MODUL 1

Deret Fourier

Prof. Dr. Bambang Soedijono

PENDAHULUAN

Pada modul ini dibahas masalah ekspansi deret Fourier Sinus – Cosinus untuk suatu fungsi periodik ataupun yang dianggap periodik, dan dibahas pula transformasi Fourier ataupun transformasi Cosinus Fourier dan transformasi Sinus Fourier. Hal ini cukup penting, terutama dalam penyelesaian berbagai masalah syarat batas yang penyelesaiannya disajikan dalam bentuk deret fungsi sinus-cosinus.

Pada bagian akhir modul ini dibahas pula berbagai aplikasi deret Fourier. Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu memahami masalah ekspansi deret Fourier ataupun transformasi Fourier suatu fungsi, dan mempunyai keterampilan dalam mengaplikasikan Deret Fourier.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan:

1. mampu menyajikan ekspansi deret Fourier ataupun transformasi Fourier suatu fungsi,
2. terampil mempergunakan transformasi Fourier untuk menghitung nilai suatu integral tertentu,
3. terampil menyelesaikan suatu masalah syarat batas dengan memanfaatkan ekspansi deret Fourier suatu fungsi.

KEGIATAN BELAJAR 1

Deret Fourier

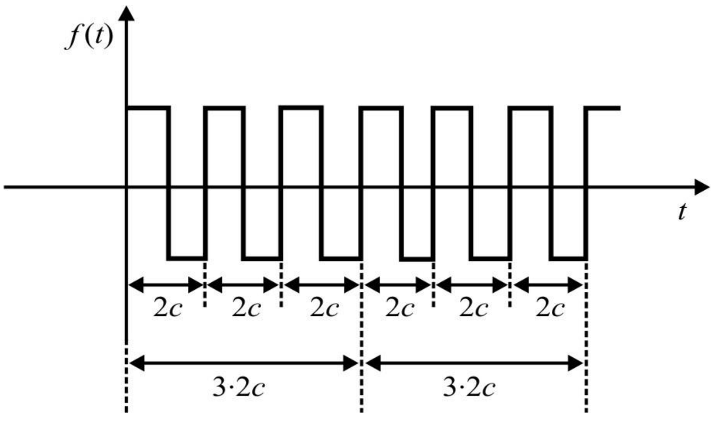
Pada kegiatan belajar ini dibahas ekspansi suatu fungsi dalam bentuk Deret Fourier. Deret Fourier merupakan suatu deret tak hingga dengan suku-suku memuat komponen trigonometri, sinus-cosinus, yang konvergen ke suatu fungsi periodik.

FORMULA DERET FOURIER

Suatu fungsi f merupakan fungsi periodik jika dan hanya jika terdapat konstanta c, sehingga untuk setiap x dalam domain f dipenuhi $f(x+2c)=f(x)$, dan $2c$ disebut periode dari fungsi f.

Mudah dipahami apabila $2c$ merupakan periode dari fungsi f, maka $2nc$ juga merupakan periode dari fungsi yang sama, fungsi f.

Contoh pada aplikasi, suatu gaya dengan besar (*magnitude*) konstan bekerja pada suatu sistem mekanik akan digambarkan sebagai grafik fungsi periodik sebagaimana disajikan dengan Gambar 1.1 di bawah ini.



Gambar 1.1

Misalkan f, $y = f(t)$ suatu fungsi periodik dengan periode 2π, dan disajikan sebagai:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt + \cdots \qquad (1.1)$$

dengan a_n, b_n konstanta, dan jika untuk setiap *x* deret tersebut konvergen ke $f(x)$, maka

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \qquad (1.2)$$

Selanjutnya, deret (1.2) disebut deret Fourier untuk fungsi periodik $f(x)$, dengan periode 2π.

Jika kedua ruas persamaan (1.2) dikalikan dengan $\cos mx$ (*m* integer) dan selanjutnya diintegralkan terhadap x dari $-\pi$ hingga π, diperoleh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos mx\, dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos mx\, dx$$

$$+ \cdots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx + \cdots$$

dan dengan mengingat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ \pi & \text{jika } m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0 \quad \text{untuk setiap integer } m, n$$

diperoleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \pi a_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

atau dapat disajikan sebagai

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1.3)$$

dan untuk $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,. \qquad (1.4)$$

Jika kedua ruas persamaan (1.2) dikalikan dengan $\sin mx$ (m integer) dan selanjutnya diintegralkan terhadap x dari $-\pi$ hingga π, diperoleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin mx\,dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin mx\,dx$$

$$+\cdots + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx + \cdots$$

dengan mengingat

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin mx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ \pi & \text{jika } m = n > 0 \end{cases}$$

maka diperoleh

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Dengan demikian, setiap fungsi f, $y = f(x)$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π selalu dapat disajikan dalam bentuk deret Fourier (1.2) dengan a_n, b_n ditentukan dengan persamaan (1.3), (1.4), dan (1.5).

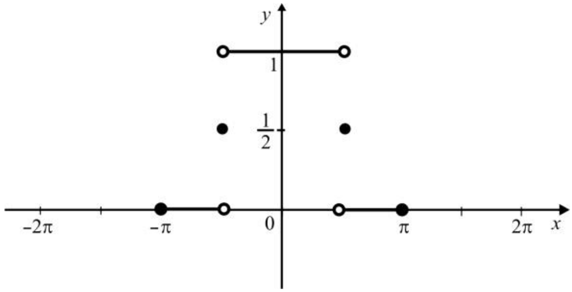
Contoh 1.1 Diberikan f, $y = f(x)$ suatu fungsi periodik dengan periode 2π dan

$$f(x) = 0,\ -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 1,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 0,\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



Gambar 1.2

Sajikan $y = f(x)$ dalam bentuk deret Fourier.

Penyelesaian: Perderetan Fourier untuk fungsi $f, y = f(x)$ di atas berbentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{-n\pi}{2}}{n} \end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi} & \text{untuk } n = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{untuk } n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ 0 & \text{untuk } n = 2, 4, 6, 8, \ldots \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{-\cos\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{-n\pi}{2}}{n\pi} \\
&= 0 \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots\ .
\end{aligned}
$$

Dengan demikian deret Fourier di atas dapat ditulis

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x + \mathrm{L}\quad .
$$

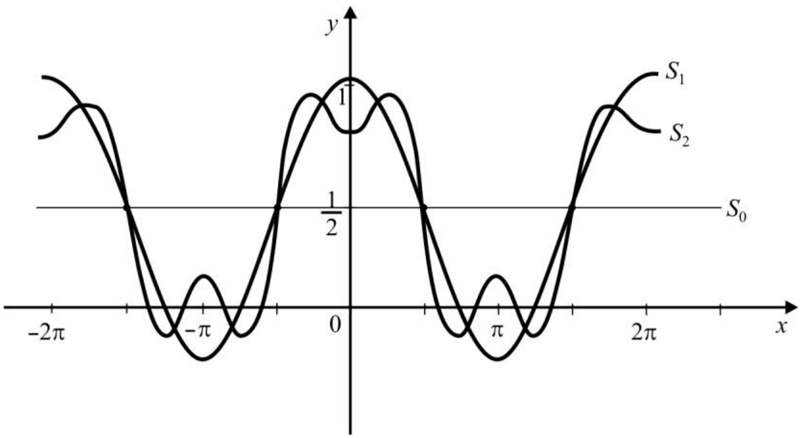
Selanjutnya, jika diambil:

$$
S_0(x) = \frac{1}{2}
$$

$$
S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x
$$

$$
S_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x
$$

maka grafik kurva S_0, S_1, dan S_2 disajikan dengan Gambar 1.3.



Gambar 1.3

Diketahui fungsi f, $y = f\ \ x$ merupakan fungsi kontinu dan terdefinisi pada interval $(-C, C)$ dan di luar interval tersebut dipenuhi $f(x+2C) = f(x)$, misalkan $f(x)$ merupakan fungsi kontinu dan periodik dengan periode *2C*, dengan demikian fungsi *f* dapat disajikan dalam bentuk deret Fourier. Untuk menyusun perderetan Fourier fungsi *f* tersebut dilakukan substitusi variabel

$$t = \frac{\pi}{C}\, x\,.$$

Sehingga $f\ \ x\ = f\left(\frac{C}{\pi}t\right) = \phi\ \ t$ dengan ϕ suatu fungsi periodik dengan periode 2π dan perderetan Fouriernya adalah

$$f\left(\frac{C}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\ a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1.6)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{C}{\pi}t\right)\cos nt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-C}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\ d\left(\frac{\pi}{C}x\right) \end{aligned}$$

atau dapat disajikan sebagai

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{C}{\pi}t\right)\sin nt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-C}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\ d\left(\frac{\pi}{C}x\right) \end{aligned}$$

atau dapat disajikan sebagai

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Dengan demikian persamaan (1.6) dapat disajikan sebagai

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{C}x + b_n \sin\frac{n\pi}{C}x \right) \tag{1.7}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx,\ \ n=1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx,\ \ n=1,2,... \tag{1.8}$$

dengan a_n, b_n diperoleh dari persamaan (1.8).

Apabila $f(x)$ suatu fungsi kontinu dengan periode $2C$, maka perderetan Fourier fungsi $f(x)$ dapat disajikan dengan persamaan (1.7) di atas dengan koefisien a_n dan b_n disajikan sebagai

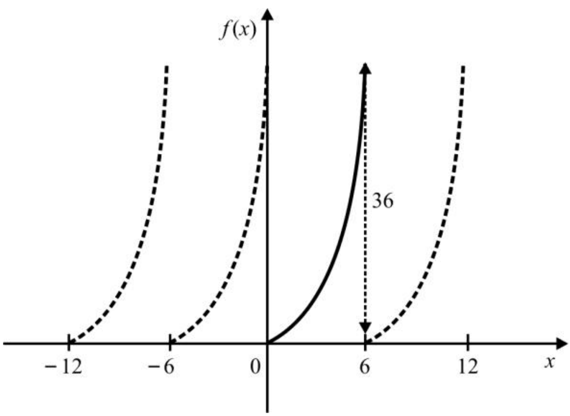
$$a_n = \frac{1}{C}\int_{L}^{L+2C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx,\ \ n=1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{L}^{L+2C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx,\ \ n=1,2,... \tag{1.9}$$

dengan L suatu bilangan real.

Contoh 1.2 Sajikan fungsi $f(x) = x^2,\ 0 < x < 6$ dalam deret Fourier apabila fungsi tersebut mempunyai periode 6.

Penyelesaian:



Fungsi $f(x) = x^2$ mempunyai periode $2C = 6$ berarti $C = 3$ dan dengan mengambil $L = 0$, dengan demikian koefisien Fourier (1.9) menjadi

$$a_n = \frac{1}{C}\int_L^{L+2C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 x^2\cos\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$A_1 = 10,93$$
$$A_2 = 2,73$$
$$A_3 = 1,22$$
$$A_4 = 0,68$$

$$b_n = \frac{1}{C}\int_L^{L+2C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 x^2\sin\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$B_1 = -34,36$$
$$B_2 = -17,18$$
$$B_3 = -11,45$$
$$B_4 = -8,39$$

Dengan demikian diperoleh

$$f(x) = x^2$$

$$= 10,93\cos\frac{\pi x}{3} + 2,73\cos\frac{2\pi x}{3} + 1,22\cos\pi x + 0,68\cos\frac{4\pi x}{3} + \ldots$$

$$-34,36\sin\frac{\pi x}{3} - 17,18\sin\frac{2\pi x}{3} - 11,45\sin\pi x - 8,39\sin\frac{4\pi x}{3} - \ldots$$

DERET SINUS FOURIER, DERET COSINUS FOURIER

Suatu fungsi f, $y = f(x)$ terdefinisi pada selang $-a \le x \le a$ dikatakan fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ dan dikatakan fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$, dengan demikian dipenuhi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{jika } f \text{ fungsi ganjil} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx & \text{jika } f \text{ fungsi genap} \end{cases} \tag{1.10}$$

Karena $\cos x$ merupakan fungsi genap dan $\sin x$ merupakan fungsi ganjil, maka persamaan (1.8) menjadi

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx = \frac{2}{C}\int_{0}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx \tag{1.11}$$

jika f merupakan fungsi genap, dan

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx = 0$$

jika f merupakan fungsi ganjil, dan

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx = 0$$

jika f merupakan fungsi genap, dan

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-C}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx = \frac{2}{C}\int_{0}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx \tag{1.12}$$

jika f merupakan fungsi ganjil.

Selanjutnya, jika f merupakan fungsi periodik dengan periode $2C$ dan juga merupakan fungsi genap, maka perderetan Fourier (1.7) untuk fungsi f tersebut menjadi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{C}x \tag{1.13}$$

dengan a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ diperoleh dari persamaan (1.11).

Jika f merupakan fungsi periodik dengan periode $2C$ dan juga merupakan fungsi ganjil, maka perderetan Fourier (1.7) untuk fungsi f tersebut menjadi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{C}x \tag{1.14}$$

dengan $b_n, n=1,2,\ldots,$ diperoleh dari persamaan (1.12).

Jika fungsi f, $y=f(x)$ terdefinisi pada selang $[0,C]$, dan selanjutnya didefinisikan fungsi f_1, fungsi periodik dengan periode $2C$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(-x), -C \le x \le 0 \\ &= f(x), \quad 0 \le x \le C \end{aligned}$$

berarti f_1 merupakan fungsi genap, sehingga perderetan Fourier untuk fungsi f_1 berbentuk

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{C}x.$$

Karena $f_1(x)=f(x)$, $0\le x\le C$, maka diperoleh

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{C}x,\ 0 \le x \le C \tag{1.15}$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\cos\frac{n\pi}{C}x\,dx,\ n=0,1,2,\ldots. \tag{1.16}$$

Persamaan (1.15) disebut perderetan Cosinus Fourier untuk fungsi f, $y=f(x)$, $0\le x\le C$.

Dengan cara yang sama, didefinisikan fungsi f_2, fungsi periodik dengan periode $2C$,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -f(-x), \quad -C\le x\le 0 \\ &= f(x), \qquad 0\le x\le C \end{aligned}$$

berarti f_2 merupakan fungsi ganjil, sehingga perderetan Fourier untuk fungsi f_2 berbentuk

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{C}x.$$

Karena $f_2(x)=f(x)$ untuk $0\le x\le C,$ maka diperoleh

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{C}x,\ 0\le x\le C \tag{1.17}$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\sin\frac{n\pi}{C}x\,dx. \tag{1.18}$$

Persamaan (1.17) disebut perderetan Sinus Fourier untuk fungsi *f*, $y = f(x),\ 0 \le x \le C$.

Contoh 1.3 Sajikan fungsi $f(x) = \pi - x,\ 0 \le x \le \pi$ dalam bentuk deret Cosinus Fourier.

Penyelesaian:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

$$a_{2n} = 0$$

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

Deret Cosinus Fourier untuk $f(x) = \pi - x$ adalah

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\,\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\ .$$

Contoh 1.4 Sajikan fungsi $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 1$ dalam bentuk deret Sinus Fourier.

Penyelesaian:

$$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\frac{(-1)^n\left(2 - n^2\pi^2\right) - 2}{n^3\pi^3}$$

Deret Sinus Fourier untuk $f(x) = x^2$ adalah

$$x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2 - n^2\pi^2) - 2}{n^3\pi^3} \sin n\pi x \,.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Ekspansikan fungsi $f(x) = 2 - x$ untuk $0 < x < 4$, $f(x) = x - 6$ untuk $4 < x < 8$, dalam bentuk deret Fourier dengan periode 8.

2) Ekspansikan fungsi
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$
ke dalam bentuk deret Sinus Fourier.

3) Tentukan ekspansi deret Fourier untuk fungsi
$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t \le -1 \\ 1 + t, & -1 \le t \le 0 \\ 1 - t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $f(x) = \dfrac{16}{\pi^2}\left[\cos\dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi x}{4} + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi x}{4} + \cdots\right]$

2) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty} \dfrac{1 - \cos\dfrac{n\pi}{2}}{n} \sin n\pi$

3) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$ untuk $n = 1, 3, 5, \ldots$, $a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}$ untuk $n = 2, 6, 10, \ldots$,
$a_n = 0$ untuk $n = 4, 8, 12$, dan $b_n = 0$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$

RANGKUMAN

Setiap fungsi f, $y = f(x)$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π dapat disajikan dalam bentuk deret Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Jika fungsi f, $y = f(x)$ merupakan fungsi periodik dengan periode $2C$, maka ekspansi deret Fouriernya berbentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{C} x + b_n \sin \frac{n\pi}{C} x \right]$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^{C} f(x) \cos \frac{n\pi}{C} x\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^{C} f(x) \sin \frac{n\pi}{C} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

atau dapat pula disajikan sebagai

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{L}^{L+2C} f(x) \cos \frac{n\pi}{C} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{C} \int_{L}^{L+2C} f(x) \sin \frac{n\pi}{C} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dengan L konstanta.

Jika fungsi f, $y = f(x)$ terdefinisi pada selang $0 \le x \le L$ dan juga kontinu (kontinu bagian demi bagian), maka ekspansi deret Cosinus Fouriernya berbentuk:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{C} x,\ 0 \le x \le L$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

dan ekspansi deret Sinus Fouriernya berbentuk

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x,\ 0 \le x \le L$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika fungsi $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$ fungsi periodik dengan periode 10 diperderetkan ke dalam bentuk deret Fourier, maka koefisien-koefisiennya adalah ….

A. $a_0 = 3;\ a_n = 0,\ n \ne 0;\ b_n = \dfrac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

B. $a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ b_n = \dfrac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

C. $a_0 = 3;\ a_n = \dfrac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi},\ n = 1, 2, \ldots;\ b_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

D. $a_n = \dfrac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi},\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ b_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

2) Ekspansi deret Fourier fungsi $f(x)$ pada soal nomor 1 adalah ….

A. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{5}x$

B. $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{5}x$

C. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{5}x$

D. $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{5}x$

3) Berdasarkan jawaban soal nomor 2, deret di ruas kanan konvergen titik demi titik ke $f(x)$, dan untuk $x=0$ deret tersebut konvergen ke ….

A. 0

B. $\frac{3}{2}$

C. 3

D. $\frac{2}{3}$

4) Ekspansi deret Sinus Fourier fungai $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ adalah ….

A. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \sin 2nx$

B. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \sin 2nx$

C. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$

D. $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+1} \sin 2nx$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Integral Fourier

Pada kegiatan belajar ini dibahas ekspansi suatu fungsi dalam bentuk integral Fourier. Integral Fourier merupakan suatu integral tak sebenarnya yang merupakan bentuk pendekatan suatu fungsi, dengan demikian kegiatan belajar ini didasarkan pada integral tak sebenarnya dan juga kekonvergenan integral tak sebenarnya.

FORMULA INTEGRAL FOURIER

Sebagaimana telah dipelajari, apabila diberikan fungsi *f*, $y = f(x)$, terdefinisi pada selang $(-c, c)$ dan juga merupakan fungsi periodik dengan periode 2*c*, maka fungsi *f* dapat diperderetkan dalam deret fourier sebagai

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{x=-c}^{x=c} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{x=-c}^{x=c} f(x)\cos\frac{n\pi}{c}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{x=-c}^{x=c} f(x)\sin\frac{n\pi}{c}x\,dx$$

atau dapat disajikan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2c}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{c}(\xi - x)\right)d\xi. \quad (1.19)$$

Apabila fungsi *f* terdefinisi dan memenuhi kondisi di atas untuk setiap interval, untuk setiap nilai *c* cukup besar tetapi berhingga, maka deret

$$\frac{1}{2c}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{c}(\xi - x)\right)d\xi$$

konvergen ke $f(x)$.

Hal di atas menunjukkan suatu gambaran bahwa deret tersebut konvergen untuk *c* cukup besar dekat pada tak hingga, dan fungsi *f* bukan fungsi periodik. Dalam hal ini suku pertama dari deret bernilai nol,

$$\frac{1}{2c}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\,d\xi = 0\text{, untuk } c\to\infty\text{, karena } \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(\xi)\,d\xi$$

mempunyai nilai berhingga.

Selanjutnya diambil $\Delta\upsilon = \dfrac{\pi}{c}$ dan deret di atas dapat disajikan sebagai

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\upsilon\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos(n\Delta\upsilon(\xi-x))\,d\xi,\ c=\frac{\pi}{\Delta\upsilon}$$

atau dapat pula disajikan sebagai

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos(n\Delta\upsilon(\xi-x))\,d\xi\right)\Delta\upsilon,\ c=\frac{\pi}{\Delta\upsilon}.$$

Misalkan *x* diangap tetap, dan $\Delta\upsilon$ positif cukup kecil, maka $n\Delta\upsilon$ berjalan sepanjang sumbu υ positif, dengan demikian diperoleh

$$\lim_{\Delta\upsilon\to 0}\frac{\pi}{\Delta\upsilon}=\infty \quad \text{dan}$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\upsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos(n\Delta\upsilon(\xi-x))\,d\xi\right)\Delta\upsilon$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\left(\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos(\upsilon(\xi-x))\,d\xi\right)d\upsilon.$$

Sehingga diperoleh hubungan

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos(\upsilon(\xi-x))\,d\xi\,d\upsilon \tag{1.20}$$

yang dikenal sebagai formula integral Fourier untuk fungsi $f(x)$.

Formula integral Fourier untuk fungsi $f(x)$ sebagaimana disajikan dengan persamaan (1.20) mudah dijabarkan menjadi

$$f(x)=\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\left[A(\upsilon)\cos\upsilon x + B(\upsilon)\sin\upsilon x\right]d\upsilon,\ -\infty<x<\infty \tag{1.21}$$

$$A(\upsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos\upsilon\xi\,d\xi \tag{1.22}$$

$$B(\upsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\sin\upsilon\xi\,d\xi. \tag{1.23}$$

Contoh 1.5 Bila diberikan fungsi $f(x)=e^{ax}$, tentukan bentuk integral Fourier untuk fungsi $f(x)$ tersebut.

Penyelesaian: Formula integral Fourier disajikan sebagai

$$f(x)=\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\left[A(\upsilon)\cos\upsilon x+B(\upsilon)\sin\upsilon x\right]d\upsilon$$

dengan

$$\begin{aligned}A(\upsilon)&=\frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}e^{a\xi}\cos\upsilon\xi\,d\xi\\&=\frac{e^{a\upsilon}\left(a\cos b\upsilon+b\sin b\upsilon\right)}{a^2+b^2}\\B(\upsilon)&=\frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}e^{a\xi}\sin\upsilon\xi\,d\xi\\&=\frac{e^{a\upsilon}\left(a\sin b\upsilon-b\cos b\upsilon\right)}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$e^{ax}=\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\left\{\frac{e^{a\upsilon}\left(a\cos b\upsilon+b\sin b\upsilon\right)}{a^2+b^2}\cos\upsilon x+\frac{e^{a\upsilon}\left(a\sin b\upsilon-b\cos b\upsilon\right)}{a^2+b^2}\sin\upsilon x\right\}d\upsilon.$$

Contoh 1.6 Tentukan formula integral Sinus Fourier untuk fungsi

$$f\quad x\quad=\begin{cases}1, & 0\le x<c\\ \dfrac{1}{2}, & x=c\\ 0, & x>c\,.\end{cases}$$

Penyelesaian: Fungsi f dapat dianggap sebagai fungsi ganjil, sehingga formula integral Sinus Fourier untuk fungsi f tersebut adalah

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\sin\lambda t\,\sin\lambda x\,dt\,d\lambda\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\sin\lambda t\,dt\right]\sin\lambda x\,d\lambda\,.\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty f(t)\sin\lambda t\,dt = \int_0^c f(t)\sin\lambda t\,dt + \int_c^\infty f(t)\sin\lambda t\,dt$$
$$= \int_0^c \sin\lambda t\,dt$$
$$= \frac{1-\cos\lambda c}{\lambda}\ .$$

Dengan demikian formula di atas menjadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda c}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda\,.$$

Contoh 1.7 Tentukan formula integral Cosinus Fourier untuk fungsi

$$f(x) = e^{-x}\cos x,\ x \geq 0.$$

Penyelesaian: Fungsi f, $f(x) = e^{-x}\cos x\ (x \geq 0)$, dapat dianggap sebagai fungsi genap, sehingga formula integral Cosinus Fourier untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\cos\lambda t\cos\lambda x\,dt\,d\lambda$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\lambda t\,dt\right]\cos\lambda x\,d\lambda\,.$$

$$\int_0^\infty f(t)\cos\lambda t\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-t}\cos t\cos\lambda t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\left[\cos(1+\lambda)t + \cos(1-\lambda)t\right]dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\cos(1+\lambda)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\cos(1-\lambda)t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(1+\lambda)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(1-\lambda)^2}$$
$$= \frac{2+\lambda^2}{4+\lambda^4}\ .$$

Dengan demikian formula di atas menjadi

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+\lambda^2}{4+\lambda^4}\cos\lambda x\ d\lambda .$$

Formula integral Fourier untuk fungsi $f(x)$ sebagaimana disajikan dengan persamaan (1.20),

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos(\upsilon(\xi-x))\,d\xi\,d\upsilon$$

dapat pula disajikan sebagai

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)e^{i\upsilon(\xi-x)}\,d\xi\,d\upsilon . \qquad (1.24)$$

Apabila $f(x)$ tidak kontinu di x, maka persamaan (1.24) disajikan sebagai

$$f(x)\approx\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)e^{i\upsilon(\xi-x)}\,d\xi\,d\upsilon \qquad (1.25)$$

dan apabila $f(x)$ suatu fungsi genap maka persamaan (1.20) menjadi

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos\upsilon\xi\ \cos\upsilon x\ d\xi\,d\upsilon,\ -\infty<x<\infty \qquad (1.26)$$

dan apabila $f(x)$ suatu fungsi ganjil maka persamaan (1.20) menjadi

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} f(\xi)\sin\upsilon\xi\ \sin\upsilon x\ d\xi\,d\upsilon,\ -\infty<x<\infty . \qquad (1.27)$$

Catatan:

$$f(x+0)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \quad \text{limit kanan}$$

$$f(x-0)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x-\Delta x) \quad \text{limit kiri}$$

Contoh 1.8 Buktikan bahwa

$$\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x}{\upsilon^2+1}\,d\upsilon=\frac{\pi}{2}e^{-x},\quad x\geq 0 .$$

Bukti: Misalkan $f(x)=e^{-x}$, mudah ditunjukkan bahwa $f(x)$ suatu fungsi genap, maka berdasarkan formula integral Fourier diketahui

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos\upsilon\xi\,\cos\upsilon x\,d\xi\,d\upsilon\,.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\xi}\cos\upsilon\xi\,\cos\upsilon x\,d\xi\,d\upsilon = e^{-x}$$

Mudah ditunjukkan bahwa

$$\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\xi}\cos\upsilon\xi\;d\xi=\frac{1}{\upsilon^2+1}$$

sehingga

$$\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\xi}\cos\upsilon\xi\,\cos\upsilon x\,d\xi\,d\upsilon = \frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x}{\upsilon^2+1}\;d\upsilon=e^{-x}$$

terbukti

$$\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x}{\upsilon^2+1}\;d\upsilon=e^{-x}$$

atau

$$\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x}{\upsilon^2+1}\;d\upsilon=\frac{\pi}{2}e^{-x}\quad .$$

Selanjutnya teorema di bawah ini membuktikan bahwa untuk setiap $f(x)$ suatu fungsi kontinu bagian demi bagian pada selang berhingga dan untuk setiap titik diskontinu x_0 dipenuhi $f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ maka fungsi $f(x)$ juga dapat disajikan dalam bentuk formula integral Fourier.

Teorema 1.1 Misalkan *f* suatu fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga dan untuk setiap titik diskontinu x_0 berlaku

$$f\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)}{2}.$$

Jika $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$ ada, maka untuk setiap *x*, $f_R'(x)$ dan $f_L'\ x$ ada, fungsi *f* dapat disajikan dalam bentuk *formula integral Fourier*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) dt\, d\lambda \tag{1.28}$$

dengan f_R' dan f_L' berturut-turut menyatakan derivatif kanan dan derivatif kiri fungsi *f*.

Bukti: Ditinjau integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t-x)\, dt\, d\lambda &= \lim_{\beta \to \infty} \int_0^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t-x)\, dt\, d\lambda \\
&= \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_0^{\beta} \cos \lambda (t-x) d\lambda \right] dt \\
&= \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t-x)\, dt\, d\lambda = \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt\ . \tag{1.29}$$

Selanjutnya ditinjau integral

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt &= \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt \\
&= \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{x} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt \\
&\quad + \lim_{a \to \infty} \int_{x}^{a} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt\ .
\end{aligned}$$

Jika diambil substitusi $\tau = x - t$, diperoleh

$$\int_{-a}^{x} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt = \int_0^{a+x} f(x-\tau) \frac{\sin \beta\tau}{\tau}\, d\tau$$

dan jika diambil substitusi $\tau = t - x$, diperoleh

$$\int_{x}^{a} f(t) \frac{\sin \beta (t-x)}{t-x}\, dt = \int_0^{a-x} f(x+\tau) \frac{\sin \beta\tau}{\tau}\, d\tau\ .$$

Didefinisikan fungsi *g* dan *h*, dengan

$$g(\tau) = f(x-\tau) \quad \text{dan} \quad h(\tau) = f(x+\tau) \ .$$

Dengan demikian diperoleh

$$g(0^+) = f(x-0) \quad \text{dan} \quad h(0^+) = f(x+0)$$

dan

$$g'_R(0^+) = f'_L(x) \quad \text{dan} \quad h'_R(0^+) = f'_R(x)$$

dengan $f'_L(x)$ dan $f'_R(x)$ berturut-turut menyatakan derivatif kiri dan derivatif kanan fungsi *f*.

Karena untuk setiap titik diskontinu fungsi *f*, namakan titik *x*, berlaku

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

atau dapat pula ditulis

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

berlaku untuk setiap *x*, dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\, \frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\, dt &= \int_{-a}^{x} f(t)\, \frac{\sin\ \beta(t-x)}{t-x}\, dt + \int_{x}^{a} f(t)\, \frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\, dt \\
&= \int_{0}^{a+x} g(\tau)\, \frac{\sin\beta\tau}{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{a-x} h(\tau)\, \frac{\sin\beta\tau}{\beta}\, d\tau \\
&= g(0^+) \int_{0}^{a+x} \frac{\sin\beta\tau}{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{a+x} \frac{g(\tau)-g(0^+)}{\tau} \sin\ \beta\tau\ d\tau \\
&\quad + h(0^+) \int_{0}^{a-x} \frac{\sin\ \beta\tau}{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{a-x} \frac{h(\tau)-h(0^+)}{\tau} \sin\beta\tau\ d\tau \ .
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $\beta \to \infty$ diperoleh

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\,dt = g\left(0^+\right)\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{a+x}\frac{\sin\beta\tau}{\tau}\,d\tau + \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{a+x}\frac{g(\tau)-g\left(0^+\right)}{\tau}\sin\beta\tau\,d\tau$$

$$+h\left(0^+\right)\lim_{\beta\to\infty}\int_0^{a-x}\frac{\sin\ \beta\tau}{\tau}\,d\tau + \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{a-x}\frac{h(\tau)-h\left(0^+\right)}{\tau}\sin\beta\tau\,d\tau$$

$$= g\left(0^+\right)\frac{\pi}{2} + h\left(0^+\right)\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi\,\frac{g\left(0^+\right)+h\left(0^+\right)}{2}$$

$$= \pi\,\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

$$= \pi\, f(x)\ .$$

Dengan demikian persamaan (1.29) menjadi

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\,d\lambda = \lim_{\beta\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin\beta(t-x)}{t-x}\,dt$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\lim_{\beta\to\infty}\int_{-a}^{a} f(t)\frac{\sin\ \beta(t-x)}{t-x}\,dt\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\pi\ f(x)$$

$$= \pi\ f(x)$$

dan diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\ \lambda(t-x)\,dt\,d\lambda\ .$$

Contoh 1.9 Tentukan formula integral Fourier untuk fungsi *f*,

$$f\ \ x\ = \begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

dengan $f(1) = f(-1) = \dfrac{1}{2}$.

Penyelesaian: Karena fungsi *f* merupakan fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga dan untuk titik diskontinu $x_0 = 1$ dan $x_0 = -1$ berlaku $f(x_0) = \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$, maka

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos \lambda x + B(\lambda)\sin \lambda x\right] d\lambda$$

dengan

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\cos\lambda x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos\lambda x\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\lambda x\, dx \\
&= \frac{2}{\lambda\pi}\sin\lambda
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(x)\sin\lambda x\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\sin\lambda x\, dx + \int_{-1}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\lambda x\, dx \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty \frac{2}{\lambda\pi}\sin\lambda\cos\lambda x\, d\lambda \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\,\cos\lambda x}{\lambda}\, d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Contoh 1.10 Tentukan formula integral Fourier untuk fungsi *f*,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ dan } x \ge \pi \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

Penyelesaian: Karena fungsi *f* merupakan fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga maka formula integral Fourier untuk fungsi *f* adalah

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

dengan

$$\begin{aligned}
B(\lambda)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x)\sin\lambda x\ dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin\lambda x\ dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\sin\lambda x\ dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1+\lambda)x-\cos(1-\lambda)x\right]dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1+\lambda)\pi}{1+\lambda}-\frac{\sin(1-\lambda)\pi}{1-\lambda}\right]\\
&=-\frac{\sin\lambda\pi}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
A(\lambda)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\ dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x)\cos\lambda x\ dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\cos\lambda x\ dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+\lambda)x+\sin(1-\lambda)x\right]dx\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+\lambda)\pi}{1+\lambda}-\frac{\cos(1-\lambda)\pi}{1-\lambda}+\frac{1}{1+\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}\right]\\
&=\frac{1+\cos\lambda\pi}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}\,.
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$f(x)=\int_0^\infty\left[\frac{1+\cos\lambda\pi}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}\cos\lambda x-\frac{\sin\lambda\pi}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$=\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x+\cos\lambda\pi\ \cos x-\sin\lambda\pi\ \sin\lambda x}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}\ d\lambda$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\left(1-\lambda^2\right)\pi}\left[\cos\lambda x+\frac{1}{2}\cos\lambda(\pi+x)+\frac{1}{2}\cos\lambda(\pi-x)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cos\lambda(\pi+x)+\frac{1}{2}\cos\lambda(\pi-x)\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x+\cos\lambda(\pi-x)}{1-\lambda^2}\ d\lambda\ .$$

Contoh 1.11 Tentukan formula integral Fourier untuk fungsi *f*,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ e^{-x}, & x>0\ .\end{cases}$$

Penyelesaian: Karena fungsi *f* merupakan fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga maka diperoleh

$$f(x)=\int_0^\infty\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

dengan

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^0 f(x)\cos\lambda x\ dx+\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\ dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\lambda x\ dx$$

$$=\frac{1}{\pi\left(1+\lambda^2\right)}$$

dan

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} f(x)\sin\lambda x\,dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin\lambda x\,dx$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2\right)}\;.$$

Dengan demikian diperoleh

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi\left(1+\lambda^2\right)}\cos\lambda x+\frac{\lambda}{\pi\left(1+\lambda^2\right)}\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x+\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda\;.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan representasi integral Fourier untuk fungsi

a. $$f\;\; x\;=\begin{cases} e^{ax},\ x\le 0 \\ \qquad a>0 \\ e^{-ax},\ x\ge 0\end{cases}$$

b. $$f\;\; x\;=\begin{cases} 1-x^2,\ x^2\le 1 \\ 0,\qquad x^2\ge 1\end{cases}$$

2) Tentukan representasi integral Fourier untuk fungsi

$$f\;\; x\;=\begin{cases} 0,\ -\infty<t<1 \\ -1,\ -1<t<0 \\ 1,\quad 0<t<1 \\ 0,\quad 1<t<\infty\end{cases}$$

3) Jika diberikan fungsi $f(x)=0$ untuk $x<0$, $f(x)=e^{-x}$ untuk $x>0$, dan $f\ 0\ =\frac{1}{2}$, maka buktikan bahwa fungsi $f(x)$ memenuhi kondisi formula integral Fourier, dan selanjutnya untuk setiap nilai *x* berlaku

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x+\upsilon\sin vx}{1+\upsilon^2}\,d\upsilon,\ \ -\infty<x<\infty\,.$$

4) Pergunakan formula integral cosinus Fourier untuk membuktikan

$$e^{-x}\cos x=\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{v=\infty}\frac{\upsilon^2+2}{\upsilon^4+4}\cos\upsilon x\,d\upsilon,\ \ x\geq 0$$

5) Pergunakan identitas Parseval untuk menentukan nilai integral

a. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

b. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $\displaystyle f(x)=\frac{2a}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\cos\upsilon x}{a^2+\upsilon^2}\,d\upsilon$

b. $\displaystyle f(x)=\frac{4}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{\sin\upsilon-\upsilon\cos\upsilon}{\upsilon^3}\,cos\,\upsilon x\,d\upsilon$

2) $\displaystyle f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{1-\cos\upsilon}{\upsilon}\sin\upsilon x\,d\upsilon$

5) Pergunakan transformasi sinus Fourier dan transformasi cosinus Fourier untuk $f(x)=e^{-x}$, $x>0$.

a. $\dfrac{\pi}{4}$

b. $\dfrac{\pi}{4}$

RANGKUMAN

Apabila fungsi f terdefinisi dan merupakan fungsi periodik dengan periode $2c$ untuk setiap interval, untuk setiap nilai c cukup besar tetapi berhingga, maka deret

$$\frac{1}{2c}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x=-c}^{x=c} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{c}(\xi - x)\right)d\xi$$

konvergen ke $f(x)$.

Hal di atas menunjukkan suatu gambaran bahwa deret tersebut konvergen untuk c cukup besar dekat pada tak hingga, dan fungsi f bukan fungsi periodik.

Sehingga diperoleh hubungan

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos(\upsilon(\xi - x))\,d\xi\,d\upsilon$$

yang dikenal sebagai formula integral Fourier untuk fungsi $f(x)$.

Formula integral Fourier untuk fungsi $f(x)$ mudah dijabarkan menjadi

$$f(x) = \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\left[A(\upsilon)\cos\upsilon x + B(\upsilon)\sin\upsilon x\right]d\upsilon, \; -\infty < x < \infty$$

$$A(\upsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\cos\upsilon\xi\,d\xi$$

$$B(\upsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} f(\xi)\sin\upsilon\xi\,d\xi\,.$$

Selanjutnya apabila f suatu fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga dan untuk setiap titik diskontinu x_0 berlaku

$$f\quad x_0 \;= \frac{f\quad x_0^{+} \;+ f\quad x_0^{-}}{2}$$

dan jika

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx \text{ ada}$$

maka untuk setiap x, $f_R'(x)$ dan $f_L'(x)$ ada, fungsi f dapat disajikan dalam bentuk formula integral Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t - x)\,dt\,d\lambda$$

dengan f_R' dan f_L' berturut-turut menyatakan derivatif kanan dan derivatif kiri fungsi f.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika diketahui

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} f(x) \cos \upsilon x \, d\upsilon$$

maka ….

A. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} F_c(f) \cos \upsilon x \, d\upsilon$

B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} F_c(f) \cos \upsilon x \, d\upsilon$

C. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} F_c(f) \cos \upsilon x \, d\upsilon$

D. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} F_c(f) \cos \upsilon x \, d\upsilon$

2) Jika diketahui

$$\int_{x=0}^{x=\infty} f(x) \cos \upsilon x \, dx = \begin{cases} 1-\upsilon, & 0 \le \upsilon \le 1 \\ 0, & \upsilon > 1 \end{cases}$$

maka $f \;\; x$ adalah ….

A. $\dfrac{2 \;\; 1-\sin x}{\pi x^2}$

B. $\dfrac{2 \;\; 1+\sin x}{\pi x^2}$

C. $\dfrac{2 \;\; 1-\cos x}{\pi x^2}$

D. $\dfrac{2 \;\; 1+\cos x}{\pi x^2}$

3) Dengan mempergunakan soal nomor 2 diperoleh nilai integral
$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ adalah ….
A. 2π
B. $\frac{3\pi}{2}$
C. π
D. $\frac{\pi}{2}$

4) Bentuk umum persamaan gelombang satu dimensi, jika sebuah senar direntangkan dengan kedua ujungnya terikat, adalah ….

A. $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad \begin{matrix} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{matrix}$$
$$y(0,t) = 0 = y(L,t), \qquad t > 0$$
$$\left.\begin{matrix} y(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{matrix}\right\}, \qquad 0 < x < L$$

B. $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad \begin{matrix} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{matrix}$$
$$y(0,t) = 0 = y(L,t), \qquad t > 0$$
$$\left.\begin{matrix} y(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{matrix}\right\}, \qquad 0 < x < L$$

C. $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad \begin{matrix} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{matrix}$$
$$y(0,t) = 0 = y(L,t), \qquad t > 0$$
$$\left.\begin{matrix} y(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad 0 < x < L$$

D. $\dfrac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial t^2}, \quad \begin{array}{c} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{array}$

$y\left(0,t\right) = 0 = y(L,t), \qquad t > 0$

$y\left(x,0\right) = 0 = \dfrac{\partial y\left(x,0\right)}{\partial t}, \qquad 0 < x < L$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) D
2) A
3) B
4) C

Tes Formatif 2
1) B
2) C
3) D
4) A

Daftar Pustaka

Kreider D.L. et al. (1966). *Introduction to Linear Analysis*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Wylie C.R. and Barrett L.C. (1982). *Advanced Engineering Mathematics*. Singapore: McGraw-Hill International Book Co.

Murray R Spiegel, PhD. 1971. *Theory and Problems of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, Schaum’s Outline Series, New York: McGraw-Hill Book Company.

Ruel V Churchill. 1963. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, New York: McGraw-Hill Book Company.