MODUL 1

Algoritma Simpleks Dan Analisis Kepekaan

Prof. Bambang Soedijono

PENDAHULUAN

Pada Modul 1 ini dibahas metode penyelesaian suatu masalah program linear. Pada umumnya masalah program linear mengkaitkan banyak *variable* (peubah). Namun untuk mempermudah pemahaman secara grafik beberapa bagian pembahasan dikhususkan untuk masalah program linear dengan dua peubah. Dibahas pula pengaruh parameter pada masalah program linear untuk mendapatkan penyelesaian optimal, yang dikenal sebagai analisis kepekaan.

Pada Kegiatan Belajar 1 modul ini dibahas penyelesaian masalah program linear terutama penggunaan algoritma simpleks baik untuk masalah maksimasi maupun masalah minimisasi. Selanjutnya pada Kegiatan Belajar 2 dibahas masalah analisis kepekaan, yaitu suatu metode untuk menentukan penyelesaian optimal maksimum ataupun optimal minimum suatu masalah program linear.

Modul 1 ini merupakan pendalaman materi Buku Materi Pokok Riset Operasional I. Materi yang dibahas kali ini dapat dilihat dalam Riset Operasional I Modul 1 Kegiatan Belajar 2. Saat mempelajari modul ini, pembaca dianggap sudah memahami materi yang dibahas dalam Riset Operasional I tersebut. Dengan demikian, meskipun topik yang dibahas sama, pembaca akan lebih diperkaya dengan materi analisis dan teorema dari topik Algoritma Simpleks dan Analisis Kepekaan.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan mampu memahami manfaat program linear khususnya metode simpleks dan analisis kepekaan untuk menyelesaikan permasalahan optimisasi di berbagai bidang terapan/aplikasi. Secara khusus setelah mempelajari modul ini diharapkan mampu :

1. memahami dan menjelaskan pentingnya menentukan penyelesaian optimal pada suatu permasalahan aplikasi,

2. menentukan penyelesaian optimal suatu masalah program linear dengan menggunakan metode simpleks,
3. melakukan analisis kepekaan untuk mendapatkan penyelesaian optimal suatu permasalahan aplikasi.

KEGIATAN BELAJAR 1

Algoritma Simpleks

Berbagai permasalahan optimisasi ada di berbagai bidang aplikasi, misalnya bidang produksi barang dan transportasi. Pada umumnya masalah tersebut sangat kompleks dan mengkaitkan cukup banyak peubah dan/atau parameter. Salah satu cara untuk menyelesaikan permasalahan yang mengkaitkan cukup banyak peubah ataupun parameter adalah memanfaatkan teori matriks, yaitu suatu subbidang ilmu dari aljabar linear.

Pada umumnya permasalahan tersebut mempunyai cukup banyak penyelesaian, sehingga harus ditentukan salah satu penyelesaian yang memberikan nilai optimal. Untuk permasalahan maksimasi harus ditentukan penyelesaian yang memberikan nilai maksimum optimal dan untuk permasalahan minimisasi harus ditentukan penyelesaian yang memberikan nilai minimum optimal. Dengan demikian untuk mendapatkan penyelesaian optimal perlu dilakukan langkah penyelesaian secara berulang. Cara ini dikenal sebagai metode simpleks.

Metode simpleks mempergunakan cara penyelesaian sistem persamaan dengan memanfaatkan teori matriks, terutama dengan menentukan invers matriks. Sehingga untuk mempermudah pemahaman dalam mempelajari bagian ini diharapkan telah memahami dan mampu menyelesaikan persamaan matriks.

A. PROGRAM LINEAR BENTUK STANDAR

Pada umumnya suatu masalah program linear terdiri dari fungsi obyektif disertai beberapa persamaan atau pertidaksamaan yang merupakan syarat untuk penyelesaian masalah tersebut.

Bentuk umum masalah program linear adalah menentukan vektor $\left(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_j,\ldots, x_n\right)$ yang yang memberikan nilai optimal (maksimum ataupun minimum) fungsi obyektif

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

sehingga dipenuhi syarat

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots ,\ x_n \geq 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \tag{1.3}$$

Guna mempermudah pemahaman, pada bagian ini diutamakan pembahasan program linear yang merupakan masalah minimisasi.
Sedangkan bentuk standar masalah program linear adalah menentukan vektor $\left(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots ,\ x_j, \ldots ,\ x_n\right)$ yang yang memberikan nilai optimal minimum fungsi obyektif

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

sehingga dipenuhi syarat

$$\begin{aligned} x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots ,\ x_n &\geq 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.4}$$

Persamaan (1.1) biasa pula disajikan sebagai $z = \mathbf{c}\ \mathbf{x}$ dengan $\mathbf{c}$ suatu vektor baris

$$\mathbf{c} = \left(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\right) \tag{1.5}$$

dan $\mathbf{x}$ suatu vektor kolom

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sedangkan persamaan (1.4) biasa pula disajikan sebagai $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ dengan **A** suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} adalah koefisien peubah x_j pada baris ke-*i* persamaan (1.4).

dan **b** suatu vektor kolom

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots\cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dengan demikian bentuk standar program linear dapat diungkapkan sebagai :

1. Meminimalkan nilai $z = \mathbf{c\,x}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$ dengan **c** suatu vektor baris, **x** dan **b** suatu vektor kolom **A** suatu matriks, dan **0** suatu vektor nol disajikan sebagai vektor kolom dimensi n .
2. Meminimalkan nilai $z = \mathbf{c\,x}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n = p_0$ dengan p_i merupakan kolom ke *i* dari matriks **A**, dan $p_0 = \mathbf{b}$.

   Vektor **x** yang memenuhi syarat (1.2) dan (1.4) disebut penyelesaian *feasible* (fisibel atau layak) dari masalah program linear. Pada modul Riset Operasional I kita menggunakan istilah layak untuk menjelaskan arti *feasible*. Namun dalam modul ini kita akan menggunakan istilah fisibel untuk menjelaskan *feasible*.

Contoh 1.1

Suatu perusahaan yang membuat *cover* jok mobil, memproduksi dua jenis kualitas yaitu kualitas *deluxe* dan kualitas standar. Setiap jok mobil memerlukan 1 m^2 kulit bahan *cover*. Untuk pembuatan sebuah jok kualitas *deluxe* diperlukan waktu 2 jam kerja, sedangkan untuk kualitas standar diperlukan waktu 1 jam kerja. Setiap minggu tersedia 60 jam kerja dan 40 m^2 kulit bahan *cover*, sedangkan keuntungan bersih yang diperoleh untuk setiap pembuatan jok kualitas *deluxe* sebesar 4 (satuan 10.000 rupiah) dan untuk kualitas standar memberikan keuntungan bersih sebesar 3 (satuan 10.000 rupiah).

♦

Penyelesaian :

Misalkan :

x_1 : menyatakan jumlah unit produksi jok kualitas *deluxe* dalam satu minggu

x_2 : menyatakan jumlah unit produksi jok kualitas standar dalam satu minggu

dengan demikian fungsi obyektif yang merupakan besar keuntungan dalam satu minggu disajikan dengan

$$z = f\left(x_1, x_2\right) = 4x_1 + 3x_2$$

mengingat jumlah jam kerja yang tersedia untuk produksi dalam satu minggu adalah 60 jam kerja, berarti diperoleh hubungan

$$2x_1 + x_2 \le 60$$

dan jumlah material yang tersedia untuk produksi dalam satu minggu adalah 40 m^2, berarti diperoleh hubungan

$$x_1 + x_2 \le 40$$

Dengan demikian bentuk program linear untuk masalah di atas disajikan sebagai

$$\begin{array}{ll} \text{maks.} & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{syarat} & 2x_1 + x_2 \le 60 \\ & x_1 + x_2 \le 40 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Bentuk standar program linear masalah maksimasi di atas adalah

maks. $z = 4x_1 + 3x_2$

syarat $2x_1 + x_2 + s_1 = 60$

$x_1 + x_2 \quad + s_2 = 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

dengan s_1 dan s_2 peubah *slack* (atau peubah kekurangan) yang ditambahkan, atau disajikan dalam bentuk persamaan matriks :

maks. $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$

syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b}$

$x_1, x_2 \geq 0$

dengan vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ dan matriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

♦

B. TINJAUAN KEMBALI ALGORITMA SIMPLEKS

Basic solution (atau penyelesaian basis) terkait dengan syarat (1.4) adalah suatu penyelesaian yang diperoleh dengan memberikan nilai nol pada *n-m* peubah sehingga sub-matriks $\mathbf{A}_0$ dari matriks $\mathbf{A}$ yang merupakan matriks koefisien dari *n* ke *m* peubah mempunyai determinan tidak nol, selanjutnya ditentukan nilai dari *n* ke *m* peubah-peubah tersebut. Selanjutnya ke *m* peubah disebut *basic variable* (atau peubah basis), dan ke *n-m* peubah; yang lain disebut *non-basic variable* (atau peubah nonbasis).

Apabila suatu penyelesaian basis juga memenuhi syarat (1.2) maka disebut *basic feasible solution* (atau penyelesaian fisibel basis). Apabila suatu penyelesaian fisibel basis dipenuhi nilai ke *m* peubah basis adalah positif, maka disebut *nondegenerate basic feasible solution* (atau penyelesaian fisibel basis tak merosot).

Suatu penyelesaian fisibel minimum adalah suatu penyelesaian fisibel yang meminimalkan nilai (1.1). *Region* (daerah) dimana suatu program linear terdefinisi, yaitu daerah yang dibangun (*generating*) oleh himpunan penyelesaian fisibel disebut daerah fisibel.

Meminimalkan nilai $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

dengan syarat

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

dengan

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n \geq 0$$

dapat dibawa ke bentuk standar dengan menambahkan n buah peubah *slack* s_j sehingga sistem di atas disajikan sebagai

Meminimalkan nilai $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

dengan syarat

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$

dengan

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n \geq 0$$
$$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots,\ s_m \geq 0$$

Atau dapat disajikan sebagai meminimalkan nilai $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$ sehingga dipenuhi syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b}$, dengan $\mathbf{s}$ suatu vektor kolom dimensi m

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \ldots \\ s_m \end{pmatrix}$$

Misalkan suatu program linear bentuk standar terdefinisi pada suatu daerah fisibel S dimensi n dengan syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{x} \geq 0$. Suatu *nonzero vector* (atau vektor tak nol) $\mathbf{d}$ disebut *direction of unboundedness* apabila untuk semua $\mathbf{x} \in S$ dan suatu $\mathbf{c} \geq 0$ dipenuhi $\mathbf{x} + \mathbf{c}\,\mathbf{d} \in S$.

Dengan demikian, bila diberikan suatu program linear bentuk standar dengan penyelesaian fisibel basis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dan daerah fisibel S, maka setiap vektor **x** yang berada pada daerah fisibel S dapat disajikan sebagai :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i \qquad (1.6)$$

dengan vektor **d** adalah vektor nol atau *direction of unboundedness*, $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 1$ dan $\alpha_i \geq 0$.

Contoh 1.2

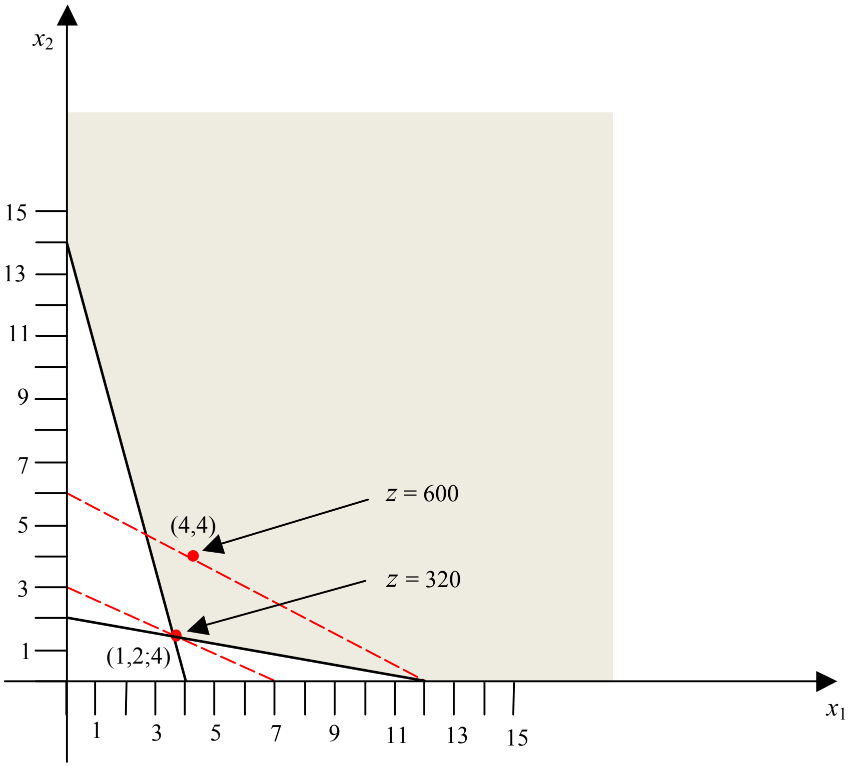
Program linear masalah minimisasi berbentuk

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z = 50x_1 + 100x_2 \\ \text{syarat} & 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ & 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Bentuk standar program linear masalah minimisasi di atas berbentuk

$$\begin{array}{ll} \text{min} & z = 50x_1 + 100x_2 \\ \text{syarat} & 7x_1 + 2x_2 - s_1 \quad = 28 \\ & 2x_1 + 12x_2 \quad - s_2 = 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Gambar di bawah ini menunjukkan daerah fisibel penyelesaian program linear tersebut.



Gambar 1.1
Daerah fisibel penyelesaian program linear Contoh 1.2

Teorema 1.1

Apabila suatu program linear mempunyai solusi optimal, maka terdapat suatu *optimal basic feasible solution* (atau penyelesaian fisibel basis optimal).

■

Misalkan **x** suatu penyelesaian optimal. Mengingat **x** fisibel, berarti dapat disajikan sebagai $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i$ dengan vektor **d** adalah vektor nol atau *direction of unboundedness*, $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 1$ dan $\alpha_i \geq 0$. Berarti untuk sebarang

$k>0$, vektor $\mathbf{y} = k\,\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i\, x_i$ juga fisibel, $k > n$, $x_i = 0$, untuk $i > n$, sehingga bila diambil $k \to \infty$ berakibat $|y| \to \infty$. Terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa program linear tersebut mempunyai solusi optimal.

Selanjutnya bila diambil *c*, sehingga $|c\mathbf{d}| < 0$, maka vektor fisibel $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, x_i$ mempunyai nilai *magnitude* lebih besar dari nilai *magnitude* vektor **x**. Terjadi kontradiksi dengan dengan pernyataan bahwa **x** merupakan penyelesaian optimal. Hal ini berarti, $|c\mathbf{d}| = 0$.

Dengan demikian nilai obyektif vektor **x** dapat disajikan sebagai

$$c\mathbf{x} = c\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, cx_i = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\, cx_i$$

Misalkan b_1 merupakan penyelesaian fisibel basis dengan nilai obyektif terbesar, dan mengingat $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = 1$ dan $\alpha_i \geq 0$ berarti $cb_1 \geq cx$. Mengingat **x** merupakan solusi optimal, berarti b_1 juga optimal, dengan demikian terbukti adanya penyelesaian fisibel basis optimal.

Suatu program linear dengan *m* buah syarat, dua buah penyelesaian fisibel dikatakan berdekatan (*adjacent*) apabila himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian mempunyai $m-1$ kesamaan peubah basis.

Contoh 1.3

Suatu program linear masalah maksimasi disajikan sebagai

maks. $z = 4x_1 + 3x_2$

syarat $x_1 + x_2 \leq 40$

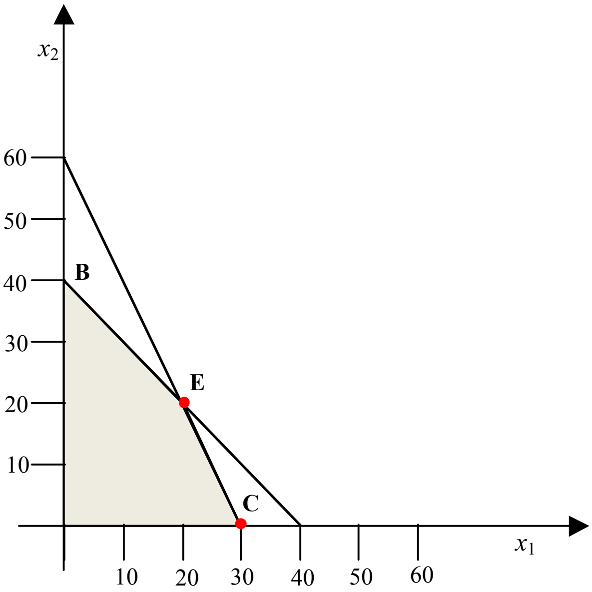
$2x_1 + x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

Program linear di atas mempunyai bentuk standar

maks. $z = 4x_1 + 3x_2$

$$\text{syarat}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + \quad s_2 &= 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Gambar 1.2
Daerah fisibel penyelesaian program linear Contoh 1.3

Program linear tersebut mempunyai daerah fisibel segiempat BECF, dengan *basic feasible point* (atau titik fisibel basis) (x_1, x_2) adalah : $\text{B} = (0,40)$, $\text{C} = (30,0)$, $\text{E} = (20,20)$ dan $\text{F} = (0,0)$.

Titik fisibel basis $\text{E} = (20,20)$ berdekatan dengan titik fisibel basis $\text{C} = (30,0)$ dikarenakan kedua titik tersebut mempunyai $2 - 1 = 1$ peubah basis yang sama.

Selanjutnya diperlihatkan pemanfaatan algoritma simpleks untuk penyelesaian suatu program linear dalam hal menentukan nilai maksimal dari persamaan (1.1).

Algoritma simpleks merupakan rangkaian langkah :

<u>Langkah ke-1</u> : Mengubah bentuk program linear ke bentuk standar.

Guna mengubah program linear bentuk umum ke bentuk standar, terlebih dahulu dilakukan perubahan bentuk syarat sebagaimana disajikan dengan sistem persamaan (1.2) menjadi sistem persamaan (1.5), dan fungsi obyektif (1.1) disajikan sebagai :

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - \ldots - c_nx_n = 0 \tag{1.7}$$

Selanjutnya sistem persamaan (1.5) digabung dengan persamaan (1.7) menjadi

$$\begin{aligned}
&z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - \ldots - c_nx_n = 0 \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 \quad = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 \quad = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m
\end{aligned} \tag{1.8}$$

dengan mengingat bahwa ruas kanan dari masing-masing persamaan yang memuat suku s_i (yang biasa disebut bentuk kanonik) haruslah tak negatif.

<u>Langkah ke-2</u> : Menentukan penyelesaian fisibel basis dari program linear bentuk standar.

Penyelesaian fisibel basis merupakan penyelesaian sistem persamaan (1.8).

<u>Langkah ke-3</u> : Meninjau apakah penyelesaian fisibel basis yang diperoleh merupakan penyelesaian fisibel basis optimal.

Apabila penyelesaian fisibel basis yang diperoleh bukan merupakan penyelesaian fisibel basis optimal, maka harus ditentukan penyelesaian fisibel basis baru yang merupakan penyelesaian fisibel basis optimal.

<u>Langkah ke-4</u> : Apabila penyelesaian fisibel basis yang diperoleh pada langkah ke-2 bukan merupakan penyelesaian fisibel basis optimal maka tentukan pilihan peubah nonbasis diubah

menjadi peubah basis dan sebaliknya tentukan peubah basis diubah menjadi peubah nonbasis. Selanjutnya dengan sistem persamaan yang baru ditentukan penyelesaian fisibel basis terkait yang mempunyai nilai fungsi obyektif lebih baik.

Langkah ke-5 : Pergunakan *Elementary Row Operations* (EROs) (atau Operasi Baris Elementer) untuk menentukan penyelesaian fisibel basis yang baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif lebih baik. Selanjutnya kembali ke langkah ke-3.

Dimaksud dengan EROs adalah melakukan transformasi matriks koefisien ***A*** menjadi matriks koefisien baru ***A***', dengan salah satu operasi:

ERO ke-1 : Matriks koefisien ***A***' diperoleh dari matriks koefisien ***A*** dengan menggandakan elemen-elemen suatu baris tertentu pada matriks A dengan suatu skalar tak nol.

ERO ke-2 : Matriks koefisien ***A***' diperoleh dari matriks koefisien ***A*** dengan menggandakan elemen-elemen satu baris tertentu (baris *j*) dengan skalar tak nol (skalar *c*), selanjutnya hasilnya ditambahkan ke suatu baris tertentu lain (baris *j*, $i \neq j$).

ERO ke-3 : Matriks koefisien ***A***' diperoleh dari matriks koefisien ***A*** dengan menukar posisi dua baris tertentu berlainan, posisi baris ke *i* dan baris ke *j* saling ditukarkan ($i \neq j$).

Guna memperjelas uraian di atas perhatikan contoh soal di bawah ini.

Contoh 1.4

Suatu perusahaan furnitur, khusus memproduksi meja tulis, meja, dan kursi. Namun demikian kerangka dan jok kursi dikerjakan oleh perusahaan lain sehingga perusahaan ini hanya melakukan kerja kayu dan *finishing*. Tugas divisi kerja kayu menggunakan bahan papan kayu, sehingga ada kegiatan kerja kayu dan *finishing*.

Guna pembuatan tiga jenis barang tersebut divisi kerja kayu setiap hari dialokasikan papan kayu (lebar 20 cm) sebanyak 16 meter, 8 jam tenaga kerja kayu dan 20 jam tenaga kerja *finishing*. Data kerja divisi kerja kayu disajikan dengan tabel :

	MEJA TULIS	MEJA	KURSI
Papan kayu lebar 20 cm (meter)	2.4	1.8	0.4
Kerja kayu (jam-orang)	1	1.5	0.5
***Finishing* (jam-orang)**	4	2	1.5

Keuntungan diperoleh dari produk meja tulis sebesar 60 (satuan puluh ribu rupiah), meja sebesar 30 dan kursi sebesar 20. Perlu dilakukan pengaturan kerja agar diperoleh keuntungan secara optimal, dengan catatan produksi meja setiap harinya tidak lebih dari lima buah.

Misalkan didefinisikan peubah untuk besar unit masing-masing jenis produksi :

x_1 jumlah meja tulis yang diproduksi tiap hari

x_2 jumlah meja yang diproduksi tiap hari

x_3 jumlah kursi yang diproduksi tiap hari

dengan demikian program linear masalah maksimasi tersebut dapat disajikan sebagai :

$$\begin{aligned}
\text{maks.} \quad & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{syarat} \quad & 2,4x_1 + 1,8\,x_2 + 0,4\,x_3 \le 16 \\
& 2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \le 8 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 20 \\
& x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya disusun program linear bentuk standar dengan menambahkan peubah *slack* tak negatif $s_1, s_2, s_3,$ dan s_4 berturut-turut pada fungsi syarat, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{maks} \quad & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{syarat} \quad & 2,4x_1 + 1,8x_2 + 0,4x_3 + s_1 = 16 \\
& 2\,x_1 + 1,,5x_2 + 0,5x_3 + s_2 = 8 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + s_3 = 20 \\
& x_2 + s_4 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\
& s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Berdasarkan algoritma simpleks disusun peubah basis (BV) dan peubah nonbasis (NBV) :

$$\text{BV} = \{ s_1, s_2, s_3, s_4 \} \text{ dan } \text{NBV} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$$

dan dengan mengambil nilai $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ diperoleh nilai s_1, s_2, s_3 dan s_4 yang merupakan penyelesaian fisibel basis awal, sehingga masalah maksimasi di atas dapat disajikan dalam tabel berikut ini.

Tabel 1.1
Tabel awal penyelesaian Contoh 1.4

Baris		**Peubah basis**
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$2{,}4\,x_1 + 1{,}8x_2 + 0{,}4x_3 + s_1 = 16$	$s_1 = 16$
2	$2\,x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_2 = 8$	$s_2 = 8$
3	$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_3 = 20$	$s_3 = 20$
4	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Berdasarkan Tabel 1.1, pada baris-0 peubah z dengan koefisien 1 tidak muncul pada baris yang lain, maka z diambil sebagai peubah basis, sehingga diperoleh :

$$\text{BV} = \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\} \text{ dan } \text{NBV} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

sehingga diperoleh penyelesaian fisibel dasar

$$z = 0,\ s_1 = 16,\ s_2 = 8,\ s_3 = 20,\ s_4 = 5, \text{ dan } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Berdasarkan baris-0 terlihat bahwa peubah x_1 sangat menentukan perubahan nilai z (dibandingkan peubah x_2 dan x_3), mengingat koefisien peubah x_1 adalah paling kecil, yaitu -60, sehingga perubahan nilai x_1 mengakibatkan ada nilai peubah basis yang menjadi negatif.

- Apabila diambil $x_2 = x_3 = 0$, dari baris-1 diperoleh $s_1 = 16 - 2{,}4x_1$ dan mengingat $s_1 \geq 0$, maka $16 - 2{,}4x_1 \geq 0$ atau $x_1 \leq 6{,}7$

- Apabila diambil $x_2 = x_3 = 0$, dari baris-2 diperoleh $s_2 = 8 - 2x_1$ dan mengingat $s_2 \geq 0$, maka $8 - 2x_1 \geq 0$ atau $x_1 \leq 4$

- Apabila diambil $x_2 = x_3 = 0$, dari baris-3 diperoleh $s_3 = 20 - 4x_1$ dan mengingat $s_3 \geq 0$, maka $20 - 4x_1 \geq 0$ atau $x_1 \leq 5$.

- Apabila diambil $x_2 = x_3 = 0$, dari baris-4 diperoleh $s_4 = 5$

Dari uraian di atas terlihat bahwa nilai terbesar yang dimungkinkan untuk x_1 adalah $x_1 = 4$, dan apabila diambil $x_1 > 4$ akan berakibat s_2 bernilai negatif sehingga tidak akan diperoleh penyelesaian fisibel .
Mengingat nilai terbesar dari $x_1 = 4$, maka haruslah x_1 merupakan peubah basis, dan s_2 menjadi peubah nonbasis. Nilai terbesar untuk x_1 ini diperoleh berdasarkan baris-2

$$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + s_2 = 8$$

Selanjutnya dipergunakan EROs untuk menentukan penyelesaian fisibel basis yang baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif lebih baik.

- Agar koefisien x_1 pada baris-2 adalah 1, maka kedua ruas baris-2 digandakan dengan $0,5$ sehingga diperoleh
$$x_1 + 0,75x_2 + 0,25x_3 + 0,5s_2 = 4 \qquad (1.9)$$

- Koefisien x_1 pada baris-0 dijadikan 0 dengan kedua ruas persamaan (1.9) dengan 60 selanjutnya kedua ruasnya ditambahkan ke baris-0 sehingga diperoleh
$$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$$

- Koefisien x_1 pada baris-1 dijadikan 0 dengan kedua ruas persamaan (1.9) digandakan dengan $-2,4$ selanjutnya kedua ruasnya ditambahkan ke baris-1 sehingga diperoleh
$$-0,2x_3 + s_1 - 1,2s_2 = 6,4$$

- Koefisien x_1 pada baris-3 dijadikan 0 dengan kedua ruas persamaan (1.9) digandakan dengan -4 selanjutnya kedua ruasnya ditambahkan ke baris-3 sehingga diperoleh

$$-x_2 + 0,5x_3 - 2s_2 + s_3 = 4$$

Mengingat pada baris-4 tidak memuat vektor x_1, maka tidak perlu menerapkan EROs sehingga baris-4 tidak ada modifikasi/perubahan.
Dengan perubahan di atas diperoleh :

Tabel 1.2
Hasil iterasi pertama

Baris		**Peubah Basis**
0	$z \quad +15x_2 - 5x_3 \quad +30s_3 \quad = 240$	$z = 240$
1	$-0,2x_3 + s_1 - 1,2s_2 \quad = 6,4$	$s_1 = 6,4$
2	$x_1 + 0,75x_2 + 0,25x_3 \quad + 0,5s_2 \quad = 4$	$x_1 = 4$
3	$-x_2 + 0,5x_3 \quad - 2s_2 + s_3 \quad = 4$	$s_3 = 36$
4	$x_2 \quad + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Selanjutnya diperhatikan lagi baris-0,

$$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$$

atau disajikan sebagai

$$z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3$$

Terlihat dengan perubahan nilai x_2 dengan 1 ($x_3 = s_3 = 0$) akan sangat berpengaruh terhadap nilai z berkurang dengan 15, demikian pula perubahan nilai s_3 dengan 1 ($x_2 = x_3 = 0$) akan sangat berpengaruh terhadap nilai z berkurang dengan 30. Sebaliknya perubahan nilai x_3 dengan 1 ($x_2 = s_3 = 0$) akan menaikkan nilai z dengan 5. Dengan demikian x_3 dirubah menjadi peubah basis.

- Apabila diambil $x_2 = s_2 = 0$, dari baris-1 diperoleh $s_1 = 6,4 + 0,2x_3$ dan mengingat $s_1 \geq 0$, maka $6,4 + 0,2x_3 \geq 0$ atau $x_3 \geq -32$

- Apabila diambil $x_2 = s_2 = 0$, dari baris-2 diperoleh $x_1 = 4 - 0,25x_3$
- Apabila diambil $x_2 = s_2 = 0$, dari baris-3 diperoleh $s_3 = 4 - 0,5\,x_3$ dan mengingat $s_3 \geq 0$, maka $4 - 0,5\,x_3 \geq 0$ atau $x_3 \leq 8$
- Apabila diambil $x_2 = 0$, dari baris-4 diperoleh $s_4 = 5$

Mengingat bahwa baris-1 tidak memberikan batas bawah x_3 positif, maka apabila ditinjau baris-3 dan baris-4 maka baris-4 tidak memberikan batas untuk x_3. Dari uraian di atas terlihat bahwa nilai terbesar yang dimungkinkan untuk x_3 adalah $x_3 = 8$. Apabila diambil $x_3 > 8$ akan berakibat s_3 bernilai negatif sehingga tidak akan diperoleh penyelesaian fisibel .

Mengingat nilai terbesar dari $x_3 = 8$, maka haruslah x_3 merupakan peubah basis, dan s_3 menjadi peubah nonbasis. Nilai terbesar untuk x_3 ini diperoleh berdasarkan baris-3 :

$$-x_2 + 0,5x_3 - 2s_2 + s_3 = 4$$

Selanjutnya dipergunakan EROs untuk menentukan penyelesaian fisibel basis yang baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif lebih baik.

- ♦ Koefisien x_3 pada baris-3 dijadikan 1 dengan menggandakan kedua ruas baris-3 dengan 2 sehingga baris-3 menjadi :

$$-2x_2 + x_3 - 4s_2 + 2s_3 = 8 \qquad (1.10)$$

- ♦ Koefisien x_3 pada baris-0 dijadikan 0 dengan menggandakan kedua ruas (1.10) dengan 5 selanjutnya dijumlahkan pada kedua ruas baris-0, sehingga diperoleh :

$$z + 5x_2 - 20s_2 + 40s_3 = 280$$

- ♦ Koefisien x_3 pada baris-1 dijadikan 0 dengan menggandakan kedua ruas (1.10) dengan 0,2 selanjutnya dijumlahkan pada kedua ruas baris-1, sehingga diperoleh :

$$-0,4x_2 + s_1 - 2s_2 + 0,4s_3 = 8$$

♦ Koefisien x_3 pada baris-2 dijadikan 0 dengan menggandakan kedua ruas (1.10) dengan $-0,25$ selanjutnya dijumlahkan pada kedua ruas baris-2, sehingga diperoleh :

$$x_1 + 1,25x_2 + s_1 + 0,5s_2 - 0,5s_3 = 2$$

Mengingat pada baris-4 tidak memuat vektor x_3, maka tidak perlu menerapkan EROs sehingga baris-4 tidak mengalami modifikasi/perubahan. Dengan perubahan di atas diperoleh tabel berikut ini:

Tabel 1.3
Hasil iterasi kedua

Baris		**Peubah Basis**
0	$z \quad +5x_2 \quad -20s_2 \ +40s_3 \quad =280$	$z = 280$
1	$-0,4x_2 \quad +s_1 - 2s_2 + 0,4s_3 \quad =8$	$s_1 = 8$
2	$x_1 + 1,25\,x_2 \quad +s_1 + 1,5s_2 - 0,5s_3 \quad = 2$	$x_1 = 2$
3	$-2x_2 + x_3 \quad -4s_2 + 2s_3 \quad =8$	$x_3 = 8$
4	$x_2 \quad + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Selanjutnya diperhatikan lagi baris-0,

$$z + 5x_2 - 20s_2 + 40s_3 = 280$$

atau dapat disajikan sebagai

$$z = 280 - 5x_2 + 20s_2 - 40s_3$$

Terlihat bahwa dengan perubahan nilai x_2 dengan 1 ($s_2 = s_3 = 0$) akan berpengaruh terhadap nilai z berkurang dengan 5. Demikian pula perubahan nilai s_3 dengan 1 ($x_2 = s_2 = 0$) akan sangat berpengaruh terhadap nilai z berkurang dengan 40. Sebaliknya perubahan nilai s_2 dengan 1 ($x_2 = s_3 = 0$) akan menaikkan nilai z dengan 20. Dengan demikian s_2 diubah menjadi peubah basis.

Dengan cara yang sama sebagaimana diuraikan di atas diperoleh tabel baru sebagaimana di bawah ini :

Tabel 1.4
Hasil iterasi ketiga

Baris		Peubah Basis
0	$z \quad +9x_2 \quad -10s_1 \quad +36s_3 = 200$	$z = 200$
1	$0,2x_2 \quad -0,5s_1 + s_2 - 0,2s_3 = -4$	$s_2 = -4$
2	$x_1 + 0,95x_2 \quad +1,75s_1 \quad -0,2s_3 = 14$	$x_1 = 14$
3	$1,2x_2 + x_3 \quad +1,2s_3 = 18$	$x_3 = 18$
4	$x_2 \quad + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Dari Tabel 1.4 terlihat bahwa nilai peubah basis $s_2 = -4$, maka terjadi kontradiksi (ingat $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$).

Dengan demikian Tabel 1.4 memberikan solusi optimal, dengan peubah basis $x_1 = 2$ dan $x_3 = 8$.

Selanjutnya berdasarkan syarat :

$$2,4x_1 + 1,8x_2 + 0,4x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

akan memberikan

$$1,8x_2 + 8 \leq 16$$
$$1,5x_2 + 8 \leq 8$$
$$2x_2 + 20 \leq 20$$
$$x_2 \leq 5$$

yang selanjutnya memberikan

$$x_2 \leq 4.444$$
$$x_2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 5$$

Dengan demikian diperoleh peubah basis $x_2 = 0$, dan nilai optimal maksimum

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 280$$

C. PENGGUNAAN ALGORITMA SIMPLEKS UNTUK MENENTUKAN MASALAH MINIMISASI

Terdapat dua metode penggunaan algoritma simpleks untuk menyelesaikan permasalahan minimisasi.

Metode 1 :

Gandakan kedua ruas fungsi obyektif, persamaan (1.1), dengan (-1) selanjutnya tentukan masalah maksimasi dengan fungsi obyektif $-z$. Solusi optimal pada masalah maksimasi akan memberikan penyelesaian optimal pada masalah minimisasi.
(*optimal z-value pada min problem*) = - (*optimal obyektif function value z for max problem*)

Metode 2 :

Modifikasi algoritma simpleks dapat dipergunakan untuk menentukan masalah minimisasi secara langsung.
Modifikasi langkah ke-3 algoritma simpleks, menjadi : apabila semua peubah nonbasis pada baris-0 mempunyai koefisien tak positif, maka penyelesaian fisibel basis yang diperoleh adalah optimal. Apabila terdapat peubah nonbasis pada baris-0 mempunyai koefisien positif, pilih peubah dengan koefisien positif pada baris-0 untuk dijadikan basis.

Contoh 1.5

Diberikan program linear masalah minimisasi disajikan sebagai :

min. $z = 2x_1 - 3x_2$

syarat $x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

Sebagaimana diuraikan di atas program linear masalah minimisasi dapat diselesaikan dengan dua metode :

Metode 1 :

Mengubah program linear masalah minimisasi menjadi program linear masalah maksimasi denngan menggandakan kedua ruas persamaan obyektif dengan (-1).

Dengan menggandakan kedua ruas fungsi obyektif dengan (-1), masalah minimisasi tersebut menjadi masalah maksimasi

$$-z = -2x_1 + 3x_2$$

Misalkan $w = -z$, maka masalah minimisasi di atas menjadi bentuk maksimasi

$$\begin{aligned} \text{maks.} \quad & w = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{syarat} \quad & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya dibawa ke bentuk program linear standar

$$\begin{aligned} \text{maks.} \quad & w = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{syarat} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan algoritma simpleks disusun peubah basis (BV) dan peubah nonbasis (NBV) :

$$\text{BV} = \{ s_1, s_2 \} \quad \text{dan} \quad \text{NBV} = \{ x_1, x_2 \}$$

dan dengan mengambil nilai $x_1 = x_2 = 0$ diperoleh nilai s_1 dan s_4 yang merupakan penyelesaian fisibel basis awal, sehingga masalah maksimasi di atas dapat disajikan dalam tabel :

Tabel 1.5
Tabel awal Contoh 1.5 dengan Metode 1

Baris		Peubah Basis
0	$w+2x_1-3x_2 \qquad = 0$	$w=0$
1	$x_1+x_2+s_1 = 4$	$s_1 = 4$
2	$x_1-x_2 \qquad +s_2 = 6$	$s_2 = 6$

Selanjutnya diselesaikan sebagaimana uraian contoh sebelumnya.

Metode 2 :

Modifikasi algoritma simpleks untuk menentukan solusi masalah minimisasi problem secara langsung.

Program linear masalah minimisasi di atas adalah :

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{syarat} & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Berdasarkan algoritma simpleks disusun peubah basis (BV) dan peubah nonbasis (NBV) :

$$\text{BV} = \{ s_1, s_2 \} \quad \text{dan} \quad \text{NBV} = \{ x_1, x_2 \}$$

Dengan mengambil nilai $x_1 = x_2 = 0$ diperoleh nilai s_1 dan s_4 yang merupakan penyelesaian fisibel basis awal, sehingga masalah maksimasi di atas dapat disajikan dalam tabel :

Tabel 1.6
Tabel awal Contoh 1.5 dengan Metode 2

Baris		Peubah Basis
0	$z-2x_1+3x_2 \qquad = 0$	$z=0$
1	$x_1+x_2+s_1 \qquad = 4$	$s_1 = 4$
2	$x_1-x_2 \qquad +s_2 = 6$	$s_2 = 6$

- Pada baris-0 terlihat bahwa koefisien x_2 adalah positif, maka haruslah x_2 menjadi peubah basis.
- Pada baris-1 terlihat bahwa koefisien x_2 adalah 1, maka x_2 merupakan basis pada baris-1.
- Pada baris-0 koefisien x_2 dijadikan nol dengan cara kedua ruas baris-1 digandakan dengan -3 selanjutnya dijumlahkan pada kedua ruas baris-0 sehingga diperoleh :

$$z - 5x_1 - 3s_1 = -12$$

- Pada baris-2 koefisien x_2 dijadikan nol dengan cara kedua ruas baris-1 dijumlahkan pada kedua ruas baris-2 sehingga diperoleh :

$$2x_1 + s_1 + s_2 = 10$$

Dengan demikian Tabel 1.6 di atas menjadi :

Tabel 1.7
Hasil iterasi pertama Contoh 1.5

Baris		**Peubah Basis**
0	$z - 5x_1 \quad - 3s_1 \quad = -12$	$z = -12$
1	$x_1 + x_2 + s_1 \quad = 4$	$x_2 = 4$
2	$2x_1 \quad + s_1 + s_2 = 10$	$s_2 = 10$

Dari Tabel 1.7 terlihat bahwa koefisien setiap peubah basis pada baris-0 adalah non positif. Berdasarkan langkah ke-3 algoritma simpleks termodifikasi tabel tersebut merupakan tabel optimal. Dengan demikian penyelesaian optimal masalah minimisasi di atas adalah $z = -12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, dan $x_1 = s_1 = 0$.

Apabila suatu program linear mempunyai lebih dari satu buah solusi optimal, maka dikatakan program linear tersebut mempunyai *multiple optimal solution* (penyelesaian optimal multipel) atau *alternative optimal solution* (penyelesaian optimal alternatif).

Algoritma simpleks dapat dipergunakan untuk meninjau apakah suatu program linear mempunyai penyelesaian optimal alternatif.

Contoh 1.6

Suatu perusahaan manufaktur mobil angkutan dan truk, terdiri dari dua divisi yaitu divisi pembuatan bodi dan divisi pengecatan. Apabila divisi pengecatan hanya mengerjakan pengecatan truk, maka setiap hari dapat menyelesaikan pengecatan 40 buah truk, dan apabila hanya mengerjakan pengecatan mobil angkutan sehari dapat menyelesaikan 60 buah. Sedangkan divisi pembuatan bodi bila hanya mengerjakan bodi mobil angkutan sehari dapat menyelesaikan 50 buah, dan bila hanya mengerjakan bodi truk sehari dapat menyelesaikan 50 buah. Untuk kerja pembuatan bodi hingga pengecatan truk setiap kendaraan memperoleh keuntungan bersih sebesar 300 (satuan ribu rupiah), dan untuk kerja pembuatan bodi hingga pengecatan mobil angkutan setiap kendaraan memperoleh keuntungan bersih sebesar 200 (satuan ribu rupiah). Bangunlah suatu program linear untuk menentukan distribusi kerja setiap harinya sehingga diperoleh keuntungan maksimum.

♦

Penyelesaian:

Perusahaan tersebut harus menentukan jumlah produksi (membuatkan bodi sekaligus pengecatannya) truk dan juga mobil angkutan setiap harinya, untuk keperluan tersebut didefinisikan peubah :

x_1 : jumlah truk diproduksi dalam satu hari,

x_2 : jumlah mobil angkutan diproduksi dalam satu hari,

dan jumlah keuntungan maksimum (dalam satuan ratus ribu rupiah) setiap hari adalah

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

Sedangkan syarat yang harus dipenuhi :

Syarat 1 : Pada hari saat divisi pengecatan sibuk, lama waktu (bagian dari hari) untuk kegiatan pengecatan adalah lebih kecil atau sama dengan 1 (hari),

Syarat 2 : Pada hari saat divisi pembuatan bodi sibuk, lama waktu (bagian dari hari) untuk kegiatan pembuatan bodi adalah lebih kecil atau sama dengan 1 (hari),

♦ Lama waktu (bagian dari hari) untuk pengecatan truk setiap hari adalah :

$\frac{1}{40}x_1$

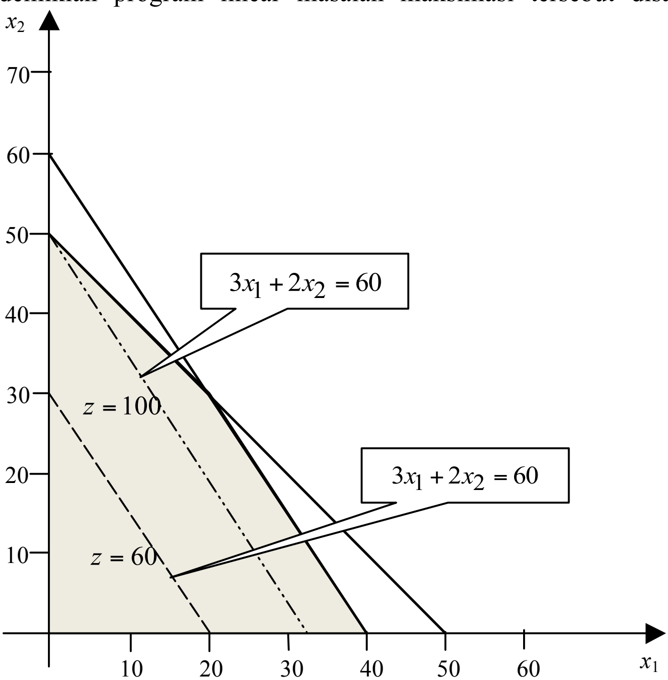
- Lama waktu (bagian dari hari) untuk pengecatan mobil angkutan setiap hari adalah : $\frac{1}{60}x_2$
- Lama waktu (bagian dari hari) untuk pembuatan bodi truk setiap hari adalah : $\frac{1}{50}x_1$
- Lama waktu (bagian dari hari) untuk pembuatan bodi mobil angkutan setiap hari adalah : $\frac{1}{50}x_2$

Dari uraian di atas syarat yang harus dipenuhi dapat disajikan sebagai :

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1$$

Dengan demikian program linear masalah maksimasi tersebut disajikan sebagai :



Gambar 1.3
Daerah fisibel penyelesaian program linear Contoh 1.6

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

syarat $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$

$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

Gambar 1.3 menunjukkan daerah fisibel untuk program linear masalah maksimasi tersebut.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan penyelesaian optimal program linear masalah maksimasi

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

syarat $3x_1 + 2x_2 \leq 120$

$x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1, x_2 \geq 0$

2) Pergunakan algoritma simpleks untuk menyelesaikan masalah program linear

maks. $z = 2x_1 + 3x_2$

syarat $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

3) Pergunakan algoritma simpleks untuk menyelesaikan masalah program linear

min. $z = 4x_1 - x_2$

syarat $2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_2 \leq 5$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

4) Pergunakan algoritma simpleks untuk menyelesaikan masalah program linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{maks.} & z = x_1 + 9x_2 + x_3 \\
\text{syarat} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Ikuti langkah penyelesaian yang dicontohkan pada Contoh 1.4. Kunci jawabannya $z_{\text{maks}} = 120$
2) Ikuti langkah penyelesaian yang dicontohkan pada Contoh 1.4. Kunci jawabannya $z_{\text{maks}} = \dfrac{31}{2}$
3) Ikuti langkah penyelesaian yang dicontohkan pada Contoh 1.4. Kunci jawabannya $z_{\text{maks}} = -5$
4) Ikuti langkah penyelesaian yang dicontohkan pada Contoh 1.4. Kunci jawabannya $z_{\text{maks}} = \dfrac{81}{2}$.

RANGKUMAN

Masalah program linear terdiri dari fungsi obyektif disertai beberapa persamaan atau pertidaksamaan yang merupakan syarat untuk penyelesaian masalah tersebut, yaitu menentukan vektor $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)$ yang memberikan nilai optimal (maksimum ataupun minimum) fungsi obyektif :

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \qquad (1.1)$$

sehingga dipenuhi syarat

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (1.2)$$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.3) \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m
\end{array}
$$

Program linear dikatakan dalam bentuk standar apabila syarat (1.3) berbentuk :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.4)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Persamaan (1.1) dapat disajikan sebagai $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$ dengan **c** suatu vektor baris dan **x** suatu vektor kolom sedangkan persamaan (1.4) dapat disajikan sebagai $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan **A** suatu matriks dan **b** suatu vektor kolom.

Vektor **x** yang memenuhi syarat (1.2) dan (1.4) disebut penyelesaian fisibel.

Penyelesaian basis terkait dengan syarat (1.4) adalah penyelesaian yang diperoleh dengan memberikan nilai nol pada *n-m* peubah sehingga sub-matriks $\mathbf{A}_0$ dari matriks **A,** mempunyai determinan tidak nol, selanjutnya ditentukan nilai dari *n* ke *m* peubah-peubah tersebut. Selanjutnya ke *m* peubah disebut peubah basis, dan ke *n-m* peubah yang lain disebut peubah nonbasis.

Apabila suatu penyelesaian basis juga memenuhi syarat (1.2) maka disebut penyelesaian fisibel basis.

Apabila suatu penyelesaian fisibel basis dipenuhi nilai ke *m* peubah basis adalah positif, maka disebut *nondegenerate basic feasible solution* (atau penyelesaian fisibel basis tak merosot).

Suatu penyelesaian fisibel minimum adalah suatu penyelesaian fisibel yang meminimalkan nilai (1.1).

Region (daerah) dimana suatu program linear terdefinisi, yaitu daerah yang dibangun (*generating*) oleh himpunan penyelesaian fisibel disebut *feasible region* (daerah fisibel). Suatu program linear dalam bentuk umum :

min. (atau maks.) $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

dengan syarat $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$

dapat dibawa ke bentuk standar dengan menambahkan *n* buah peubah *slack* s_j sehingga sistem di atas disajikan sebagai

min. (atau maks.) $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

dengan syarat
$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.5) \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \\
& x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

atau dapat disajikan sebagai meminimalkan nilai $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x}$ sehingga dipenuhi syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b}$, dengan **s** suatu vektor kolom dimensi m.

Misalkan suatu program linear bentuk standar terdefinisi pada suatu daerah fisibel S dimensi n dengan syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $\mathbf{x} \geq 0$. Suatu vektor tak nol **d** disebut *direction of unboundedness* apabila untuk semua $\mathbf{x} \in S$ dan suatu $c \geq 0$ dipenuhi $\mathbf{x} + c\mathbf{d} \in S$ **.**

Teorema :

Apabila suatu program linear mempunyai solusi optimal, maka terdapat suatu penyelesaian fisibel basis optimal.

Suatu program linear dengan m buah syarat, dua buah penyelesaian fisibel dikatakan berdekatan (*adjacent*) apabila himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian mempunyai $m-1$ kesamaan peubah basis.

Algoritma simpleks dipergunakan untuk menentukan penyelesaian suatu program linear yaitu menentukan nilai maksimal (atau minimal) dari persamaan (1.1). Algoritma simpleks merupakan rangkaian langkah:

1. Langkah ke-1 : Mengubah bentuk program linear ke bentuk standar.
2. Langkah ke-2 : Menentukan penyelesaian fisibel basis dari program linear bentuk standar.
3. Langkah ke-3 : Meninjau apakah penyelesaian fisibel basis yang diperoleh merupakan penyelesaian fisibel basis optimal.
4. Langkah ke-4 : Apabila penyelesaian fisibel basis yang diperoleh pada langkah ke-2 bukan merupakan penyelesaian fisibel basis optimal, maka tentukan pilihan peubah nonbasis diubah menjadi peubah basis dan sebaliknya tentukan peubah basis diubah menjadi peubah nonbasis, selanjutnya dengan sistem persamaan yang baru ditentukan basis penyelesaian fisibel basis terkait yang mempunyai nilai fungsi obyektif lebih baik.
5. Langkah ke-5 :Pergunakan *Elementary Row Operations* (EROs) untuk menentukan penyelesaian fisibel basis yang baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif lebih baik. Selanjutnya kembali ke langkah ke 3.

Dimaksud dengan EROs adalah melakukan transformasi matriks koefisien **A** menjadi matriks koefisien baru **A'**, dengan salah satu operasi:

1. ERO-1 : Matriks koefisien **A'** diperoleh dari matriks koefisien **A** dengan menggandakan elemen-elemen suatu baris tertentu pada matriks **A** dengan suatu skalar tak nol.
2. ERO-2 : Matriks koefisien **A'** diperoleh dari matriks koefisien **A** dengan menggandakan elemen-elemen satu baris tertentu (baris *j*) dengan skalar tak nol (skalar *c*), selanjutnya hasilnya ditambahkan ke suatu baris tertentu lain (baris j, $i \neq j$).
3. ERO-3 : Matriks koefisien **A'** diperoleh dari matriks koefisien **A** dengan menukar posisi dua baris tertentu berlainan, posisi baris ke *i* dan baris ke j saling ditukarkan ($i \neq j$).

Terdapat dua metode penggunaan algoritma simpleks untuk menyelesaikan permasalahan minimisasi.

Metode 1 :

Gandakan kedua ruas fungsi obyektif, persamaan (1.1), dengan (-1) selanjutnya tentukan masalah maksimasi dengan fungsi obyektif $-z$. Solusi optimal pada masalah maksimasi akan memberikan penyelesaian optimal pada masalah minimisasi.

(*optimal z-value pada min problem*) = - (*optimal obyektif function value z for max problem*)

Metode 2 :

Modifikasi algoritma simpleks dapat dipergunakan untuk menentukan minimum masalah secara langsung.

Modifikasi langkah ke-3 algoritma simpleks, menjadi : apabila semua peubah nonbasis pada baris-0 mempunyai koefisien tak positif, maka penyelesaian fisibel basis yang diperoleh adalah optimal. Apabila terdapat peubah nonbasis pada baris-0 mempunyai koefisien positif, pilih peubah dengan koefisien positif pada baris-0 untuk dijadikan basis.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Untuk menentukan penyelesaian masalah program linear yang disajikan dalam bentuk umum terlebih dahulu harus membawa masalah program linear tersebut dalam bentuk standar, dengan ….
   A. mengubah penyajian fungsi obyektif sehingga ruas kanan nol

B. mengubah penyajian pertidaksamaan syarat dari $<$ atau $>$ menjadi $=$
C. mengubah penyajian pertidaksamaan syarat dari $\le$ atau $\ge$ menjadi $=$
D. mengubah penyajian pertidaksamaan syarat dari $\le$ atau $\ge$ menjadi $=$ dengan menambahkan peubah *slack*

2) Masalah program linear yang disajikan dalam bentuk umum selalu dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks ….
A. $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$
B. $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$
C. $z = \mathbf{c}\,\mathbf{x} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \ge \mathbf{b}$
D. pernyataan di atas salah

3) Suatu penyelesaian basis disebut penyelesaian fisibel basis apabila ….
A. memenuhi syarat $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ge 0$
B. memenuhi syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$
C. memenuhi syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$
D. memenuhi syarat $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \ge \mathbf{b}$

4) Peubah basis adalah peubah yang nilainya tidak nol dan ….
A. matriks koefisien peubah basis pada sistem syarat adalah non singular
B. matriks koefisien peubah basis pada sistem syarat adalah singular
C. termuat pada fungsi obyektif
D. termuat pada setiap fungsi syarat

5) Penyelesaian fisibel basis disebut *nondegenerate basic feasible solution* apabila ….
A. dipenuhi syarat $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ge 0$
B. semua peubah basis bernilai negatif
C. semua peubah basis bernilai positif
D. semua peubah *slack* bernilai positif

6) Untuk suatu masalah program linear maka dipenuhi ….
A. penyelesaian fisibel berada di luar daerah fisibel
B. penyelesaian fisibel berada pada sekitar daerah fisibel (*boundary feasible region*)
C. penyelesaian fisibel berada di dalam daerah fisibel
D. semua jawaban di atas salah

7) Suatu program linear dengan m buah syarat, dua buah daerah fisibel dikatakan berdekatan (*adjacent*) apabila….
   A. himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian mempunyai $m-1$ kesamaan peubah basis
   B. himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian mempunyai m kesamaan peubah basis
   C. irisan himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian tidak kosong
   D. himpunan peubah basis masing-masing penyelesaian saling asing

8) Suatu masalah program linear dapat diselesaikan apabila masing-masing peubah yang termuat pada fungsi obyektif ….
   A. merupakan peubah basis
   B. termuat pada setiap fungsi syarat
   C. termuat pada sekurang-kurangnya satu fungsi syarat
   D. semua jawaban di atas salah

9) Dimaksud dengan metode simpleks untuk menyelesaikan suatu program linear yaitu mempergunakan ….
   A. prosedur penyelesaian suatu sistem persamaan linear dipergunakan untuk menyelesaikan program linear
   B. prosedur matriks dipergunakan untuk menyelesaikan program linear
   C. prosedur kalkulus dipergunakan untuk menyelesaikan program linear
   D. semua jawaban di atas salah

10) *Elementary Row Operations* (EROs) dipergunakan untuk ….
   A. menentukan penyelesaian fisibel basis baru
   B. menentukan penyelesaian fisibel basis baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif lebih baik
   C. menentukan penyelesaian fisibel basis yang baru sehingga diperoleh nilai fungsi obyektif optimal
   D. semua jawaban di atas salah

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Analisis Kepekaan

Suatu masalah penting pada program linear adalah masalah analisis kepekaan (*sensitivity analysis*). Analisis kepekaan membahas pengaruh perubahan parameter pada program linear terhadap solusi optimalnya.

Setelah mempelajari masalah tersebut diharapkan pembaca mempunyai pengertian dan pemahaman mengenai logika dan manfaat akan program linear sehingga diharapkan akan mampu mempelajari program linear lanjut (*advanced linear programming*).

A. TINJAUAN SECARA GRAFIK MASALAH ANALISIS KEPEKAAN

Misalkan diambil suatu program linear masalah maksimasi yang disajikan sebagai :

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

syarat $2x_1 + x_2 \le 100$

$x_1 + x_2 \le 80$

$x_1 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

Program linear tersebut mempunyai bentuk standar :

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

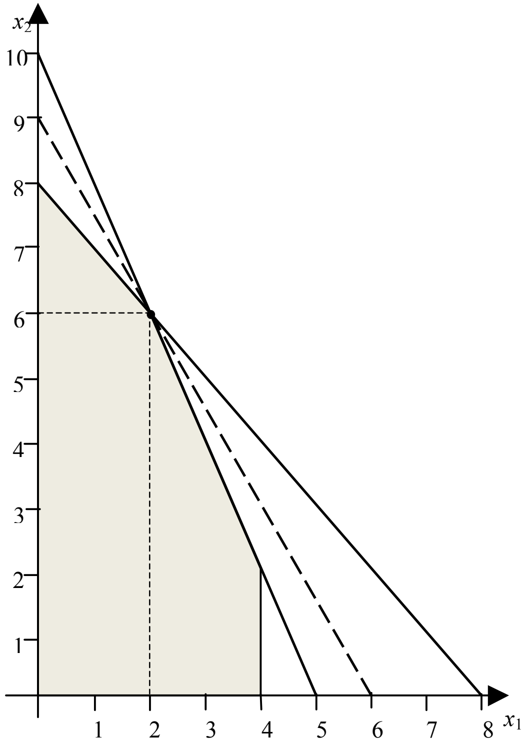
syarat $2x_1 + x_2 + s_1 = 100$

$x_1 + x_2 + s_2 = 80$

$x_1 + s_3 = 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

Program linear masalah maksimasi di atas mempunyai penyelesaian optimal $z = 180$, dicapai pada nilai $x_1 = 20$ dan $x_2 = 60$, dengan peubah basis x_1, x_2 dan s_3.



Gambar 1.4
Daerah fisibel penyelesaian masalah maksimasi

Apabila koefisien peubah basis pada fungsi obyektif diubah, maka permasalahan yang timbul adalah seberapa besar perubahan tersebut dapat dilakukan agar tetap diperoleh solusi optimal.

Misalkan koefisien peubah basis x_1 pada fungsi obyektif diubah menjadi c_1, maka harus ditentukan nilai optimal dari $z = c_1x_1 + 2x_2$, misalnya dicapai nilai optimal maksimum $z = C$.

Dengan demikian nilai optimal tersebut dicapai untuk $x_2 = -\frac{c_1 x_1}{2} + \frac{C}{2}$.

Untuk menentukan bilangan arah garis $c_1x_1 + 2x_2 = C \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c_1}{2}x_1 + C$

mempunyai bilangan arah $m = -\frac{c_1}{2}$.

Mengingat syarat yang harus dipenuhi :

$2x_1x_2 + s_1 = 100 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 100 - s_1$ mempunyai bilangan arah $m = -\frac{2}{1} = -2$

$x_1 + x_2 + s_2 = 80 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 80 - s_2$ mempunyai bilangan arah $m = -\frac{1}{1} = -1$

Dengan demikian agar peubah basis berada pada daerah fisibel maka haruslah dipenuhi $-2 \le -\frac{c_1}{2} \le -1$ atau $2 \le c_1 \le 4$.

Misalkan diambil $c_1 = 4$, $z = 4x_1 + 2x_2$ maka program linear masalah maksimasi di atas mempunyai penyelesaian optimal $z = 200$, dicapai pada nilai $x_1 = 20$ dan $x_2 = 60$, dengan peubah basis x_1, x_2 dan s_3.

B. BEBERAPA FORMULA PENTING

Diperhatikan program linear masalah maksimasi ataupun masalah minimisasi, dengan *n* buah peubah dan *m* buah syarat yang secara umum disajikan dengan sistem :

$$
\begin{aligned}
\text{maks./min.}\quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
\text{syarat}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_i \ge 0,\quad i = 1, 2, 3, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

atau dalam bentuk standar disajikan sebagai :

$$
\begin{aligned}
\text{maks./min.}\quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
\text{syarat}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n + s_3 = b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

dengan $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ merupakan peubah *slack* yang ditambahkan.

Tidak mengurangi keumuman masalah, untuk mempermudah pemahaman sementara khusus dibahas program linear masalah maksimasi. Misalkan pada solusi optimal program linear di atas BV_i merupakan peubah basis pada baris ke-*i*, $\mathrm{BV} = \{\mathrm{BV}_1, \mathrm{BV}_2, \mathrm{BV}_3, \ldots, \mathrm{BV}_m\}$ merupakan himpunan peubah basis, dan

$$x_{\mathrm{BV}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{BV}_1} \\ x_{\mathrm{BV}_2} \\ \ldots\ldots \\ x_{\mathrm{BV}_m} \end{pmatrix}$$

Didefinisikan pula NBV sebagai himpunan peubah nonbasis, dan untuk mempermudah pemahaman diambil contoh soal :

Contoh 1.6

Masalah maksimasi program linear :

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$ (1.13)

syarat
$$\begin{aligned} &8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\ &4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20 \\ &2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Program linear di atas dibawa ke bentuk standar

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ (1.15)

syarat
$$\begin{aligned} &8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \\ &4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20 \\ &2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad (1.16)$$

dan sistem di atas mempunyai bentuk optimal

$$
\begin{aligned}
z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 &= 280 && (1.17)\\
-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 &= 24 \\
-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 &= 8 && (1.18)\\
x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}5s_2 + 1{,}5s_3 &= 2
\end{aligned}
$$

Pada sistem optimal di atas $\mathrm{BV}_1 = s_1$, $\mathrm{BV}_2 = x_3$ dan $\mathrm{BV}_3 = x_1$ berarti

$$x_{\mathrm{BV}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

dan $\mathrm{NBV} = \{x_2, s_2, s_3\}$, berarti

$$x_{\mathrm{NBV}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Didefinisikan :

1. $c_{\mathrm{BV}} = \left(c_{\mathrm{BV}_1}\ c_{\mathrm{BV}_2}\ c_{\mathrm{BV}_3} \cdots c_{\mathrm{BV}_m} \right)$

   c_{BV_i} : koefisien peubah basis pada fungsi obyektif (1.12)

   Pada ilustrasi (1.17) vektor c_{BV} adalah $c_{\mathrm{BV}} = (0\ \ 20\ \ 60)$

2. $c_{\mathrm{NBV}} = \left(c_{\mathrm{NBV}_1}\ c_{\mathrm{NBV}_2}\ c_{\mathrm{NBV}_3} \cdots c_{\mathrm{NBV}_m} \right)$

   c_{NBV_i} : koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif (1.12)

   Pada ilustrasi (1.17) vektor c_{NBV} adalah $c_{\mathrm{NBV}} = (30\ \ 0\ \ 0)$

3. $\mathbf{B}_{m\times m}$ matriks bertipe $m \times m$, dengan vektor kolom koefisien peubah basis x_{BV} pada sistem program linear (1.13).

   Pada ilustrasi (1.17) matriks **B** adalah $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{a}_j$ adalah vektor kolom dengan elemen koefisien peubah x_j pada sistem program linear (1.13).

Pada ilustrasi (1.17) vektor $\mathbf{a}_2$ adalah $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{N}_{m\times(n-m)}$ matriks bertipe $m\times(n-m)$, dengan vektor kolom koefisien peubah nonbasis pada sistem program linear (1.13).

   Pada ilustrasi (1.17) matriks $\mathbf{N}_{m\times(n-m)}$ adalah $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{b}$ adalah vektor kolom dengan elemen konstanta di ruas kanan pada sistem program linear (1.13).

   Pada ilustrasi (1.17) vektor $\mathbf{b}$ adalah $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

Berdasarkan definisi vektor dan matriks di atas, sistem program linear masalah maksimasi (1.14), (1.15) dapat disajikan sebagai

$$z = c_{\mathrm{BV}}x_{\mathrm{BV}} + c_{\mathrm{NBV}}x_{\mathrm{NBV}} \tag{1.19}$$

$$\mathbf{B}x_{\mathrm{BV}} + \mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b} \tag{1.20}$$

$$x_{\mathrm{BV}}, x_{\mathrm{NBV}} \geq 0$$

Ditinjau persamaan matriks (1.20)

$$\mathbf{B}x_{\mathrm{BV}} + \mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b}$$

bila kedua ruas digandakan dengan $c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}$ diperoleh

$$c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}x_{\mathrm{BV}} + c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$c_{\mathrm{BV}}\,x_{\mathrm{BV}} + c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{1.21}$$

dan persamaan (1.19) disajikan sebagai

$$z - c_{\mathrm{BV}}x_{\mathrm{BV}} - c_{\mathrm{NBV}}x_{\mathrm{NBV}} = 0 \tag{1.22}$$

Kedua ruas persamaan (1.21) dan (1.22) dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$z + c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,x_{\mathrm{NBV}} - c_{\mathrm{NBV}}x_{\mathrm{NBV}} = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

atau dapat disajikan sebagai :

$$z + \left(c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_{\mathrm{NBV}}\right)x_{\mathrm{NBV}} = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Apabila kedua ruas dari persamaan (1.20) digandakan dengan $\mathbf{B}^{-1}$ akan diperoleh

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}x_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{NBV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

atau dapat disajikan sebagai

$$x_{\mathrm{BV}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Dengan demikian diperoleh bentuk optimal :

$$\begin{aligned}
&z + \left(c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_{\mathrm{NBV}}\right)x_{\mathrm{NBV}} = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\
&x_{\mathrm{BV}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\
&x_{\mathrm{BV}}, x_{\mathrm{NBV}} \geq 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya ilustrasi masalah di atas (Contoh 1.6) dapat disajikan sebagai

$$\text{maks.} \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{syarat} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (1.23)$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya mudah ditentukan invers dari matriks $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$ adalah

$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$ sehingga dari persamaan matriks (1.23) diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1,25 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_2 + 2s_2 - 8s_3 \\ -2x_2 + 2s_2 - 4s_3 \\ 1,25x_2 - 0,5s_2 + 1,5s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya ilustrasi masalah di atas dapat disajikan sebagai

$$z + \left(\begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad z + \left(\begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1,25 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad z + \left(\begin{pmatrix} 35 & 10 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 280$$

$$\Leftrightarrow \quad z + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 280$$

Dengan demikian untuk ilustrasi masalah di atas (Contoh 1.6) diperoleh bentuk optimal :

$$z + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 280$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_2 + 2s_2 - 8s_3 \\ -2x_2 + 2s_2 - 4s_3 \\ 1,25x_2 - 0,5s_2 + 1,5s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.7

Suatu program linear masalah maksimasi berbentuk

maks. $z = x_1 + 4x_2$

syarat $x_1 + 2x_2 \le 6$

$2x_1 + x_2 \le 8$

$x_1, x_2 \ge 0$

mempunyai peubah basis BV=$\{x_2, s_2\}$.

Penyelesaian :
Program linear masalah maksimasi

$$\begin{array}{ll} \text{maks.} & z = x_1 + 4x_2 \\ \text{syarat} & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

disajikan dalam bentuk standar

$$\begin{array}{ll} \text{maks.} & z = x_1 + 4x_2 \\ \text{syarat} & x_1 + 2x_2 + s_1 \quad = 6 \\ & 2x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \tag{1.24}$$

diketahui mempunyai peubah basis BV=$\{x_2, s_2\}$, sehingga matriks **B** berbentuk

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dengan } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya fungsi obyektif dapat disajikan sebagai

$$z = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

dan persamaan syarat (1.24) dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks (dengan mengingat x_2, s_2 merupakan peubah basis) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{B}x_{\text{BV}} + \mathbf{N}x_{\text{NBV}} = \mathbf{b}$$

$$z + \left(c_{\text{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_{\text{NBV}}\right)x_{\text{NBV}} = c_{\text{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan tabel optimal persamaan (1.25) disajikan sebagai :

$$z-\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=0$$

$$z+\left(\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$$

$$z+\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=12$$

dan dari (1.26) diperoleh

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$$

Dengan demikian persamaan matriks optimal untuk program linear di atas dapat disajikan sebagai

$$z+\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=12$$

$$\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$$

Atau disajikan dalam bentuk tabel optimal

$$z+x_1+2s_1=12$$

$$\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}s_1=3$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}s_1 + s_2 = 5$$

C. ANALISIS KEPEKAAN

Sebagaimana diketahui Analisis Kepekaan membahas pengaruh perubahan parameter program linear (koefisien pada fungsi obyektif, nilai ruas kanan dan *technological coefficient*) akan mengubah solusi optimal.

Telah dipahami bahwa pada tabel simpleks (untuk masalah maksimasi) peubah basis BV mencapai optimum jika dan hanya jika semua syarat yang harus dipenuhi berbentuk persamaan dengan ruas kanan konstanta nonnegatif dan semua peubah pada baris-0 mempunyai koefisien nonnegatif. Dengan kata lain apabila semua syarat yang harus dipenuhi berbentuk persamaan dengan ruas kanan konstanta nonnegatif berarti peubah basis adalah fisibel. Apabila setiap peubah pada baris-0 mempunyai koefisien nonnegatif, maka setiap solusi fisibel tidak akan lebih besar dari nilai z terkait dengan peubah basis tersebut.

Pembahasan selanjutnya adalah mengapa suatu tabel fisibel dan optimal hanya bergantung pada ruas kanan persamaan syarat dan koefisien peubah pada baris-0.

Misalkan suatu masalah program linear telah terselesaikan dan diperoleh peubah basis yang merupakan optimal basis. Prosedur di bawah ini dapat dipergunakan untuk mengamati apabila dilakukan perubahan parameter/koefisien pada program linear akan berakibat peubah basis tidak akan memberikan nilai optimum lebih besar.

Langkah-1 : Gunakan formula yang telah dibahas pada awal Kegiatan Belajar 2, untuk menentukan/mengamati bagaimana pengaruh perubahan ruas kanan persamaan syarat dan baris-0 pada tabel optimal,

Langkah-2 : Apabila setiap peubah pada baris-0 mempunyai koefisien nonnegatif dan setiap persamaan syarat konstanta di ruas kanan nonnegatif, maka peubah basis fisibel dan akan memberikan nilai optimal.

Ditinjau suatu ilustrasi masalah, suatu perusahaan furnitur memproduksi tiga jenis barang, meja tulis, meja, dan kursi, dengan :

x_1 : jumlah meja tulis yang diproduksi

x_2 : jumlah meja yang diproduksi

x_3 : jumlah kursi yang diproduksi

dilengkapi dengan fungsi obyektif :

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

dan syarat yang harus dipenuhi solusi optimal :

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$ (syarat pekerjaan kayu)

$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 20$ (syarat pekerjaan *finishing*)

$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \le 48$ (syarat bahan kayu)

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Program linear masalah maksimasi tersebut mempunyai bentuk standar :

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

syarat $8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$

$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + s_2 = 20$

$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + s_3 = 48$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

atau disajikan dalam bentuk tabel awal :

Tabel 1.8
Tabel awal masalah pembuatan furnitur

Baris		**Peubah Basis**
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$	$x_3 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + s_2 = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + s_3 = 48$	$s_3 = 48$

dan mempunyai tabel optimal :

Tabel 1.9
Penyelesaian optimal masalah pembuatan furnitur

Baris		Peubah Basis
0	$z - 2x_2 + \quad 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1	$-2x_2 + \quad s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2	$-2x_2 + x_3 + \quad 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3	$x_1 + 1{,}25x_2 - \quad 0{,}5s_2 + 1{,}5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

Pada tabel optimal peubah basis : $\{s_1, x_3, x_1\}$ dan peubah nonbasis $\{x_2, s_2, s_3\}$, dengan penyelesaian fisibel basis $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

Terdapat beberapa jenis perubahan parameter pada program linear yang berakibat dapat merubah penyelesaian optimal, antara lain :

1. perubahan koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif,
2. perubahan koefisien peubah basis pada fungsi obyektif,
3. perubahan nilai ruas kanan persamaan fungsi syarat.

1. Perubahan koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif,

Fungsi obyektif disajikan dengan

maks. $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \text{K} + c_nx_n$

dan pada contoh di atas fungsi obyektif adalah

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x3$

dengan peubah nonbasis x_2, terlihat bahwa koefisien x_2, $c_2 = 30$. Bagaimana pengaruh perubahan nilai c_2 terhadap penyelesaian optimal, atau dengan perkataan lain berapa nilai c_2 dapat diberikan agar peubah basis $\text{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$ tetap optimal.

Mengingat program linear di atas dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks

$$z = c_{\text{BV}}x_{\text{BV}} + c_{\text{NBV}}x_{\text{NBV}}$$
$$\mathbf{B}x_{\text{BV}} + \mathbf{N}x_{\text{NBV}} = \mathbf{b}$$
$$x_{\text{BV}}, x_{\text{NBV}} \geq 0$$

dengan $\mathbf{B}_{m\times m}$ matriks bertipe $m\times m$, dengan vektor kolom koefisien peubah basis x_{BV} pada tabel awal, dan $\mathbf{B}^{-1}$ matriks bertipe $m\times m$, dengan vektor kolom koefisien peubah *slack* $s_1, s_2, \ldots, s_m$.
Misalkan parameter c_2 diubah menjadi $c_2+\delta$, maka diperhatikan perubahan yang terjadi pada tabel peubah basis. Mengingat matriks invers $\mathbf{B}^{-1}$ dan vektor **b** tidak terpengaruh oleh perubahan parameter c_2, maka vektor basis

$$x_{\text{BV}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_{\text{NBV}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

juga tidak terpengaruh oleh perubahan parameter c_2, sehingga peubah basis tetap fisibel.

Dengan demikian peubah basis akan memberikan nilai optimal apabila $c_2+\delta \geq 0$, dan bila $c_2+\delta < 0$ tidak memberikan nilai optimal. Pada contoh di atas terlihat bahwa vektor koefisien peubah nonbasis x_2 adalah

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

dan $c_{\text{BV}}\mathbf{B}^{-1} = (0\ \ 10\ \ 10)$ sehingga

$$\overline{c}_2 = (\ 0\ \ 10\ \ 10)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} - (30+\delta) = 5-\delta \quad ,$$

dengan $\overline{c}_2$ adalah koefisien peubah nonbasis x_2 pada baris-0 tabel optimal.

Agar peubah basis tetap fisibel maka haruslah $5-\delta \geq 0$, atau $\delta \leq 5$.
Hal ini berarti, apabila (pada contoh di atas) pada fungsi obyektif koefisien peubah nonbasis x_2 diubah menjadi $c_2+\delta$ dengan $\delta \leq 5$ (misalnya c_2 diubah menjadi $c_2 = 35$) maka akan diperoleh penyelesaian optimal dengan peubah basis tetap, yaitu $x_1 = 2$, $x_3 = 8$, dan nilai maksimum juga tetap, yaitu $z = 280$.

Namun apabila (pada contoh di atas) pada fungsi obyektif koefisien peubah nonbasis x_2 diubah menjadi $c_2+\delta$ dengan $\delta > 5$. Misalnya c_2 diubah menjadi $c_2 = 40$ maka koefisien x_2 pada baris-0 Tabel 1.9 menjadi

$$\bar{c}_2 = (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} - 40 = -5$$

Sehingga Tabel 1.9 berubah menjadi :

Tabel 1.10
Perubahan hasil penyelesaian akibat perubahan koefisien peubah nonbasis

Baris		**Peubah Basis**
0	$z - 2x_2 + \quad 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1	$-2x_2 + \quad s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2	$-2x_2 + x_3 + \quad 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3	$x_1 + 1,25x_2 - \quad 0,5s_2 + 1,5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

Berarti Tabel 1.10 bukan tabel optimal, apabila dilakukan langkah simpleks sehingga x_2 berubah menjadi peubah basis, akan diperoleh tabel optimal :

Tabel 1.11
Penyelesaian optimal dari masalah Tabel 1.10

Baris		**Peubah Basis**
0	$z + 4x_1 + \quad 8s_2 + 16s_3 = 288$	$z = 288$
1	$1,6x_1 + \quad +s_1 + 1,2s_2 - 5,6s_3 = 27,2$	$s_1 = 27,2$
2	$1,6x_1 + \quad x_3 + \quad 1,2s_2 - 1,6s_3 = 11,2$	$x_3 = 11,2$
3	$0,8x_1 + x_2 - \quad 0,4s_2 + 1,2s_3 = 1,6$	$x_2 = 1,6$

Sehingga diperoleh nilai maksimum $z = 288$ dengan peubah basis $s_1 = 27,2$, $x_3 = 11,2$, dan $x_2 = 1,6$ dan peubah nonbasis $x_1 = s_2 = s_3 = 0$.

2. Perubahan koefisien peubah basis pada fungsi obyektif,

Kembali diperhatikan fungsi obyektif yang disajikan dengan

maks. $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \text{K} + c_nx_n$

dan guna mempermudah pemahaman kembali diperhatikan contoh di atas suatu program linear masalah maksimasi dengan bentuk standar

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$$\text{syarat} \quad \begin{aligned} &8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 &&= 48 \\ &4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + \quad s_2 &&= 20 \\ &2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + \qquad s_3 &&= 48 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

dengan tabel awal :

Tabel 1.12
Perubahan hasil penyelesaian akibat perubahan koefisien peubah basis

Baris		Peubah Basis
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 \qquad = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 \qquad = 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + \quad s_2 \quad = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + \quad s_3 = 48$	$s_3 = 48$

dan tabel optimal :

Tabel 1.13
Penyelesaian optimal dari masalah Tabel 1.12

Baris		Peubah Basis
0	$z + \quad 2x_2 + \qquad 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1	$-2x_2 + \quad s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2	$-2x_2 + x_3 + \quad 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3	$x_1 + 1,25x_2 - \quad 0,5s_2 + 1,5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

Berdasarkan baris-0 tabel awal (Tabel 1.8) terlihat peubah basis x_1 dan x_3 dengan koefisien x_1, $c_1 = 60$ dan koefisien x_3, $c_3 = 20$. Bagaimana pengaruh perubahan nilai c_1 (dan/atau c_3) terhadap penyelesaian optimal ? Atau dengan perkataan lain berapa nilai c_1 (dan/atau c_3) dapat diberikan agar peubah basis $\text{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$ tetap optimal ?

Perhatikan vektor $c_{\text{BV}} = \left(c_{\text{BV}_1}\, c_{\text{BV}_2}\, c_{\text{BV}_3} \cdots c_{\text{BV}_m} \right)$ dengan c_{BV_i} : koefisien peubah basis pada fungsi obyektif. Pada contoh soal di atas vektor c_{BV} adalah $c_{\text{BV}} = (0\ \ 20\ \ 60)$, berarti pada fungsi obyektif (tabel awal) koefisien peubah basis s_1, $c_1 = 0$, koefisien peubah basis x_3, $c_2 = 20$ dan koefisien peubah basis x_1, $c_3 = 60$.

Misalkan dilakukan perubahan koefisiean peubah basis x_1 (pada fungsi obyektif/baris-0 Tabel 1.8), yaitu c_1 diubah menjadi $c_1 + \delta$, berarti c_{BV} diubah menjadi $c_{BV} = (0 \;\; 20 \;\; 60+\delta)$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{N}\,\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{b}$$

Berdasarkan Tabel 1.8 dengan mengingat $\mathbf{x}_{BV} = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ diperoleh bentuk persamaan matriks :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\,|\,\mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 1,5 \end{array}\right) = \mathbf{I}\,|\,\mathbf{B}^{-1}$$

Dengan demikian diperoleh matriks $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Ditinjau $\mathbf{c}_{BV}\,\mathbf{B}^{-1}$ dengan $\mathbf{c}_{BV} = (\; 0 \;\; 20 \;\; 60+\delta \;)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 60+\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10-0,5\delta & 10+1,5\delta \end{pmatrix}$$

dan dari Tabel 1.8 diketahui

- pada baris-0, koefisien x_1 adalah $c_1 = 60 + \delta$, koefisien x_2 adalah $c_2 = 30$ dan koefisien x_3 adalah $c_3 = 20$.
- pada baris-1, koefisien x_1 adalah $a_{11} = 8$, koefisien x_2 adalah $a_{21} = 6$ dan koefisien x_3 adalah $a_{31} = 1$.
- pada baris-2, koefisien x_1 adalah $a_{12} = 4$, koefisien x_2 adalah $a_{22} = 2$ dan koefisien x_3 adalah $a_{32} = 1,5$
- pada baris-3, koefisien x_1 adalah $a_{13} = 2$, koefisien x_2 adalah $a_{23} = 1,5$ dan koefisien x_3 adalah $a_{33} = 0,5$

Selanjutnya pada tabel optimal (apabila c_1 diubah menjadi $c_1 + \delta$, dengan c_1 adalah koefisien x_1 pada baris-0 Tabel 1.8) diperoleh :

- koefisien x_2 pada baris-0 adalah :

$$\begin{aligned}\bar{c}_2 &= \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2\\ &= \begin{pmatrix}0 & 10-0,5\delta & 10+1,5\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 2\\ 1.5\end{pmatrix} - 30\\ &= 5 + 1,25\delta\end{aligned}$$

- koefisien s_2 pada baris-0 adalah :

$$\begin{aligned}\bar{d}_2 &= \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_2 - d_2\\ &= \begin{pmatrix}0 & 10-0,5\delta & 10+1,5\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} - 0\\ &= 10 - 0,5\delta\end{aligned}$$

- koefisien s_3 pada baris-0 adalah :

$$\begin{aligned}\bar{d}_3 &= \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_3 - d_3\\ &= \begin{pmatrix}0 & 10-0,5\delta & 10+1,5\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} - 0\\ &= 10 + 1,5\delta\end{aligned}$$

Dengan demikian baris-0 pada tabel yang dihasilkan dapat disajikan sebagai

$$z+(5+1,25\ \delta)x_2+(10-0,5\delta)s_2+(10+0,5\delta)s_3=C$$

Tabel tersebut akan merupakan tabel optimal apabila koefisien x_2, s_2, dan s_3 masing-masing nonnegatif,

$$5+1,25\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4$$
$$10-0,5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 20$$
$$10+1,5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -\frac{20}{3}=-6,67$$

Berarti tabel tersebut merupakan tabel optimal apabila $-4 \leq \delta \leq 20$, atau koefisien x_1, $56 \leq c_1 \leq 80$.

3. Perubahan nilai ruas kanan persamaan fungsi syarat,

Program linear masalah maksimasi ataupun minimisasi dalam bentuk standar sebagaimana disajikan dengan persamaan (1.12) biasa disajikan dalam bentuk persamaan matriks :

$$\begin{array}{ll} \text{maks./min.} & z=\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}}+\mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} \\ \text{syarat} & \mathbf{B}\,\mathbf{x}_{\mathrm{BV}}+\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_{\mathrm{BV}},\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} \geq 0 \end{array}$$

Diperhatikan hubungan koefisien peubah baris-0 pada tabel optimum dan pada tabel awal, disajikan dengan persamaan vektor :

$$\bar{c}_j=\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}a_j-c_j \qquad (1.26)$$

dengan $\bar{c}_j$ koefisien peubah x_j pada baris-0 tabel optimum, $\mathbf{a}_j$ vektor koefisien peubah x_j pada tabel awal dan c_j koefisien peubah x_j pada baris-0 tabel awal.

Mengingat **B** adalah matriks dengan vektor kolom koefisien peubah basis pada tabel awal, berarti nilai elemen vektor **b** tidak berpengaruh pada matriks **B** ataupun matriks invers $\mathbf{B}^{-1}$. Dengan mengingat persamaan (1.26) perubahan nilai elemen vektor **b** tidak akan berpengaruh pada koefisien peubah nonbasis pada baris-0 tabel optimum.

Diperhatikan pula hubungan antara vektor koefisien peubah nonbasis pada tabel optimum $\bar{\mathbf{a}}_j$, dan pada tabel awal $\mathbf{a}_j$ sebagaimana disajikan dengan persamaan :

$$\bar{\mathbf{a}}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$$

dan untuk vektor **b**, yaitu konstanta di ruas kanan sistem persamaan syarat disajikan dengan persamaan :

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (1.27)$$

Berdasarkan persamaan (1.27) terlihat bahwa perubahan nilai elemen vektor **b** berpengaruh pada vektor $\bar{\mathbf{b}}$, yaitu vektor dengan elemen konstanta di ruas kanan pada tabel optimum.

Perlu mendapatkan perhatian, apabila elemen ruas kanan persamaan pada baris j, $j \neq 0$, tabel optimum masing-masing nonnegatif, maka vektor basis fisibel dan optimal. Sebaliknya apabila terdapat persamaan pada sebuah baris dengan ruas kanan bernilai negatif, maka vektor basis tidak fisibel dan tidak optimal.

Contoh 1.7

Diberikan program linear masalah maksimasi dalam bentuk standar, dengan peubah *slack* s_1, s_2, s_3

$$\begin{aligned}
\text{maks.} \quad & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{syarat} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20 \\
& 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 48 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

dengan tabel awal :

Tabel 1.14
Tabel awal Contoh 1.7

Baris		**Peubah basis**
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 48$	$s_3 = 48$

dan tabel optimal :

Tabel 1.15
Penyelesaian optimal Contoh 1.7

Baris		Peubah basis
0	$z + 2x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3	$x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}5s_2 + 1{,}5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

Apabila konstanta ruas kanan baris 2 pada tabel awal b_2 diubah menjadi $b_2 + \delta$ maka vektor $\bar{\mathbf{b}}$, dengan elemen $\bar{\mathbf{b}}$ adalah konstanta ruas kanan baris j pada tabel optimal dengan $j = 1, 2, \ldots, m$, berubah menjadi

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20+\delta \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+2\delta \\ 8+2\delta \\ 2-0{,}5\delta \end{pmatrix}$$

Dari hasil di atas terlihat agar peubah basis tetap fisibel dan optimal haruslah:

$$\begin{gathered} 24 + 2\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -12 \\ 8 + 2\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4 \\ 2 - 0{,}5\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 4 \end{gathered}$$

berarti $-4 \leq \delta \leq 4$ atau <u>**agar peubah basis tetap fisibel dan optimal**</u> haruslah $6 \leq b_2 \leq 24$.

Misalkan pada masalah di atas nilai $b_2 = 20$ diubah menjadi $b_2 = 22$, maka nilai peubah basis adalah :

$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (dalam hal ini diambil vektor **b** baru)

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dan nilai optimal untuk z adalah :

$$z = \mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \text{(dalam hal ini diambil vektor } \mathbf{b} \text{ baru)}$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix} = 300$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Program linear masalah maksimasi

maks. $z = 3x_1 + 2x_2$

syarat

$$3x_1 + 2x_2 \le 120$$
$$x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

mempunyai nilai optimum $z_{\max} = 120$.

Tentukan *range* perubahan nilai koefisien x_1 agar peubah basis tetap fisibel dan memberikan nilai optimal.

2) Program linear masalah maksimasi

maks. $z = 2x_1 + 3x_2$

syarat

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

mempunyai nilai optimum $z_{\max} = \dfrac{32}{3}$ dengan peubah basis adalah $x_1 = \dfrac{10}{3}$, $x_2 = \dfrac{4}{3}$. Tentukan *range* perubahan nilai koefisien x_1 agar peubah basis tetap fisibel dan memberikan nilai optimal.

3) Program linear masalah maksimasi

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

syarat $8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$

$4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 20$

$2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \le 8$

$x_2 \le 5$

mempunyai nilai optimal $z = 240$ dengan peubah basis $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$, $s_4 = 5$.

Tentukan *range* perubahan nilai koefisien peubah basis pada fungsi obyektif agar peubah basis tetap fisibel dan memberikan nilai optimal.

4) Tunjukkan bahwa program linear di bawah ini mempunyai alternatif solusi optimal, tentukan tiga diantaranya

maks. $z = -3x_1 + 6x_2$

syarat $5x_1 + 7x_2 \le 35$

$-x_1 + 2x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

Petunjuk Jawaban Latihan :

1) - Perhatikan penyelesaian soal nomor 1 pada Kegiatan Belajar 1 modul ini
   - Tentukan x_1 merupakan peubah basis ataukah peubah nonbasis
   - Ubahlah nilai c_1 (koefisien x_1 pada fungsi obyektif) menjadi $\bar{c}_1 = c_1 + \delta$
   - Tentukan perubahan yang terjadi pada koefisien peubah basis/nonbasis yang lain)

2) - Ubahlah nilai c_1 (koefisien x_1 pada fungsi obyektif) menjadi $\bar{c}_1 = c_1 + \delta$
   - Tentukan perubahan yang terjadi pada koefisien peubah basis / nonbasis yang lain)

3) Petunjuk penyelesaiannya sama dengan soal nomor 1

4) Pergunakan perubahan parameter seperti yang dicontohkan di halaman 1.50-1.59. Kunci jawabannya $z_{\max} = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $z_{\max} = 6$, $x_1 = \frac{56}{17}$, $x_2 = \frac{45}{17}$; $z_{\max} = 6$, $x_1 = \frac{28}{17}$, $x_2 = \frac{31}{17}$)

RANGKUMAN

Analisis kepekaan membahas pengaruh perubahan parameter pada pemrograman linear terhadap solusi optimalnya.

Apabila koefisien peubah basis pada fungsi obyektif diubah, maka permasalahan yang timbul adalah seberapa besar perubahan tersebut dapat dilakukan agar tetap diperoleh solusi optimal.

Diperhatikan program linear masalah maksimasi ataupun masalah minimisasi, dengan n buah peubah dan m buah syarat yang dalam bentuk standar disajikan sebagai :

$$
\begin{array}{ll}
\text{maks./min.} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
\text{syarat} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\
 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n + s_3 = b_3 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \\
 & \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n
\end{array}
$$

dengan $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m$ merupakan peubah *slack* yang ditambahkan.

Misalkan pada solusi optimal program linear di atas BV_i merupakan peubah basis pada baris ke i, $\text{BV} = \{\text{BV}_1, \text{BV}_2, \text{BV}_3, \ldots, \text{BV}_m\}$ merupakan himpunan peubah basis dan didefinisikan pula NBV sebagai himpunan peubah nonbasis.

1. $c_{\text{BV}} = \left(c_{\text{BV}_1}\ c_{\text{BV}_2}\ c_{\text{BV}_3} \cdots c_{\text{BV}_m} \right)$, c_{BV_i} : koefisien peubah basis pada fungsi obyektif
2. $c_{\text{NBV}} = \left(c_{\text{NBV}_1}\ c_{\text{NBV}_2}\ c_{\text{NBV}_3} \cdots c_{\text{NBV}_m} \right)$
3. c_{NBV_i} : koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif

4. $\mathbf{B}_{m\times m}$ matriks bertipe $m\times m$, dengan vektor kolom koefisien peubah basis $\mathbf{x}_{\mathrm{BV}}$ pada sistem persamaan syarat
5. $\mathbf{a}_j$ adalah vektor kolom dengan elemen koefisien peubah x_j pada sistem-sistem persamaan syarat
6. $\mathbf{N}_{m\times(n-m)}$ matriks bertipe $m\times(n-m)$, dengan vektor kolom koefisien peubah nonbasis pada sistem persamaan syarat $\mathbf{b}$ adalah vektor kolom dengan elemen konstanta di ruas kanan pada sistem persamaan syarat

Berdasarkan definisi vektor dan matriks di atas, sistem program linear masalah maksimasi dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} \\ \mathbf{B}\,\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} &+ \mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{BV}}&, \mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} \ge 0 \end{aligned}$$

Ditinjau persamaan matriks

$$\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b}$$

bila kedua ruas digandakan dengan $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\,\mathbf{B}^{-1}$ diperoleh

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

dan persamaan fungsi obyektif disajikan sebagai

$$z - \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} - \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = 0$$

Kedua ruas persamaan diperolah dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$z + \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} - \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

atau dapat disajikan sebagai :

$$z + \left(\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Apabila kedua ruas dari persamaan $\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{N}\,\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{b}$ digandakan dengan $\mathbf{B}^{-1}$ akan diperoleh

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

atau dapat disajikan sebagai $\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Dengan demikian diperoleh bentuk optimal :

$$z + \left(\mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}\right)\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{c}_{BV}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_{BV}, \mathbf{x}_{NBV} \geq 0$$

Analisis kepekaan membahas pengaruh perubahan parameter program linear (koefisien pada fungsi obyektif, nilai ruas kanan dan *technological coefficient*) akan merubah solusi optimal.

Pada tabel simpleks (untuk masalah maksimasi) peubah basis BV mencapai optimum jika dan hanya jika semua syarat yang harus dipenuhi berbentuk persamaan dengan ruas kanan konstanta nonnegatif dan semua peubah pada baris-0 mempunyai koefisien nonnegatif.

Prosedur untuk mengamati apabila dilakukan perubahan parameter/koefisien pada program linear akan berakibat peubah basis tidak akan memberikan nilai optimum lebih besar.

1. Langkah-1 : Gunakan formula yang telah dibahas pada awal Kegiatan Belajar 2, untuk menentukan/mengamati bagaimana pengaruh perubahan ruas kanan persamaan syarat dan baris-0 pada tabel optimal,
2. Langkah-2 : Apabila setiap peubah pada baris-0 mempunyai koefisien nonnegatif dan setiap persamaan syarat konstanta di ruas kanan nonnegatif, maka peubah basis fisibel dan akan memberikan nilai optimal.

Terdapat beberapa jenis perubahan parameter pada program linear yang berakibat dapat merubah penyelesaian optimal, antara lain :

1. perubahan koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif,
2. perubahan koefisien peubah basis pada fungsi obyektif,
3. perubahan nilai ruas kanan persamaan fungsi syarat.
4.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu program linear mempunyai tabel optimal berbentuk

maks./min. $z + 7x_2 + 15s_2 + 10s_3 = 28$

syarat $-3x_2 + s_1 + 2s_2 - 5s_3 = 24$

$-2x_2 + x_3 + 4s_2 - 3s_3 = 8$

$x_1 + 3x_2 - s_2 + 2s_3 = 2$

dengan peubah basis….

A. x_1, x_2 dan x_3

B. s_1, x_3 dan x_1

C. x_2, s_2 dan s_3

D. s_1, s_2 dan s_3

2) Koefisien peubah basis pada fungsi obyektif suatu program linear biasa disimbolisir dengan ….

A. $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} = \left(c_{\mathrm{BV}_1}\ c_{\mathrm{BV}_2}\ c_{\mathrm{BV}_3} \cdots c_{\mathrm{BV}_m} \right)$

B. $\mathbf{c}_{\mathrm{NBV}} = \left(c_{\mathrm{NBV}_1}\ c_{\mathrm{NBV}_2}\ c_{\mathrm{NBV}_3} \cdots c_{\mathrm{NBV}_m} \right)$

C. $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} = \left(b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m \right)$

D. $\mathbf{c}_{\mathrm{NBV}} = \left(b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m \right)$

3) Bentuk standar suatu program linear disajikan dalam bentuk

maks. $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

syarat $8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$

$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20$

$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

dengan tabel optimal

$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$

$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$

$$-2x_2 + x_3 + \quad 2s_2 - 4s_3 = 8$$
$$x_1 + 1,25x_2 - 0,5s_2 + 1,5s_3 = 2$$

dimaksud dengan koefisien peubah nonbasis pada fungsi obyektif adalah….

A. $c_{\text{NBV}} = (60\ \ 20\ \ 0)$

B. $c_{\text{NBV}} = (5\ \ 10\ \ 10)$

C. $c_{\text{NBV}} = (30\ \ 0\ \ 0)$

D. $c_{\text{NBV}} = (0\ \ 0\ \ 0)$

4) Program linear disajikan pada soal nomor 3 mempunyai peubah basis pada fungsi obyektif ….

A. $c_{\text{BV}} = (60\ \ 30\ \ 20)$

B. $c_{\text{BV}} = (5\ \ 10\ \ 10)$

C. $c_{\text{BV}} = (30\ \ 0\ \ 0)$

D. $c_{\text{BV}} = (0\ \ 20\ \ 60)$

5) Program linear disajikan pada soal nomor 3 mempunyai matriks $\mathbf{B}_{m\times m}$ ….

A. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1,5 \\ 2 & 1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

D. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1,25 & 0 \end{pmatrix}$

6) Matriks **B** sebagaimana dimaksud pada soal nomor 5 untuk pada umumnya program linear merupakan ….

A. matriks singular

B. matriks nonsingular
C. matriks identitas
D. matriks simetris

7) Program linear disajikan pada soal nomor 3 mempunyai matriks $\mathbf{N}_{m\times(n-m)}$ ….
A. $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1,25 & 0 \end{pmatrix}$
B. $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$
C. $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1,25 & 0 \end{pmatrix}$

8) Matriks **N** sebagaimana dimaksud pada soal nomor 7 untuk pada umumnya program linear bukan bentuk standar merupakan ….
A. matriks singular
B. matriks nonsingular
C. matriks identitas
D. matriks simetris

9) Fungsi obyektif program linear pada soal nomor 3 dapat disajikan dalam bentuk ….
A. $z = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$
B. $z = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

C. $z = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

D. semua jawaban salah

10) Sistem syarat program linear pada soal nomor 3 dapat disajikan dalam bentuk ….

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

D. semua jawaban salah

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D
2) D
3) A
4) A
5) C
6) C
7) A
8) C
9) B
10) B

Tes Formatif 2

1) B
2) A
3) C
4) D
5) A
6) B
7) C
8) B
9) A
10) C

Daftar Pustaka

Bronson R. 1983. *Schaum's outline of : Theory and Problems of Operations Research*, McGraw Hill Book Company: Singapore.

Thierauf R J and Klekamp R C. 1975. *Decision Making Through Operations Research*, John Wiley & Sons Inc: New York.

Winston W L. 2004. *Operations Research Applications and Algorithms*, Thomson Brooks/Cole: Toronto.