

Masalah dan Jaringan sebagai Model Pemecahan

Dr. Djati Kerami



PENDAHULUAN

Suatu jaringan sebagai model penyajian maupun pemecahan masalah sudah sejak lama digunakan. Di dalam analisis jaringan, kita akan banyak menggunakan pengertian-pengertian dalam teori graf, salah satu cabang matematika terapan. Teori graf tersebut mulai diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736, melalui pembuatan formulasi dan penentuan penyelesaian masalah jembatan Konisberg yang melintasi sungai Pregel. Seabad kemudian, James Clerck Maxwell dan Gustav Robert Kirchoff menemukan prinsip-prinsip dasar mengenai jaringan (atau rangkaian) listrik. Sejak saat itu analisis jaringan menjadi alat yang populer pada kajian kelistrikan.

Pada awal abad kedua puluh, ahli-ahli di Eropa dan di Amerika membuat metode dengan menggunakan model jaringan untuk menentukan sistem jaringan telpon yang dijamin dapat melayani pelanggan secara optimal. Selama perang dunia kedua, sejalan dengan berkembangnya bidang ilmu Riset Operasional, berkembang pula konsep modern dari analisis jaringan seperti yang dibuat oleh Hitchcock (1941) dan Koopmans (1947). Selanjutnya, konsep dan pendekatan teoritis analisis jaringan dilakukan oleh beberapa ahli, di antaranya Ford dan Fulkerson (1962). Semenjak saat itu kajian analisis jaringan berkembang pesat dan sering digunakan sebagai model masalah dalam Riset Operasional.

Pada modul ini Anda akan melihat dan mempelajari berbagai masalah yang menggunakan model jaringan di dalam pemecahannya. Dengan menggunakan jaringan sebagai model masalah, kita akan lebih mudah melakukan analisis. Masalah yang akan dibahas dalam analisis jaringan sebenarnya bukanlah hal baru bagi Anda karena masalah tersebut sering Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Yang merupakan hal yang

mungkin baru hanyalah bentuk formal dari jaringan sebagai model dalam pemecahan masalah.

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda memiliki kemampuan memberikan gambaran masalah dengan menggunakan model jaringan, baik jaringan berarah maupun jaringan tak berarah.

Secara lebih terinci, setelah selesai mempelajari modul ini diharapkan mahasiswa dapat:

1. menjelaskan bentuk-bentuk masalah yang menggunakan model jaringan;
2. menyajikan model jaringan dari masalah;
3. membedakan model jaringan berarah dan jaringan takberarah;
4. menyelesaikan beberapa masalah sederhana dengan menggunakan metode enumerasi.

KEGIATAN BELAJAR 1

Jaringan sebagai Model Pemecahan Masalah

Di dalam memecahkan suatu masalah, pada tahap analisis masalah akan lebih mudah bagi kita apabila dibuat dahulu suatu model masalah. Model yang kita buat merupakan abstraksi (atau gambaran) dari masalah, yang di dalamnya tercakup keterkaitan unsur-unsur yang terlibat dalam masalah. Pada modul ini dan modul-modul selanjutnya, yang akan Anda pelajari adalah suatu model juga yang disebut dengan jaringan dan dalam modul pertama ini belumlah dibahas secara formal pengertian jaringan tersebut. Di sini Anda akan melihat dahulu berbagai jenis masalah yang menggunakan jaringan sebagai model. Sudah barang tentu tidak semua jenis atau ragam masalah akan dibahas di sini. Anda dapat mencari sendiri masalah lainnya setelah Anda mempelajari modul ini.

Secara umum, model jaringan ini digunakan jika di dalam masalah yang dihadapi mengandung 3(tiga) jenis unsur, yang satu dengan lainnya saling terkait dan membentuk suatu kesatuan. Dengan perkataan lain, membentuk sistem dari masalah yang dihadapi.

Adapun ketiga unsur tersebut adalah:

1. Unsur *tempat*, baik secara fisik maupun abstrak. Yang dimaksud dengan tempat secara fisik adalah jelas bagi Anda, misalnya kota, gudang, toko, pelabuhan, ataupun tempat lain yang kelihatan bentuk fisiknya. Sedangkan yang disebut dengan pengertian abstrak dari tempat adalah sesuatu yang tidak nampak kelihatan secara fisik, misalnya keadaan, waktu, dan sebagainya.
2. Unsur *hubungan keterkaitan* dari unsur pertama, misalnya sarana perhubungan atau sarana komunikasi, perubahan keadaan, perubahan waktu, dan sebagainya.
3. Unsur *nilai* atau *bobot* dari unsur kedua.

Dapat Anda lihat bahwa kedua unsur yang pertama membentuk suatu model yang Anda kenal sebagai model graf. Di dalam penyajian Buku Materi Pokok Analisis Jaringan, oleh karena ketiga unsur tersebut di atas sudah pasti terdapat pada masalah maka istilah jaringan sering disebut saja dengan graf

ataupun sebaliknya. Pada kegiatan belajar ini Anda akan melihat beberapa jenis masalah yang menggunakan model jaringan.

A. MASALAH 1

Suatu bank ingin memasang dengan biaya seminimal mungkin suatu jaringan transmisi lokal data yang menghubungkan kantor pusat dengan kantor-kantor cabangnya.

Pada contoh masalah ini, kantor pusat bank tersebut (sebutlah X) mempunyai 3(tiga) buah kantor cabang, katakanlah A , B , C . Biaya pemasangan saluran transmisi antar setiap kantor diberikan pada tabel sebagai berikut.

	X	A	B	C
X	-	5	18	9
A	5	-	17	9
B	18	17	-	27
C	9	9	27	-

Biaya pemasangan tersebut tergantung pada jarak antar dua kantor dan dinyatakan dalam satuan biaya. Pada tabel di atas, biaya pemasangan saluran transmisi dari X ke B adalah 18 satuan biaya. Biaya ini sama dengan pemasangan saluran transmisi dari B ke X .

Dari uraian masalah tersebut di atas, sebenarnya jaringan transmisi yang dimaksud belumlah ada. Kita baru akan merencanakannya sesuai dengan terdapatnya beberapa cara pemasangan jaringan transmisi serta tujuan yang kita kehendaki. Yang menjadi masalah adalah bagaimana menyajikan bentuk jaringan transmisi dari masalah tersebut, dan jaringan mana yang akan memberikan biaya pemasangan minimal?

Seperti kita ketahui bahwa agar semua kantor dapat berkomunikasi (saling dapat mengirim data), semua kantor dihubungkan dengan saluran transmisi. Akan tetapi untuk dua kantor tidak perlu selalu dihubungkan secara langsung dengan saluran transmisi.

Misalnya, apabila X dan A telah terhubung dan A dan B telah terhubung maka dikatakan X dan B telah terhubung. Jadi, di sini kita tidak perlu memasang saluran transmisi dari X langsung ke B .

Dengan membawa masalah ke dalam model jaringan serta menggambarannya, seperti gambar tersebut di atas, kita akan lebih mudah untuk menentukan penyelesaian masalah yang kita hadapi. Perlu juga ditambahkan di sini, karena saluran yang dimaksud merupakan saluran transmisi data maka diasumsikan bahwa akan dapat terjadi transmisi data dari suatu tempat mengarah ke tempat yang lain dan demikian pula arah sebaliknya. Dalam hal demikian kita dapat menggambarannya dengan garis tanpa arah, untuk memudahkan penggambaran, daripada kita menggambar dua garis dengan arah yang berbeda. Model jaringan seperti terlihat pada gambar di atas, dikenal sebagai *jaringan takberarah*. Dalam masalah yang kita hadapi, yang selanjutnya kita pertimbangkan adalah bagaimana mencari bentuk keterhubungan (langsung atau tidak) antara dua tempat berbeda. Hal ini akan Anda jumpai dalam kegiatan belajar selanjutnya.

Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang materi jaringan sebagai model pemecahan masalah, pelajailah contoh di bawah ini.

Contoh 1.1

Diberikan 3(tiga) titik, salah satu di antaranya merupakan sumber tegangan listrik. Kita akan memberikan tegangan yang sama pada ketiga titik tersebut. Biaya untuk menghubungkan ketiga titik tersebut (sesuai dengan panjang kawat penghantar listrik yang digunakan) adalah sebagai berikut:

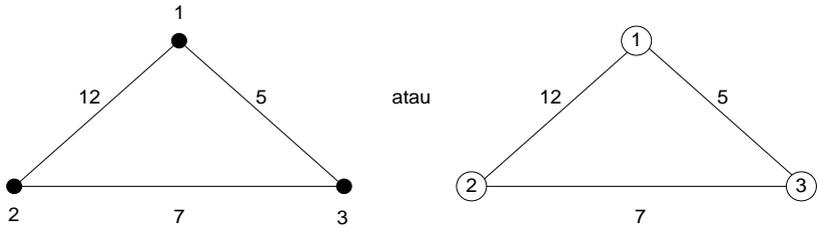
Dari titik pertama ke titik kedua, memerlukan 12 satuan biaya, dari titik pertama ke titik ketiga, memerlukan 5 satuan biaya, dan dari titik kedua ke titik ketiga memerlukan 7 satuan biaya.

Pertanyaan:

- Turunkan model jaringan yang menyatakan keterhubungan antara ketiga titik yang diberikan!.
- Model jaringan yang Anda peroleh berupa jaringan berarah atau takberarah?
- Berikan tabel biaya penghubungan antara ketiga titik yang diberikan!

Penyelesaian:

- Model jaringan masalah:



- b) Jaringan di atas merupakan jaringan takberarah. Walaupun sebenarnya dalam kawat penghantar yang menghubungkan 2(dua) titik i dan j terdapat arus listrik dari i ke j (dan sebaliknya), namun dalam penyajian model jaringan tidak diberikan arah (seperti pada penyajian jaringan listrik).
- c) Tabel biaya:

	1	2	3
1	-	12	5
2	12	-	7
3	5	7	-

Dalam masalah yang terdapat pada contoh 1.1 di atas, untuk memberikan tegangan yang sama di ketiga titik yang diberikan, sebenarnya cukup dilakukan dengan menjadikan ketiga titik tersebut terhubung, seperti titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 2 dihubungkan dengan titik 3, tetapi tidak perlu menghubungkan titik 1 dan titik 3. Dengan cara penghubungan seperti ini, ketiga titik sudah mempunyai tegangan yang sama.

Adapun tujuan penyelesaian masalahnya adalah bagaimana kita menentukan cara penghubungan ketiga titik yang menggunakan biaya semurah-murahnya (minimal).

Oleh karena cara penghubungan yang dilakukan mempunyai suatu struktur yang disebut dengan *pohon rentangan* maka masalah yang kita hadapi di sini disebut dengan masalah *pohon rentangan minimal*.

B. MASALAH 2

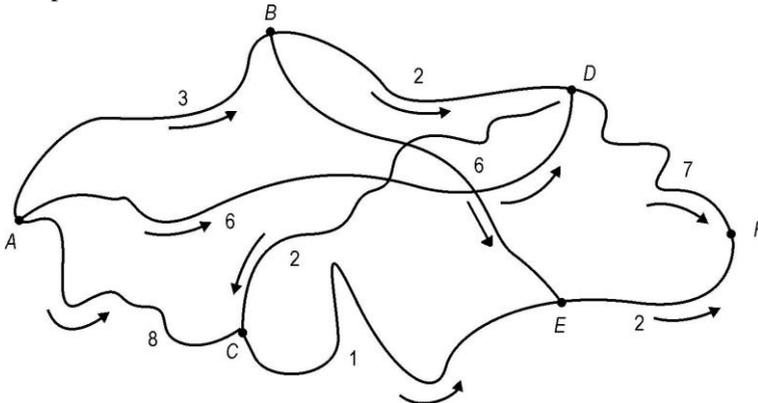
Misalkan kita ambil sebagian dari peta suatu daerah. Pada sebagian peta tersebut terdapat kota, sebutlah $A, B, C, D, E,$ dan $F,$ di mana:

1. dari kota *A* terdapat jalan untuk menuju ke kota *B*, *C*, dan *D*
2. dari kota *B* terdapat jalan menuju kota *D* dan *E*
3. dari kota *C* hanya terdapat jalan menuju ke kota *E*
4. dari kota *D* hanya terdapat jalan menuju ke kota *F*
5. dari kota *E* hanya terdapat jalan menuju ke kota *F*

Pada uraian di atas, dapat kita lihat bahwa unsur pertama, yaitu tempat (fisik) dalam hal ini kota *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, dan *F*. Unsur kedua berupa hubungan antara kota-kota tersebut, dalam hal ini adalah jalan penghubung antar kota. Kemudian kita tinggal mencari unsur ketiga. Unsur ketiga ini tergantung dari tujuan penyelesaian masalah yang diinginkan, yang mungkin berupa

1. jarak atau panjang jalan dari suatu kota ke kota lain
2. waktu yang diperlukan untuk menempuh jalan dari suatu kota ke kota lain atau mungkin berupa kriteria lain.

Apabila kita abstraksikan masalah di atas dengan menggunakan peta, maka akan kita peroleh bentuk skala kecil dari keterhubungan kelima kota yang diberikan. Kelima kota tersebut dapat digambarkan sebagai titik-titik, dan jalan-jalan penghubungnya digambarkan dengan garis-garis seperti terlihat pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2
Peta Hubungan Kota *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E*

Bilangan yang ditulis di samping jalan-jalan penghubung menyatakan jarak atau panjang jalan dari 2 kota yang dihubungkan. Misalnya, jarak dari kota A ke kota B adalah 3 satuan jarak.

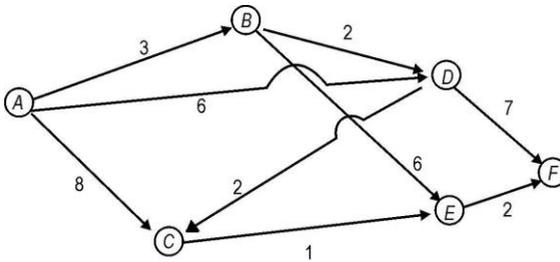
Dalam hal yang sebenarnya, jalan yang menghubungkan dua kota biasanya berbelok-belok, seperti tergambar pada peta di atas. Demikian juga, jalan tersebut mungkin merupakan jalan searah, atau dua arah. Pada peta yang ditunjukkan oleh Gambar 1.2 jalan-jalan di dalamnya merupakan jalan searah. Andaikan jarak antara dua kota ditunjukkan oleh bilangan di samping jalan, seperti yang terlihat pada Gambar 1.2 maka seperti yang sering Anda jumpai sehari-hari, Anda dihadapkan pada suatu tujuan penyelesaian masalah, misalnya:

Akan dicari urutan jalan (disebut dengan rute atau lintasan) terdekat dari suatu kota untuk mencapai kota lainnya.

Apabila kita perhatikan dengan baik uraian di atas maka masalah tersebut di atas biasa disebut dengan *masalah lintasan terpendek* atau *masalah rute terdekat*.

1. Penurunan Model Jaringan

Dapat kita perhatikan bahwa keadaan jalan pada peta Gambar 1.2 di atas terlihat berbelok-belok. Keadaan tersebut tidaklah dipertimbangkan pada model jaringan yang akan digunakan. Yang diperhatikan di sini hanyalah kota-kota yang diberikan, keterhubungan antara dua kota serta jarak atau panjang jalan penghubung antara dua kota tersebut. Pada model jaringan, kota-kota dinyatakan sebagai titik-titik, jalan penghubung dua kota digambarkan sebagai garis penghubung antara dua titik, serta panjang jalan penghubungnya diletakkan di samping garis penghubung tersebut. Anda dapat melihatnya pada Gambar 1.3 di bawah ini.



Gambar 1.3
Jaringan dari Peta Gambar 1.2

Panjang jalan tersebut merupakan nilai atau bobot dari garis penghubung dua titik. Dapat Anda perhatikan bahwa garis penghubung tersebut tidak lagi digambarkan berbelok-belok, seperti pada peta sebenarnya. Seperti terlihat pada Gambar 1.3 di atas, garis penghubung antara dua titik menggunakan arah. Oleh karena itu, jaringannya disebut dengan jaringan berarah.

Dengan menggunakan model jaringan seperti pada Gambar 1.3 di atas, akan lebih memudahkan kita untuk melihat masalahnya, yaitu mencari rute atau lintasan terdekat dari satu kota ke kota lain. Dengan demikian akan memudahkan kita untuk memecahkan masalah tersebut.

2. Ragam Masalah

Masalah Penggantian Mesin (Peralatan)

Dalam bidang perencanaan industri, terdapat banyak masalah yang dapat diformulasikan ke dalam bentuk model masalah lintasan terpendek. Salah satu contoh masalah adalah sebagai berikut:

Suatu pabrik merencanakan untuk memproduksi suatu produk dengan menggunakan suatu peralatan (bisa berupa mesin). Perencanaan produksi pabrik tersebut dibuat untuk 3 tahun mendatang saja. Di dalam perencanaannya, peralatan yang digunakan harus diganti secara periodik, yaitu 1 tahun, 2 tahun, atau 3 tahun. Jadi, dalam hal ini, jika peralatan rusak maka harus diganti (peralatan dijual, diganti dengan yang baru). Selanjutnya, biaya operasi serta pemeliharaan untuk setiap periode waktu diketahui. Yang menjadi masalah adalah kapankah pabrik tersebut harus mengganti peralatan lamanya dengan yang baru, dengan biaya yang dikeluarkan seminimal mungkin?

Masalah tersebut di atas sering disebut dengan *masalah penggantian mesin*.

3. Penurunan Model Jaringan

Unsur pertama:

Permulaan (atau akhir) dari setiap periode (di sini dapat dipandang sebagai tempat abstrak) penggunaan mesin dinyatakan sebagai suatu lingkaran kecil

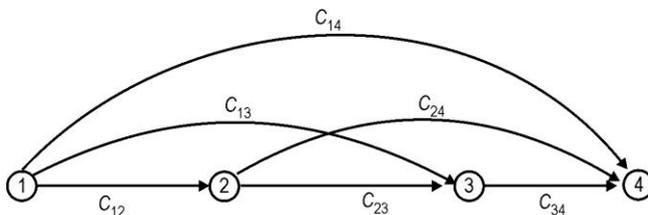
Unsur kedua:

Periode waktu penggunaan peralatan, dinyatakan dengan garis penghubung berarah. Garis berarah tersebut berpangkal pada salah satu anggota unsur pertama, menyatakan awal periode penggunaan, dan berujung pada unsur pertama yang lain, menyatakan akhir periode penggunaan peralatan.

Unsur ketiga:

Biaya yang dikeluarkan selama periode waktu penggunaan peralatan. Dalam hal ini, biaya yang dikeluarkan tersebut adalah harga beli peralatan baru (awal periode) - harga jual peralatan lama (pada akhir periode) + biaya operasional + biaya pemeliharaan.

Himpunan semua perencanaan yang dimungkinkan dalam upaya penggantian peralatan untuk jangka waktu 3(tiga) tahun dapat dinyatakan oleh urutan anggota-anggota unsur pertama dan unsur kedua dari jaringan yang terdapat pada Gambar 1.4 di bawah ini.



Gambar 1.4
Jaringan Penggantian Peralatan

Pada Gambar 1.4 tersebut,

- lingkaran i menyatakan awal periode waktu penggunaan (untuk $i = 1, 2, 3$) atau akhir periode waktu penggunaan (untuk $i = 2, 3, 4$).
- garis berarah (i, j) , untuk $i = 1, 2, 3, j = 2, 3, 4$ menyatakan periode waktu penggunaan peralatan.
- bilangan c_{ij} menyatakan biaya yang dikeluarkan pada periode waktu (i, j)

Setiap urutan lingkaran dan garis berarah mulai dari lingkaran 1 ke lingkaran 4 menyatakan suatu rencana penggunaan peralatan untuk jangka waktu 3 tahun.

Misal kita perhatikan perencanaan $1 - (1,3) - 3 - (3,4)$. Perencanaan tersebut menyatakan bahwa peralatan dibeli pada permulaan tahun ke-1, digunakan selama 2 tahun, kemudian dijual pada akhir tahun ke-2. Selanjutnya dibeli peralatan baru pada awal tahun ke-3, digunakan selama 1 tahun, dan peralatan tersebut dijual pada akhir tahun ke-3. Dalam perencanaan tersebut, total biaya yang diperlukan adalah $c_{13} + c_{34}$.

Cobalah Anda cari urutan lingkaran-garis yang lain dari lingkaran 1 ke lingkaran 4, nyatakan arti urutan tersebut dan nyatakan pula biaya yang diperlukan.

Dapat Anda periksa bahwa masalah di atas merupakan masalah mencari rute terdekat atau lintasan terpendek dari lingkaran 1 ke lingkaran 4 dalam jaringan yang diberikan. Dapat Anda lihat pula bahwa jaringan yang merupakan penyajian masalah di atas merupakan jaringan berarah.

Contoh 1.2

Diberikan 4 (empat) tempat, sebut saja A, B, C , dan D yang dihubungkan dengan jalan berarah, sebagai berikut:

- A dan B dihubungkan oleh jalan searah (arah dari A ke B)
- A dan C dihubungkan oleh jalan searah (arah dari A ke C)
- B dan C dihubungkan oleh jalan 2 arah (arah B ke C dan C ke B)
- B dan D dihubungkan oleh jalan searah (arah dari B ke D)
- C dan D dihubungkan oleh jalan searah (arah dari C ke D).

Sedangkan waktu tempuh setiap jalan adalah sebagai berikut:

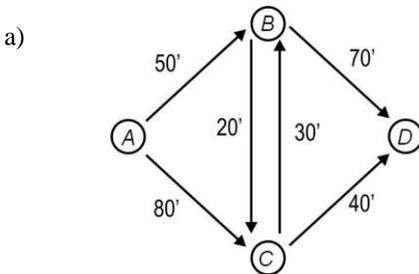
- Untuk menempuh jalan dari A ke B , diperlukan waktu 50 menit.
- Untuk menempuh jalan dari A ke C , diperlukan waktu 80 menit.

- c. Untuk menempuh jalan dari B ke C , diperlukan waktu 20 menit.
- d. Untuk menempuh jalan dari C ke B , diperlukan waktu 30 menit.
- e. Untuk menempuh jalan dari B ke D , diperlukan waktu 70 menit.
- f. Untuk menempuh jalan dari C ke D , diperlukan waktu 40 menit.

Pertanyaan:

- a) Buatlah model jaringan yang menyatakan keterhubungan antara keempat tempat tersebut
- b) Manakah yang berlaku sebagai unsur ketiga? Tuliskan di samping unsur kedua yang telah dibuat
- c) Berapakah bobot dari garis penghubung A dan B , B dan C , serta C dan D .
- d) Nyatakanlah masalah rute terdekat yang sesuai dengan jaringan yang diberikan.

Penyelesaian:



Jaringan di atas merupakan jaringan berarah

- b) Unsur ketiga (berupa bobot) menyatakan waktu yang diperlukan untuk menempuh jalan dari suatu tempat ke tempat lain. Nilai bobot tersebut seperti yang dituliskan di samping unsur kedua (berupa busur) pada gambar jaringan di atas.
- c) Bobot garis penghubung $A - B$ adalah 50 (dalam menit), $B - C$ adalah 20, dan $C - D$ adalah 40.
- d) Bagaimanakah kita menentukan urutan jalan yang harus kita tempuh dari suatu tempat ke tempat lain (misal dari A ke D), dengan menggunakan waktu tempuh yang paling cepat.

C. MASALAH 3

Suatu perusahaan air minum mempunyai 3 (tiga) buah pusat pengolahan air minum, sebutlah A , B , dan C yang melayani 4 (empat) buah kota, sebutlah D , E , F , dan G . Pusat air minum A , B , dan C masing-masing mempunyai kemampuan menghasilkan debit air minum 45 liter/detik, 25 liter/detik, dan 30 liter/detik. Sedangkan kota D , E , F , dan G masing-masing memerlukan debit air minum sebanyak 30 liter/detik, 10 liter/detik, 20 liter/detik, dan 30 liter/detik. Diketahui pula bahwa dari setiap pusat air minum terdapat pipa saluran yang mengalirkan air minum ke setiap kota. Dalam hal ini setiap saluran hanya dapat mengalirkan debit 5 liter/detik. Dengan perkataan lain, kapasitas setiap saluran terbatas.

Yang menjadi tujuan pemecahan masalah adalah bagaimana kita dapat mengatur debit air minum yang melewati setiap saluran agar dapat memenuhi permintaan kebutuhan setiap kota.

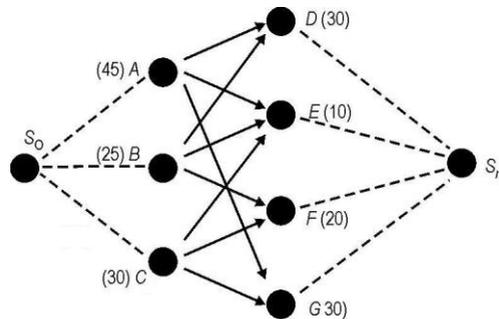
1. Penurunan Model Jaringan

Untuk dapat mempermudah dalam melakukan analisis masalah tersebut, kita abstraksikan masalah di atas, kemudian kita gambarkan ke dalam model jaringan. Dalam hal ini, terdapat unsur *pertama*, yaitu tempat (pusat pengolahan air minum maupun kota yang memerlukan air minum). Sedangkan unsur *kedua* adalah saluran air minum yang menghubungkan beberapa anggota unsur pertama. Dalam masalah di atas, dapat kita lihat bahwa setiap saluran mempunyai keterbatasan kapasitas, yang selanjutnya dipandang sebagai unsur *ketiga*.

Dengan terdapatnya ketiga unsur tersebut di atas, kita dapat menyajikannya ke dalam model jaringan, dengan

- unsur pertama digambarkan sebagai titik tebal
- unsur kedua digambarkan sebagai garis penghubung unsur pertama
- unsur ketiga dituliskan di samping unsur kedua.

Model jaringan yang sesuai dengan abstraksi masalah di atas adalah



Gambar 1.5
Model Jaringan Air Minum

Pada Gambar 1.5 di atas, bilangan yang dituliskan di samping titik A , B , dan C merupakan kemampuan penyediaan, sedangkan yang dituliskan di samping E , F , G , dan H merupakan kebutuhan dari tempat-tempat tersebut.

Dengan melihat penyajian model jaringan, seperti Gambar 1.5 di atas, akan lebih mudah bagi kita untuk memecahkan masalah.

Jaringan seperti yang digambarkan tersebut merupakan jaringan berarah, karena terdapat arah pengangkutan barang (dalam masalah di sini adalah air yang dialirkan).

Dengan terdapatnya unsur ketiga yang memberikan kapasitas sarana pengangkutan (sering disebut dengan kapasitas transportasi), masalah yang kita hadapi disebut dengan masalah dalam *jaringan transportasi*. Pada jaringan transportasi ini, terdapat paling sedikit satu tempat yang merupakan tempat masuknya aliran transportasi, sebutlah S_0 , dan satu tempat keluarnya aliran, sebutlah S_n .

Secara umum, biasanya masalah yang akan dipecahkan adalah dengan tersedianya pada S_0 sejumlah kuantitas barang, bagaimana kita menentukan pola pengangkutan barang agar barang diangkut kuantitasnya maksimal, sesuai dengan kapasitas transportasi dan kebutuhannya, dari S_0 ke arah S_n .

Kapasitas transportasi tersebut dapat juga menyatakan kapasitas angkut dari kendaraan yang digunakan (tonase), misalnya kapal, truk, gerbong kereta api, ataupun saluran air ataupun saluran transmisi, dan sebagainya. Oleh karena yang menjadi tujuan masalah adalah menentukan aliran barang dengan kuantitas maksimal sesuai dengan kapasitas alat angkut dan

kebutuhannya maka masalah tersebut dapat juga dinamakan dengan *Masalah Aliran Maksimal*.

2. Ragam Masalah

Pada masalah 3 di atas, dianggap bahwa hanya terdapat satu jenis barang yang diangkut, yaitu air. Masalah sejenis pula, mungkin yang diangkut adalah bukan air tetapi barang dengan menggunakan alat angkut (seperti truk, gerbong kereta-api, dan sebagainya) yang kapasitasnya berbeda-beda. Terdapat berbagai ragam masalah dari masalah 3 tersebut.

3. Aliran dengan Biaya Minimal

Di sini, pada unsur kedua jaringan, diberikan suatu bilangan yang menyatakan biaya satu satuan aliran. Seperti misalnya, biaya untuk mengangkut 1 satuan volume air dari suatu tempat ke tempat lain. Atau dalam hal lain, biaya satuan untuk mengangkut satu barang dengan menggunakan truk dari suatu tempat ke tempat lain.

Yang menjadi tujuan pemecahan masalah adalah menentukan pola pengangkutan dari tempat awal jaringan ke tempat akhir jaringan yang menggunakan biaya pengangkutan minimal, tanpa melebihi kapasitas alat angkut, tetapi memenuhi kebutuhan.

4. Aliran Multikomoditas

Masalah serta tujuan penyelesaian masalahnya seperti masalah sebelumnya, hanya bedanya adalah pada masalah ini terdapat lebih dari satu jenis barang yang diangkut.

5. Ragam Lain

Selain kedua ragam di atas, terdapat ragam lain, misalnya di dalam masalah yang dihadapi kapasitas jalannya takterbatas, ataupun mempunyai batas bawah dan atau batas atas, ataupun mungkin pula terdapat hilangnya sebagian barang yang diangkut pada saat melewati jalan yang dilewati.

D. MASALAH 4

Suatu perusahaan mengkhususkan diri dalam bidang penjualan. Perusahaan tersebut membeli produk jadi dari suatu pabrik, sebagai pemasok produk tersebut. Produk jadi yang dipasok belum diberi kemasan maupun

merek. Perusahaan penjualan tersebut di atas merencanakan pemasaran produk baru (kemasan dan merek baru). Untuk keperluan itu, direktur perusahaan pada tahap awal merencanakan aktivitas-aktivitas sebagai berikut:

1. Mengangkat manajer penjualan.
Dalam hal ini kantor telah disediakan
2. Negosiasi harga.
Direktur perusahaan berhubungan langsung dengan pemasok produk
3. Mengangkat wiraniaga (salesman).
Manager penjualan akan merekrut sejumlah wiraniaga sesuai dengan hasil penelitian pemasaran yang telah dilakukan
4. Melatih wiraniaga.
Wiraniaga dilatih untuk memperoleh keahlian dalam bidang penjualan, khususnya dalam pencarian distributor
5. Pemilihan distributor.
Manager penjualan yang langsung melakukan pemilihan distributor.
6. Pemesanan disain kemasan.
Di sini disain yang telah disetujui, kotak kemasan langsung dipesan.
Manager penjualan yang melakukannya.
7. Pembuatan kotak kemasan.
Produsen kemasan akan memproduksi sesuai dengan harga dan disain yang disepakati.
8. Memperoleh order (pesanan) dari distributor.
Order diterima dari distributor terpilih.
9. Penyerahan stok ke gudang.
Pemasok produk jadi akan menyerahkan sejumlah produk. Setelah diberi kemasan, produk disimpan dalam gudang.
10. Pengangkutan (transportasi) stok ke distributor
Stok diambil dari gudang dengan kuantitas sesuai dengan permintaan distributor.
11. Pengaturan promosi penjualan
Manager penjualan akan melakukan pengaturan. Pengiriman barang promosi tergantung pada harga barang dan jenis kemasannya.

Dalam perencanaan pemasaran di atas, setiap aktivitas yang ada diberikan jangka waktu (durasi) sesuai dengan patokan yang diberikan (bobot aktivitas, waktu yang tersedia). Direktur perusahaan tersebut menginginkan

agar pemasaran tersebut berjalan dengan baik tanpa harus melanggar waktu yang tersedia. Hal ini diperlukan, oleh karena tertundanya aktivitas pemasaran akan memberikan kemungkinan didahuluinya penjualan produk serupa oleh perusahaan lain. Yang dapat membantu direktur tersebut dalam mencapai tujuannya adalah bagaimana dapat digambarkan dahulu perencanaan aktivitas yang harus dilakukan dan bagaimana dapat diketahuinya urutan aktivitas mana yang kritis, dalam arti bahwa tertundanya suatu aktivitas akan berakibat tertundanya seluruh aktivitas. Dengan dapat diketahuinya urutan aktivitas kritis maka dapat diketahui pula aktivitas yang tidak kritis, dalam arti bahwa jangka waktu pelaksanaannya tidak berpengaruh terhadap waktu dari keseluruhan aktivitas pemasaran. Di samping itu biasanya juga akan ditentukan pula waktu paling awal dan paling lambat dimulainya suatu aktivitas.

Untuk keperluan di atas, perlu kiranya direktur perusahaan (atau stafnya) menyajikan aktivitas pemasaran tersebut ke dalam suatu model penggambaran yang jelas serta mudah dipahami. Model penyajian aktivitas-aktivitas pemasaran tersebut sering disebut dengan *Jaringan Aktivitas*.

Kegiatan yang berhubungan dengan perencanaan proyek (yang berupa kumpulan aktivitas-aktivitas) sering disebut dengan *Perencanaan Jaringan Proyek*. Sedangkan di dalam perencanaan tersebut, pencarian urutan aktivitas kritis serta analisis hal-hal lain yang berhubungan disebut dengan *Analisis Lintasan Kritis*.

Penurunan Model Jaringan

Untuk memudahkan perencanaan kegiatan, biasanya aktivitas-aktivitas tersebut di atas disajikan ke dalam model jaringan, yang dalam hal ini:

- a. saat dimulainya dan saat diakhirinya setiap aktivitas dinyatakan sebagai unsur pertama, yang digambarkan sebagai lingkaran kecil,
- b. pelaksanaan setiap aktivitas merupakan unsur kedua, yang digambarkan sebagai garis penghubung berarah. Pada garis berarah ini, saat mulainya pelaksanaan aktivitas terletak pada pangkal garis dan saat berakhirnya aktivitas terletak pada ujung garis.
- c. jangka waktu pelaksanaan aktivitas merupakan unsur ketiga.

Untuk dapat menggambarkan penyajian model jaringan, pertama-tama kita buat dahulu daftar aktivitas, selanjutnya kita cari urutan pengerjaan

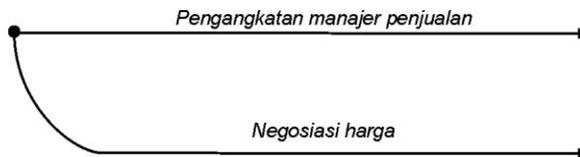
aktivitas secara logis. Di dalam pengaturan urutan aktivitas secara logis, yang menjadi pertimbangan utama adalah

- Kapankah suatu aktivitas dimulai dan kapan diakhiri.
- Aktivitas mana yang harus mendahului
- Aktivitas mana yang harus mengikuti
- Aktivitas-aktivitas mana yang dapat dikerjakan bersamaan waktu

Selain itu, oleh karena jaringan yang digambarkan berhubungan dengan perencanaan proyek maka dalam hal ini hanya terdapat satu lingkaran kecil yang menandakan saat mulainya dan satu lingkaran kecil lain yang menandakan saat berakhirnya proyek.

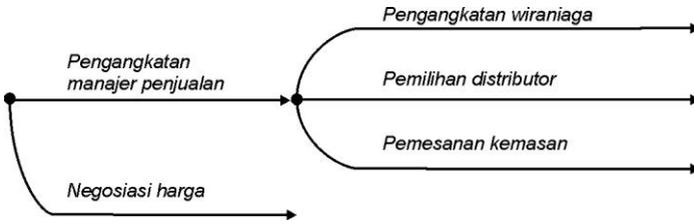
Pada perencanaan kegiatan pemasaran seperti yang telah diuraikan di atas, terdapat 2 aktivitas, *pertama* yang dapat dikerjakan oleh direktur perusahaan, yaitu ‘pengangkatan manager penjualan’ dan ‘negosiasi harga’. *Kedua* aktivitas tersebut saat mulainya maupun pengerjaannya dapat dilakukan secara bersamaan.

Kedua aktivitas tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



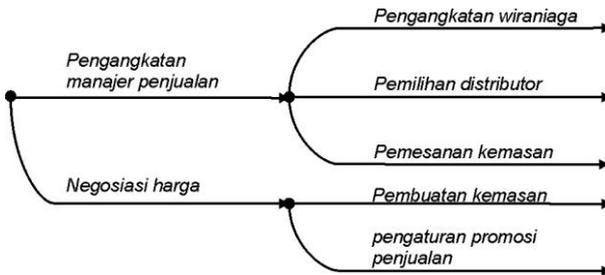
Gambar 1.6

Kemudian kita harus mempertimbangkan dengan hati-hati, aktivitas mana yang langsung mengikuti kedua aktivitas pertama tersebut di atas. Kita perhatikan dahulu aktivitas mana yang mengikuti ‘pengangkatan manager penjualan’. Dari hasil pertimbangan secara logis, ternyata terdapat 3 aktivitas yang mengikutinya, yaitu ‘pengangkatan wiraniaga’, ‘pemilihan distributor’, dan ‘pemesanan kemasan’. Ketiga aktivitas tersebut dapat dilakukan secara bersamaan, seperti gambar di bawah ini.



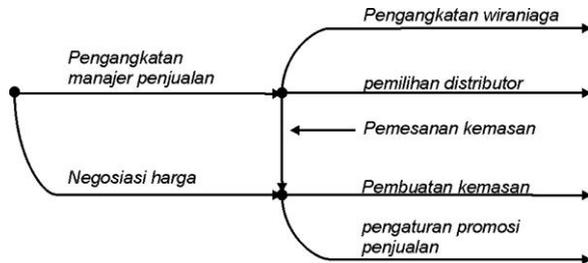
Gambar 1.7

Selanjutnya kita melakukan pertimbangan secara logis, aktivitas mana yang mengikuti ‘negosiasi harga’. Ternyata aktivitas yang mengikuti ‘negosiasi harga’ adalah 2 aktivitas, yaitu ‘pembuatan kemasan’, dan pengaturan promosi penjualan’. Kedua aktivitas tersebut dilakukan secara bersamaan, seperti pada gambar di bawah ini.



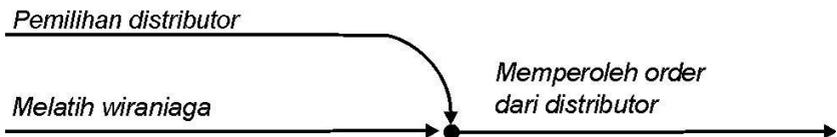
Gambar 1.8

Pemeriksaan dilakukan lagi terhadap kelima aktivitas terakhir yang telah kita cantumkan. Aktivitas ‘pengaturan promosi penjualan’ tidak mempunyai aktivitas yang mengikuti, oleh karena itu, selesainya aktivitas tersebut bersamaan waktunya dengan selesainya proyek kegiatan pemasaran. Sedangkan aktivitas ‘pembuatan kemasan’ dan ‘pengaturan promosi penjualan’ tidak dapat dilakukan sebelum selesainya aktivitas ‘negosiasi harga’ dan ‘pemesanan kemasan’. Berdasarkan pertimbangan tersebut, kita dapat menggambarannya sebagai berikut:



Gambar 1.9

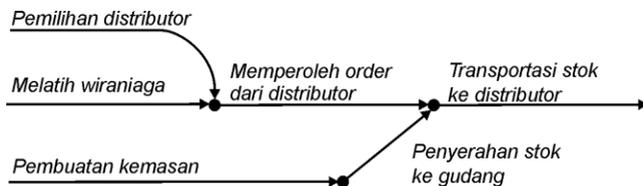
Kita lanjutkan dengan pemeriksaan hubungan dengan aktivitas-aktivitas yang belum digambarkan. Sebelum aktivitas ‘memperoleh order dari distributor’ dapat dimulai, dua aktivitas, ‘pemilihan distributor’ dan ‘melatih wiraniaga’ harus diselesaikan dahulu.



Gambar 1.10

Yang belum kita hubungkan adalah aktivitas ‘penyerahan stok ke gudang’ dan ‘transportasi stok ke distributor. Di sini, aktivitas ‘pembuatan kemasan’ akan mendahului penyerahan stok ke gudang’. Sedangkan ‘transportasi stok ke distributor akan mengikuti selesainya aktivitas ‘memperoleh order dari distributor’ dan ‘penyerahan stok ke gudang’.

Dengan demikian, kita dapat menggambarannya sebagai berikut:

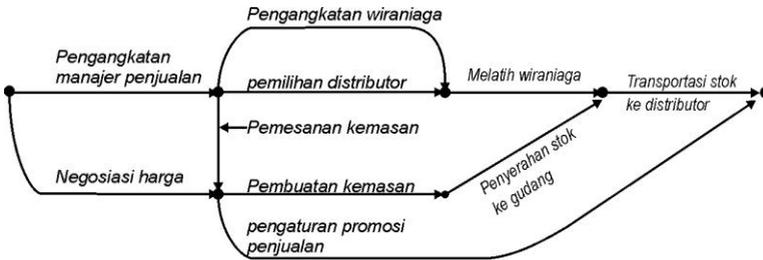


Gambar 1.11

Kita periksa lagi lebih lanjut. Aktivitas ‘transportasi stok ke gudang’ tidak akan diikuti oleh aktivitas apapun. Oleh karena itu, ujung aktivitas tersebut

akan bertemu dengan ujung aktivitas ‘pengaturan promosi penjualan’. Ujung tersebut merupakan kejadian akhir dari diagram jaringan aktivitas.

Aktivitas ‘melatih wiraniaga’ haruslah mengikuti aktivitas ‘pengangkatan wiraniaga’. Dengan demikian maka diagram terakhir di atas, dapat dihubungkan dengan diagram yang telah kita gambarkan sebelumnya, dan akhirnya kita memperoleh diagram seperti di bawah ini.



Gambar 1.12
Jaringan Aktivitas Kegiatan Pemasaran

Jaringan yang telah kita gambarkan di atas merupakan jaringan berarah. Di sini arah tersebut merupakan berjalannya waktu pengerjaan aktivitas, dari saat mulai sampai dengan saat selesainya dilakukannya pengerjaan aktivitas.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Seorang sekretaris dengan dibantu oleh beberapa asistennya ingin membuat surat dinas yang akan langsung dikirimnya ke kotak pos.

Adapun aktivitas-aktivitas yang mereka kerjakan adalah sebagai berikut:

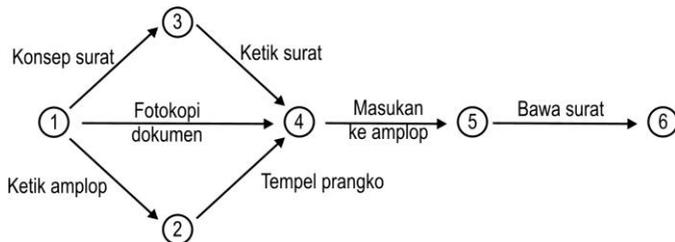
- membuat konsep surat;
- mengetik surat;
- membuat foto kopi dokumen-dokumen lampiran surat;
- mengetik alamat pada amplop;
- memasukkan surat serta lampirannya ke dalam amplop;
- menempelkan perangko pada amplop;
- membawa surat ke kotak pos.

Setelah Anda membaca baik-baik uraian di atas, kerjakan perintah atau jawablah pertanyaan berikut ini:

- 1) Tentukan aktivitas atau aktivitas-aktivitas awalnya!
- 2) Berikan contoh aktivitas-aktivitas mana yang saling bergantung!
- 3) Tentukan aktivitas akhirnya!
- 4) Turunkan model jaringan dari pekerjaan yang dilakukan. Jaringan apakah yang Anda diperoleh?
- 5) Dalam model jaringan tersebut, unsur pertama merupakan tempat fisik atau abstrak?
Jelaskan bentuk keterhubungan apakah yang disajikan dalam model jaringan!

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) Aktivitas awalnya dapat lebih dari satu aktivitas, yaitu ‘membuat konsep surat’, ‘membuat fotokopi dokumen lampiran’, dan ‘mengetik amplop’. Ketiga aktivitas tersebut dapat dilakukan bersama-sama, karena tidak saling bergantung.
- 2) Aktivitas ‘membuat konsep surat’ dan ‘mengetik surat’ merupakan aktivitas yang saling bergantung. Di sini ‘mengetik surat’ hanya dapat dilakukan setelah ‘membuat konsep surat’.
Anda dapat mencari dua aktivitas lain yang saling bergantung.
- 3) Aktivitas akhirnya, yaitu ‘membawa surat ke kotak pos’
- 4) Model jaringan yang diturunkan merupakan jaringan aktivitas, sebagai berikut:



Gambar 1.13
Jaringan Aktivitas Pengiriman Surat

- 5) Unsur tempat yang disajikan sebagai lingkaran kecil di sini, menyatakan saat selesainya aktivitas atau saat mulainya aktivitas, jadi berupa tempat abstrak.

Keterhubungan di sini menyatakan keterhubungan antar aktivitas, misalnya aktivitas mana yang dikerjakan dulu sebelum dapat dikerjakannya aktivitas lain

Sudah barang tentu, diagram di atas bukan satu-satunya jaringan aktivitas dari masalah yang diberikan. Masih mungkin juga akan terdapat bentuk yang lain. Cobalah Anda turunkan lagi jaringan aktivitas dalam bentuk yang lain.



RANGKUMAN

Telah Anda pelajari berbagai masalah yang menggunakan model jaringan sebagai model untuk menyelesaikan masalah. Dengan mempertimbangkan ketiga unsur, kita dapat menurunkan model jaringan dari masalah yang kita hadapi.

Unsur pertama, merupakan tempat, baik berupa tempat fisik maupun abstrak

Unsur kedua, merupakan keterhubungan antara anggota dua unsur pertama, baik keterhubungan fisik maupun keterhubungan abstrak.

Unsur ketiga, merupakan bobot dari unsur kedua, yang mungkin biaya, mungkin pula berupa jarak, ataupun berupa waktu tempuh

Anda telah melihat bagaimana makna, peran dan keterhubungan ketiga unsur tersebut melalui beberapa masalah, ragam masalah, serta contoh-contohnya.

Apabila di dalam tahap analisis masalah kita temukan ketiga unsur di atas, maka kita dapat terlebih dahulu menyajikan masalah ke dalam model jaringan. Dengan menggunakan model jaringan tersebut, kita akan lebih mudah melihat masalahnya, serta menentukan metode penyelesaiannya.



TES FORMATIF 1 _____

Petunjuk: Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 2, berikanlah jawab

- A. jika 1 dan 2 benar
 - B. jika 1 dan 3 benar
 - C. jika 2 dan 3 benar
 - D. jika 1, 2, dan 3 benar
- 1) Suatu masalah dapat digambarkan dengan menggunakan model graf apabila mengandung unsur
- 1. Tempat
 - 2. Keterhubungan antar tempat
 - 3. Bobot keterhubungan antar tempat
- 2) Suatu masalah dapat digambarkan dengan menggunakan model jaringan apabila mengandung unsur
- 1. Tempat
 - 2. Keterhubungan antar tempat
 - 3. Bobot keterhubungan antar tempat

Untuk soal nomor 3 sampai dengan nomor 10, pilihlah satu jawaban yang paling benar.

- 3) Manakah yang dapat digambarkan dengan model jaringan?
- A. X dan Y merupakan anak dari P , sedang P dan Q merupakan anak dari L .
 - B. Pohon A merupakan hasil persilangan dari pohon P dan pohon Q .
 - C. Dari A ke X lewat B diperlukan waktu 3 menit, sedangkan dari A ke B diperlukan waktu 1 menit.
 - D. Suatu gedung berlantai 4, setiap lantai mempunyai 10 ruang.
- 4) Untuk mengirim surat dari suatu tempat ke tempat lain di kota yang sama diperlukan perangko Rp1.000,00, sedangkan dari suatu tempat ke tempat lain di kota yang berbeda diperlukan perangko Rp2.000,00. Apabila dinyatakan dalam tabel adalah

A.

	x	y
x	1000	2000
y	2000	1000

B.

	x	y
x	0	1000
y	2000	0

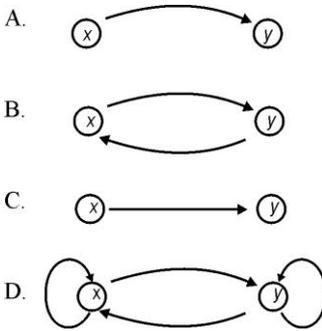
C.

	x	y
x	0	2000
y	1000	0

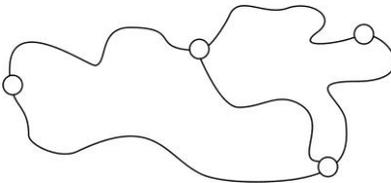
D.

	x	y
x	2000	1000
y	1000	2000

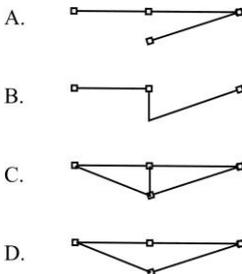
5) Model jaringan dari pernyataan pada soal no. 4 adalah



6) Diberikan peta jalan dalam suatu kecamatan sebagai berikut:



Penggambaran dengan menggunakan model jaringan adalah



- 7) Diketahui bahwa bobot segmen garis penghubung dua titik menyatakan waktu yang diperlukan untuk menempuh jalan seperti yang dinyatakan oleh segmen garis tersebut. Kita harus menentukan urutan segmen garis yang harus ditempuh dari suatu titik awal ke titik lain sebagai tujuan, sedemikian sehingga menggunakan waktu yang secepat-cepatnya. Hal tersebut merupakan masalah
- A. aliran maksimal
 - B. rute terpendek
 - C. lintasan kritis
 - D. pohon rentangan minimal
- 8) Diketahui bahwa bobot segmen garis penghubung dua titik menyatakan waktu penyelesaian aktivitas yang dinyatakan oleh segmen garis tersebut. Kita harus menentukan waktu paling lama pada suatu urutan aktivitas, yang dimulai dari titik awal ke titik akhir. Hal tersebut merupakan masalah
- A. aliran maksimal
 - B. rute terpendek
 - C. lintasan kritis
 - D. pohon rentangan minimal
- 9) Diketahui bahwa bobot segmen garis penghubung dua titik menyatakan kapasitas ruas jalan yang dinyatakan oleh segmen garis tersebut. Kita harus menentukan urutan segmen garis yang harus ditempuh dari suatu titik awal ke titik lain sebagai tujuan sedemikian sehingga jumlah barang sebanyak-banyaknya tanpa melampaui kapasitas jalan. Hal tersebut merupakan masalah
- A. aliran maksimal
 - B. rute terpendek
 - C. lintasan kritis
 - D. pohon rentangan minimal
- 10) Diketahui bahwa bobot segmen garis penghubung dua titik menyatakan panjang selokan air, seperti yang dinyatakan oleh segmen garis tersebut. Kita harus membuat agar supaya kesemua titik perpotongan (tempat yang membutuhkan aliran) selokan teraliri sedemikian sehingga panjang selokan yang dibuat seminimal mungkin. Hal tersebut merupakan masalah
- A. aliran maksimal
 - B. rute terpendek
 - C. lintasan kritis
 - D. pohon rentangan minimal

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Metode Enumerasi

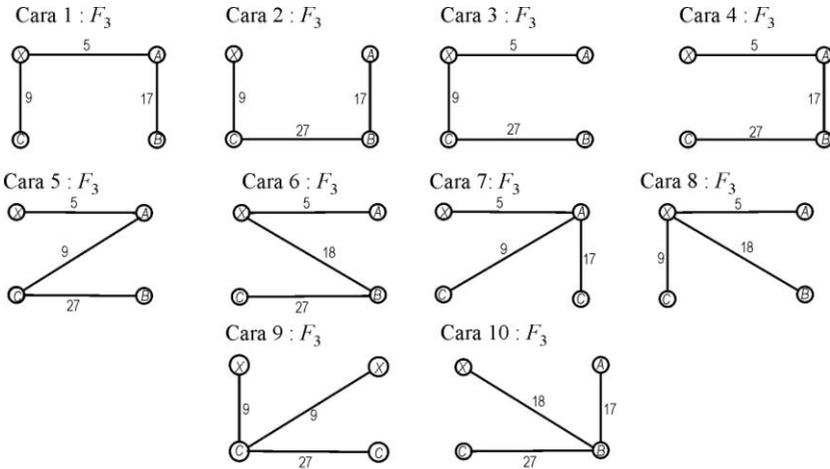
Setelah Anda telah mempelajari beberapa contoh masalah, ragam masalah, serta penurunan penyajian model jaringan, dalam Kegiatan Belajar 2 ini Anda akan mempelajari bagaimana cara menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan metode yang paling sederhana. Metode ini sering disebut dengan metode enumerasi. Dengan metode ini kita harus mencari semua kemungkinan yang terdapat dalam model jaringan serta mengevaluasinya sesuai dengan tujuan penyelesaian masalah yang kita kehendaki. Metode ini hanya digunakan selama masalah yang kita hadapi masih dimungkinkan untuk diselesaikan dengan cara tersebut. Dengan perkataan lain, tidak terdapat ‘banyak’ kemungkinan yang terjadi oleh karena masalahnya cukup ‘kecil’. Apabila sudah tidak mungkin diselesaikan dengan cara tersebut, kita dapat menyelesaikannya dengan menggunakan metode lain yang lebih praktis. Anda akan dapat menjumpai metode yang lebih praktis tersebut sesuai dengan masalahnya, pada modul-modul berikutnya.

A. METODE ENUMERASI PADA MASALAH 1

Penyelesaian Masalah Pohon Rentangan Minimal

Apabila kita perhatikan lagi Masalah 1 pada Kegiatan Belajar 1, sebenarnya apa yang diperlukan pada suatu jaringan transmisi data bukanlah menghubungkan setiap 2 tempat seperti pada Gambar 1.1. Dalam hal ini yang diperlukan hanyalah bagaimana kita berusaha agar keempat tempat tersebut terhubung dengan saluran transmisi. Yang dimaksudkan terhubung di sini, dapat diartikan bahwa untuk setiap 2 tempat berbeda terdapat urutan saluran yang menghubungkannya.

Dalam kaitan masalah ini, terdapat beberapa cara (atau kemungkinan) untuk menghubungkan keempat tempat tersebut. Dengan metode enumerasi, kita turunkan semua cara yang mungkin digunakan. Semua cara ini dapat kita buat berangkat dari model jaringan yang telah kita turunkan, kita turunkan lagi semua cara penghubungan seperti pada Gambar 1.14 berikut:



Gambar 1.14
Sepuluh Buah Pohon Rentangan

Dapat kita lihat pada Gambar 1.14, untuk menghubungkan 4 tempat kita hanya memerlukan 3 buah garis penghubung. Struktur graf yang diperoleh mirip dengan struktur pohon dengan 3 buah cabang yang merentang ke empat titik yang diberikan (dituliskan dengan F_3). Penjelasan lebih lanjut mengenai hal ini akan Anda jumpai pada Modul 2.

Apabila bilangan di samping setiap garis menyatakan satuan biaya pemasangan sarana penghubung antara 2 tempat yang berbeda (sesuai dengan tabel yang diberikan sebelumnya) maka kita dapat menghitung biaya pemasangan jaringan dari setiap cara pemasangan.

Biaya yang diperlukan untuk:

Cara 1 adalah $9 + 5 + 17 = 31$ satuan biaya ←

Cara 2 adalah $9 + 27 + 17 = 53$ satuan biaya

Cara 3 adalah $5 + 9 + 27 = 41$ satuan biaya

Cara 4 adalah $5 + 17 + 27 = 49$ satuan biaya

Cara 5 adalah $5 + 9 + 27 = 41$ satuan biaya

Cara 6 adalah $5 + 18 + 27 = 50$ satuan biaya

Cara 7 adalah $5 + 9 + 17 = 31$ satuan biaya ←

Cara 8 adalah $9 + 5 + 18 = 32$ satuan biaya

Cara 9 adalah $9 + 9 + 27 = 45$ satuan biaya

Cara 10 adalah $18 + 27 + 17 = 63$ satuan biaya

Dapat kita lihat dengan mudah bahwa terdapat 2(dua) cara pemasangan saluran transmisi yang memberikan biaya minimal, yaitu cara 1 dan cara 7. Biaya yang diperlukan untuk kedua cara tersebut adalah 31 satuan biaya. Mengapa terdapat lebih dari satu cara (atau satu jawab) yang minimal? Coba perhatikan Gambar 1.14, untuk cara 1 dan cara 7, juga Gambar 1.1a atau 1.1b!

Kebetulan pada contoh di atas terdapat 2 buah garis, yaitu garis XC dan garis AC yang berbobot sama, yaitu 9 satuan biaya. Apabila semua garis bobotnya berbeda maka jelas akan memberikan jawab yang tunggal, maksudnya hanya terdapat satu cara pemasangan. Akan tetapi benarkah apabila ada lebih dari satu garis yang berbobot sama, selalu memberikan jawab yang tidak tunggal?

Pada contoh di atas (Gambar 1a atau 1b), hanya terdapat 4 buah titik dan 6 buah garis penghubung. Telah Anda lihat (Gambar 1.14), terdapat 10 macam cara (kemungkinan) penghubungan keempat titik tersebut. Coba Anda periksa, adakah cara penghubung yang lain? Tentu saja hal tersebut dapat mudah dan cepat ditentukan untuk menurunkan kesepuluh macam cara tersebut. Akan tetapi, apabila terdapat ‘banyak’ titik maka akan banyak terdapat garisnya. Dengan demikian maka akan semakin rumitlah penentuan semua cara yang dimungkinkan. Dengan perkataan lain, metode enumerasi ini tidaklah efisien.

Terdapat berbagai metode penyelesaian masalah yang lebih efisien dan praktis. Metode-metode tersebut akan Anda jumpai pada Modul 3.

Contoh 1.3

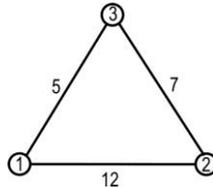
Pada jaringan yang telah diberikan pada contoh 1.1 sebelumnya, diberikan tabel yang menyatakan biaya kawat penghantar setiap 2 titik sebagai berikut:

	1	2	3
1	-	12	5
2	12	-	7
3	5	7	-

- Tentukan semua cara penghubungan yang dimungkinkan!
- Tentukan cara manakah yang memberikan jumlah biaya minimal!

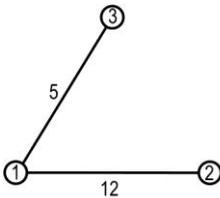
Penyelesaian:

- a) Kita turunkan dahulu model jaringan masalah

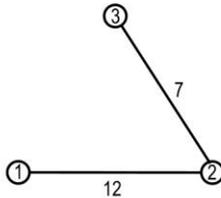


Gambar 1.15
Jaringan 3 Titik

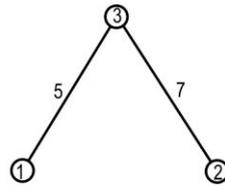
Di sini hanya terdapat 3 cara penghubungan, yaitu



Cara 1



Cara 2



Cara 3

- b) Kita hitung jumlah bobot (biaya) untuk masing-masing cara, yaitu

Cara 1 adalah $5 + 12 = 17$,

Cara 2 adalah $7 + 12 = 19$,

Cara 3 adalah $5 + 7 = 12$.

Jadi, cara 3 merupakan bentuk penghubungan yang memberikan bobot minimal. Dengan perkataan lain merupakan pohon rentangan minimal dari jaringan Gambar 1.15.

B. METODE ENUMERASI PADA MASALAH 2

Penyelesaian Masalah Rute Terdekat

Kita perhatikan kembali model jaringan serta tujuan penyelesaian masalah dari masalah 2, yang terdapat pada Kegiatan Belajar 1. Dapat Anda

lihat bahwa dengan menggunakan model jaringan tersebut, masalah yang kita hadapi lebih jelas.

Andaikan kita ingin mencari rute (urutan jalan) terdekat atau lintasan terpendek dari kota A ke kota F . Jika kita menggunakan model jaringan seperti yang diberikan oleh Gambar 1.3 pada Kegiatan Belajar 1 maka dari titik A ke titik F (di sini tidak kita sebut lagi kota A ke kota F) terdapat beberapa rute. Masing-masing rute tersebut panjangnya berbeda-beda, yaitu:

1. $A - B - D - F$, panjang rutenya adalah $3 + 2 + 7 = 12$
2. $A - B - E - F$, panjang rutenya adalah $3 + 6 + 2 = 11$
3. $A - B - D - C - E - F$, panjang rutenya adalah $3 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10$
4. $A - C - E - F$, panjang rutenya adalah $8 + 1 + 2 = 11$

Dapat kita lihat dengan mudah bahwa untuk mencapai titik F dari titik A rute paling dekat adalah $A - B - D - C - E - F$ dengan panjang rutenya 10.

Dengan perkataan lain, apabila kita kembalikan ke masalah sebenarnya, untuk mencapai kota F berangkat dari kota A , rute paling dekat adalah dari kota A melewati kota D , kota C , kota E , akhirnya mencapai kota F . Di sini, panjang perjalanan yang ditempuh 10 satuan jarak.

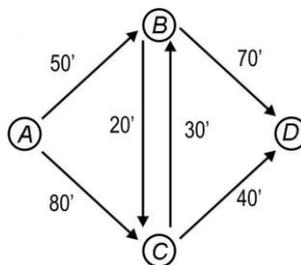
Contoh 1.4

Pada jaringan yang telah diturunkan dari contoh 1.2 Kegiatan Belajar 1,

- a) Tentukan semua rute dari tempat A ke D
- b) Tentukan rute manakah yang waktu tempuhnya tercepat.

Penyelesaian

Kita gambarkan kembali jaringan tersebut



Gambar 1.16

Bilangan di samping setiap garis menyatakan waktu tempuh (dalam satuan waktu menit) dari suatu tempat ke tempat lain.

a) Semua rute yang dapat ditempuh dari A ke D adalah

- a. $A - B - D$
- b. $A - B - C - D$
- c. $A - C - D$
- d. $A - C - B - D$

- b) Waktu tempuh rute $A - B - D$ adalah $50+70 = 120$
 Waktu tempuh rute $A - B - C - D$ adalah $50+20+40 = 110$
 Waktu tempuh rute $A - C - D$ adalah $80+40 = 120$
 Waktu tempuh rute $A - C - B - D$ adalah $80+30+70 = 180$

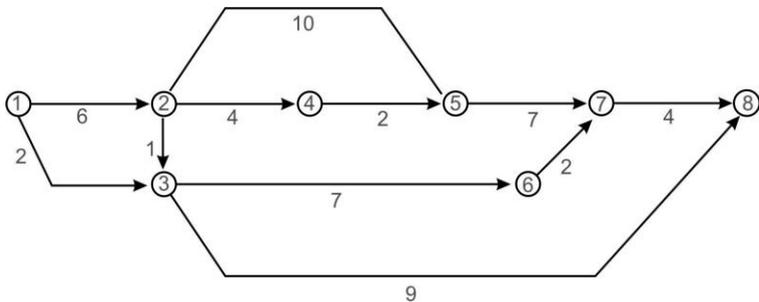
Rute terdekat dari A ke D adalah $A - B - C - D$ dengan waktu tempuhnya adalah 110 menit.

C. METODE ENUMERASI PADA MASALAH 4

Penyelesaian Masalah Lintasan Kritis

Apabila kita lihat kembali masalah 4 yang terdapat ada Kegiatan Belajar 1, salah satu tujuan penyelesaian masalah adalah mencari lintasan (urutan aktivitas) kritis. Dalam hal ini suatu lintasan disebut kritis apabila lintasan tersebut merupakan lintasan yang jumlah waktunya terlama (atau terpanjang). Sedangkan, aktivitas-aktivitas yang membentuk lintasan kritis disebut sebagai *aktivitas kritis*. Oleh karena itu, sebenarnya masalahnya sama juga dengan mencari rute terpanjang dari suatu tempat ke tempat lain. Bedanya di sini hanya dalam interpretasi tempat dan jalan penghubung antara 2 tempat. Pada masalah ini, tempat menunjukkan saat mulai atau selesainya suatu aktivitas (atau disebut juga kejadian saat mulai dan kejadian saat selesainya suatu aktivitas). Sedangkan jarak antara 2 tempat menunjukkan jangka waktu penyelesaian suatu aktivitas.

Cobalah Anda lihat kembali model jaringan aktivitas yang telah diturunkan dari contoh masalah 4. Selanjutnya, di sini digambarkan lagi dengan menambahkan jangka waktu penyelesaian setiap aktivitas.



Gambar 1.17

Untuk memudahkan penggambaran dan penyebutan,

- (i) nama aktivitas yang berada disetiap garis berarah tidak dicantumkan;
- (ii) setiap lingkaran diberikan nomor di dalamnya;
- (iii) setiap aktivitas dinyatakan dengan pasangan nomor dari dua buah simpul yang terhubung. Sebagai contoh, pasangan (1,2) menyatakan suatu aktivitas, yaitu pengangkatan manajer penjualan. Pasangan (2,5) menyatakan aktivitas pemilihan distributor;
- (iv) Bilangan di samping setiap garis menyatakan jangka waktu penyelesaian aktivitas. Sebagai contoh, jangka waktu (lamanya) aktivitas (1,2) atau pengangkatan manajer penjualan adalah 6 hari (atau 6 satuan waktu), sedangkan jangka waktu aktivitas (2,5) adalah 10 hari.

Dengan melihat gambar di atas, sebagai model jaringan masalah, kita dapat menurunkan semua urutan aktivitas dari dimulainya aktivitas awal sampai dengan berakhirnya aktivitas akhir. Urutan aktivitas-aktivitas tersebut adalah sebagai berikut:

- a. Untuk urutan aktivitas (1,2) – (2,5) – (5,7) – (7,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $6 + 10 + 7 + 4 = 27$
- b. Untuk urutan aktivitas (1,2) – (2,4) – (4,5) – (5,7) – (7,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $6 + 4 + 2 + 7 + 4 = 23$
- c. Untuk urutan aktivitas (1,2) – (2,3) – (3,6) – (6,7) – (7,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $6 + 1 + 7 + 2 + 4 = 20$
- d. Untuk urutan aktivitas (1,2) – (2,3) – (3,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $6 + 1 + 9 = 16$
- e. Untuk urutan aktivitas (1,3) – (3,6) – (6,7) – (7,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $2 + 7 + 2 + 4 = 15$

- f. Untuk urutan aktivitas (1,3) – (3,8),
jumlah waktu yang diperlukan: $2 + 9 = 11$

Dapat kita lihat bahwa urutan aktivitas yang mempunyai waktu terpanjang adalah urutan aktivitas pertama, yaitu (1,2) – (2,5) – (5,7) – (7,8), atau pengangkatan manajer penjualan – pemilihan distributor – memperoleh order dari distributor – pengangkutan stok ke distributor. Jangka waktu urutan aktivitas tersebut adalah 27 hari.

Oleh karena urutan aktivitas tersebut mempunyai waktu terlama maka dikatakan bahwa urutan aktivitas tersebut merupakan lintasan kritis. Dikatakan kemudian bahwa, aktivitas-aktivitas di dalamnya merupakan aktivitas kritis dari kegiatan (atau proyek) pemasaran.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Pada masalah yang terdapat pada latihan Kegiatan Belajar 1, setiap aktivitasnya diberikan jangka waktu sebagai berikut:

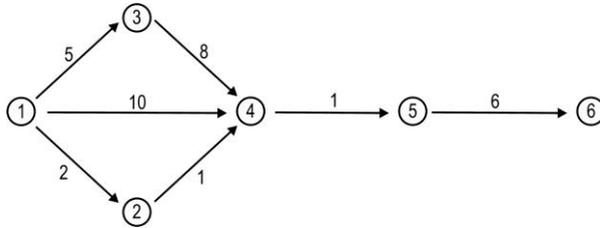
	Aktivitas	Ruas Garis	Waktu (dalam menit)
a.	Membuat konsep surat	(1,3)	5
b.	Mengetik surat	(3,4)	8
c.	Foto kopi lampiran surat	(1,4)	10
d.	Mengetik alamat pada amplop	(1,2)	2
e.	Memasukkan surat ke dalam amplop	(4,5)	1
f.	Menempelkan perangko	(2,4)	1
g.	Membawa surat ke kotak pos	(5,6)	6

Dengan menggunakan jaringan aktivitas yang telah diturunkan pada Latihan sebelumnya,

- 1) Tentukanlah urutan aktivitas manakah yang disebut sebagai lintasan kritis!
- 2) Berapa lama untuk melakukan semua aktivitas kritisnya!

Petunjuk Jawaban Latihan

Kita gambarkan lagi model jaringan yang telah diperoleh sebelumnya, dan kita tambahkan jangka waktu setiap aktivitas. Seperti sebelumnya, nama aktivitas juga tidak dicantumkan.



- 1) Dalam masalah ini hanya terdapat 3 buah urutan aktivitas yang dapat dikerjakan dari awal kegiatan sampai dengan akhir kegiatan pengiriman surat.

Urutan aktivitas yang dapat dilakukan adalah:

- a) Konsep surat – ketik surat – masukkan surat ke amplop – bawa ke kotak pos waktu yang diperlukan adalah $5 + 8 + 1 + 6 = 20$ menit
- b) Fotokopi lampiran – masukkan surat ke amplop – bawa ke kotak pos waktu yang diperlukan adalah $10 + 1 + 6 = 17$ menit
- c) ketik amplop – tempel prangko – masukkan surat ke amplop – bawa ke kotak pos waktu yang diperlukan adalah $2 + 1 + 1 + 6 = 10$ menit

Jelas bahwa urutan aktivitas yang pertama merupakan urutan aktivitas kritis, karena memerlukan waktu yang paling lama, yaitu 20 menit.

- 2) Waktu yang digunakan untuk melakukan urutan aktivitas kritisnya adalah 20 menit.



RANGKUMAN

Anda telah mempelajari pada Kegiatan Belajar 2, metode sederhana yang disebut metode enumerasi untuk menyelesaikan beberapa contoh masalah yang telah diberikan pada Kegiatan Belajar 1 sebelumnya.

1. Pada masalah mencari pohon rentangan minimal, dari jaringan yang telah diperoleh, kita turunkan semua kemungkinan bentuk

keterhubungan semua titik. Selanjutnya kita hitung jumlah bobot dari semua bentuk keterhubungan tersebut. Akhirnya kita pilih yang bentuk keterhubungan yang bobotnya minimal.

2. Pada masalah mencari rute terdekat (atau lintasan terdekat), dari jaringan yang telah kita peroleh, kita tentukan semua kemungkinan rute atau lintasan dari titik awal ke titik akhir jaringan. Untuk semua rute (urutan garis-garis berarah) yang dimungkinkan, kita hitung jumlah bobotnya. Akhirnya kita pilih rute yang jumlah bobotnya minimal.
3. Pada masalah mencari urutan aktivitas (lintasan) kritis dari jaringan aktivitas, kita tentukan semua kemungkinan urutan aktivitas dari aktivitas awal sampai ke aktivitas akhir. Selanjutnya kita hitung jumlah bobot (di sini merupakan waktu) semua kemungkinan urutan aktivitas tersebut. Akhirnya kita pilih urutan aktivitas yang jumlah bobotnya maksimal



TES FORMATIF 2

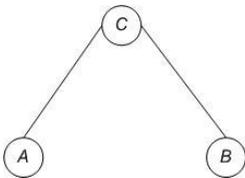
Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 3:

Diberikan jaringan berarah dengan 3 (tiga) titik, yaitu *A*, *B*, dan *C*, dengan tabel biaya penghubungan antara dua titik sebagai berikut:

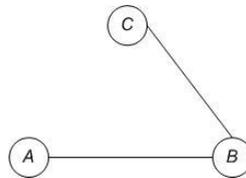
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	-	10	25
<i>B</i>	10	-	15
<i>C</i>	25	15	-

- 1) Pohon rentangan minimal dari jaringan tersebut adalah

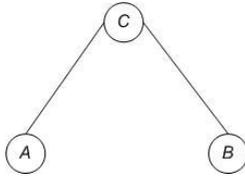
A.



B.



C.



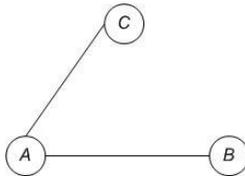
D. tidak ada yang benar

2) Biaya minimal untuk menghubungkan A, B, C, adalah

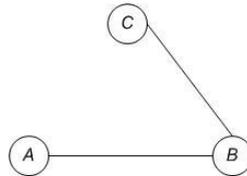
- A. 35 satuan biaya
- B. 25 satuan biaya
- C. 40 satuan biaya
- D. 15 satuan biaya

3) Apabila biaya penghubungan A dan B adalah 30 satuan (tidak lagi 10 satuan) maka pohon rentangan minimalnya adalah

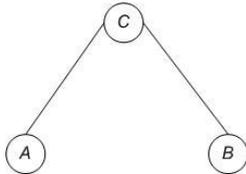
A.



B.



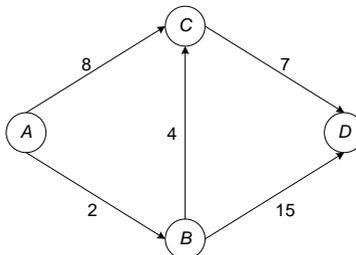
C.



D. tidak ada yang benar

Untuk soal nomor 4 sampai dengan nomor 6.

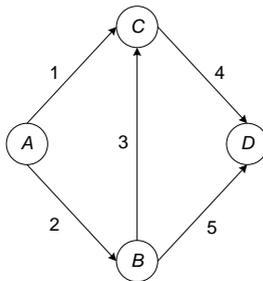
Diberikan jaringan berarah serta bobotnya (dituliskan disamping garis), sebagai berikut:



- 4) Lintasan terpendek dari A ke D adalah
- $A - C - D$
 - $A - B - C - D$
 - $A - B - D$
 - $A - C - B - D$
- 5) Jarak terpendek (bobot lintasan terpendek) dari A ke D adalah
- 13
 - 17
 - 15
 - 12
- 6) Apabila bobot garis BC adalah 6 (tidak lagi 4) maka lintasan terpendek dari A ke D adalah
- $A - C - D$
 - $A - B - C - D$
 - $A - B - D$
 - $A - C - D$ dan $A - B - C - D$

Untuk soal nomor 7 sampai dengan nomor 10.

Diberikan jaringan aktivitas dari penyelesaian suatu pekerjaan sebagai berikut.



Bilangan di samping garis merupakan nomor aktivitas

- 7) Aktivitas 4 dapat dimulai tepat setelah selesainya aktivitas
- 1
 - 2 dan aktivitas 3
 - 1 dan aktivitas 3
 - 1, aktivitas 2, dan aktivitas 3

- 8) Setelah diselesaikannya aktivitas 2 maka dapat dimulai aktivitas
- 4
 - 3 dan aktivitas 5
 - 4 dan aktivitas 5
 - 1

Apabila jangka waktu penyelesaian aktivitas 1, 2, 3, 4, dan 5 berturut-turut adalah 8, 2, 4, 7, dan 15 hari maka

- 9) Aktivitas-aktivitas kritisnya adalah
- aktivitas 2 dan aktivitas 4
 - aktivitas 2, aktivitas 3, dan aktivitas 4
 - aktivitas 1 dan aktivitas 4
 - tidak ada yang benar
- 10) Panjang lintasan kritisnya adalah
- 7 hari
 - 13 hari
 - 15 hari
 - 17 hari

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

- 1) A (dalam graf tidak perlu ada unsur bobot)
- 2) D
- 3) C
- 4) A
- 5) D
- 6) B
- 7) B
- 8) C
- 9) A
- 10) D

Tes Formatif 2

- 1) B
- 2) B
- 3) C
- 4) B
- 5) A
- 6) D
- 7) C
- 8) B
- 9) A
- 10) D

Daftar Pustaka

- Ahuja, R.K, Magnanti, T.L, Orlin, J.B. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithm, and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bazaraa, MS. (1990). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley.
- Boffey, T.B.(1982). *Graph Theory in Operation Research*. Macmillan Press Ltd.
- Lang, Douglas W. (1977). *Critical Path Analysis*. David Mc Cay Co., 2ed.
- Phillips, Don T., Garcia-Diaz, Alberto. (1990). *Fundamentals of Network Analysis*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliff.
- Smith, David K. (1982). *Network Optimization Practice: A Computational Guide*, Ellis Horwood Ltd.