MODUL 1

Galat dan Perambatannya

Prof. Dr. Bambang Soedijono

PENDAHULUAN

Pada Modul 1 ini dibahas masalah galat atau derajat kesalahan dan perambatannya, dengan demikian para pengguna modul ini diharapkan telah memahami dan menguasai berbagai masalah yang berkaitan dengan operasi hitungan bilangan real yang pada umumnya dibahas pada modul Matematika, dan modul Persamaan Diferensial.

Setelah umum setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu memahami pengertian galat dan memahami perbedaan antara nilai sebenarnya secara eksak dan nilai pendekatan yang pada umumnya diperoleh dengan manipulasi hitungan.

Secara khusus setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu:

a. menjelaskan pengertian galat atau derajat kesalahan;
b. menentukan nilai galat yang ditimbulkan oleh pembulatan;
c. menentukan nilai galat yang ditimbulkan oleh suatu rangkaian operasi-aljabar/operasi-hitungan.

KEGIATAN BELAJAR

Galat dan Perambatannya

Analisis Numerik merupakan cabang matematika yang mempelajari berbagai macam cara atau metode untuk menyelesaikan suatu permasalahan secara numeris sehingga dalam penyelesaian permasalahan tersebut senantiasa mempergunakan serangkaian operasi hitungan matematik. Masalah yang terkait dalam proses ini, antara lain adalah galat (kesalahan, eror) yang timbul setiap kali dilakukan operasi hitungan. Makin panjang rangkaian operasi hitungan dilakukan berarti makin besar pula galat yang timbul. Dengan demikian penyelesaian masalah yang diperoleh bukan merupakan penyelesaian eksak, tetapi merupakan penyelesaian pendekatan dan galat yang timbul sangat ditentukan oleh metode yang dipergunakan dan juga panjangnya rangkaian operasi hitungan yang dilakukan. Pada kegiatan belajar ini dibahas pengertian galat dan juga perambatannya sejalan dengan rangkaian operasi hitungan yang dikerjakan.

A. POLINOMIAL TAYLOR DAN GALAT YANG TERKAIT

Pada bagian ini dibahas salah satu metode pendekatan sederhana untuk menentukan nilai suatu fungsi kontinu dan galat yang timbul, langkah ini perlu diambil mengingat hambatan yang terjadi dalam menentukan nilai suatu fungsi. Sebagai contoh untuk menentukan nilai fungsi f, $f(x)=e^x$, di suatu x tertentu tanpa bantuan kalkulator ataupun komputer akan dijumpai suatu kesulitan. Untuk mengatasi kesulitan ini ditempuh metode pendekatan, yaitu terlebih dahulu ditentukan suatu polinomial yang merupakan pendekatan fungsi f tersebut di suatu sekitaran (*neighborhood*) titik di atas, dan selanjutnya ditentukan pendekatan nilai fungsi di atas. Polinomial tersebut selanjutnya dikenal sebagai polinomial Taylor.

Misalkan diberikan fungsi f dan harus ditentukan nilai fungsi f di titik x_0 maka polinomium Taylor dikonstruksikan pada suatu sekitaran titik x_0 sehingga nilainya di x_0 merupakan nilai pendekatan untuk $f(x_0)$. Jika polinomium Taylor yang diambil merupakan suatu polinomium pangkat n, namakan $p_n(x)$, dengan

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (1.1)$$

maka haruslah dipenuhi

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0) \\ p_n'(x_0) &= f_n'(x_0) \\ p_n''(x_0) &= f_n''(x_0) \\ p_n'''(x_0) &= f_n'''(x_0) \qquad (1.2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n^{(n)}(x_0) &= f_n^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Selanjutnya dari persarnaan (1.1) dan (1.2) diperoleh:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \qquad (1.3) \end{aligned}$$

dan persamaan (1.3) disebut polinomium Taylor derajat *n* untuk fungsi *f* di sekitar titik x_0 .

Contoh 1.1

Tentukan polinomium Taylor derajat 2 untuk fungsi $f, f(x) = e^{2x}$ di sekitar x_0 .

Penyelesaian:

Untuk menentukan $p_2(x)$ terlebih dahulu ditentukan

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} & f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(x) &= 2e^{2x} & f'(0) &= 2e^0 = 2 \\ f''(x) &= 4e^{2x} & f''(0) &= 4e^0 = 4 \end{aligned}$$

dan secara umum

$$p_n(x) = 2^n e^{2x} \qquad p^{(n)}(0) = 2^n e^0 = 2^n$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (1.3) untuk x_0 = 0 dan n = 2 diperoleh

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ &= 1 + 2x + 2^2 \frac{x^2}{2} + 2^3 \frac{x^3}{6} + 2^4 \frac{x^4}{24} + \ldots. + 2^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Pada Tabel 1.1 terlihat nilai-nilai $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ dan $f(x) = e^x$ untuk berbagai nilai x pada selang $-0,5 \le x \le 0,5$, dan dari tabel tersebut dapat dibandingkan nilai fungsi f dan berbagai nilai polinomium Taylor sebagai nilai pendekatannya.

Tabel 1.1.

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	e^x
-0,5	0,5	0,625	0,60417	0,60653
-0,1	0,9	0,905	0,90483	0,90484
0	1,0	1,000	1,0000	1,0000
0,1	1,1	1,105	1,10577	1,10577
0,5	1,5	1,625	1,64583	1,64583

Pada aplikasi polinomium Taylor sebagai pendekatan fungsi f pada sekitaran suatu titik (tertentu) x_0 dituntut adanya ketelitian, dan hal ini dinyatakan dengan suku sisa yang merupakan selisih antara nilai polinomium Taylor dengan nilai fungsi f di suatu titik tertentu pada sekitaran titik x_0 sebagaimana diungkapkan dengan teorema berikut ini.

Teorema 1. 1 (Teorema Suku-sisa Taylor)

Misalkan fungsi f terdiferensial hingga order $n+1$ dengan masing-masing derivatifnya kontinu pada selang $\alpha \le x \le \beta$, dan misalkan titik x_0 berada pada selang tersebut. Apabila. fungsi f didekati dengan polinomium

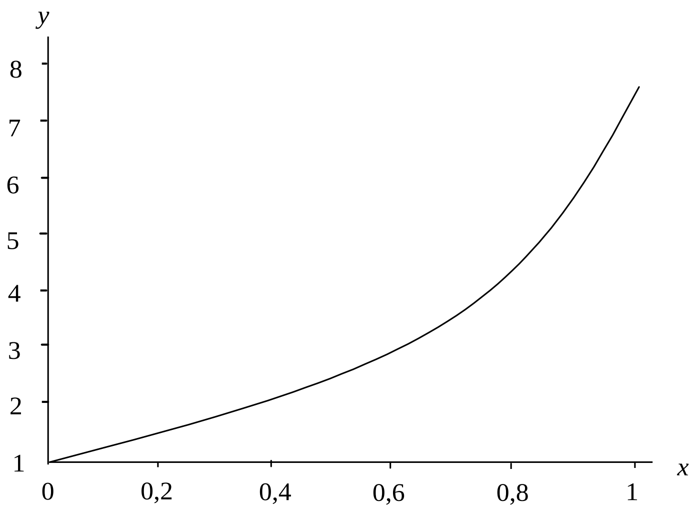
Taylor $p_n(x)$ pada sekitaran x_0, maka suku sisa $R_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$ ditentukan dengan

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (1.4)$$

dengan $x_0 < \xi < x, \ x \in [\alpha, \beta]$.

Bukti teorema di atas dapat dilihat pada buku Kalkulus/Matematika.

Nilai suku sisa $R_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$, sebagaimana dimaksud pada teorema di atas sangat bergantung pada derajat polinomium Taylor $p_n(x)$ dan merupakan galat nilai pendekatan fungsi *f* di $x \in [\alpha, \beta]$.



Gambar 1.1.

Gambar 1.1 di atas menunjukkan hubungan antara kurva fungsi f, $f(x) = e^{2x}$, dengan kurva-kurva polinomium Taylor, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, dan $p_4(x)$. Dari gambar tersebut juga dapat diperbandingkan besarnya galat atau suku sisa $R_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$, pada penggunaan masing-masing polinomium Taylor tersebut, yaitu jika diambil $n=1$, $n=2$, $n=3$ dan $n=4$, untuk suatu nilai x tertentu pada sekitaran titik x = 0.

Mudah dipahami untuk berbagai fungsi bentuk polinomial Taylor berserta suku sisa dapat diungkapkan sebagai:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \tag{1.5}$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \qquad 0 < c < x < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c \tag{1.6}$$

dengan

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c \qquad 0 < c < x < 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c \tag{1.7}$$

dengan

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c \qquad 0 < c < x < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots. + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} \tag{1.8}$$

dengan

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+c)^{\alpha-n-1} \qquad 0 < c < x < 1$$

Pada persamaan di atas $\binom{\alpha}{k}$ disebut *koefisien binomial* dan didefinisikan dengan

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1.9)$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11}}{11!} = 2{,}031557539903e-11$$

diperoleh polinomium Taylor (dengan derajat terkecil, yaitu derajat 5) yang merupakan pendekatan fungsi *f*, $f(x)=\sin x$ pada sekitaran titik $x=0$ dengan galat tidak lebih besar dari 10^{-10} adalah:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Contoh 1.2

Pergunakan polinomium Taylor untuk menentukan nilai limit

$$\lim_{x\to 0,2} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

sehingga galat yang timbul tidak lebih besar dari 10^{-10}.

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dikerjakan adalah menentukan polinomium Taylor sebagai pendekatan fungsi *f*, $f(x)=\cos x$ pada sekitaran titik $x=0,2$ sehingga galat yang timbul tidak lebih besar dari 10^{-10}. Dalam hal ini dapat diambil sekitaran dengan radius 0,5 yang berarti kita bekerja pada, selang -0,3 < x < 0,7.

Dari persamaan (1.7) diperoleh polinomium Taylor sebagai pendekatan fungsi *f*, $f(x)=\cos x$ pada sekitaran titik $x=0$, bentuk ini dapat dipergunakan karena titik $x=0$ berada dalam sekitaran titik $x=0,2$ yang diambil.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+\left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

dengan

$$R_n\left(x\right)=\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{\left(2n+2\right)!}\cos c \qquad 0 < c < x < 1$$

dan karena disyaratkan bahwa galat tidak boleh lebih besar dari 10^{-10} berarti

$$\left|f\left(x\right)-p_n\left(x\right)\right| = \left|R_n\left(x\right)\right| = \left|\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{\left(2n+2\right)!}\cos c\right| < 10^{-10}$$

Karena $\left|\cos c\right| \leq 1$ dan $-0,3 < x < 0,7$ berarti harus dipenuhi

$$\frac{0,7^{2n+2}}{\left(2n+2\right)!} < 10^{-10}$$

dan dengan mengingat

$$\frac{0,7^{10}}{10!} = 7,784260609568e-9$$

$$\frac{0,7^{12}}{12!} = 2,889611892946e-11$$

diperoleh polinomium Taylor (dengan derajat terkecil, yaitu derajat 5) yang merupakan pendekatan fungsi *f*, $f\left(x\right)=\cos x$ pada sekitaran titik $x=0$ dengan galat tidak lebih besar dari 10^{-10} adalah:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\lim_{x\to 0,2} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0,2} \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^{10}}{3628800}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0,2} \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\frac{x^8}{40320}+\frac{x^{10}}{3628800}\right)$$

$$= \frac{0,2^2}{2}-\frac{0,2^4}{24}+\frac{0,2^6}{720}-\frac{0,2^8}{40320}+\frac{0,2^{10}}{3628800}$$

$$= 0,02-6,666666666667e-5+8,888888888888e-8$$

$$-6,349206349206e-11+2,821869488536e-13$$

$$= 0,01993342215901$$

B. PENGERTIAN GALAT

Galat pada suatu kalkulasi hitungan didefinisikan sebagai:

Galat = nilai sebenarnya – nilai pendekatan

dan galat relatif didefinisikan sebagai

$$\text{Galat relatif} = \frac{Galat}{nilai\ sebenarnya}$$

$$= \frac{\text{nilai sebenarnya} - \text{nilai pendekatan}}{\text{nilai sebenarnya}}$$

galat relatif selanjutnya disimbolkan dengan Rel. Apabila nilai sebenarnya disimbolkan dengan x_T dan nilai pendekatan disimbolkan dengan x_A, maka galat$\left(x_A\right)$ dan galat relatif$\left(x_A\right)$ ditulis sebagai:

$$\text{Galat } \left(x_A\right) = x_T - x_A \tag{1.11}$$

dan

$$\text{Rel}\left(x_A\right) = \frac{x_T - x_A}{x_T} \tag{1.12}$$

Sebagai contoh bilangan $\pi = 3{,}14159265\ldots$ sering didekati dengan nilai $\frac{22}{7}$, berarti:

$$\begin{aligned}\text{Galat}\left(\frac{22}{7}\right) &= \pi - \frac{22}{7}\\ &= 3{,}14159265\ldots - \frac{22}{7}\\ &= -0{,}00126\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\text{Galat}\left(\frac{22}{7}\right) &= \frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi}\\ &= \frac{3{,}14159265\ldots - \frac{22}{7}}{3{,}14159265\ldots}\\ &= -0{,}00042\end{aligned}$$

Pada uraian di atas galat ditentukan terhadap nilai sebenarnya, namun pada kenyataannya nilai sebenarnya hanya akan diperoleh apabila permasalahan berkaitan dengan fungsi-fungsi yang dapat diselesaikan secara analisis, sebaliknya dalam aplikasi pada umumnya sangat sulit untuk mengetahui nilai sebenarnya. Untuk kasus nilai sebenarnya tidak diketahui secara pasti galat ditentukan terhadap nilai pendekatan yang dianggap terbaik dan nilai ini, antara lain dapat diperoleh dengan cara iterasi.

Dengan demikian galat dinyatakan sebagai selisih antara nilai pendekatan sekarang dengan nilai pendekatan sebelumnya sehingga persamaan (1.11) dan (1.12) menjadi:

$$\text{Galat}_1(x_A) = x_A - x_S \tag{1.13}$$

dan

$$\text{Rel}_1(x_A) = \frac{x_A - x_S}{x_A} \tag{1.14}$$

dengan Galat_1 dan Rel_1 masing-masing menyatakan galat dan galat relatif yang diperoleh karena iterasi, x_A menyatakan nilai pendekatan sekarang dan x_S menyatakan nilai pendekatan yang diperoleh sebelumnya.

Contoh 1.3

Tentukan nilai $e^{0,3}$ dengan galat relatif tidak lebih dari 0,005.

Penyelesaian:

Karena nilai sebenarnya tidak diketahui maka $e^{0,3}$ ditentukan dengan memperde-retkan fungsi f, $f(x)=e^x$ dalam bentuk polinomium Taylor di sekitar $x=0$.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+...+\frac{x^n}{n!}$$

dengan mengambil n = 2 diperoleh nilai

$$\begin{aligned} e^{0,3} &= 1 + 0,3 + \frac{0,3^2}{2} \\ &= 1 + 0,3 + 0,045 \\ &= 1,345 \end{aligned}$$

dan untuk n = 3 diperoleh

$$\begin{aligned} e^{0,3} &= 1+0,3+\frac{0,3^2}{2}+\frac{0,3^3}{6} \\ &= 1+0,3+0,045+0,0045 \\ &= 1,3495 \end{aligned}$$

Dari hasil di atas diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Galat}_1(1,3495) &= 1,3495-1,345 \\ &= 0,0045 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Rel}_1(1,3495) &= \frac{1,3495-1,345}{1,3495} \\ &= 3,334568358651e-3 \end{aligned}$$

Karena $\text{Rel}_1(1,3495)=3,33456835865e-3>0,00005$ maka harus ditentukan nilai pendekatan untuk n = 4,

$$e^{0,3} = 1 + 0,3 + \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,3^3}{6} + \frac{0,3^4}{24}$$
$$= 1 + 0,3 + 0,045 + 0,0045 + 0,0003375$$
$$= 1,3498375$$

dari hasil di atas diperoleh

$$\text{Galat}_1(1,3498375) = 1,3498375 - 1,3495$$
$$= 0,0003375$$

dan

$$\text{Rel}_1(1,3498375) = \frac{1,3498375 - 1,3495}{1,3498375}$$
$$= 2,5003009621e - 4$$

Karena $\text{Rel}_1(1,3498375) = 2,5003009621e-4 > 0,00005$ maka harus ditentukan nilai pendekatan untuk n = 5.

$$e^{0,3} = 1 + 0,3 + \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,3^3}{6} + \frac{0,3^4}{24} + \frac{0,3^5}{120}$$
$$= 1 + 0,3 + 0,045 + 0,0045 + 0,0003375 + 0,00002025$$
$$= 1,34985775$$

dari hasil di atas diperoleh

$$\text{Galat}_1(1,34985775) = 1,34985775 - 1,3498375$$
$$= 0,00002025$$

dan

$$\text{Rel}_1(1,34985775) = \frac{1,34985775 - 1,3498375}{1,34985775}$$
$$= 1,50015807221e - 5$$

Karena $\text{Rel}_1(1,34985775) = 1,50015807221e-4 < 0,00005$ berarti nilai pendekatan yang harus ditentukan adalah:

$$\mathrm{e}^{0,3} = 1,34985775$$

Pada setiap penyelesaian permasalahan senantiasa timbul galat atau kesalahan yang, antara lain disebabkan oleh:

el. penyusunan model matematika dalam menyelesaikan suatu permasalahan real. Suatu contoh dalam hal ini model matematika untuk laju pertumbuhan populasi sering disajikan dalam bentuk eksponensial

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

dengan $N(t)$ menyatakan besar populasi pada saat t, N_0 dan k masing-masing konstanta real. Kesalahan yang timbul dalam hal ini dapat dikarenakan model matematika di atas bukan model yang cukup baik untuk permasalahan yang harus diselesaikan. Kesalahan yang lain, misalnya besar populasi selalu dinyatakan dengan bilangan asli. Namun, nilai $N(t)$ di atas dimungkinkan bukan bilangan asli untuk suatu nilai t tertentu.

e2. pembulatan yang dilakukan pada waktu melakukan operasi hitungan.

e3. kesalahan yang terjadi pada saat pengumpulan data.
Sebagai contoh dalam melakukan pengumpulan data pada waktu praktikum fisika sering terjadi kesalahan baca dalam pengukuran.

e4. kesalahan karena analisis matematik
Sebagai contoh dalam hal ini, untuk menentukan integral terbatas

$$\int_{x=0}^{x=1} e^{x^2}\, dx$$

tidak dapat dilakukan secara langsung. Salah satu cara dengan mempergunakan perderetan Taylor fungsi eksponensial e^{x^2},

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

sehingga diperoleh

$$\int_{x=0}^{x=1} e^{x^2}\, dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx$$

untuk suatu nilai n tertentu, makin kecil nilai n berakibat galat/kesalahan menjadi makin besar. Kesalahan di atas dikenal sebagai kesalahan pendekatan matematik (*mathematical approximation error* atau *truncation error* atau *discretization error*).

Pada suatu operasi hitungan dimungkinkan terjadi hilangnya pengertian galat, diambil sebagai contoh dalam menentukan nilai fungsi

$$f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right) \qquad x > 0$$

untuk berbagai nilai x dengan derajat ketelitian tertentu. Daftar di bawah ini merupakan hasil perhitungan mempergunakan kalkulator dengan banyak digit enam angka di belakang tanda desimal.

Tabel 1.2.

Nilai x	$f(x)$ (Nilai Hasil Hitungan)	$f(x)$ (Nilai Sebenarnya)
1	0,414210	0,414214
10	1,543400	1,543470
100	4,990000	4,987560
1000	15,800000	15,807400
10000	50,000000	49,998800
100000	100,000000	158,113000

Untuk nilai $x > 0$ fungsi f di atas dapat pula disajikan sebagai:

$$f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

$$= x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= x\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

Berdasarkan rumus fungsi di atas untuk $x = 100$ dengan mempergunakan kalkulator yang sama diperoleh nilai:

$$f(100) = 4{,}98756$$

yang merupakan nilai sebenarnya.

Pada cotoh di atas terlihat bahwa galat yang timbul karena operasi aljabar dapat dihilangkan (diperkecil) dengan memanipulasi operasi aljabar tersebut. Pada contoh di atas operasi perkalian dimanipulasi menjadi operasi pembagian dengan jalan memanipulasi rumus fungsi.

C. PERAMBATAN GALAT

Suatu rantai operasi aljabar dari besaran-besaran yang memuat galat akan memberikan suatu hasil yang juga memuat galat. Galat pada hasil operasi tersebut merupakan hasil perambatan galat. Sebagai contoh sebuah besaran x_A dengan galat ε_x berarti nilai sebenarnya dari besaran tersebut adalah x_T ditambahkan pada besaran y_A dengan galat ε_y yang mempunyai nilai sebenarnya y_T. Dengan demikian,

$$x_T + y_T = \left(x_A + \varepsilon_x\right) + \left(y_A + \varepsilon_y\right) = \left(x_A + y_A\right) + \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = \left(x_A + y_A\right) + \varepsilon_{x+y}$$

dengan $\left(\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$.

Terlihat bahwa hasil penjumlahan tersebut juga mempunyai galat yang besarnya merupakan hasil jumlahan galat masing-masing unsur yang dikenai operasi aljabar tersebut, galat $\left(\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$ dikenal sebagai hasil perambatan galat ε_x dan ε_y.

Perambatan galat tidak hanya akibat operasi jumlahan saja, tetapi merupakan akibat semua jenis operasi aljabar yaitu operasi jumlahan "+", operasi pengurangan "−" operasi pergandaan "×" operasi pembagian "÷".

Contoh 1.4

Misalkan diberikan $x_A = 5,437$ dengan nilai mutlak galat tidak lebih 0,004 dan $y_A = 4,534$ dengan nilai mutlak galat tidak lebih 0,005.

Apabila masing-masing nilai sebenarnya x_T dan y_T, berarti

$$-0,004 < x_T - x_A < 0,004 \quad \text{berarti} \quad -0,004 < x_T - 5,437 < 0,004$$

atau

$$5,433 < x_T < 5,441$$

dan

$$-0,005 < y_T - y_A < 0,005 \quad \text{berarti} \quad -0,005 < y_T - 4,534 < 0,005$$

atau

$$4,529 < y_T < 4,539$$

Apabila dilakukan operasi penjumlahan diperoleh:

$$x_A + y_A = 5,437 + 4,534 = 9,971$$

dan

$$\begin{aligned}
&5,433 + 4,529 < x_T + y_T < 5,441 + 4,539 \\
&9,962 < x_T + y_T < 9,980 \\
&9,962 - 9,971 < \left(x_T + y_T\right) - \left(x_A + y_A\right) < 9,980 - 9,971 \\
&-0,009 < \left(x_T + y_T\right) - \left(x_A + y_A\right) < 0,009
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa nilai mutlak galat hasil jumlahan tersebut tidak lebih 0,009.

Apabila dilakukan operasi perkalian akan diperoleh:

$$x_A \times y_A = 5,437 \times 4,534 = 24,651358$$

dan

$$5,433 \times 4,529 < x_T \times y_T < 5,441 \times 4,539$$
$$24,606057 < x_T \times y_T < 24,696699$$
$$24,606057 - 24,651358 < \left(x_T \times y_T\right) < 24,696699 - 24,651358$$
$$-0,045301 < \left(x_T \times y_T\right) - \left(x_A \times y_A\right) < 0,045341$$

Terlihat bahwa galat hasil pergandaan tersebut berkisar antara −0,045301 dan 0,045341.

Apabila dilakukan operasi pembagian akan diperoleh:

$$\frac{x_A}{y_A} = \frac{5,437}{4,534} = 1,199161887958$$

dengan mengingat $5,433 < x_T < 5,441$ dan $4,529 < y_T < 4,539$ maka diperoleh

$$\frac{5,433}{4,539} < \frac{x_T}{y_T} < \frac{5,441}{4,529}$$

$$1,19695968275 < \frac{x_T}{y_T} < 1,201368955619$$

$$1,19695968275 - 1,1991618879958 < \frac{x_T}{y_T} - \frac{x_A}{y_A}$$
$$< 1,201368955619 - 1,199161887958$$

$$-0,0022022052081 < \frac{x_T}{y_T} - \frac{x_A}{y_A} < 0,0022070676617$$

Terlihat bahwa galat hasil pembagian tersebut berkisar antara −0,0022022052081 dan 0,0022070676617.

Dari contoh di atas terlihat bahwa perambatan galat sangat bergantung pada operasi aljabar yang dipergunakan dan terlihat bahwa pada operasi pergandaan perambatan galat mengakibatkan galat lebih besar jika dibandingkan dengan perambatan galat sebagai akibat operasi pembagian.

Perambatan galat pada evaluasi nilai suatu fungsi dapat dijelaskan sebagai mana diuraikan berikut ini. Misalkan diberikan sebuah fungsi terdiferensial f pada suatu selang $[a,b]$, dan ditentukan besar galat nilai fungsi $f(x)$ untuk suatu $x \in [a,b]$.

Apabila x_A merupakan nilai pendekatan dari x dengan nilai sebenarnya x_T maka galat nilai fungsi $f(x)$ adalah:

$$\text{Galat}\big(f(x_A)\big) = f(x_T) - f(x_A)$$

Karena f terdiferensial pada selang $[a,b]$, dan $x \in [a,b]$ maka berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata diperoleh hubungan

$$f(x_T) - f(x_A) = f'(\xi)(x_T - x_A) \qquad (1.15)$$

dengan ξ terletak antara x_T dan x_A. Karena $|x_T - x_A|$ dapat dianggap sangat kecil maka persamaan (1.15) dapat disajikan sebagai:

$$f(x_T) - f(x_A) = f'(\xi)(x_T - x_A) \approx f'(x_T)(x_T - x_A) \approx f'(x_A)(x_T - x_A)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\text{Galat}\big(f(x_A)\big) = f(x_T) - f(x_A) \approx f'(x_T)(x_T - x_A) \approx f'(x_A)(x_T - x_A)$$

atau

$$\text{Galat}\big(f(x_A)\big) \approx f'(x_T)\,\text{Galat}(x_A) \approx f'(x_A)\,\text{Galat}(x_A) \qquad (1.16)$$

dan

$$\text{Rel}\big(f(x_A)\big) \approx \frac{f'(x_T)}{f(x_T)}(x_T - x_A) = \frac{f'(x_A)}{f(x_T)}\,x_T\,\text{Rel}(x_A) \qquad (1.17)$$

Contoh 1.5

Misalkan diberikan $x_A = 5,437$ dengan nilai mutlak galat tidak lebih dari 0,005. Tentukan perkiraan nilai sebenarnya fungsi *f*, $f(x) = 3x^2 + e^x$ untuk *x* tersebut.

Penyelesaian:

Dari persamaan (1.16) diketahui bahwa

$$\text{Galat}\left(f(x_A)\right) = f(x_T) - f(x_A) \approx f'(x_A)\,\text{Galat}(x_A)$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left|\text{Galat}\left(f(x_A)\right)\right| &= \left|f(x_T)\ f(x_A)\right| \\
&= \left|f'(x_A)\,\text{Galat}(x_A)\right| \\
&= \left|f'(x_A)\right|\left|\text{Galat}(x_A)\right| < 0,005\left|f'(x_A)\right|
\end{aligned}$$

Diketahui $f(x) = 3x^2 + e^x$ berarti $f'(x) = 6x + e^x$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
f(x_A) = f(5,437) &= 3(5,437)^2 + e^{5,437} \\
&= 88,682907 + 229,7518928639 \\
&= 318,4347998639
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
f'(x_A) = f'(5,437) &= 6 \times 5,437 + e^{5,437} \\
&= 32,622 + 229,7518928639 \\
&= 262,3738928639
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\text{Galat}\left(f(x_A)\right)\right| = \left|f(x_T) - f(x_A)\right| &< 0,005\left|f'(x_A)\right| \\
&= 0,005 \times \left|262,3738928639\right| \\
&= 0,005 \times 262,3738928639 \\
&= 1,311869464319
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$f(x_A) - 1{,}311869464319 < f(x_T) < f(x_A) + 1{,}311869464319$$

$$318{,}4347998639 - 1{,}311869464319 < f(x_T) < 318{,}4347998639 + 1{,}311869464319$$

$$317{,}1229303996 < f(x_T) < 319{,}7466693282$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan polinomium Taylor hingga derajat 5 untuk fungsi *f*, $f(x) = e^{\sin x}$ di sekitar titik $x = 0$.
2) Tentukan polinomium Taylor hingga derajat 8 untuk fungsi *f*, $f(x) = x \sin x + \cos x$ di sekitar titik $x = 3$.
3) Tentukan polinomium Taylor hingga derajat 10 untuk fungsi *f*, $f(x) = xe^x + \sin^2 x$ di sekitar titik $x = 0$.
4) Tentukan polinomium Taylor hingga derajat 6 untuk fungsi *f* di sekitar titik $x = 0$, apabila

$$f(x) = \frac{x^2 - e^x}{2x - 1}$$

5) Tentukan polinomium Taylor hingga derajat 6 untuk fungsi *f* di sekitar titik $x = 0$, apabila

$$f(x) = \frac{\cos x - e^x}{\sin x}$$

6) Tentukan polinomium Taylor untuk fungsi *f*, sehingga nilai pendekatan $f(0{,}03)$ mempunyai galat tidak lebih dari 0,00035 apabila diberikan $f(x) = e^x \sin x$.

7) Tentukan polinomium Taylor untuk fungsi f sehingga nilai pendekatan $f(2,3)$ mempunyai galat tidak lebih dari 0,005 apabila diberikan $f(x)=e^x-\sin x$.

8) Tentukan polinomium Taylor untuk fungsi f, sehingga nilai pendekatan $f(3)$ mempunyai galat tidak lebih dari 0,0035 apabila diberikan $f(x)=\dfrac{x^2-e^x}{2x-1}$

9) Tentukan polinomium Taylor untuk fungsi f, sehingga nilai pendekatan $f(2)$ mempunyai galat tidak lebih dari 0,005 apabila diberikan $f(x)=\dfrac{\cos x-e^x}{\sin x}$

10) Tentukan nilai $\text{Galat}(x_A)$ dan $\text{Rel}(x_A)$ apabila diberikan
    a) $x_A=37,658$ dan $x_T=37,663$
    b) $x_A=54,9032$ dan $x_T=54,8984$
    c) $x_A=2,98732$ dan $x_T=2,98694$

11) Tentukan galat terkecil dari nilai y, apabila
    a) $y=x^3+3x^2+2x+1$
    b) $y=2x+3\left(2x^2+x+1\right)$

    untuk ketiga nilai x pada soal nomor 10 di atas.

12) Apabila diberikan $x_A=7,582$ dengan galat tidak lebih dari 0,003 tentukan:
    $\text{Galat}\left(f(x_A)\right)$ apabila diberikan $f(x)=2xe^x+\sin x$.

13) Apabila diberikan $x_A=5,728$ dengan galat tidak lebih dari 0,005 tentukan:
    $\text{Galat}\left(f(x_A)\right)$ apabila diberikan $f(x)=e^{\sin x}\sin x$.

14) Apabila diberikan $x_A=7,582$ dengan galat tidak lebih dari 0,005 tentukan:
    $\text{Galat}\left(f(x_A)\right)$ apabila diberikan $f(x)=\dfrac{\cos x-e^x}{\sin x}$

15) Apabila diberikan $x_A=7,582$ dengan galat tidak lebih dari 0,003 tentukan:

$\operatorname{Rel}\left(f\left(x_A\right)\right)$ apabila diberikan $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x-e^x}{\sin x}$

16) Apabila diberikan $x_A=5,728$ dengan galat tidak leih dari 0,005 tentukan:
$\operatorname{Rel}\left(f\left(x_A\right)\right)$ apabila diberikan $f\left(x\right)=e^{\sin x}\sin x$.

17) Apabila diberikan $x_A=7,582$ dengan galat tidak lebih dari 0,005 tentukan:
$\operatorname{Rel}\left(f\left(x_A\right)\right)$ apabila diberikan $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-e^x}{2x-1}$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Untuk soal no. 1, 2, 3, 4, dan 5 perhatikan contoh soal no. 1.1.
2) Untuk soal no. 6, 7, 8, 9, dan 10 perhatikan contoh soal no. 1.3.
3) Untuk soal no. 11, 12, 13, 14, dan 15 perhatikan contoh soal no. 1.4.
4) Untuk soal no. 14, 16, dan 17 perhatikan contoh soal no. 1.5.

RANGKUMAN

Untuk menentukan nilai pendekatan $f(x_0)$ dikonstruksikan polinomium Taylor pada suatu sekitaran titik x,. Jika polinomium Taylor yang diambil merupakan suatu polinomium pangkat n, namakan $p_n(x)$, dengan

$$p_n\left(n\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

maka haruslah dipenuhi

$$p_n\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$
$$p_n'\left(x_0\right)=f_n'\left(x_0\right)$$
$$p_n''\left(x_0\right)=f_n''\left(x_0\right)$$
$$p_n'''\left(x_0\right)=f_n'''\left(x_0\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n^{(n)}\left(x_0\right)=f_n^{(n)}\left(x_0\right)$$

Selanjutnya diperoleh

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{((x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

dan persamaan di atas disebut polinomium Taylor derajat *n* untuk fungsi *f* di sekitar titik x_0.

Pada aplikasi polinomium Taylor sebagai pendekatan fungsi *f* pada sekitaran suatu titik (tertentu) x_0 dituntut adanya ketelitian yang merupakan selisih antara nilai polinomium Taylor dengan nilai fungsi *f* di suatu titik tertentu pada sekitaran titik x_0.

Misalkan fungsi *f* terdiferensial hingga order $x + 1$ dengan masing-masing derivatifnya kontinu pada selang $\alpha \le x \le \beta$, dan misalkan titik x_0 berada pada selang tersebut. Apabila fungsi *f* didekati dengan polinomium Taylor $p_n(x)$ pada sekitaran x_0 maka suku sisa $R_n(x) \equiv f(x) - p_n(x)$ ditentukan dengan

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

dengan $x_0 < \xi < x, \quad x \in [\alpha, \beta]$ merupakan derajat ketelitian, atau dengan kata lain merupakan galat dari nilai pendekatan $f(x)$.

Galat pada suatu kalkulasi hitungan didefinisikan sebagai

$$\text{Galat relatif} = \frac{\text{Galat}}{\text{nilai sebenarnya}}$$

$$= \frac{\text{nilai sebenarnya} - \text{nilai pendeka tan}}{\text{nilai sebenarnya}}$$

atau disajikan sebagai

$$\text{Rel}(x_A) = \frac{x_T - x_A}{x_T}$$

dengan

x_T : nilai sebenarnya

x_A : nilai pendekatan

Untuk kasus nilai sebenarnya tidak diketahui secara pasti galat ditentukan terhadap nilai pendekatan yang dianggap terbaik, dan nilai ini antara lain dapat diperoleh dengan cara iterasi. Dengan demikian, galat dinyatakan sebagai

$$\text{Galat}_1(x_A) = x_A - x_S$$

dan

$$\text{Rel}_1(x_A) = \frac{x_A - x_S}{x_A}$$

dengan x_A menyatakan nilai pendekatan sekarang dan x_S menyatakan nilai pendekatan yang diperoleh sebelumnya.

Pada setiap penyelesaian permasalahan senantiasa timbul galat atau kesalahan, antara lain disebabkan oleh:

el. penyusunan model matematika dalam menyelesaikan suatu permasalahan real;

e2. pembulatan yang dilakukan pada waktu melakukan operasi hitungan;

e3. kesalahan yang terjadi pada saat pengumpulan data;

e4. kesalahan karena analisis matematik.

Pada suatu operasi hitungan dimungkinkan terjadi hilangnya pengertian galat dan galat yang timbul karena operasi aljabar dapat dihilangkan (diperkecil) dengan memanipulasi operasi aljabar tersebut.

Suatu rantai operasi aljabar dari besaran-besaran yang memuat galat akan memberikan suatu hasil yang juga memuat galat, galat pada. hasil operasi tersebut merupakan hasil perambatan galat. Perambatan galat merupakan akibat semua jenis operasi aljabar, yaitu operasi jumlahan "+", operasi pengurangan "−", operasi pergandaan "$\times$" operasi pembagian "$\div$".

Misalkan diberikan sebuah fungsi terdiferensial f pada suatu selang $[a,b]$, dan $x \in [a,b]$. Apabila x_A merupakan nilai pendekatan dari x dengan nilai sebenarnya x_T maka galat nilai fungsi $f(x)$ adalah:

$$\text{Galat}\left(f(x_A)\right) = f(x_T) - f(x_A)$$

atau

$$\text{Galat}\left(f(x_A)\right) = f(x_T) - f(x_A) \approx f'(x_T)(x_T - x_A) \approx f'(x_A)(x_T - x_A)$$

atau dapat pula disajikan sebagai

$$\text{Galat}\left(f(x_A)\right) \approx f'(x_T)\text{Galat}(x_A) \approx f'(x_A)\text{Galat}(x_A)$$

dan

$$\text{Rel}\left(f(x_A)\right) \approx \frac{f'(x_T)}{f(x_T)}(x_T - x_A) = \frac{f'(x_A)}{f(x_T)} x_T \,\text{Rel}(x_A)$$

TES FORMATIF

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Bentuk polinomial Taylor untuk $f(x) = e^x$ adalah ….

   A. $p_1(x) = 1 + x$

   B. $p_2(x) = 1 + x + 2x^2$

   C. $p_3(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3$

   D. $p_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$

2) Bentuk polinomial Taylor untuk $f(x) = \sqrt{x}$ di sekitar a =1 adalah ….

   A. $p_2(x) = 1 + (x-1) - 2(x-1)^2$

   B. $p_2(x) = 1 + (x+1) + 2(x+1)^2$

   C. $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$

   D. $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2$

3) Pada polinomial Taylor orde n untuk fungsi f besar galat dinyatakan dengan ....

   A. $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi_x)$ $\quad a<\xi_x<x$ atau $x<\xi_x<a$

   B. $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)$ $\quad a<x$ atau $x<a$

   C. $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$ $\quad a<\xi_x<x$ atau $x<\xi_x<a$

   D. $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)$ $\quad a<x$ atau $x<a$

4) Apabila $p_n(x)$ merupakan polinomium Taylor untuk fungsi $f(x)=\sin x$ untuk $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, agar galat yang timbul tidak lebih dari 0,001, berapakah nilai terkecil?
   A. $n = 1$
   B. $n = 2$
   C. $n = 3$
   D. $n = 4$

5) Pernyataan berikut ini merupakan faktor penyebab terjadinya galat, *kecuali* ....
   A. penyusunan model matematika dalam menyelesaikan suatu masalah real
   B. pembulatan yang dilakukan pada waktu melakukan operasi hitungan
   C. penggunaan rumus matematika yang memuat integral fungsi
   D. kesalahan yang terjadi pada saat pengumpulan data

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}}\times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif

1) A
2) C
3) C
4) D
5) C

Daftar Pustaka

Buchanan J. L and Turner P. R. (1992). *Numerical Methods and Analysis*. New York: McGraw-Hill Inc.

Francis Scheid. (1968). *Theory and Problems of Numerical Analysis*. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill Book Company.

Kendal Atkinson. (1994). *Elementary Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Nakamura, S. (1993). *Applied Numerical Methods in C*. New Jersey: Prentice Hall International Inc.

Steven, C. C and Raymond, P. C. (1985). *Numerical Methods for Engiineers*. New York: McGraw-Hill Book Company.