MODUL 1

Probabilitas

Dr. A. Rakhman, M.Si.

PENDAHULUAN

Konsep probabilitas sering sekali digunakan dalam kehidupan sehari-hari dan kita ekspresikan dalam berbagai cara. Sebagai contoh, peluang seorang calon gubernur memenangkan pilkada adalah 60% atau peluang PSSI menang melawan kesebelasan nasional Malaysia 50:50 atau peluang seseorang yang mengikuti suatu produk asuransi meninggal pada usia 60 tahun 5%. Masih banyak contoh yang lain yang dekat dengan kehidupan kita.

Probabilitas dari suatu kejadian merupakan suatu ukuran dari kemungkinan kejadian tersebut akan terjadi. Para ahli Statistika sepakat dengan beberapa aturan dan konvensi dalam probabilitas berikut.

1. Probabilitas dari suatu kejadian bernilai antara 0 sampai 1.
2. Jumlahan dari probabilitas-probabilitas dari semua kejadian dalam suatu ruang sampel sama dengan 1.
3. Probabilitas dari suatu kejadian A merupakan jumlahan dari probabilitas-probabilitas dari semua sampel di A.
4. Probabilitas dari suatu kejadian A dinotasikan dengan $\Pr(A)$.

Jadi, apabila kejadian A mempunyai sifat hampir tidak mungkin terjadi maka nilai $\Pr(A)$ akan mendekati angka 0. Jika kejadian A sangat mungkin terjadi maka nilai $\Pr(A)$ akan mendekati angka 1.

Contoh 1

Misalkan kita melakukan suatu eksperimen atau percobaan yang cukup sederhana, yaitu melempar suatu koin mata uang sekali saja. Setelah jatuh ke tanah, ada dua kemungkinan yang dapat terjadi, muncul sisi muka atau belakang. Kedua hasil tersebut, yaitu muka dan belakang koin {M,B}, mewakili ruang sampel dari eksperimen kita di atas. Selanjutnya, masing-

masing hasil kejadian muka, {M}, belakang {B} merupakan titik sampel dalam ruang sampel. Berapakah probabilitas dari masing-masing titik sampel atau kejadian di atas?

Jawab:

Probabilitas muncul muka akan sama dengan probabilitas muncul belakang. Jadi, probabilitas dari masing-masing kejadian sama dengan $\frac{1}{2}$.

Contoh 2

Bagaimana jika yang kita lempar adalah sebuah dadu? Berapakah probabilitas dari masing-masing titik sampelnya atau kejadiannya?

Jawab:

Untuk percobaan ini, ruang sampelnya ada enam kejadian yang mungkin: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Masing-masing kejadian mempunyai peluang yang sama untuk muncul sehingga probabilitas munculnya angka 1 sampai dengan 6 sama dengan $\frac{1}{6}$.

Contoh 3

Misalkan kita mengambil satu kartu dari satu set kartu. Berapakah peluangnya kita mendapatkan kartu sekop (*spade*)?

Jawab:

Ruang sampel dari percobaan di atas terdiri dari 52 kartu dengan probabilitas dari masing-masing titik sampel sama dengan $\frac{1}{52}$ karena ada 13 sekop dalam satu set kartu tersebut, probabilitas mendapatkan satu kartu sekop adalah:

$$\Pr(\text{sekop}) = (13)\left(\frac{1}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

Contoh 4

Misalkan Anda menjawab soal Benar-Salah (*True* (T)-*False*(F)) sebanyak 3 kali yang Anda benar-benar tidak tahu secara random (Anda seperti melakukan percobaan statistika). Berapa peluang jawaban Anda benar dua?

Jawab:

Untuk percobaan di atas Anda mempunyai ruang sampel yang terdiri dari 8 titik sampel.

S = {TTT, TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, FFF}

Masing-masing titik sampel mempunyai probabilitas yang sama untuk terjadi, yaitu 1/8. Kejadian "jawaban benar dua" terdiri dari himpunan berikut.

A = {TTH, THT, HTT}

Probabilitas kejadian A merupakan jumlahan dari probabilitas-probabilitas titik-titik sampel di A. Jadi,

$$\Pr(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Dalam _modul ini, Anda akan mempelajari definisi secara tepat apa yang dimaksud dengan probabilitas. Selain itu juga Anda akan mempelajari beberapa sifat penting probabilitas.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan beberapa cara menghitung probabilitas secara tepat suatu peristiwa dengan menggunakan definisi-definisi probabilitas.
2. menggunakan aturan probabilitas untuk menghitung probabilitas.
3. menggunakan torema Bayes atau aturan Bayes untuk menghitung probabilitas bersyarat.
4. menjelaskan hubungan antara variabel random dan distribusi probabilitas
5. menyusun tabel distribusi probabilitas
6. menentukan distribusi probabilitas jika variabel random merupakan variabel diskrit
7. menentukan distribusi probabilitas jika variabel random merupakan variabel kontinu.

KEGIATAN BELAJAR 1

Probabilitas

Bagaimana menghitung probabilitas suatu peristiwa? Pada kegiatan belajar ini kita akan mempelajari bagaimana cara menghitung probabilitas suatu peristiwa.

A. MENGHITUNG PROBABILITAS

Ada beberapa cara menghitung probabilitas suatu peristiwa atau kejadian, antara lain berikut ini.

1. Definisi Klasik

Jika kejadian A dapat terjadi dalam x cara dari seluruh n cara yang mungkin dan n cara ini berkemungkinan sama maka peluang terjadinya peristiwa tersebut (disebut kesuksesannya) dinyatakan oleh:

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{A}) = \frac{x}{n}$$

Sebagai contoh, kita mempunyai suatu kotak berisi 10 orang nasabah. Dua nasabah wanita, tiga nasabah laki-laki, dan lima sisanya anak-anak. Jika kita ingin mengambil seorang nasabah secara random, berapakah peluang yang terpilih adalah nasabah laki-laki?

Dalam eksperimen ini, ada 10 kemungkinan, 3 di antaranya terpilih nasabah laki-laki. Jadi, peluang terpilih nasabah laki-laki adalah $\frac{3}{10}$ or 0.30.

2. Definisi Frekuensi Relatif atau Empiris

Probabilitas taksiran atau empiris dari suatu kejadian ditetapkan sebagai frekuensi relatif dari terjadinya kejadian apabila banyaknya pengamatan besar. Probabilitas dalam definisi empiris atau frekuensi relatif ditentukan dari data yang diperoleh dan besarnya ditentukan setelah eksperimen.

Sebagai contoh, seorang manajer sebuah supermal mengamati bahwa 5 dari 50 pengunjung melakukan pembelian. Hari berikutnya 20 orang dari

50 pengunjungnya melakukan pembelian. Dua frekuensi relatif di atas ($\frac{5}{10}$ atau 0.10 dan $\frac{20}{50}$ atau 0.40) jelas berbeda. Setelah menjumlahkan probabilitas dari hari ke hari, manajer tersebut mungkin akan mendapati bahwa peluang seorang pengunjung membeli di supermalnya mendekati 0.20. Jadi, setelah melakukan banyak percobaan, frekuensi relatif konvergen ke suatu nilai yang stabil (0.20), yang dapat diinterpretasikan sebagai probabilitas seorang pengunjung akan melakukan pembelian. Ide tentang frekuensi relatif dari suatu peristiwa akan konvergen ke nilai probabilitas peristiwa tersebut, seiring dengan bertambahnya percobaan dikatakan sebagai hukum bilangan besar.

3. Definisi Subjektif

Probabilitas dalam definisi subjektif sangat bergantung kepada pengetahuan individu, ditentukan sebelum eksperimen. Eksperimen dilakukan hanya satu kali (tidak diulang) dan probabilitas yang berbeda untuk hal yang sama dapat diperoleh dari individu yang berbeda.

Contoh:

Anda menjawab tiga soal B-S yang Anda tidak tahu jawabannya sama sekali. Berapakah peluangnya Anda menjawab benar 1 soal?

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{8}$

Jawab:

Jika Anda menjawab tiga soal B-S secara random maka akan ada 8 hasil yang mungkin, yaitu BBB, BBS, BSB, SBB, BSS, SBS, SSB, dan SSS. Satu jawaban yang benar bisa berasal dari BSS, SBS, dan SSB. Jadi, probabilitas menjawab tiga soal B-S secara random akan menghasilkan satu jawaban yang benar adalah $\frac{3}{8}$ atau 0.375. Jawaban yang benar adalah d.

B. ATURAN PROBABILITAS

Sering kali kita ingin menghitung probabilitas suatu kejadian dari probabilitas kejadian lain yang diketahui nilainya. Di sini akan diperkenalkan beberapa aturan penting yang menyederhanakan tujuan kita di atas.

1. Definisi dan Notasi

Sebelum mendiskusikan tentang aturan probabilitas, ada beberapa definisi yang perlu diketahui sebagai berikut.

a. Dua kejadian dikatakan *mutually exclusive* atau saling asing (*disjoint*) jika tidak terjadi pada waktu yang sama.
b. Probabilitas kejadian A terjadi, dengan syarat kejadian B telah terjadi, dikatakan sebagai probabilitas bersyarat (*conditional probability*). Probabilitas bersyarat di atas dinotasikan dengan simbol $\Pr(A|B)$.
c. Pelengkap atau *complement* dari suatu kejadian A adalah tidak terjadinya kejadian tersebut, disimbolkan dengan A'. Peluangnya dinotasikan dengan $\Pr(A')$.
d. Probabilitas kejadian A dan B keduanya terjadi adalah probabilitas A irisan B (A *intersection* B) dinotasikan dengan $\Pr(A \cap B)$. Jika A dan B saling asing maka $\Pr(A \cap B) = 0$.
e. Probabilitas kejadian A atau B terjadi adalah probabilitas A gabungan B(A *union* B) dinotasikan dengan $\Pr(A \cup B)$.
f. Jika terjadinya peristiwa A mengubah probabilitas kejadian B maka kejadian A dan B dikatakan *dependent*. Sebaliknya, apabila terjadinya peristiwa A tidak mempengaruhi probabilitas peristiwa B maka A dan B dikatakan *independent*.

Berikut ini diberikan beberapa aturan operasi probabilitas.

a. **Aturan pengurangan** Probabilitas kejadian A akan terjadi sama dengan 1 dikurangi probabilitas kejadian A tidak akan terjadi.
   $\Pr(A) = 1 - \Pr(A')$.

   Misal sebagai contoh probabilitas Anda lulus universitas sama dengan 0.80. Berdasarkan aturan pengurangan, probabilitas Anda tidak akan lulus universitas adalah 1.00 - 0.80 or 0.20.
b. **Aturan Perkalian**. Aturan perkalian digunakan pada situasi kita ingin mengetahui probabilitas irisan dua kejadian, yaitu kita ingin mengetahui kejadian A dan B terjadi kedua-duanya. Probabilitas kejadian A dan B terjadi bersamaan sama dengan probabilitas kejadian A terjadi dikalikan probabilitas kejadian B bersyarat A.

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

Misal sebuah kotak terdiri dari 6 kelereng merah dan 4 bola hitam. Dua kelereng diambil tanpa pengembalian dari kotak tersebut. Berapakah probabilitas kedua kelereng berwarna hitam?

Tetapkan A = kejadian kelereng pertama yang terambil hitam dan B = kejadian kelereng kedua juga hitam. Kita tahu bahwa:

1) Peluang terjadinya peristiwa A adalah $\Pr(A)=\frac{4}{10}$.
2) Setelah pengambilan pertama, tinggal tersisa 9 kelereng, 3 di antaranya hitam. Maka peluang kejadian B bersyarat A terjadi adalah $\Pr\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{3}{9}$.

Jadi, berdasarkan aturan perkalian probabilitas diperoleh probabilitas mendapatkan dua kelereng berwarna hitam adalah:

$$\Pr(A\cap B)=\Pr(A)\Pr(B|A)$$

$$\Pr(A\cap B)=\left(\frac{4}{10}\right)*\left(\frac{3}{9}\right)=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$$

c. Aturan **Penambahan**. Aturan penambahan digunakan pada situasi di mana kita punya dua kejadian dan kita ingin tahu salah satu atau keduanya terjadi. Probabilitas kejadian A dan atau kejadian B terjadi sama dengan probabilita kejadian A terjadi ditambah probabilitas kejadian B terjadi dikurangi probabilitas kedua kejadian A dan B terjadi bersama-sama.

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)$$

Catatan: Mengambil fakta bahwa $\Pr(A\cap B)=\Pr(A)\Pr(B|A)$, aturan penambahan dapat ditulis sebagai:

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A)\Pr(B|A)$$

Contoh:
Anda sedang mempertimbangkan memulai usaha A dan B. Peluang sukses usaha A dan B masing-masing adalah $\frac{1}{4}$ dan $\frac{2}{4}$. Probabilitas minimal satu usahanya sukses adalah $\frac{3}{4}$. Hitunglah probabilitas Anda akan sukses di kedua usaha tersebut?

Jawab:
Pertama-tama kita definisikan permasalahan di atas sebagai berikut:
A = Anda sukses di usaha A.
B = Anda sukses di usaha B.
Selanjutnya, kita ingin menghitung probabilitas irisan dari kejadian A dan B, yaitu kita ingin tahu $\Pr(A \cap B)$.
Selanjutnya, dari soal kita ketahui probabilitas:
$\Pr(A) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\Pr(B) = \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\Pr(A \cup B) = \frac{3}{4}$.
Selanjutnya, dengan menggunakan rumus probabilitas irisan, diperoleh:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Jadi, $\Pr(A \cap B) = 0$. Dapat diartikan bahwa jika Anda menjalankan kedua usaha di atas maka peluang kedua-duanya sukses bersama-sama merupakan kejadian yang tidak mungkin atau mustahil. Disarankan Anda memilih usaha B saja yang lebih besar probabilitas suksesnya.

Contoh:
Seorang mahasiswa matematika mempunyai probabilitas memilih konsentrasi keuangan sebesar 0,40, konsentrasi matematika teori sebesar 0,30, dan memilih kedua konsentrasi sebesar 0,20. Berapakah probabilitas seorang mahasiswa matematika akan memilih konsentrasi keuangan atau teori?

Solusi:

Misalkan K = mahasiswa matematika memilih konsentrasi keuangan, dan T = mahasiswa matematika memilih konsentrasi teori. Selanjutnya berdasarkan aturan penambahan:

$$\begin{aligned}\Pr(K \cup T) &= \Pr(K) + \Pr(T) - \Pr(K \cap T)\\ &= 0.40 + 0.30 - 0.20 = 0.50\end{aligned}$$

Contoh:

Suatu kotak terdiri dari 6 kelereng merah dan 4 hitam. Dua kelereng diambil dengan pengembalian dari kotak tersebut. Berapakah probabilitas kedua kelereng yang diambil semuanya hitam?

A. $\frac{1,6}{10}$ B. $\frac{2}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{4}{10}$

Jawab:

Misalkan H = kejadian kelereng pertama yang terambil hitam dan M = kejadian kelereng kedua juga hitam. Kita tahu bahwa:

a. Ada 10 kelereng, 4 di antaranya hitam. $\Pr(H) = \frac{4}{10}$.

b. Setelah pengambilan pertama, kita kembalikan kelereng hitam yang terpilih tadi sehingga di dalam kotak tetap ada 10 kelereng, $\Pr(M|H) = \frac{4}{10}$.

Berdasarkan aturan perkalian diperoleh:

$$\begin{aligned}\Pr(H \cap M) &= \Pr(H)\Pr(M|H)\\ &= \left(\frac{4}{10}\right) * \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{16}{100} = 0.16\end{aligned}$$

Jadi, jawaban yang benar adalah A.

Contoh:

Suatu kartu diambil secara random dari kotak kartu lengkap. Anda akan memenangkan 1 juta rupiah jika kartu tersebut spade atau ace. Berapakah peluangnya Anda memenangkan permainan tersebut?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{13}{52}$ C. $\frac{4}{13}$ D. $\frac{17}{52}$

Jawab:

Misalkan S = kejadian kartu yang terambil adalah spade dan A = kejadian kartu yang terambil adalah ace. Kita tahu bahwa:

a. Ada 52 kartu.
b. Ada 13 kartu spade, jadi $\Pr(S) = \frac{13}{52}$.
c. Ada 4 ace, jadi $\Pr(A) = \frac{4}{52}$.
d. Ada 1 kartu ace yang juga merupakan kartu spade, jadi $\Pr(S \cap A) = \frac{1}{52}$.

Selanjutnya, berdasarkan aturan penambahan diperoleh:

$$\Pr(S \cup A) = \Pr(S) + \Pr(A) - \Pr(S \cap A)$$
$$\Pr(S \cup A) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Jadi, jawaban yang benar adalah C.

2. Teorema Bayes atau Aturan Bayes

Teorema Bayes (juga dikenal dengan aturan Bayes) sangat berguna sebagai alat untuk menghitung probabilitas bersyarat. Teorema Bayes dapat dinyatakan sebagai berikut:

Teorema Bayes. Diberikan A_1, A_2, ..., A_n masing-masing adalah himpunan dari kejadian yang saling asing dan bersama-sama membentuk ruang sampel S. Misalkan, B merupakan sebarang kejadian dari ruang sampel yang sama, Pr(B) > 0. Selanjutnya,

$$\Pr\left(A_k \mid B\right) = \frac{\Pr\left(A_k \cap B\right)}{\Pr\left(A_1 \cap B\right) + \Pr\left(A_2 \cap B\right) + ... + \Pr\left(A_n \cap B\right)}$$

Catatan: Mengambil fakta bahwa $\Pr\left(A_k \cap B\right) = \Pr\left(A_k\right)\Pr\left(B \mid A_k\right)$, Teorema Bayes dapat dinyatakan sebagai:

$$\Pr\left(A_k \mid B\right) = \frac{\Pr\left(A_k\right)\Pr\left(B \mid A_k\right)}{\Pr\left(A_1\right)\Pr\left(B \mid A_1\right) + ... + \Pr\left(A_n\right)\Pr\left(B \mid A_n\right)}$$

Kapan memakai Teorema Bayes?

Tantangan dalam mengaplikasikan teorema Bayes melibatkan pengenalan tipe-tipe masalah yang menjamin penggunaannya. Teorema Bayes dapat dipertimbangkan ketika beberapa syarat berikut ini terpenuhi.

a. Ruang sampel dapat dipartisi menjadi himpunan kejadian yang saling asing { A_1, A_2, . . . , A_n }.
b. Dalam ruang sampel, terdapat kejadian B, $\Pr(B) > 0$.
c. Tujuan analitisnya adalah menghitung probabilitas bersyarat dalam bentuk $\Pr\left(A_k \mid B\right)$.
d. Anda tahu minimal satu dari dua himpunan probabilitas berikut.
    1) $\Pr\left(A_k \cap B\right)$ untuk setiap A_k.
    2) $\Pr\left(A_k\right)$ dan $\Pr\left(B \mid A_k\right)$ untuk setiap A_k.

Contoh:

Puspa akan menikah besok, dengan pesta pernikahannya di ruang terbuka. Dalam satu tahun terdapat 150 hari hujan. Sayangnya, peramal cuaca memprediksikan bahwa besok akan turun hujan. Dari data, peramal tersebut mampu meramalkan esok hari terjadi hujan dengan tepat 80%. Di samping itu, dia salah meramalkan esok hari hujan, padahal tidak hujan 10%. Berapakah peluangnya akan terjadi hujan pada hari Puspa menikah?

Solusi:

Ruang sampel dari peristiwa di atas adalah dua kejadian yang saling asing, hujan dan tidak hujan. Sebagai tambahannya kejadian ketiga adalah peramal cuaca memprediksikan hujan. Notasi dari kejadian-kejadian di atas diberikan sebagai berikut.

a. Kejadian A_1. Hujan besok hari (hari Puspa menikah).
b. Kejadian A_2. Hujan tidak terjadi pada hari Puspa menikah.
c. Kejadian R. Peramal cuaca memprediksikan besok terjadi hujan.

Probabilitasnya diberikan sebagai berikut:

a. $\Pr(A_1) = \frac{150}{365} = 0.410959$ (Ada 150 hari hujan setahun).
b. $\Pr(A_2) = \frac{215}{365} = 0.589041$ (Ada 215 hari tidak hujan setahun).
c. $\Pr(R|A_1) = 0.8$ (Saat terjadi hujan, peramal meramalkan hujan).
d. $\Pr(R|A_2) = 0.1$ (Saat tidak terjadi hujan, peramal salah meramalkan hujan).

Kita ingin mengetahui $\Pr(A_1|R) = 0.8$, probabilitas terjadi hujan pada hari pernikahan Puspa, dengan mempertimbangkan prediksi peramal Jawabannya dapat dihitung dengan menggunakan teorema Bayes di bawah ini.

$$\Pr(A_1|R) = \frac{\Pr(A_1)\Pr(R|A_1)}{\Pr(A_1)\Pr(R|A_1) + \Pr(A_2)\Pr(R|A_2)}$$

$$\Pr(A_1|R) = \frac{(0.411)(0.8)}{[(0.411)(0.8)+(0.589)(0.1)]}$$

$$\Pr(A_1|R) = 0.8481$$

Peluang terjadi hujan pada hari pernikahannya 84,81%. Dengan peluang terjadi hujan sebesar itu, *even organizer* harus siap-siap menghadapi kemungkinan-kemungkinan yang diakibatkan oleh hujan untuk antisipasinya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Suatu perusahaan dalam menjalankan produksinya mengoperasikan dua mesin. Probabilitas mesin I dan pertama rusak pada bulan berikutnya adalah masing-masing 0,2 dan 0,25. Probabilitas kedua mesin rusak pada bulan berikutnya 0,10. Hitunglah probabilitas minimal satu mesin rusak bulan berikutnya!
2) Dari soal nomor 1), hitunglah probabilitas tepat satu mesin rusak bulan berikutnya!
3) Suatu perusahaan perminyakan merencanakan untuk mengadakan eksplorasi dua sumur. Diperoleh data-data eksplorasi terdahulu sebagai berikut:

Event	**Deskripsi**	**Prob.**
A	Tidak ada sumur menghasilkan minyak atau gas	0.6
B	Hanya satu sumur yang berhasil	0.18
C	Kedua sumur menghasilkan minyak atau gas	0.2

   Hitunglah probabilitas:
   a) Paling banyak satu sumur akan berhasil.
   b) Paling sedikit satu sumur akan berhasil
4) Misalkan diketahui data populasi penduduk 50% laki-laki dan 50% perempuan. Diketahui 4% orang yang terkena buta warna adalah laki-laki. Hitunglah probabilitas mendapatkan orang buta warna di antara orang laki-laki:
   a) 0,04 b) 0,05
   c) 0,06 d) 0,08
5) Lemparkan dua koin yang seimbang dan gambarkan kemungkinan hasilnya. Definisikan kejadian-kejadian berikut:
   A = koin pertama muncul ekor
   B = koin kedua muncul muka
   Apakah kedua kejadian A dan B saling *independent*?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Dari data di atas kita definisikan kedua kejadian, A = kejadian mesin I rusak dan B = kejadian mesin II rusak pada bulan berikutnya. Selanjutnya, diketahui $\Pr(A) = 0,2$ dan $\Pr(B) = 0,25$. Pertanyaan di atas dapat dirumuskan dalam $A \cup B$. Dari rumus penambahan diperoleh:
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$
$$= 0,2 + 0,25 - 0,10$$
$$= 0,35$$
2) Kejadian tepat satu mesin rusak dapat terjadi ketika mesin I rusak, mesin II tidak rusak atau sebaliknya. Jadi, kejadian tersebut dalam dirumuskan $\left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)$ yang jelas saling asing. Dari hubungan $A \cup B = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right) \cup \left(A^C \cap B\right)$ yang juga saling asing diperoleh:
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr\left(A \cap B^C\right) + \left(A^C \cap B\right)$$
$$\Pr\left(A \cap B^C\right) + \left(A^C \cap B\right) = \Pr(A \cup B) - \Pr(A \cap B)$$
$$= 0,35 - 0,10 = 0,25$$
3) Ketiga kejadian A, B, C di atas jelas saling asing karena kejadian satu di luar kejadian dua yang lainnya. Kejadian yang ditanyakan pada soal a adalah $A \cup B$ dan kejadian pada soal b adalah $B \cup C$. Jadi,
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$
$$= 0,6 + 0,18 = 0,78 \text{ dan}$$
$$\Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C)$$
$$= 0,18 + 0,2 = 0,38$$
4) Misalkan L adalah kejadian terambilnya orang laki-laki dan B adalah kejadian terambilnya orang buta warna. Dari cerita di atas diketahui $\Pr(B \cap L) = 4\%$. Sedangkan $\Pr(L) = 0,5$ yang dicari dari pertanyaan di atas adalah $\Pr(B|L) = 4\%$,

$$\Pr(B|L) = \frac{\Pr(B \cap L)}{\Pr(L)}$$

$$= \frac{0,04}{0,5} = 0,08$$

5) Dalam pelemparan dua koin kita ketahui ruang sampelnya adalah S = {MM, MB, BM, BB}. Ingin dicek apakah $\Pr(B|A) = \Pr(B)$. Dari data di atas diperoleh $\Pr(A) = 0,5$ dan $\Pr(A \cap B) = 0,25$. Menurut rumus probabilitas bersyarat diperoleh $\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$. Jadi, diperoleh kesimpulan bahwa kejadian A dan B saling *independent*.

RANGKUMAN

1. Probabilitas dari suatu kejadian merupakan suatu ukuran dari kemungkinan kejadian tersebut akan terjadi. Probabilitas kejadian A biasa dinotasikan dengan $\Pr(A)$.
2. Ukuran probabilitas harus memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:
   a. Probabilitas dari suatu kejadian bernilai antara 0 sampai 1.
   b. Jumlahan dari probabilitas-probabilitas dari semua kejadian dalam suatu ruang sampel sama dengan 1.
   c. Probabilitas dari suatu kejadian A merupakan jumlahan dari probabilitas-probabilitas dari semua sampel di A.
3. Nilai probabilitas dari suatu kejadian dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa definisi berikut definisi klasik, definisi frekuensi relatif atau empiris, dan definisi subjektif.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu koin dilempar tiga kali. Berapa peluang muncul tepat 1 Muka, dengan syarat hasil lemparan pertama muncul Muka.
   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{3}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. $\frac{3}{4}$

2) Dilakukan penelitian di suatu kota di Indonesia tentang partisipasi masyarakat (rumah tangga) dalam program asuransi pendidikan dan asuransi jiwa. Diperoleh data 50% sampel ikut asuransi pendidikan; 15% ikut asuransi jiwa; 5% mengikuti asuransi jiwa, tetapi tidak ikut asuransi pendidikan; dan 45% sampel mengikuti asuransi pendidikan, tetapi tidak ikut asuransi jiwa. Berapa persenkah rumah tangga yang mengikuti program asuransi pendidikan dan asuransi jiwa bersama-sama?
   A. 7.5
   B. 10
   C. 15
   D. 25

3) Probabilitas seorang pemegang polis asuransi rumah dan kendaraan akan mengajukan klaim 1 tahun lagi adalah masing-masing 0,15 dan 0,2; sedangkan probabilitas seorang pemegang polis kedua asuransi akan mengajukan klaim kedua-duanya 1 tahun lagi 0,05. Hitunglah probabilitas seorang yang mengikuti kedua asuransi tidak mengajukan polis tahun depan?
   A. 0,4
   B. 0,5
   C. 0,6
   D. 0,7

4) Suatu perusahaan komputer menyediakan garansi 1 tahun. Banyaknya komputer yang diperbaiki dengan garansi kerusakan *hard drive* mencapai 35% dari total banyaknya perbaikan. Banyaknya komputer yang diperbaiki dengan garansi di luar kerusakan monitor dan *hard drive* mencapai 10% dari total banyaknya perbaikan. Kejadian kerusakan monitor independen dengan kejadian kerusakan *hard drive*. Hitunglah probabilitas komputer mengalami kerusakan monitor dan *hard drive*?
   A. 0,926
   B. 0,269
   C. 0,296
   D. 0,629

5) Lima puluh persen peminjam mampu mengembalikan pinjamannya. Dari yang mampu mengembalikan tersebut, 40% berpendidikan sarjana. 10% yang gagal mengembalikan juga mempunyai latar belakang pendidikan sarjana. Berapa peluang seorang peminjam yang berlatar pendidikan sarjana akan mampu mengembalikan pinjamannya?
   A. $\frac{1}{5}$
   B. $\frac{2}{5}$
   C. $\frac{3}{5}$
   D. $\frac{4}{5}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Distribusi Probabilitas

Suatu eksperimen atau peristiwa akan memunculkan kemungkinan-kemungkinan kejadian dengan masing-masing probabilitasnya. Jumlahan probabilitas tersebut tentunya sama dengan satu. Apabila kita tabelkan kemungkinan kejadian beserta probabilitasnya maka kita sudah membuat distribusi probabilitas dari eksperimen tersebut.

A. DISTRIBUSI PROBABILITAS

Untuk memahami distribusi probabilitas, sangat penting memahami juga variabel, variabel random dan beberapa istilah yang berkaitan.

1. Variabel adalah suatu simbol (*A*, *B*, *x*, *y*) yang dapat mengambil nilai-nilai tertentu.
2. Jika nilai variabel tersebut merupakan hasil dari suatu percobaan statistika maka variabel tersebut dinamakan **variabel random**.

Secara umum, para ahli statistika menggunakan huruf besar untuk merepresentasikan variabel random dan huruf kecil untuk merepresentasikan nilainya. Sebagai contoh:

1. X merepresentasikan variabel random X.
2. $\mathrm{Pr}(\mathrm{X})$ merepresentasikan probabilitas dari X.
3. $\mathrm{Pr}(\mathrm{X}=\mathrm{x})$ menunjukkan probabilitas variabel random X bernilai tertentu x. Sebagai contoh, $\mathrm{Pr}(\mathrm{X}=1)$ menunjukkan probabilitas random variabel X sama dengan 1.

Dengan mengambil contoh akan membuat jelas hubungan antara variabel random dan distribusi probabilitas. Misalkan Anda melempar satu koin dua kali. Percobaan statistika sederhana ini mempunyai 4 hasil yang mungkin terjadi, yaitu MM, MB, BM, dan BB. Sekarang, kita ambil variabel X merepresentasikan banyaknya Muka yang muncul dari percobaan. Variabel X dapat bernilai 0, 1 atau 2. Pada contoh ini, X adalah variabel random karena nilainya ditentukan oleh hasil percobaan statistik.

Suatu **distribusi probabilitas** adalah suatu tabel atau persamaan yang menghubungkan setiap hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika dengan probabilitasnya. Sekarang pikirkan kembali percobaan melempar koin yang digambarkan di atas. Tabel di bawah ini merupakan contoh dari distribusi probabilitas banyaknya Muka yang muncul.

Banyaknya Muka	Probabilitas
0	0.25
1	0.50
2	0.25

B. DISTRIBUSI PROBABILITAS KUMULATIF

Suatu **probabilitas kumulatif** menunjuk pada probabilitas nilai dari suatu variabel random tidak akan lebih besar dari suatu nilai tertentu.

Sekarang mari kita kembali ke percobaan menjawab pertanyaan B-S yang kita random. Jika kita menjawab dua pertanyaan, mungkin kita akan bertanya: Berapakah probabilitas jawaban kita akan benar 1 atau tidak ada yang benar sama sekali? Jawaban dari pertanyaan itu merupakan probabilitas kumulatif. Jawaban itu akan berupa probabilitas benar 1 ditambah dengan probabilitas benar 0.

$$\Pr(X \le 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Pr(X \le 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4} = 1$$

Seperti distribusi probabilitas, distribusi probabilitas kumulatif dapat disajikan dengan suatu tabel atau persamaan. Pada tabel di bawah ini, probabilitas kumulatif merujuk pada probabilitas variabel random X bernilai lebih kecil atau sama dengan x.

Banyaknya Muka: x	**Prob:** $\Pr(X = x)$	**Cumulative Probability:** $\Pr(X \le x)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	1

C. DISTRIBUSI PROBABILITAS UNIFORM

Distribusi probabilitas yang paling sederhana terjadi ketika semua nilai dari random variabel tersebut mempunyai nilai probabilitas yang sama. Distribusi probabilitas ini disebut dengan **distribusi uniform**.

Misalkan suatu variabel random X dapat mempunyai k nilai yang berbeda dan $\Pr(X = x_k) = \frac{1}{k}$. Variabel random X di atas berdistribusi uniform.

Contoh:

Misalkan Anda bersepuluh mengadakan arisan. Berapakah peluang masing-masing peserta akan mendapatkan uang arisan pada periode arisan yang pertama kali?

Solusi:

Ketika kita mengocok arisan untuk pertama kali, ada 10 hasil yang mungkin: S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Masing-masing peserta mempunyai peluang sang sama untuk mendapatkan arisan pertama kali. Jadi, kita mempunyai distribusi uniform. Selanjutnya, $\Pr(X = 1) = \ldots$ $= \Pr(X = 10) = \frac{1}{10}$.

Contoh:

Misalkan kita melakukan percobaan melempar dadu bersisi 6. Berapakah probabilitas mata dadu yang muncul lebih kecil dari 5?

Solusi:

Ketika suatu dadu dilemparkan, ada 6 hasil yang mungkin: S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Masing-masing mempunyai peluang yang sama untuk muncul. Jadi kita mempunyai distribusi uniform.

Probabilitas mata dadu yang muncul lebih kecil dari 4 sama dengan:

$$\Pr(X < 4) = \Pr(X = 1) + \ldots + \Pr(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Variabel Random Diskrit dan Kontinu

Jika suatu variabel dapat bernilai sembarang antara dua nilai tertentu maka dinamakan dengan variabel kontinu. Sebaliknya, apabila suatu variabel hanya bisa bernilai diskrit saja maka variabel tersebut dinamakan dengan variabel diskrit.

Berikut ini diberikan contoh yang akan menjelaskan perbedaan antara variabel diskrit dan kontinu.

a. Misalkan syarat menjadi pramugari adalah perempuan dengan berat badan antara 45–55 kg. Berat badan pramugari tersebut merupakan contoh dari variabel kontinu. Sebab berat badan pramugari bisa bernilai berapa pun antara 45–55 kg, tergantung ketepatan alat timbangnya.
b. Misalkan kita menjawab secara soal B-S dan menghitung jawaban yang benar. Banyaknya jawaban yang benar akan menjalani nilai-nilai diskrit dari 0. Tidak ada jawaban benar setengah. Jadi banyaknya jawaban yang benar merupakan variabel diskrit.

Persis seperti variabel, distribusi probabilitas dapat diklasifikasikan sebagai diskrit dan kontinu.

D. DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Jika suatu variabel random merupakan variabel diskrit maka distribusi probabilitasnya dinamakan dengan distribusi probabilitas diskrit.

Contohnya, dapat kita ambil seperti percobaan menjawab dua soal B-S di atas. Variabel random X yang mewakili banyaknya jawaban benar akan bernilai 0, 1 atau 2, yaitu nilai-nilai diskrit sehingga dinamakan dengan variabel random diskrit. Distribusi probabilitas untuk percobaan statistik di atas dapat dilihat kembali sebagai berikut:

Jawaban Benar	Probabilitas
0	¼
1	½
2	¼

Beberapa distribusi probabilitas diskrit dapat disebutkan antara lain sebagai berikut.
1. Distribusi probabilitas Binomial.
2. Distribusi probabilitas Hipergeometrik.
3. Distribusi probabilitas Multinomial.
4. Distribusi probabilitas Poisson.

Catatan:

Pada distribusi probabilitas diskrit, setiap nilai yang mungkin dari variabel randomnya dapat dihubungkan dengan probabilitas yang tidak nol. Jadi distribusi probabilitas diskrit dapat selalu ditampilkan dalam bentuk tabel.

E. DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

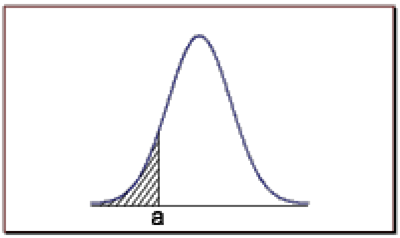
Jika suatu variabel random merupakan variabel kontinu maka distribusi probabilitasnya disebut dengan distribusi probabilitas kontinu.

Suatu distribusi probabilitas kontinu berbeda dari yang diskrit pada beberapa hal, antara lain berikut ini.
1. Probabilitas variabel random kontinu di suatu titik tertentu sama dengan nol.
2. Distribusi probabilitas kontinu tidak dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, sebagai gantinya digunakan persamaan atau formula.

Formula atau persamaan yang digunakan untuk menggambarkan distribusi probabilitas kontinu disebut dengan fungsi densitas probabilitas, dan disingkat dengan **PDF** atau **pdf.** Kadang-kadang pdf disebut juga dengan fungsi densitas. Untuk distribusi probabilitas kontinu, fungsi densitasnya mempunya sifat-sifat berikut.

1. Variabel random kontinu didefinisikan atas domain atau daerah asal kontinu, grafik dari fungsi densitasnya juga kontinu pada daerah tersebut.
2. Daerah yang dibatasi oleh kurva fungsi densitas sepanjang seluruh domainnya, sama dengan 1. Ini yang menjadikan ciri khas fungsi probabilitas dibandingkan dengan fungsi matematika yang lain, yang tidak memiliki sifat ini.
3. Probabilitas suatu variabel random bernilai antara a dan b sama dengan luasan daerah di bawah fungsi densitas yang dibatasi a dan b.

Sebagai contoh, lihatlah fungsi densitas pada grafik di bawah. Misalkan kita ingin melihat probabilitas variabel random X lebih kecil atau sama dengan a. Probabilitas nilai X lebih kecil atau sama dengan a sama dengan luasan daerah di bawah kurva yang dibatasi oleh nilai a dan $-\infty$, seperti yang digambarkan dengan daerah yang diarsir.



Catatan:

Daerah yang diarsir pada grafik di atas merupakan probabilitas variabel random X lebih kecil atau sama dengan a. Nilai ini adalah probabilitas kumulatif. Akan tetapi, probabilitas X tepat bernilai a akan sama dengan nol.

Beberapa distribusi probabilitas kontinu yang sering Anda jumpai dalam ilmu-ilmu statistika terapan dapat disebutkan di sini, seperti berikut.

1. Distribusi normal.

2. Distribusi student-t.
3. Distribusi Chi-square.
4. Distribusi F.

Berikut diberikan contoh distribusi probabilitas diskrit umum.

Contoh:

Banyaknya orang dewasa di suatu rumah perkotaan mengikuti distribusi probabilitas sebagai berikut:

Banyaknya Orang Dewasa	1	2	3	4 atau lebih
Probabilitas, $\Pr(X)$	0,15	0,55	0,25	???

Berapakah probabilitas bahwa ada 4 atau lebih orang dewasa tinggal di suatu rumah perkotaan?

A. 0,05 B. 0,15 C. 0,25 D. 0,35

Jawab:

Jumlah seluruh probabilitas sama dengan 1. Jadi, probabilitas bahwa ada 4 atau lebih orang dewasa tinggal di suatu rumah perkotaan adalah 1 - (0,15 + 0,55 + 0,25) sama dengan 0,05. Jawaban yang benar adalah A.

1. Atribut Dari Variabel Random

Sama seperti variabel, variabel random juga mempunyai ukuran kecenderungan pusat (yaitu mean, modus, dan median) dan ukuran variabilitas (deviasi standar dan variansi). Berikut ini diberikan formula untuk menghitung ukuran-ukuran di atas untuk variabel random diskrit.

2. Rata-rata Suatu Variabel Random

Rata-rata dari variabel random *X* juga dinamakan sebagai nilai harapan atau *expected value* dari *X*. Biasanya rata-rata atau *expected value* dari *X* dinotasikan dengan E(*X*). Formula untuk nilai ekspektasi suatu variabel random diskrit X adalah,

$$\mathrm{E}(X) = \mu_{\mathrm{x}} = \sum\left[x_{\mathrm{i}} * \Pr(x_{\mathrm{i}})\right]$$

Di mana x_i adalah nilai variabel random untuk *outcome* ke i, μ_x adalah rata-rata dari variabel random X dan $\Pr(x_i)$ adalah probabilitas variabel random X bernilai x_i .

3. Variabilitas suatu Variabel Random Diskrit

Deviasi standar dari suatu variabel random diskrit (σ) adalah akar kuadrat dari variansi (σ^2). Formula untuk menghitung variansi diberikan di bawah ini.

$$\sigma^2 = \sum\left[x_i - E(x)\right]^2 * \Pr(x_i)$$
$$= E\left(x^2\right) - E(x)^2$$

Contoh:

Sebuah toko komputer menghitung distribusi probabilitas banyaknya penjualan komputer per hari, dan diperoleh hasil yang konvergen dari data 3 tahun sebagai berikut:

Banyaknya komputer, x	0	1	2	3	4	$\sum$
Probabilitas, $\Pr(x_i)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,05	1

Berapakah rata-rata banyaknya komputer yang terjual?

A. 1 B. 1 C. 2 D. 2,25

Jawab:

Untuk lebih mudah dan efisien, kita buat tabel seperti di bawah. Dengan tabel ini kita dapat mencari nilai rata-rata dan variansi.

Banyaknya komputer, x	0	1	2	3	4	$\sum$
Probabilitas, $\Pr(x)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,05	1
$x\Pr(x)$	0	0,20	0,60	0,75	0,20	1,75
$x^2\Pr(x)$	0	0,20	1,2	2,25	0,8	4,45

Jawaban yang benar adalah B. Rata-rata banyaknya komputer yang terjual per hari adalah:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum\left[x_{\mathrm{i}} * \Pr(x_{\mathrm{i}})\right]$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0*0,10+1*0,20+2*0,30+3*0,25+4*0,05 = 1,75$$

Contoh:

Hitunglah standar deviasi dari banyaknya komputer yang terjual per hari di atas.

A. 0,75 B. 0,862 C. 0,178 D. 1,178

Jawab:

Dari soal 1.2.3 diperoleh jawaban $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1,75$.

Selanjutnya, dihitung nilai variansi:

$$\sigma^2 = \sum\left[x_{\mathrm{i}} - \mathrm{E}(x)\right]^2 * \Pr(x_{\mathrm{i}})$$
$$= \mathrm{E}(0-1,75)^2 * 0,10 + \ldots (4-1,75)^2 * 0,05$$

atau

$$\sigma^2 = \sum (x)^2 - \mathrm{E}(x)^2$$
$$= 4,45 - 1,75^2 = 1,3875$$

Akhirnya diperoleh nilai deviasi standar sama dengan = 1,178.
Jadi, jawaban yang benar adalah D.

4. Jumlah dan Selisih dari Variabel Random: Mean dan Variansi

Misalkan Anda mempunyai dua variabel random, yaitu X dengan rata-rata μ_{x} dan Y dengan rata-rata μ_{y}. Rata-rata dari jumlahan kedua variabel di atas adalah $\mu_{\mathrm{x+y}}$ dan rata-rata selisihnya $\mu_{\mathrm{x-y}}$ diberikan oleh persamaan berikut:

$$\mu_{\mathrm{x+y}} = \mu_{\mathrm{x}} + \mu_{\mathrm{y}} \text{ dan } \mu_{\mathrm{x-y}} = \mu_{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{y}}$$

atau

E(X + Y) = E(X) + E(Y) dan E(X - Y) = E(X) - E(Y) di mana E(X) adalah rata-rata X, E(Y) adalah rata-rata Y, E(X + Y) adalah rata-rata X+ Y, dan E(X - Y) adalah rata-rata X - Y.

7. Dua Variabel Random Independen

Jika X dan Y independen maka kovariansi antara X dan Y = 0. Misalkan X dan Y merupakan dua variabel random yang *independen*. Variansi (X + Y) dan variansi (X - Y) mempunyai rumus sebagai berikut:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Catatan:

Deviasi standar (SD) merupakan akar kuadrat dari variansi (Var). Jadi, SD(X + Y) = akar[Var(X + Y)] dan SD(X - Y) = akar [Var(X- Y)]

Contoh:

		V		
		2	3	4
U	3	0,05	0,25	0,2
	4	0,1	0,15	0,25

Tabel di atas menunjukkan distribusi probabilitas bersama antara dua variabel random U dan V. Dalam tabel distribusi probabilitas bersama, angka dalam sel merupakan besarnya probabilitas nilai tertentu U dan V terjadi bersama-sama).

Berapakah nilai rata-rata dari jumlahan U dan V?

(A) 1.2 (B) 3.5
(C) 4.5 (D) 4.7

Jawab:

Penyelesaiannya membutuhkan dua perhitungan: (1) rata-rata U, (2) rata-rata V sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(V) &= \Sigma\, [\, v_i * \Pr(v_i)\,] \\ &= 2 * (0{,}05 + 0{,}1) + 3 * (0{,}25 + 0{,}15) + 4 * (0{,}2 + 0{,}25) \\ &= 0{,}3 + 1{,}2 + 1{,}8 = 3{,}3 \end{aligned}$$

Selanjutnya, rata-rata V.

$$E(U) = \Sigma\ [\ u_i * Pr(u_i)\ ]$$
$$= 3 * (0{,}05 + 0{,}25 + 0{,}2) + 4 * (0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}25)$$
$$= 3{,}5$$

Terakhir kita hitung rata-rata jumlahan U dan V sebagai berikut

$$E(U + V) = E(U) + E(V) = 3{,}5 + 3{,}3 = 6{,}8$$

Contoh:

Misalkan V dan W adalah dua variabel yang saling independen. Nilai variansi V sama dengan 16; dan variansi W sama dengan 9. Ambil transformasi Z = V - W.
Berapakah nilai variansi Z?

(A) 2.65 (B) 5.00
(C) 7.00 (D) 25.0

Jawab:

Kita ketahui bahwa Variabel Z merupakan kombinasi dari dua variabel yang in*dependent*. Variansi Z sama dengan variansi V ditambah variansi W.

$$Var(Z) = Var(V) + Var(W) = 16 + 9 = 25$$

Jawaban yang benar adalah D. Selanjutnya, dapat dihitung pula nilai deviasi standar Z sama dengan 5.

8. Transformasi Linear Variabel

Sering kali kita harus berurusan dengan transformasi suatu variabel untuk kepentingan perumusan masalah ekonomi, keteknikan dan bidang-bidang lain. Transformasi variabel secara otomatis akan menghasilkan variabel baru yang juga mempunyai ukuran pusat dan ukuran variabilitas. Ukuran-ukuran pusat dan variabilitas suatu variabel baru hasil transformasi linear dapat dengan mudah diturunkan dari hubungan matematisnya. Berikut ini dapat dilihat sifat mean dan variansi dari transformasi linear yang sering dipakai dalam analisis statistika:

a. Penambahan atau pengurangan konstan: $Y = X \pm b$
   1) $E(X \pm b) = E(X) \pm b$
   2) $V(X \pm b) = V(X)$

b. Perkalian dengan konstan: $Y = mX$
   1) $E(mX) = mE(X)$
   2) $V(mX) = m^2 \, Var(X)$
c. Perkalian dengan konstan dan penambahan atau pengurangan dengan konstan: $Y = mX \pm b$
   1) $E(mX \pm b) = mE(X) \pm b$
   2) $V(mX \pm b) = m^2 \, Var(X)$

Di mana m dan b adalah konstan, Y dan X adalah variabel random.

Contoh:

Dari data yang diambil selama 5 tahun terakhir ini, rata-rata banyaknya penjualan komputer di suatu toko selama sebulan adalah 100 buah. Jika dari tiap komputer diambil untung 500 ribu, dan untuk biaya pemeliharaan tetap per bulan menghabiskan 2,5 juta, berapakah keuntungan bersih yang diperoleh toko tersebut dari item komputer?

A. 47 jt   B. 47,5 jt   C. 50 jt   D. A, B, dan C salah.

Untuk menghitung keuntungan bersih, diperlukan transformasi linear sebagai berikut:

$$Y = mX - b$$
$$Y = 500.000 * X - 2.500.000$$

di mana X adalah variabel banyaknya penjualan komputer per bulan, Y adalah variabel transformasi yang merepresentasikan keuntungan bersih, *m* adalah keuntungan yang diambil toko dari tiap komputer, sedangkan *b* adalah biaya pemeliharaan 2,5 juta.

Selanjutnya, dapat dihitung rata-rata keuntungan bersih:

$E(Y) = 500.000*100-2.500.000= 47,5$ juta

Jadi, jawaban yang benar adalah B.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Dari sebuah perusahaan asuransi diperoleh distribusi perolehan nasabah asuransi dari seorang agen perminggu selama 100 minggu sebagai berikut: 15 minggu memperoleh 3 nasabah perminggu; 25 minggu mendapat 4 nasabah perrminggu; 40 minggu menggaet 5 nasabah perminggu ; sisanya mendapat 6 nasabah perminggu. Hitunglah

1) Nilai harapan banyaknya nasabah perminggu
2) Standard deviasi banyaknya perolehan nasabah perminggu
3) Jika untuk seorang nasabah, diambil biaya bonus untuk agen sebesar 500 ribu, berapakah nilai harapan bonus yang diperoleh agen perminggu?
4) Jika untuk biaya operasional seorang agen menghabiskan dana 500 ribu rupiah perminggu, berapakah bonus bersih yang diterima ?
5) Berapakah standard deviasi dari bonus bersih yang diterima agen?

Petunjuk Jawaban Latihan

Banyak nasabah, x	3	4	5	6	$\sum$
Probabilitas, $\Pr(x)$	0,15	0,25	0,40	0,20	1
$x\Pr(x)$	0,45	1	2	1,2	4,65
$x^2\Pr(x)$	1,35	4	10	7,2	22,55

1) Misalkan X = banyaknya nasabah perminggu. Nilai harapan banyaknya nasabah yang diperoleh perminggu adalah
   $E(X) = 3 \times 0.15 + 4 \times 0.25 + 5 \times 0.4 + 6 \times 0.2 = 4.65$ nasabah
2) Untuk menghitung standard deviasi, dihitung dulu nilai variansinya. Dari tabel di atas dihitung $E(X^2) = 22{,}55$.

$V(X) = 22{,}55 - 4.65^2 = 0{,}9275$. Jadi Standard deviasi banyaknya nasabah asuransi adalah $SD(X) = \sqrt{0{,}9275} = 0{,}9631$ atau mendekati 1 orang nasabah.

3) Misalkan Y = banyaknya bonus agen perminggu. Maka nilai harapan bonus perminggu $E(Y) = 500$ ribu $E(X) = 500.000 \times 4.65 = 2.325.000$
4) Nilai harapan bonus bersih yang diterima oleh seorang agen adalah 2.325.000-500.000 = 1.825.000

5) Variansi dari bonus bersih agen perminggu adalah 500.000^2 V(X) = 2,31875E+11. Sedangkan Standard deviasinya adalah 481.534,0071

RANGKUMAN

Pada kegiatan belajar ini kita belajar tentang struktur matematis untuk menunjukkan model probabilitas untuk hasil yang mungkin dari suatu percobaan di mana hasil ini belum dapat ditentukan sebelumnya. Suatu variabel random, yang merupakan fungsi berharga real yang didefinisikan pada ruang sampel, dan memberikan fungsi densitas peluang (PDF) memberikan penjelasan tentang probabilitas ketika hasil (*outcome*) dari percobaan dapat diukur. Terdapat dua macam variabel random, yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu. Pada variabel random juga berlaku atribut pada variabel, seperti ukuran kecenderungan pusat (yaitu mean, modus, dan median) dan ukuran variabilitas (deviasi standar dan variansi).

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Seorang yang memulai usaha baru mempunyai beberapa kemungkinan, antara lain rugi 1 juta, impas, untung 3 juta atau untung 5 juta dengan kemungkinan masing-masing sebagai berikut 0,25; 0,3; 0,4; dan 0,05.

1) Hitunglah harapan keuntungan dari usaha di atas:
   A. 1,2
   B. 1,3

C. 1,4
D. 1,5

2) Hitunglah deviasi standar dari usaha Anda di atas:
A. 1,6
B. 1,7
C. 1,8
D. 1,9

Rata-rata gaji buruh di suatu perusahaan di kota A mencapai 30 juta per tahun dengan variansi 3 miliar. Seperti biasa manajemen memberikan bonus kepada setiap pekerja berupa tunjangan hari raya 2 juta rupiah dan bonus insentif sebesar 5% dari gaji mereka.

3) Hitunglah rata-rata gaji total pekerja setahun (juta)!
A. 32
B. 32,5
C. 33,5
D. 35

4) Hitunglah variansi bonusnya!
A. 0,1
B. 0,2
C. 0,3
D. 0,4

5) Hitunglah variansi gaji totalnya (dalam miliar)!
A. 4
B. 4,25
C. 4,41
D. 4,5

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A. Jika lemparan pertama muncul Muka maka ada empat hasil yang mungkin: MMM, MMB, MBM atau MBB. Dapat dilihat juga dua, di antaranya memiliki tepat dua Muka sehingga diperoleh peluang mendapatkan tepat satu muka $\frac{1}{4}$. Penyelesaian soal ini dapat dilihat dari dua lemparan terakhir. Peluangnya tidak mendapat muka sama sekali adalah $\frac{1}{4}$.

2) D. Kita definisikan kejadian-kejadian berikut agar lebih mudah dalam menyelesaikan persoalan di atas.

   E: Rumah tangga yang ikut asuransi pendidikan.

   L: Rumah tangga yang ikut asuransi jiwa.

   Diketahui: $\Pr(E) = 0.5$; $\Pr(L) = 0.15$

   $\Pr\left(L \cap E^C\right) = 0.05 \qquad \Pr\left(L^C \cap E\right) = 0.45$

   Dipunyai hubungan:

   $E \cup L = (E \cap L) \cup \left(L \cap E^C\right) \cup \left(L^C \cap E\right)$ yang saling asing sehingga peluang gabungannya sama dengan penjumlahan peluang masing-masing kejadiannya dan diperoleh:

   $$\begin{aligned}\Pr(E \cup L) &= \Pr(E \cap L) + P\left(L \cap E^C\right) + P\left(L^C \cap E\right)\\ &= \Pr(E \cap L) + 0.05 + 0.45\end{aligned}$$

   Sementara itu, kita punya rumus:

   $$\begin{aligned}\Pr(E \cup L) &= \Pr(L) + \Pr(E) - \Pr(E \cap L)\\ &= 0.15 + 0.5 - \Pr(E \cap L)\end{aligned}$$

   Dengan menyamadengankan kedua persamaan di atas diperoleh:

   $2\Pr(E \cap L) = 0.15$ atau $\Pr(E \cap L) = 0.075$

3) D. Kita definisikan kejadian-kejadian berikut agar lebih mudah dalam menyelesaikan persoalan di atas.

   R: Klaim polis asuransi rumah.

   K: Klaim polis asuransi kendaraan.

Diketahui: $\Pr(\mathrm{R}) = 0{,}15$; $\Pr(\mathrm{K}) = 0{,}2$ $\Pr(\mathrm{R} \cap \mathrm{K}) = 0{,}05$

Kejadian yang ditanyakan di atas adalah kejadian $(\mathrm{R} \cup \mathrm{K})^{\mathrm{C}}$. Dengan menggunakan sifat komplemensi, diperoleh bahwa:

$$\mathrm{P}\left[(\mathrm{R} \cup \mathrm{K})^{\mathrm{C}}\right] = 1 - \Pr(\mathrm{R} \cup \mathrm{K})$$

= 1-(0,15+0,2-0,05)
= 0,7

4) C. Kita definisikan kejadian-kejadian berikut agar lebih mudah dalam menyelesaikan persoalan di atas.

H : Komputer mengalami kerusakan Harddrive
M: Komputer mengalami kerusakan monitor

Diketahui $\Pr(\mathrm{H}) = 0{,}35$; $\Pr\left(\mathrm{H}^{\mathrm{C}} \cap \mathrm{M}^{\mathrm{C}}\right) = 0{,}10$

Kejadian yang ditanyakan di atas adalah kejadian $(\mathrm{H} \cap \mathrm{M})$. Dengan menggunakan sifat independensi diperoleh:

$$\Pr\left(\mathrm{H}^{\mathrm{C}} \cap \mathrm{M}^{\mathrm{C}}\right) = \Pr\left(\mathrm{H}^{\mathrm{C}}\right) * \Pr\left(\mathrm{M}^{\mathrm{C}}\right) = \left[1 - \Pr(\mathrm{H})\right]\left[1 - \Pr(\mathrm{M})\right]$$

$$0{,}1 = (0{,}65) * \left(1 - \Pr\left(\mathrm{M}^{\mathrm{C}}\right)\right)$$

$$\Pr(\mathrm{M}) = 0{,}846$$

Akhirnya diperoleh $\Pr(\mathrm{H} \cap \mathrm{M}) = \Pr(\mathrm{H}) * \Pr(\mathrm{M})$

= 0,35 * 0,846 = 0,296.

5) D. Didefinisikan *R* = Repaid ; S = Sarjana

$\Pr(\mathrm{R}) = 0{,}5$ $\Pr(\mathrm{S}|\mathrm{R}) = 0{,}4$ $\Pr\left(\mathrm{S}|\mathrm{R}^{\mathrm{C}}\right) = 0{,}1$

Selanjutnya, yang dicari adalah:

$$P(R|S) = \frac{P(S|R)P(R)}{P(S|R)P(R) + P(S|R)^c\, P(R)^c}$$

$$= \frac{0{,}4 \times 0{,}5}{0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}5} = 0{,}8$$

Tes Formatif 2

1) A
2) D
3) C
4) B
5) C

Daftar Pustaka

Bain, L.J. dan Engelhardt, M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* USA: Duxbury Press.

Bower, dkk. (1997). *Actuarial Mathematics*. 2nd edition. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries.

Ross, S.M. (2005). *A First Course in Probability*. Seventh Edition.