Tinjauan Mata Kuliah

Buku Materi Pokok (BMP) Matematika Aktuaria ini disampaiikan dalam sembilan modul (pokok bahasan) yang diorganisasikan sebagai berikut.

Modul 1. Probabilitas
Modul 2. Teori Bunga
Modul 3. Anuitas Pasti
Modul 4. Model Survival
Modul 5. Anuitas Jiwa
Modul 6. Asuransi Jiwa
Modul 7. Premi Asuransi Jiwa
Modul 8. Cadangan Asuransi
Modul 9. Model *Multi Life* dan *Multi Decrement* (Penyusutan Berganda)

Buku materi pokok ini membahas bagaimana memodelkan berbagai hal yang menyangkut operasional perusahaan Asuransi, seperti penentuan Premi maupun cadangan Asuransi. Pendekatan yang diambil dari buku ini adalah pendekatan analitik, artinya dimulai dari memodelkan fenomena dasar yang mendasari bisnis asuransi, seperti pemodelan finansial dan juga survival, baru kemudian dilanjutkan dengan membentuk teorema-teorema yang berupaya merumuskan perhitungan-perhitungan operasional perusahaan Asuransi, seperti premi maupun cadangan.

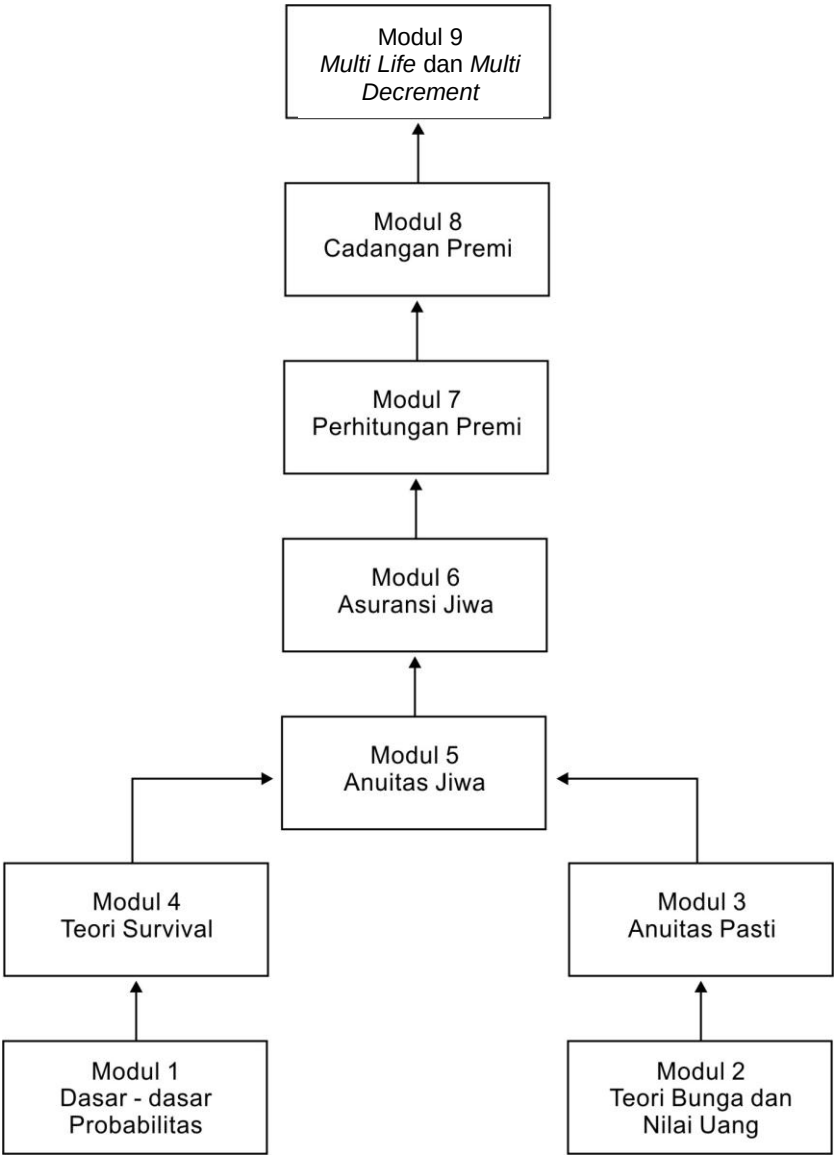
Pada **Modul 1**, dibahas konsep dasar probabilitas, percobaan, ruang sampel, dan kejadian. Bagi pembaca yang telah memahami bagian ini dapat melanjutkan ke modul berikutnya. Pada **Modul 2** dibahas mengenai dasar-dasar Matematika Finansial, seperti konsep Nilai Sekarang (*Present Value*), dan diskonto. Diharapkan setelah pembaca menyelesaikan modul ini, pengetahuan dasar tentang Present Value dapat dipahami. Kemudian pembahasan **Modul 3** akan mengajak untuk mempelajari bagaimana memperhitungkan nilai sekarang dari serangkaian pembayaran, seperti pada cicilan berkala yang disebut anuitas. Pada **Modul 4** akan diperkenalkan konsep model survival. Dengan demikian, diharapkan akan dapat memahami pemodelan survival baik kontinu maupun diskrit, bagaimana memperhitungkan risiko kematian. **Modul 5** adalah pengembangan Modul 3 dengan diperkuat konsep survival pada Modul 4. Dalam Modul 5 dibahas valuasi (perhitungan) pembayaran-pembayaran yang berhenti apabila si pembayar meninggal dunia. Dalam **Modul 6** dibahas inti dari buku materi

pokok ini, yaitu evaluasi pembayaran yang terjadi apabila si pembayar meninggal dunia yang dapat memodelkan pembayaran santunan bagi tertanggung yang mengikuti program Asuransi Jiwa. Dalam **Modul 7** dibahas berbagai bentuk pembayaran premi. Bentuk ini memungkinkan pembayaran premi bervariasi antarbesar dan durasi pembayaran sehingga tidak hanya dibayar sekali saja di muka. Dalam **Modul 8**, dibahas tentang cadangan, yaitu suatu dana yang harus disisihkan oleh perusahaan Asuransi guna mengantisipasi pembayaran klaim di masa depan. Akhirnya di **Modul 9** dikembangkan perluasan dari model-model sebelumnya, yaitu model *Multi Life* dan *Multi Decrement* (penyusutan berganda) yang berguna dalam perhitungan asuransi kumpulan maupun pada dana pensiun.

Akhir kata penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi kepentingan pendidikan khususnya bidang Aktuaria.

Selamat belajar!

Peta Kompetensi
Matematika Aktuaria/MATA4450/3 sks



Daftar Simbol

Modul 1. Probabilitas

$\Pr(A)$	Probabilitas dari suatu kejadian A.
$\Pr(A\|B)$	Probabilitas bersyarat, yaitu kejadian A terjadi dengan syarat kejadian B telah terjadi.
$\Pr(A')$	Probabilitas pelengkap atau *complement* dari suatu kejadian A yang tidak terjadi.
$\Pr(A\cap B)$	Probabilitas A irisan B (A *intersection* B) kejadian A dan B keduanya terjadi.
$\Pr(A\cup B)$	Probabilitas A gabungan B (A *union* B kejadian A atau B keduanya terjadi
p.d.f.	*Probability Density Function* atau fungsi densitas probabilitas.
$E(X)$	Nilai harapan atau *expected value* dari rata-rata variabel random .X .
σ	Deviasi standar (SD) dari suatu variabel random diskrit adalah akar kuadrat dari variansi.
σ^2	Variansi (Var) dari suatu variabel random.
μ_x	Rata-rata dari variabel X.
μ_y	Rata-rata dari variabel Y.

Modul 2. Teori Bunga

AV	*Accumulation Value* atau nilai akumulasi.
AV_t	Nilai kumulasi pada waktu t.
i	Suku bunga nominal.
$i^{(m)}$	Suku bunga nominal yang dibayarkan m kali setahun, di mana m bilangan bulat positif > 1
FV_n	*Future Value* (nilai akumulasi) pada periode ke-n
PV_0	*Present Value* (nilai sekarang)

Modul 3. Anuitas Pasti

$a_{\overline{n}\|}$	Nilai sekarang dari anuitas akhir (*annuity-immediate*) selama n periode.
$S_{\overline{n}\|}$	Nilai akumulasi atau nilai masa mendatang dari anuitas akhir (*annuity-immediate*) selama n periode.
v	Nilai sekarang di akhir periode pada pembayaran periode pertama.
v^n	Nilai sekarang untuk pembayaran pada periode terakhir n.

$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang dari anuitas awal (*annuity-due*) selama *n* periode.
$\ddot{S}_{\overline{n}\rceil}$	Nilai akumulasi anuitas awal (*annuity-due*) selama *n* periode.
$a_{\overline{n}\rceil}^{(m)}$	Nilai sekarang dari anuitas akhir (*annuity-immediate*) selama *n* periode yang dibayarkan *m* kali setahun.
$s_{\overline{n}\rceil}^{(m)}$	Nilai akumulasi dari anuitas akhir (*annuity-immediate*) selama *n* periode yang dibayarkan *m* kali setahun.
$m\vert a_{\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang dari anuitas akhir tunda selang *m* tahun, yang pembayarannya dilakukan selama *n* tahun.
$m\vert \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang dari anuitas awal tunda selang *m* tahun, yang pembayarannya dilakukan selama *n* tahun.
$s_{\overline{n}\rceil}(1+i)^m$	Nilai akumulasi dari anuitas akhir *n* periode, yang didiamkan *m* periode setelah pembayaran terakhir.
$\bar{a}_{\overline{n}\rceil}$	Nilai tunai dari suatu anuitas kontinu.
$\bar{s}_{\overline{n}\rceil}$	Nilai akumulasi dari suatu anuitas kontinu.
$a_{\infty\rceil}$	Nilai sekarang dari suatu perpetuiti-akhir atau (*perputuity-immediate*).
$\ddot{a}_{\infty\rceil}$	Nilai sekarang dari suatu perpetuiti-awal atau (*perputuity-due*).
$(Ia)_{\overline{n}\rceil}$	Nilai tunai dari anuitas menaik (*Increasing annuity*).
$(Is)_{\overline{n}\rceil}$	Nilai akumulasi dari anuitas menaik (*Increasing annuity*).
$(Da)_{\overline{n}\rceil}$	Nilai tunai dari anuitas menurun (*Decreasing annuity*).
$(Ds)_{\overline{n}\rceil}$	Nilai akumulasi dari anuitas menurun (*Decreasing annuity*).

Modul 4. Model Survival

$s(t)$	Model survival pada waktu *t*.
$F_x(x)$	Fungsi distribusi dari variabel random kontinu X yang menyatakan usia hingga terjadinya kematian dari suatu kelahiran.
$s(x)$	fungsi survival merupkan peluang yang menyatakan seseorang akan bertahan hidup mencapai usia.
$T(x)$	Sisa usia dari seseorang saat mengikuti produk asuransi jiwa (x), sebagai usia maka yaitu $X-x$.

${}_t p_x$	Peluang seseorang yang berusia (x) akan bertahan hidup mencapai usia $x+t$.
${}_t q_x$	Peluang seseorang yang berusia (x) akan meninggal mencapai usia $x+t$.
${}_{t\|u} q_x$	Peluang seseorang yang berusia (x) akan meninggal u tahun kemudian atau meninggal pada usia antara $(x+t)$ dan $(x+t+u)$.
$K(x)$	Sisa usia diskrit (*curtate-future-lifetime*), yaitu nilai bilangan bulat terbesar dari $T(x)$.
$m(x)$	Median atau nilai tengah dari sisa usia seseorang.
$\mu(x)$	laju kematian (*force of mortality*).
$\overset{\circ}{e}_x$	Harapan hidup lengkap (*complete-expectation-of-life*) yaitu rata-rata lama hidup yang dapat dicapai.
UDD	Distribusi kematian seragam (*Uniform Distribution of Death*)
l_0	Jumlah bayi yang baru lahir, umur bayi-bayi tersebut adalah 0 tahun.
l_1	Kelompok bayi yang lahir secara bersamaan disebut kohort (*cohort*), dalam pengertian sejumlah bayi-bayi yang mencapai umur 1 tahun.
l_2	Kelompok bayi yang berumur 1 tahun dan mencapai usia 2 tahun.
l_x	Banyaknya orang yang bertahan hidup berumur x tahun.
d_0	Bayi berumur 0 tahun yang meninggal sebelum mencapai usia 1 tahun.
d_1	Bayi yang meninggal sebelum mencapai usia 2 tahun.
d_x	Banyaknya orang berumur x tahun yang meninggal sebelum mencapai usia $(x+1)$ tahun.
${}_n D_x$	Banyaknya kematian orang yang terjadi antara usia x dan $x+n$.
$\mathcal{L}(x)$	Banyaknya orang dalam suatu kelompok yang mencapai usia x tahun.

Modul 5. Anuitas Jiwa

$\bar{a}_{\overline{T}\|}$	Anuitas jiwa kontinu di mana T adalah usia masa depan orang yang berusia x untuk setiap $T \geq 0$.
$\bar{a}_x$	Nilai sekarang dari anuitas jiwa kontinu seumur hidup, di mana subscript x di belakang $\bar{a}$ menyatakan bahwa anuitas berhenti saat seseorang berusia x tahun.
$\bar{a}_{x:\overline{1}\|}$	Nilai sekarang aktuaria dari anuitas jiwa berjangka 1 tahun untuk seseorang yang berusia (x).
$\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$	Nilai sekarang aktuaria dari anuitas jiwa berjangka *n*-tahun untuk seseorang yang berusia (x).
Z	Variabel random nilai sekarang untuk asuransi dwiguna (*endowment*) *n*-tahun.
${}_{n\|}\bar{a}_x$	Anuitas jiwa seumur hidup tertunda *n*-tahun.
${}_nE_x$	Asuransi Dwiguna murni yang pembayarannya dilakukan pada akhir suatu periode apabila seseorang hidup sampai periode waktu tertentu.
$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}\|}}$	Nilai sekarang aktuaria dari anuitas jiwa dan pasti selama *n* tahun, apabila seseorang masih tetap hidup setelah usia (x + n) tahun.
$\ddot{a}_{\overline{K+1}\|}$	Nilai sekarang aktuaria dari anuitas awal jiwa seumur hidup, di mana K adalah variabel random sisa usia bulat dari seseorang yang berusia x tahun.
${}_{n\|}\ddot{a}_x$	Nilai sekarang aktuaria dari anuitas awal jiwa seumur hidup dengan pembayaran di awal periode bagi seseorang yang berusia x tahun dan ditunda selama *n*-tahun.
$\ddot{s}_{x:\overline{n}\|}$	Nilai akumulasi dari anuitas awal jiwa seumur hidup yang pembayarannya di awal periode selama *n*-tahun.
$\ddot{a}_x^{(m)}$	Nilai sekarang dari anuitas jiwa selama setahun yang dibayar *m* kali.
${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)}$	Nilai sekarang dari anuitas jiwa awal tertunda n tahun dengan *m*-kali pembayaran.
$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J/m)}\|}$	Nilai sekarang aktuaria untuk anuitas jiwa akhir dengan *m*-kali pembayaran.

Modul 6. Asuransi Jiwa

b_t	Fungsi manfaat.
v_t	Faktor diskonto suku bunga saat diterbitkannya polis sampai dengan manfaat kematian dibayarkan.

z_t	Nilai sekarang untuk nilai polis dari pembayaran manfaat kematian.
$T(x)$	Variabel random sisa usia seseorang yang diasuransikan pada usia x .
$E[Z]$	Nilai harapan dari variabel random nilai sekarang aktuaria.
$\boldsymbol{A}$	Nilai sekarang aktuaria dari asuransi dengan pembayaran manfaat kematian 1 unit.
$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang aktuaria asuransi berjangka n-tahun dengan pembayaran manfaat kematian sebesar 1 unit dan dilakukan seketika pada saat (x) mengalami kematian.
$\bar{A}_x$	Nilai sekarang aktuaria asuransi seumur hidup.
$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang aktuaria untuk asuransi jiwa berjangka n tahun.
$A_{x:\overline{n}\rceil}^{1}$	Nilai sekarang aktuaria untuk dwiguna murni berjangka n tahun.
$\left(I^{(m)}\bar{A}\right)_x$	Nilai sekarang aktuaria untuk asuransi jiwa seumur hidup dengan manfaat kematian meningkat m buah interval selama jangka waktu asuransi.
$\left(D\bar{A}\right)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	Nilai sekarang aktuaria untuk asuransi jiwa seumur hidup dengan manfaat kematian menurun per tahun.

Modul 7. Premi Asuransi Jiwa

L	Variabel random nilai sekarang kerugian perusahaan asuransi.
$\bar{P}$	Premi tahunan yang dibayarkan secara kontinu.
$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$	Premi dengan model kontinu penuh.
P_x	Tingkat manfaat premi tahunan untuk asuransi jiwa seumur hidup.
$P^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	Premi asuransi berjangka n-tahun.
$P_{x:\overline{n}\rceil}$	Premi asuransi dwiguna n-tahun.
${}_nP_x$	Premi asuransi jiwa seumur hidup n tahun h-pembayaran.
${}_hP_{x:\overline{n}\rceil}$	Premi asuransi dwiguna n-tahun h-pembayaran.
$P_{x:\overline{n}\rceil}^{1}$	Premi asuransi dwiguna murni n-tahun.

$P\left({}_{n\|}\ddot{a}_x\right)$	Premi anuitas jiwa seumur hidup tertunda *n*-tahun.
$P\left(\bar{A}_x\right)$	Premi tahunan bersih.
$P_x^{(m)}$	Premi asuransi seumur hidup bentuk pecahan dibayar sebanyak *m*-kali dalam satu periode dengan manfaat dibayarkan di akhir tahun kematian (diskrit).
$P^{(m)}\left(\bar{A}_x\right)$	Premi asuransi seumur hidup bentuk pecahan dibayar sebanyak *m*-kali dalam satu periode dengan manfaat dibayarkan seketika pada saat kematian (kontinu).
$P^{\{m\}}\left(\bar{A}_x\right)$	Premi asuransi seumur hidup bentuk pecahan terbagi sama untuk kasus yang semikontinu.
${}_hP^{\{m\}}\left(\bar{A}_{x:n\|}\right)$	Premi asuransi dwiguna bentuk pecahan terbagi sama berjangka *n*-tahun dengan pembayaran premi selama *h*-tahun yang dibayarkan sebanyak *m*-kali dalam satu tahunnya.
$\tilde{A}_{x:n\|}^{1}$	Variabel random nilai sekarang aktuaria untuk asuransi berjangka *n* tahun dengan santunan menurun.

Modul 8. Cadangan Premi

${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{[x]}\right)$	Notasi aktuaria internasional untuk cadangan model kontinu asuransi jiwa seumur hidup.
${}_t\bar{k}_x$	Biaya asuransi terakumulasi.
${}_kV_x$	Cadangan dengan metode prospektif untuk asuransi diskrit penuh dengan pembayaran premi tahunan dan pembayaran manfaat di akhir tahun.
${}_k^hV_{x:n\|}^{(m)}$	Cadangan pada akhir tahun ke-*k* dengan *h*-kali pembayaran untuk suatu polis asuransi bila premi dibayarkan *m*-kali dalam setahun untuk asuransi berjangka *n* tahun.
$V^{\{m\}}A_x$	Cadangan manfaat asuransi jiwa seumur hidup dengan pembayaran sebesar 1 saat kematian dari seseorang (*x*) yang dibayarkan dengan anuitas terbagi samadi awal.

Modul 9. Model *Multi Life* dan *Multiple Decrement*

$f\left(x,y\right)$	Fungsi densitas peluang (p.d.f.) bersama dari *X* dan *Y*.
$F_{T(x)T(y)}\left(s,t\right)$	Fungsi distribusi bersama dari *T*(*x*) dan *T*(*y*).
${}_tq_x^{(j)}$	Peluang penyusutan (*decrement*) ke-*j* terjadi sebelum waktu ke *t*.

$\mu_x^{(j)}(t)$	Laju penyusutan (*force of decrement*) ke-*j* terjadi sebelum waktu ke *t*.
${}_n d_x^{(j)}$	Jumlah orang yang gagal karena sebab j selama usia *x* dan *x* + *n*.
${}_t p_x'^{(j)}$	Fungsi penyusutan tunggal terhubung (*associated single decrement*).
iid	Distribusi saling bebas dan identik (*independent and identically distributed*)