dan Y terdiri dari berhingga banyaknya unsur*). *Pemetaan* $\alpha \in Y^X$ *pada jika dan hanya jika* α *satu-satu*.

Bukti: Misalkan $|X| = |Y| = n,\ X = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$.
Misalkan α pada. Maka $\alpha(X) = Y$. Dengan demikian $|\alpha(X)| = |Y| = |X|$. Ini mengharuskan $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \cdots, \alpha(s_n)$ semuanya berbeda, sehingga α satu-satu.
Misalkan α satu-satu. Maka $|\alpha(X)| = |Y| = |X|$. Akan tetapi $\alpha(X) \subseteq Y$. Andaikan $\alpha(X) \neq Y$. Maka terdapat $t \in Y$, tetapi $t \notin \alpha(X)$ Akibatnya $\alpha(X) \subseteq Y \setminus \{t\}$, sehingga $|Y| = |\alpha(X)| \leq |Y \setminus \{t\}| = |Y| - 1$, kontradiksi. Jadi haruslah $\alpha(X) = Y$ yaitu α pada. ■

Misalkan X himpunan tak kosong. Perhatikan himpunan X^X yang terdiri dari semua pemetaan dari X ke dirinya sendiri. Karena komposisi dua pemetaan dari X ke X adalah juga pemetaan dari X ke X, maka komposisi adalah suatu operasi pada X^X. Selanjutnya akan kita lihat beberapa sifat dari operasi komposisi pada X^X.

Pertama, operasi komposisi pada X^X senantiasa bersifat asosiatif. Dapat kita lihat dengan mudah bahwa untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in X^X$ dan setiap $x \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x) &= \alpha((\beta \circ \gamma)(x)) \\ &= \alpha(\beta(\gamma(x))) = (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) \\ &= ((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x)\end{aligned}$$

dan dengan demikian $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$.

Operasi komposisi pada X^X senantiasa memiliki unsur identitas. Misalkan $\iota \in X^X$ adalah pemetaan yang mengaitkan setiap unsur di X dengan dirinya sendiri, yaitu $\iota(x) = x$, $\forall x \in X$. Merupakan latihan bagi pembaca untuk menunjukkan bahwa ι adalah unsur identitas di X^X terhadap komposisi. Kita katakan bahwa ι adalah *pemetaan identitas*.

Selanjutnya, secara umum operasi komposisi pada X^X tidak komutatif. Sebagai contoh, ambil $X = \mathbb{R}$. Pilih $\alpha(x) = x - 1$ dan $\beta(x) = x^2$. Maka $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(x^2) = x^2 - 1$ sementara $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(x-1) = (x-1)^2$.

Bagaimana tentang balikan unsur di X^X ?

Misalkan β adalah balikan kiri dari α. Maka kita peroleh bahwa $\beta \circ \alpha = \iota$ dan dengan demikian, untuk $x \in X$ yang tertentu, $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = x$. Ini mengatakan bahwa β adalah pemetaan yang "mengembalikan" $\alpha(x)$ ke x. Misalkan $y = \alpha(x)$. Sekiranya terdapat unsur lain $x' \in X$ yang memenuhi $\alpha(x') = y$, kita mengalami kesulitan untuk menentukan ke mana kita "mengembalikan" y. Supaya kesulitan ini tidak muncul haruslah α bersifat satu-satu.

Di lain pihak, misalkan α bersifat satu-satu. Kita akan mengkonstruksi β sebagai berikut. Misalkan $x \in X$. Dalam hal $x \in \alpha(X)$, terdapat tepat satu $y \in X$ yang memenuhi $x = \alpha(y)$. Dalam hal ini definisikan $\beta(x) = y$. Dalam hal $x \notin \alpha(X)$, definisikan $\beta(x) = x$. Maka $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = x$. Kesamaan terakhir kita peroleh karena $\alpha(x) \in \alpha(X)$. Jadi β yang kita konstruksi merupakan balikan kiri bagi α.

Dengan demikian kita mempunyai sifat berikut.

Sifat 1.2. *Pemetaan $\alpha \in X^X$ memiliki balikan kiri jika dan hanya jika α bersifat satu-satu.*

Pembuktian sifat berikut merupakan latihan bagi Anda.

Sifat 1.3. *Pemetaan $\alpha \in X^X$ memiliki balikan kanan jika dan hanya jika α bersifat pada.*

Sebagai akibat kedua sifat di atas, kita memiliki teorema berikut.

Teorema 1.4. *Pemetaan* $\alpha \in X^X$ *memiliki balikan jika dan hanya jika* α *bersifat satu-satu pada.*

Himpunan semua pemetaan di X^X yang memiliki balikan kita tuliskan sebagai $\operatorname{Sim}(X)$. Jadi $\operatorname{Sim}(X) = \left\{\alpha \in X^X \;:\; \alpha \text{ satu-satu pada}\right\}$.

Berdasarkan Sifat 1.1, teorema ini memberikan akibat bahwa jika X adalah himpunan hingga, maka tidak ada pemetaan di X^X yang memiliki balikan kiri, tetapi tidak memiliki balikan kanan, atau sebaliknya.

Berikut ini sebuah contoh pemetaan yang memiliki balikan kiri yang bukan balikan kanan.

Contoh 1.9 Pandang $f \in \mathbb{R}$ dengan $f(x) = e^x$. Balikan kiri dari f adalah $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dengan

$$g(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $(g \circ f)(x) = \ln\left(e^x\right) = x$. Akan tetapi g bukan balikan kanan dari f karena $(f \circ g)(x) = x$ hanya berlaku untuk x yang positif.

Sesungguhnya, f tidak mempunyai balikan kanan. Untuk menjadikan g balikan kanan dari f, kita harus mendefinisikan $g(x)$ untuk $x \leq 0$ sehingga memenuhi $(f \circ g)(x) = x$. Akan tetapi ini mustahil karena ruas kiri adalah $f(g(x)) = e^{g(x)}$ yang senantiasa positif, sementara ruas kanan adalah x yang tidak positif.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan $X = \{a, b\}$. Maka X^X terdiri dari 4 unsur.

   (a) Berikan tabel Cayley untuk operasi komposisi pada X^X.

(b) Tentukan semua unsur di X^X yang memiliki balikan.

2) Misalkan $\iota, \alpha \in X^X$ dengan $\iota(x) = x$, $\forall x \in X$.
Tunjukkan bahwa $\iota \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \iota$.

3) Berikan contoh $\alpha \in Y^X$, $\beta \in U^Y$ yang memenuhi $\beta \circ \alpha \in U^X$ pada, tetapi α tidak pada?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Misalkan $X^X = \{\alpha, \beta, \sigma, \tau\}$, di mana $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = a$, $\beta(a) = a$, $\beta(b) = b$, $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$, $\tau(a) = b$, $\tau(b) = b$.
Maka $\alpha(\alpha(a)) = \alpha(a)$ dan $\alpha(\alpha(b)) = \alpha(a) = a$. Dengan demikian $\alpha(\alpha(a)) = alpha(a)$ dan $\alpha(\alpha(b)) = \alpha(b)$, sehingga $\alpha \circ \alpha = \alpha$.
Dengan pula $\alpha(\beta(a)) = \alpha(a)$ dan $\alpha(\beta(a)) = \alpha(a) = a = \alpha(b)$, sehingga $\alpha \circ \beta = \alpha$.
Dengan cara serupa data kita perlihatkan $\alpha \circ \sigma = \alpha, \alpha \circ \tau = \alpha, \beta \circ \alpha = \alpha, \beta \circ \beta = \beta, \beta \circ \sigma = \sigma, \beta \circ \tau = \tau, \sigma \circ \alpha = \tau,$ $\sigma \circ \beta = \sigma,\ \sigma \circ \sigma = \beta, \sigma \circ \tau = \alpha,\ \tau \circ \alpha = \tau, \tau \circ \beta = \tau,\ \tau \circ \sigma = \tau$ dan $\tau \circ \tau = \tau$.
(a) Tabel Cayley untuk X^X adalah

$*$	α	β	σ	τ
α	α	α	α	α
β	α	β	σ	τ
σ	τ	σ	β	α
τ	τ	τ	τ	τ

(b) Dari tabel kita peroleh bahwa unsur identitas adalah β. Jadi unsur yang memiliki balikan adalah β dan σ.

2) Misalkan $y \in X$. Dengan mengambil $x = \alpha(y)$ kita peroleh $\iota(\alpha(y)) = \alpha(y)$, sehingga $(\iota \circ \alpha)(y) = \alpha(y)$. Demikian pula, dengan

mengambil $x = y$ kita peroleh $\alpha(\iota(y)) = \alpha(y)$, sehingga $(\alpha \circ \iota)y = \alpha(y)$. Jadi $(\iota \circ \alpha)(y) = \alpha(y) = (\alpha \circ \iota)(y)$, untuk semua $y \in X$. Jadi $\iota \circ \alpha = \alpha = \iota \circ \alpha.$

3) Pilih $X = Y = U = \mathbb{R}$. Kemudian pilih $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dengan $\alpha(x) = \ln x$ dan $\beta(x) = \tan x,$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}.$ Maka α tidak pada, sedangkan $\beta \circ \alpha$ pada.

RANGKUMAN

Misalkan X, Y, U himpunan-himpunan tak kosong. Misalkan pula $\alpha \in Y^X$, yaitu α suatu pemetaan dari X ke Y, dan $\beta \in U^Y$, yaitu β suatu pemetaan dari X ke Y. Maka komposisi α dan β adalah pemetaan dari X ke U yang memetakan setiap unsur $x \in X$ ke unsur $\beta(\alpha(x))$. Komposisi α dan β kita tuliskan dengan notasi $\beta \circ \alpha.$ Jadi $\beta \circ \alpha \in U^X$.

Misalkan X himpunan tak kosong. Himpunan X^X terdiri dari semua pemetaan dari X ke sendirinya sendiri. Karena komposisi dua pemataan dari X ke X adalah juga pemetaan dari X ke X, maka komposisi adalah suatu operasi pada X^X.

Beberapa sifat dari operasi komposisi pada X^X antara lain:

- operasi komposisi pada X^X bersifat *asosiatif* yaitu untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in X^X$ dan $x \in X$ berlaku $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$.
- operasi komposisi pada X^X memiliki unsur identitas. Misalkan $i \in X^X$ adalah pemetaan yang mengaitkan setiap unsur di X dengan dirinya sendiri, yaitu $i(x) = x, \forall x \in X$ maka i adalah *pemetaan identitas.*
- operasi komposisi pada X^X tidak komutatif.

Pemetaan $\alpha \in X^X$ memiliki *balikan kiri* jika dan hanya jika α bersifat *satu-satu.* Pemetaan $\alpha \in X^X$ memiliki *balikan kanan* jika dan hanya jika α bersifat *pada*. Pemetaan $\alpha \in X^X$ memiliki *balikan* jika dan hanya jika α bersifat *satu-satu pada*. Himpunan semua pemataan di X^X yang memiliki balikan ditulis $\mathrm{Sim}(X)$, atau dapat juga ditulis $\mathrm{Sim}(X) = \{\alpha \in X^X : \alpha \text{ satu-satu pada}\}$.

TES FORMATIF 3

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1) Misalkan $X \neq \varnothing$. Buktikan bahwa jika $A \in 2^X$ dan $A \neq X$, maka A tidak memiliki balikan terhadap operasi irisan himpunan.

2) Buktikan Sifat 1.3 di atas.

3) Misalkan $F_a = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = a \}$. Buktikan bahwa komposisi fungsi adalah operasi pada F_a jika dan hanya jika $a = 0$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Pengaitan ini memberikan operasi yang asosiatif dan komutatif, tetapi tidak memiliki unsur identitas. [*Pembaca hendaknya memberikan rincian bukti*.]

2) Ada tak hingga banyaknya himpunan tertutup, yaitu $S = S(a) = \{a\}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Setiap himpunan ini tidak dapat diperbesar. [*Pembaca hendaknya memberikan rincian bukti*.]

3) Di sini juga ada tak hingga banyaknya himpunan tertutup, yaitu $S = S(a) = \{a\}$, untuk setiap $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Berbeda dengan Soal 2, di sini setiap himpunan dapat diperbesar. [*Pembaca hendaknya memberikan rincian bukti*.]

Tes Formatif 2

1) Misalkan $S = \{a,b\}$. Suatu operasi ditentukan oleh peta-peta dari empat pasangan terurut $(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)$. Karena ada dua pilihan bagi peta dari setiap pasangan terurut, yaitu *a* atau *b*, maka ada $2^4 = 16$ operasi yang dapat dibuat pada *S*.
   Misalkan *a* unsur identitas operasi pada *S*. Maka $(a,a) \mapsto a$, $(a,b) \mapsto b$, $(b,a) \mapsto b$, sedangkan peta dari (b,b) boleh *a* atau *b*. Dengan demikian ada 2 operasi dengan unsur identitas *a*. Dengan alasan serupa, ada 2 operasi dengan unsur identitas *b*. Jadi ada 4 operasi pada *S* yang memiliki unsur identitas.

2) Terdapat $a,b,c \in S$ demikian, sehingga $a*(b*c) \neq (a*b)*c.$

3) Untuk setiap $a \in S$, terdapat $b \in S$ demikian, sehingga $a*b \neq b$ atau $b*a \neq b.$

4) Misalkan $A, B \in MUU_2(\mathbb{R})$. Maka $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, untuk suatu $a,b \in \mathbb{R}$. Perkalian kedua matriks adalah

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang juga merupakan unsur $MUU_2(\mathbb{R})$. Jadi $MUU_2(\mathbb{R})$ tertutup terhadap operasi perkalian matriks, atau dengan kata lain, perkalian matriks adalah operasi pada $MUU_2(\mathbb{R})$.

Tes Formatif 3

1) Misalkan $B \in 2^X$. Maka $A \cap B \subseteq A$. Karena $A \in 2^X$ dan $A \neq X$, maka $A \subset X$. Akibatnya $A \cap B \subset X$, sehingga $A \cap B \neq X$. Karena *X* adalah unsur identitas 2^X untuk operasi irisan, maka *A* tidak memiliki balikan terhadap operasi ini.

2) Misalkan α memiliki balikan kanan β. Maka kita peroleh bahwa $\alpha \circ \beta = \iota$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in X$, $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = x$, yang berarti bahwa terdapat $y = \beta(x) \in X$ sehingga $x = \alpha(y)$. Jadi α pada.
   Di lain pihak, misalkan α bersifat pada. Kita akan mengkonstruksi β sebagai berikut. Misalkan $x \in X$. Pandang himpunan $P(x) = \{ y \in X \mid \alpha(y) = x \}$. Karena α pada, maka $P(x) \neq \varnothing$. Pilih tepat satu unsur $P(x)$, katakan *z*. Kaitkan *x* dengan *z*. Pengaitan ini memberikan pemetaan β pada *X* dengan $\beta(x) = z$.
   Untuk setiap $x \in X$, kita mempunyai $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = x$ karena $\beta(x) \in P(x)$ (berdasarkan konstruksi β di atas).

3) Misalkan $f, g \in F_a$. Maka $f(0) = a = g(0)$. Akan ditunjukkan bahwa $f \circ g \in F_a$ jika dan hanya jika $a = 0$.
   Misalkan $a = 0$. Maka $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(a) = f(0) = a$. Jadi $f \circ g \in F_a$. Sekarang misalkan $a \neq 0$. Kita dapat memilih *f* yang memenuhi $f(a) = 2a$.

Untuk f yang demikian berlaku $\left(f \circ f\right)(0) = f\left(f(0)\right) = f(a) = 2a$. Akan tetapi, karena $a \neq 0$, maka $2a \neq a$. Dengan demikian $\left(f \circ f\right)(0) \neq a$. Jadi $f \circ f \notin F_a$.

Daftar Pustaka

J.R. Durbin. (1985). *Modern Algebra: An Introduction*, 2nd Edition, John Wiley.

K. Meyberg. (1980). *Algebra, Teil 1, 2*. Auflage, Hanser.