MODUL 1

Matematika pada Awal Peradaban Manusia I

Bana G. Kartasasmita
Prof. Dr. Wahyudin

PENDAHULUAN

Akar dari istilah *matematika* adalah kata dalam bahasa Yunani '*mathemata*', yang sangat umum digunakan pada masa awal tulisan untuk menunjukkan bentuk pengajaran apa pun. Saat pengetahuan manusia kian mengalami perkembangan, istilah ini digunakan untuk mencakup bidang-bidang khusus dalam ilmu pengetahuan. Para pengikut aliran Pythagoras diketahui menggunakan istilah tersebut untuk menjelaskan aritmetika dan geometri; sebelumnya, tiap bidang pengetahuan ini disebut dengan nama yang terpisah, tanpa ada penunjukan yang sama terhadap keduanya. Penggunaan istilah ini oleh kaum Pythagoras mungkin menjadi dasar terhadap anggapan bahwa matematika dimulai pada zaman Yunani Klasik sepanjang tahun 600 sampai 300 S.M. Kenyataannya sejarah matematika sendiri dimulai jauh sebelum itu. Tiga atau empat ribu tahun lalu, pada masa Mesir dan Babilonia Kuno, telah ditemukan bukti fisik nyata tentang matematika yang harus kita sebut sebagai matematika.

Telah menjadi suatu pandangan umum bahwa matematika selalu berkaitan dengan permasalahan praktis perhitungan dan pencatatan bilangan. Lahirnya gagasan tentang bilangan ini tetap menjadi misteri di balik perjalanan hidup manusia di muka Bumi yang demikian panjang, sehingga tetap mengundang banyak orang untuk berspekulasi atas bukti-bukti tersisa dari penggunaan awal bilangan-bilangan oleh umat manusia.

Aristoteles berpendapat bahwa matematika dimulai oleh kalangan pendeta di Mesir. Herodotus meyakini bahwa geometri tercipta karena banjir tahunan di Sungai Nil membutuhkan penelitian yang mendalam, untuk menentukan ulang batas-batas daratan. Selain itu, Democritus menyebut para matematikawan Mesir sebagai 'perentang-tali'.

Dari sudut pandang filosofis, adalah suatu hal yang menarik di mana bangsa Mesir memegang prinsip bahwa matematika memiliki sumber agung. Matematika telah diberikan kepada mereka oleh dewa Toth. Sementara itu, pandangan Aristotelianisme menyebutkan bahwa matematika diturunkan dari manusia hewan, dan pandangan Platonisme melihat bahwa matematika diturunkan dari alam ke-Tuhan-an.

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan sebagai berikut:

1. menjelaskan pandangan tentang asal usul matematika;
2. menjelaskan garis besar sejarah dan peran Papirus Rhind;
3. menjelaskan garis besar sejarah dan peran Batu Rosetta;
4. menjelaskan sifat-sifat khas perkalian awal bangsa Mesir;
5. menjelaskan tentang tabel pecahan satuan Mesir Kuno;
6. menjelaskan penulisan bilangan-bilangan rasional oleh bangsa Mesir Kuno;
7. menjelaskan metode posisi palsu;
8. menggunakan metode posisi palsu;
9. menjelaskan pengertian aritmetika Mesir Kuno sebagai aritmetika terapan.

KEGIATAN BELAJAR 1

Papirus Rhind

A. PAPIRUS RHIND

1. Papirus Matematika Mesir Kuno

Dengan mengecualikan ilmu astronomi, matematika adalah sains eksak tertua dan paling diminati oleh manusia dari generasi ke generasi. Asal mula matematika sendiri sepertinya akan tetap berada di balik misteri zaman kuno. Kita sering kali mendengar bahwa dalam matematika segala sesuatunya akan selalu mengacu kepada matematika Yunani. Kenyataannya, bangsa Yunani sendiri mengungkapkan gagasan-gagasan tentang dari mana matematika berasal. Salah satunya adalah seperti yang digagas oleh Aristoteles dalam karyanya yang berjudul *Metaphysics*: “Sains-sains matematis berasal dari kawasan Mesir, karena di sana kaum yang sekelas pendeta memiliki waktu luang yang cukup.” Hal ini disebabkan karena sebagian besar perkembangan luar biasa dalam matematika telah berlangsung bersamaan dengan keberadaan kaum sekelas pendeta tersebut yang mencurahkan waktunya untuk menguasai berbagai ilmu pengetahuan. Pandangan yang lebih biasa menyebutkan bahwa matematika muncul karena adanya kebutuhan-kebutuhan praktis. Peradaban Mesir membutuhkan aritmetika sederhana untuk melakukan transaksi dalam kegiatan berdagang mereka sehari-hari dan pemerintah membutuhkannya untuk menentukan pungutan pajak bagi para penduduknya, untuk menghitung bunga pinjaman, untuk menghitung besarnya gaji, dan untuk menyusun kalender kerja. Hukum-hukum geometris sederhana digunakan untuk menentukan batas-batas ladang dan daya tampung lumbung mereka. Jika Herodotus menyebut Mesir sebagai berkah Sungai Nil maka kita dapat menyebut geometri sebagai berkahnya yang kedua. Karena banjir tahunan yang selalu terjadi di Lembah Nil maka diperlukan aturan perpajakan untuk menentukan berapa besar tanah yang bertambah atau berkurang. Ini adalah pandangan seorang pengamat ahli asal Yunani bernama Proclus (410–485 S.M.), yang karyanya berjudul *Pandangan terhadap Buku Kesatu Elemen Euclid* (*Commentary on the First Book of Euclid’s Elements*) menjadi sumber informasi yang sangat penting bagi kita berkenaan dengan geometri pra-Euclid:

> Menurut sebagian besar catatan sejarah, geometri adalah ilmu yang pertama ditemukan di antara bangsa Mesir dan berasal dari pengukuran luas tanah mereka. Hal ini penting bagi mereka karena Sungai Nil meluap dan menghapus batas-batas antara tanah-tanah milik mereka.

Meski perhatian awal ditujukan pada matematika yang berdaya guna, pada akhirnya matematika menjadi suatu ilmu yang kemudian dipelajari secara mandiri. Aljabar pada akhirnya berkembang dari teknik-teknik perhitungan, dan geometri teoretis dimulai pada pengukuran luas tanah.

Kebanyakan ahli sejarah mencatat dimulainya penemuan kembali sejarah kuno bangsa Mesir Kuno adalah pada saat berlangsungnya invasi Napoleon Bonaparte pada tahun 1798. Pada bulan April tahun tersebut, Napoleon berlayar dari Toulon bersama armada lautnya yang berjumlah 328 kapal dan mengangkut kurang lebih 38.000 serdadu di dalamnya. Dia bermaksud untuk menaklukkan Mesir agar dapat menguasai jalur darat menuju wilayah taklukan Inggris yang kaya di India. Meski komandan AL Inggris bernama Laksamana Nelson berhasil menghancurkan banyak armada Perancis sebulan setelah serdadu mereka mendarat di dekat Alexandria, penaklukan tersebut terus berlangsung selama 12 bulan berikutnya sebelum Napoleon meninggalkan kawasan tersebut dan bergegas kembali ke Perancis. Meski demikian, bencana bagi pasukan Perancis ini membawa serta kejayaan dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Napoleon bersama pasukan ekspedisinya membawa serta satu komisi ilmu pengetahuan dan seni, yang beranggotakan 167 orang ilmuwan terpilih—termasuk dua matematikawan Gaspard Monge dan Jean-Baptiste Fourier—yang bertugas mengumpulkan berbagai informasi dengan meneliti tiap aspek kehidupan bangsa Mesir pada masa-masa kuno dan zaman modern. Rencana utama dari aktivitas tersebut adalah untuk memperkaya khasanah pengetahuan dunia tentang Mesir sambil mendinginkan keadaan akibat serangan militer Perancis dengan cara mengalihkan perhatian mereka pada kehebatan budaya Mesir.

Para ilmuwan anggota komisi tersebut ditangkap oleh pasukan Inggris yang bermurah hati melepaskan mereka untuk kembali ke Perancis dengan membawa serta catatan-catatan dan gambar-gambar karya mereka. Ketika waktunya tiba, mereka menghasilkan sebuah karya monumental dengan judul *Déscription de l'Egypte*. Karya ini ditulis dalam 9 seri teks folio dan 12 seri teks lempengan, yang diterbitkan selama lebih dari 25 tahun. Teks itu sendiri dibagi menjadi empat bagian yang secara berturutan membahas tentang peradaban Mesir Kuno, monumen-monumen yang mereka bangun, Mesir modern, dan sejarah alamnya. Tidak pernah ada sebelumnya catatan yang dibuat tentang negara asing dengan begitu lengkap, begitu akurat, begitu cepat, dan dibuat pada kondisi-kondisi yang begitu sulit.

Déscription de l'Egypte, beserta kemewahan dan ilustrasi-ilustrasinya yang luar biasa bagus, mendorong kekayaan pengetahuan dan budaya Mesir kuno memasuki suatu masyarakat yang telah terbiasa dengan kekunoan Yunani dan Romawi. Pemaparan mendadak terhadap bangsa yang sudah maju, yang lebih tua dari peradaban mana pun menurut catatan sejarah, memunculkan ketertarikan yang tinggi bagi kebudayaan dan komunitas ilmiah bangsa Eropa. Yang membuat ketertarikan itu semakin besar adalah kenyataan bahwa catatan-catatan sejarah pada peradaban awal ini ditulis dalam sebuah naskah yang tidak ada seorang pun mampu menerjemahkannya ke dalam salah satu bahasa modern. Invasi militer serupa yang dilakukan Napoleon akhirnya memberikan petunjuk literal terhadap masa lalu bangsa Mesir, ketika salah satu teknisinya menemukan Batu Rosetta dan kemudian mengungkap kemungkinan bahwa batu tersebut berguna untuk menerjemahkan tulisan hieroglif.

Sebagian besar pengetahuan kita tentang urutan matematika Mesir berasal dari dua papirus yang berukuran cukup besar, yang masing-masingnya dinamai dengan para pemilik dua papirus itu sebelumnya—Papirus Rhind dan Papirus Golenischev. Papirus yang disebut belakangan biasa juga disebut sebagai Papirus Moskow, karena ia dimiliki oleh Museum Seni Murni di Moskow. Papirus Rhind dibeli dari Luxor, Mesir, pada tahun 1858 oleh orang Skotlandia yang bernama A. Henry Rhind, yang kemudian disumbangkan kepada Museum Inggris. Ketika kesehatan pengacara muda ini menurun drastis, dia mengunjungi wilayah Mesir yang beriklim lebih hangat dan menjadi arkeolog, yang memiliki spesialisasi dalam bidang penggalian makam-makam di Thebes. Di kota Thebes inilah, pada reruntuhan bangunan kecil di dekat Ramesseum, dikatakan bahwa papirus tersebut ditemukan.

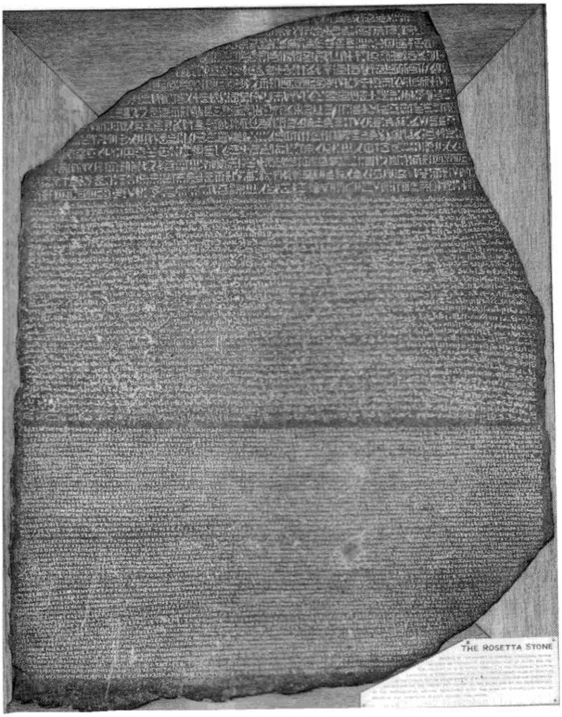
Papirus Rhind ditulis dalam naskah hieratik (bentuk kursif hieroglif yang lebih sesuai untuk penggunaan pena dan tinta) pada sekitar 1650 S.M. oleh seorang penulis bernama Ahmes, yang meyakinkan kita bahwa papirus tersebut dibuat mirip karya awal dari Dinasti Kedua Belas, tahun 1849–1801 S.M. Meski papirus tersebut bentuk aslinya merupakan gulungan dengan panjang 18 kaki dan tinggi 13 inci, ia tiba di Museum Inggris dalam dua bagian, di mana bagian tengahnya hilang. Mungkin papirus tersebut telah robek ketika dibentangkan oleh seseorang yang tidak memiliki keahlian dalam memelihara dokumen rapuh seperti itu, atau mungkin ada dua penemu dan masing-masingnya meminta suatu bagian. Dipandang dari segi mana pun, tampaknya bagian kunci dari papirus tersebut telah hilang selamanya bagi kita, hingga seseorang mendapatkan kesempatan untuk menemukan dan mengungkapnya—yang terkadang memang terjadi dalam dunia arkeologi. Sekitar empat tahun setelah Rhind melakukan pembelian terkenalnya, Edwin Smith, sebagai seorang Ahli Bangsa Mesir asal Amerika, membeli apa yang dikiranya papirus pengobatan. Papirus ini ternyata tipuan belaka, karena ia dibuat dengan menempelkan potongan-potongan dari papirus lain pada sehelai gulungan model. Pada hari kematiannya (tahun 1906), koleksi benda-benda Mesir kuno milik Smith dipamerkan kepada Masyarakat Sejarah New York, dan pada tahun 1922, potongan dari gulungan model itu teridentifikasi sebagai bagian papirus Rhind. Penguraian papirus Rhind menjadi lengkap saat potongan-potongan yang hilang itu dibawa ke Museum Inggris dan digabungkan pada posisi-posisi yang semestinya. Rhind juga membeli naskah pendek yang ditulis di atas kulit, Gulungan Kulit Matematika Mesir, pada saat bersamaan dia membeli papirusnya; tetapi melihat kondisinya yang sangat rapuh, gulungan tersebut tetap tidak dulu diteliti selama lebih dari 60 tahun.

2. Kunci Menuju Penguraian: Batu Rosetta

Penerjemahan Papirus Rhind baru memungkinkan untuk dilakukan secara cepat karena pengetahuan yang diperoleh dari Batu Rosetta. Penemuan lemping basal hitam mengkilap ini adalah kejadian yang paling signifikan dari ekspedisi Napoleon. Batu ini ditemukan oleh seorang perwira pasukan Napoleon dekat Rosetta di Sungai Nil pada tahun 1799, ketika mereka menggali pondasi sebuah benteng. Batu Rosetta tersusun atas tiga panel, yang masing-masingnya ditulis dalam tiga jenis tulisan berbeda: huruf Yunani pada bagian ketiga (paling bawah), naskah demotik bertuliskan huruf Mesir (bentuk pengembangan huruf hieratik) pada bagian tengah, dan huruf hieroglif kuno pada bagian paling atas yang agak rusak. Cara membaca huruf Yunani tidak pernah hilang; cara untuk membaca hieroglif dan demotik tidak pernah ditemukan. Untungnya, disimpulkan dari naskah huruf Yunani itu bahwa ternyata kedua panel lainnya membawa pesan yang sama, sehingga naskah tersebut merupakan teks tiga bahasa yang dapat digunakan untuk menguraikan alfabet hieroglif.

Pentingnya Batu Rosetta segera disadari orang-orang Perancis, terutama Napoleon, yang memerintahkan naskah itu diperbanyak dengan salinan-salinan cetak tinta dan dibagikan kepada para ilmuwan di Eropa. Ketertarikan publik sangat tinggi sehingga ketika Napoleon dipaksa untuk melepaskan Mesir pada tahun 1801, salah satu artikel dari pakta penyerahan mencantumkan penyerahan batu tersebut kepada Inggris. Seperti halnya semua artifak yang terkumpulkan, Batu Rosetta akhirnya menjadi milik Museum Inggris, di mana pembuatan dan penguraian empat cetakan gips di universitas-universitas Oxford, Cambridge, Edinburgh, dan Dublin, dengan menggunakan analisis komparatif dimulai. Permasalahannya menjadi lebih rumit dari yang pernah dibayangkan, sehingga membutuhkan 23 tahun dan penelitian intensif dari para ilmuwan untuk mencari solusinya.

Bab terakhir dari misteri Batu Rosetta, seperti halnya misteri pertama, ditulis oleh seorang ilmuwan Perancis, Jean François Champollion (1790–1832). Sebagai orang yang paling berpengaruh berkaitan dengan penelitian tentang Mesir, sejak kecil Champollion telah melihat pertanda bahwa dia akan memainkan peran penting dalam pengungkapan budaya Mesir kuno. Sejarah mencatat bahwa pada usia 11 tahun, dia berjumpa dengan matematikawan Jean-Baptise Fourier, orang yang menunjukkan kepadanya beberapa papirus dan lempengan batu yang bertuliskan huruf hieroglif. Meski diyakinkan bahwa tidak ada seorang pun yang dapat membacanya, sang bocah memberikan jawaban yang lebih meyakinkan, “Saya akan melakukannya jika saya dewasa nanti.” Dari momen itulah hampir segala sesuatu yang Champollion lakukan selalu berkaitan dengan ilmu tentang Mesir (Egiptologi); pada usia 13 dia mampu membaca tiga bahasa dari kawasan Timur, dan ketika dia berusia 17 tahun, dia menuju Universitas Grenoble dan melakukan studi di sana. Pada tahun 1822, dia telah mampu mengumpulkan kosakata hieroglif dan membaca secara lengkap panel bagian atas yang tertera pada Batu Rosetta.



Gambar 1.1.
Batu Rosetta, 3 naskah sama yang ditulis dalam huruf-huruf hieroglif, demotik, dan Yunani. (Sumber: *Museum Inggris*)

Dari waktu ke waktu huruf-huruf hieroglif berkembang dari suatu sistem gambar-gambar dari kata-kata lengkap menjadi sistem yang meliputi lambang-lambang alfabet sekaligus simbol-simbol fonetik. Pada naskah hieroglif Batu Rosetta, kerangka-kerangka oval yang disebut *cartouches* (kata dalam bahasa Perancis yang berarti *cartridge* atau pelor) digambarkan mengelilingi karakter-karakter tertentu. Karena hanya tanda-tanda ini saja yang menunjukkan penekanan khusus, Champollion menyimpulkan bahwa simbol-simbol yang dikelilingi oleh pelor-pelor tersebut mewakili nama dari penguasa saat itu, Ptolemy, seperti yang disebutkan dalam teks yang berbahasa Yunani. Champollion juga memiliki salinan naskah-naskah yang terdapat pada sebuah obelisk, dan alas tumpuannya, dari Philae. Alas tersebut memuat tulisan Yunani yang mengagungkan Ptolemy dan istrinya Cleopatra (bukan Cleopatra terkenal yang konon mati bunuh diri). Pada obelisk itu sendiri, yang berpahatkan huruf hieroglif, terdapat dua pelor yang didekatkan, jadi mungkin bahwa dua pelor tersebut menekankan ekuivalen-ekuivalen Mesir untuk nama diri dari kedua orang tersebut. Selain itu, salah satu pelor tadi memuat karakter-karakter hieroglif yang terdapat dalam pelor-pelor yang ditemukan pada Batu Rosetta. Uji silang ini sudah cukup bagi Champollion untuk membuat penguraian awal. Dari nama-nama bangsawan tersebut dia kemudian menetapkan hubungan antara simbol-simbol hieroglif dan huruf-huruf Yunani. Ketika itu di mana tulisan hieroglif mulai tersibak selimut misterinya, Champollion, melalui usaha tanpa henti selama bertahun-tahun, dikabarkan menangis dan setengah berteriak, "Aku menemukannya!" dan terjatuh pingsan.

Sebagai puncak bagi studi seumur hidupnya, Champollion menulis karyanya berjudul *Grammarie Egyptienne en Encriture Hieroglyphique*, yang diterbitkan dan mendapatkan penghargaan pada tahun 1843. Di dalamnya, dia merumuskan sebuah sistem gramatika dan uraian umum yang menjadi landasan bagi semua karya yang kemudian dihasilkan oleh para Egiptolog lainnya. Batu Rosetta telah memberikan kunci pemahaman terhadap salah satu peradaban hebat di masa silam.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jelaskan ungkapan gagasan-gagasan tentang dari mana matematika berasal?
2) Dari manakah dapat diketahui tentang matematika Mesir Kuno?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Salah satunya adalah yang digagas oleh Aristoteles dalam karyanya yang berjudul *Metaphysics*.
2) Matematika Mesir Kuno diketahui terutama dari Papirus Rhind yang dibuat pada sekitar tahun 1650 S.M. Suatu naskah matematika tiga bahasa yang dituliskan dalam huruf-huruf hieroglif, demotik, dan Yunani.

RANGKUMAN

Matematika dianggapkan berasal dari kawasan Mesir, karena di sana kaum sekelas pendeta memiliki waktu luang yang cukup. Namun demikian, mungkin pula bahwa matematika muncul karena adanya kebutuhan-kebutuhan praktis dalam peradaban Mesir Kuno.

Matematika Mesir Kuno diketahui terutama dari Papirus Rhind yang dibuat pada sekitar tahun 1650 S.M., yang dapat dipahami setelah diuraikannya Batu Rosetta, suatu naskah matematika tiga bahasa yang dituliskan dalam huruf-huruf hieroglif, demotik, dan Yunani.

TES FORMATIF 1

Jawablah soal-soal berikut dengan singkat dan jelas1

1) Sebutkan pandangan Aristoteles yang disebutkan dalam bukunya *Metaphysics* tentang asal usul matematika? Jelaskan pula pandangan lebih biasa yang melihat matematika muncul dari kebutuhan-kebutuhan praktis!
2) Jelaskan hubungan antara invasi pasukan Perancis di bawah pimpinan Napoleon Bonaparte ke Mesir pada tahun 1798 dengan terungkapnya peradaban Mesir!
3) Jelaskan tentang karya *Déscription de l'Egypte*!
4) Jelaskan tentang Papirus Rhind!
5) Jelaskan tentang Batu Rosetta!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Aritmetika Mesir Kuno

A. ARITMETIKA MESIR KUNO

1. Perkalian Awal Bangsa Mesir

Papirus Rhind diawali dengan premis yang tegas. Isinya berkaitan dengan “sebuah studi yang cermat tentang segala hal, memahami semua hal yang ada, pengetahuan dari semua rahasia yang menghalangi.” Hal ini segera akan menjadi jelas bahwa kita berhubungan dengan sebuah buku pegangan praktis latihan-latihan matematis, dan satu-satunya “rahasia” adalah bagaimana cara mengalikan dan membagi. Meski demikian, 85 permasalahan yang terdapat di dalamnya memberikan gagasan yang cukup jelas bagi kita tentang ciri khas matematika Mesir.

Matematika Mesir pada dasarnya “bersifat penjumlahan,” artinya bahwa kecenderungan matematikanya adalah menurunkan perkalian dan pembagian menjadi penjumlahan berulang. Perkalian dari dua bilangan dapat diselesaikan dengan cara menggandakan secara berturutan salah satu dari bilangan tersebut dan kemudian menambahkan pengulangan yang sesuai untuk memperoleh hasilkalinya. Untuk mencari hasil kali 19 dan 71, misalnya, kita asumsikan multiplikan (bilangan yang akan dikalikan) adalah 71, dengan cara menggandakan bilangan itu (mengalikannya dengan dua) diperoleh:

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Kita berhenti menggandakannya sampai sini, karena jika langkah tersebut dilanjutkan maka pengali yang muncul selanjutnya untuk 71 akan lebih besar dari 19. Karena 19 = 1 + 2 + 16, kita dapat tulis tanda ‘*cek*’ di kiri pengali-pengali ini untuk menunjukkan bahwa pengali-pengali itu harus dijumlahkan. Persoalan 19 kali 71 tersebut akan tampak seperti ini.

✓	1	71
✓	2	142
	4	284
	8	568
✓	16	1136
Jumlah	19	1349

Dengan menambahkan bilangan-bilangan tersebut pada kolom bagian kanan yang berseberangan dengan tanda *cek*, matematikawan Mesir akan memperoleh hasil yang dibutuhkan, 1349; yang jika diuraikan akan tampak seperti berikut ini,

$$1349 = 71 + 142 + 1136 = (1 + 2 + 16)71 = 19 \cdot 71.$$

Dengan memilih 19 sebagai multiplikan dan 71 sebagai pengalinya, maka uraian perkalian tersebut dapat disusun sebagai berikut.

✓	1	19
✓	2	38
✓	4	76
	8	152
	16	304
	32	608
✓	64	1216
Jumlah	71	1349

Karena 71 = 1 + 2 + 4 + 64 maka hal yang sama dilakukan untuk memperoleh 1349 melalui perkalian 19.

Metode pengalian dengan cara menggandakan dan menjumlahkan dapat bekerja dengan baik karena setiap bilangan bulat (positif) dapat ditunjukkan sebagai jumlah pangkat berbeda dari 2; yaitu, seperti jumlah suku-suku dari barisan, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Tampaknya bukan orang-orang Mesir kuno yang sebenarnya membuktikan fakta ini, tetapi kepercayaan dalam diri merekalah yang mungkin menetapkan hal tersebut melalui bermacam-macam contoh. Skema penggandaan dan pembagi-duaan terkadang disebut sebagai perkalian Russia karena banyak digunakan oleh para petani Russia.

Keuntungan yang tampak jelas adalah bahwa perkalian tersebut menjadikan tabel-tabel pengingat perkalian menjadi tidak penting.

Pembagian yang dilakukan oleh bangsa Mesir dapat dijelaskan sebagai proses perkalian yang dibalikkan—di mana pembaginya digunakan secara berulang untuk memperoleh hasilbaginya. Untuk membagi 91 oleh 7, misalnya, sebuah bilangan x digunakan sehingga $7x = 91$. Ini diperoleh dengan cara menggandakan 7 hingga jumlah 91 dicapai; langkah-langkahnya ditunjukkan berikut ini.

	1	7	✓
	2	14	
	4	28	✓
	8	56	✓
Jumlah	13	91	

Dengan mengetahui bahwa 7 + 28 + 56 = 91, salah satu bilangannya ditambahkan pangkat 2 agar berkorespondensi dengan bilangan-bilangan yang ditandai, yaitu, 1 + 4 + 8 = 13, yang memberikan kuosien (pembagi) yang dibutuhkan. Prosedur pembagian Mesir memiliki keuntungan pedagogis karena tidak membutuhkan operasi yang baru.

Pembagian tidak selalu sesederhana seperti yang ditunjukkan oleh contoh yang diberikan di atas, dan pecahan-pecahan sering kali harus diikutsertakan dalam prosesnya. Untuk membagi, misalnya, 35 oleh 8, seorang penulis akan memulai dengan menggandakan pembaginya, 8, sampai pada titik di mana duplikasi berikutnya akan lebih besar dari dividen (bilangan yang dibaginya), 35. Selanjutnya dia akan mulai membagi dua pembaginya untuk melengkapi sisanya. Perhitungannya akan tampak seperti ini.

	1	8	
	2	16	
	4	32	✓
	$\frac{1}{2}$	4	
	$\frac{1}{4}$	2	✓
	$\frac{1}{8}$	1	✓
Jumlah	$4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	35	

Dengan menggandakan 16 akan kita peroleh 32, sehingga nilai yang hilang adalah 35 – 32 = 3. Salah satunya membutuhkan setengah dari 8 untuk mendapatkan 4, kemudian setengah dari 4 untuk memperoleh 2, dan akhirnya setengah dari nilai ini untuk sampai pada nilai 1; ketika seperempat dan seperdelapan dijumlahkan, maka 3 yang dibutuhkan telah didapatkan. Dengan demikian, hasilbaginya adalah $4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Pada contoh lainnya, pembagian 16 oleh 3 mungkin dihasilkan sebagai berikut.

	1	3	✓
	2	6	
	4	12	✓
	$\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{1}{3}$	1	✓
Jumlah	$5 + \frac{1}{3}$	16	

Jumlah dari masukan-masukan pada kolom bagian kiri yang berkorespondensi dengan bilangan-bilangan yang ditandai memberikan hasilbaginya, yaitu $5 + \frac{1}{3}$. Merupakan hal yang luar biasa bahwa untuk memperoleh nilai sepertiga dari sebuah bilangan, orang-orang Mesir pertama-tama akan mencari dua pertiga dari bilangan tersebut dan kemudian mengambil setengah bagian dari hasil tersebut. Hal ini diilustrasikan dalam lebih dari satu lusin permasalahan yang berkaitan dengan Papirus Rhind.

Ketika matematikawan Mesir berkeinginan untuk menghitung dengan menggunakan pecahan, maka dia berhadapan dengan berbagai kesulitan yang muncul karena penolakannya atas penggunaan pecahan seperti $\frac{2}{5}$. Praktek perhitungan yang dia lakukan memungkinkan dirinya hanya untuk menggunakan apa yang disebut sebagai pecahan-pecahan satuan; yaitu, pecahan-pecahan dengan bentuk $\frac{1}{n}$, di mana n adalah bilangan asli. Orang-orang Mesir menunjukkan sebuah pecahan satuan dengan cara menempatkan bentuk oval memanjang di atas huruf hieroglif yang mewakili bilangan bulat yang muncul pada penyebutnya, sehingga $\frac{1}{4}$ ditulis sebagai atau $\frac{1}{100}$ dituliskan sebagai . Dengan pengecualian $\frac{2}{3}$, yang menggunakan simbol khusus semua pecahan lainnya harus disusun menjadi jumlah-jumlah pecahan satuan, yang masing-masingnya memiliki penyebut yang berbeda. Dengan demikian, $\frac{6}{7}$ akan ditulis sebagai

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}.$$

Meski benar bahwa $\frac{6}{7}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7},$$

tetapi orang-orang Mesir kuno akan menganggap penulisan itu mustahil sekaligus bertentangan. Dalam pandangan mereka terdapat satu dan hanya satu bagian yang dapat menjadi sepertujuh dari apapun. Penulis zaman kuno mungkin menemukan pecahan satuan yang ekuivalen dengan $\frac{6}{7}$ dengan menggunakan pembagian konvensional 6 oleh 7 berikut ini.

$$\begin{array}{rll}
 & 1 & 7 & \\
 & \frac{1}{2} & 3 + \frac{1}{2} & \checkmark \\
 & \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \checkmark \\
 & \frac{1}{7} & 1 & \\
 & \frac{1}{14} & \frac{1}{2} & \checkmark \\
 & \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \checkmark \\
\hline
\text{Jumlah } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} & & 6 &
\end{array}$$

2. Tabel Pecahan Satuan

Untuk membantu perubahan ke dalam pecahan-pecahan satuan, banyak tabel referensi harus tersedia, yang paling sederhana tanpa ragu lagi adalah penggunaan ingatan kita. Pada bagian awal Papirus Rhind terdapat sebuah tabel yang memuat uraian dari pecahan-pecahan dengan pembilang 2 dan penyebutnya adalah sebuah bilangan ganjil di antara 5 dan 101. Tabel ini, yang menghabiskan sekitar sepertiga dari keseluruhan gulungan yang panjangnya 18 kaki, adalah tabel-tabel aritmetika paling ekstensif yang ditemukan di antara kumpulan papirus bangsa Mesir kuno yang berhasil kita pelajari. Penulisnya pertama-tama menyatakan tentang penguraian seperti apa dari $\frac{2}{n}$ yang telah dia pilih; kemudian, melalui perkalian biasa, dia membuktikan bahwa pemilihan nilai-nilai yang dia lakukan adalah benar. Cara yang digunakannya adalah dengan mengalikan simbol yang terpilih dengan bilangan ganjil n agar menghasilkan 2.

Pecahan-pecahan $\frac{2}{n}$ yang penyebut-penyebutnya habis dibagi 3 semuanya mengikuti aturan umum

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}.$$

Ciri khas dari masukan-masukan ini adalah $\frac{2}{15}$ (kasusnya adalah $k = 5$), yang ditunjukkan sebagai berikut.

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Jika kita abaikan representasi untuk pecahan-pecahan dengan bentuk $\frac{2}{3k}$ maka sisa dari tabel $\frac{2}{n}$ dapat Anda baca seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \\
\frac{2}{7} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \\
\frac{2}{11} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{66} \\
\frac{2}{13} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} \\
\frac{2}{17} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} \\
\frac{2}{19} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} \\
\frac{2}{23} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{276} \\
\frac{2}{25} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{75} \\
\frac{2}{29} &= \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} \\
\frac{2}{31} &= \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155} \\
\frac{2}{35} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \\
\frac{2}{37} &= \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296} \\
\frac{2}{41} &= \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{53} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795} \\
\frac{2}{55} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{330} \\
\frac{2}{59} &= \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531} \\
\frac{2}{61} &= \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} \\
\frac{2}{65} &= \frac{1}{39} + \frac{1}{195} \\
\frac{2}{67} &= \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536} \\
\frac{2}{71} &= \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710} \\
\frac{2}{73} &= \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} \\
\frac{2}{77} &= \frac{1}{44} + \frac{1}{308} \\
\frac{2}{79} &= \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790} \\
\frac{2}{83} &= \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498} \\
\frac{2}{85} &= \frac{1}{51} + \frac{1}{255} \\
\frac{2}{89} &= \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328} \qquad \frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301} \qquad \frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

$$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470} \qquad \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

$$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196} \qquad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102} \qquad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Sejak terjemahan pertama dari papirus tersebut muncul, para matematikawan telah mencoba untuk menjelaskan metode apa yang digunakan penulisnya untuk mempersiapkan tabel tersebut. Dari banyak pengurangan yang mungkin terhadap pecahan-pecahan satuan, mengapa?

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

dipilih untuk $n = 9$ daripada, katakanlah,

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}\,?$$

Tidak ada aturan jelas yang berhasil ditemukan untuk memberikan semua hasil tabel tersebut.

Masukan terakhir dalam tabel tersebut, di mana 2 dibagi oleh 101, ditunjukkan sebagai

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}\,.$$

Inilah satu-satunya penguraian yang mungkin untuk $\frac{2}{101}$ menjadi tidak lebih dari empat pecahan satuan yang berbeda dengan semua penyebut yang kurang dari 1000; dan ini merupakan kasus khusus dari rumus umum

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}\,.$$

Dengan rumus di atas ini, menjadi hal yang mungkin bagi kita untuk menghasilkan keseluruhan tabel $\frac{2}{n}$ baru yang memuat seluruh lambang bersuku empat:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$$

Meski penulis tabel ini dianggap sadar akan hal ini, dia sendiri tidak begitu menerima nilai-nilai untuk tabel ini (kecuali pada kasus terakhir, $\frac{2}{101}$), karena begitu banyak yang lainnya, representasi yang "lebih sederhana" pun tersedia. Bagi pemikiran modern tampak bahwa penulis tersebut mengikuti prinsip-prinsip tertentu dalam menyusun daftar-daftar tabelnya. Kami mencatat bahwa:

a. Penyebut-penyebut yang kecil lebih baik digunakan, tanpa ada yang lebih dari 1000.
b. Semakin sedikit pecahan-pecahan satuan maka akan semakin baik; dan tidak pernah akan lebih dari empat pecahan satuan yang digunakan.
c. Penyebut-penyebut yang bernilai genap lebih diinginkan daripada penyebut-penyebut yang bernilai ganjil, terutama untuk suku awalnya.
d. Penyebut-penyebut yang lebih kecil muncul lebih dulu, dan tidak ada dua penyebut yang sama.
e. Penyebut pertama yang kecil boleh diperbesar jika besar penyebut-penyebut yang lainnya seiring itu diperkecil (misalnya, $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$ lebih dipilih ketimbang $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$).

Mengapa—atau bahkan apakah—aturan-aturan ini sengaja dipilih, kita tidak akan dapat menentukannya.

Contoh 1.

Sebagai ilustrasi dari perkalian dengan pecahan, mari kita cari hasilkali dari $2 + \frac{1}{4}$ dan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$. Perhatikan bahwa penggandaan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ akan menghasilkan $3 + \frac{2}{7}$, yang akan ditulis oleh para matematikawan Mesir sebagai $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Prosesnya dapat disusun seperti berikut.

	1	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$
✓	2	$3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$
✓	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{28}$
Jumlah	$2 + \frac{1}{4}$	$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14}$

Para matematikawan tahu bahwa dua kali dari pecahan satuan $\frac{1}{2n}$ adalah satuan pecahan $\frac{1}{n}$, jadi jawabannya akan ditulis sebagai $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14}$.

Contoh 2.

Untuk pembagian lebih sulit yang melibatkan pecahan-pecahan, mari kita lihat sebuah perhitungan Permasalahan 33 dalam Papirus Rhind. Yang dibutuhkan di sini untuk membagi 37 oleh $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$. Dalam bentuk standar pembagian Mesir, perhitungannya dimulai:

1	$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$
2	$4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
4	$8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$
8	$18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$
16	$36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

dengan nilai untuk $\frac{2}{7}$ ditulis sebagai $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Sekarang jumlah $36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ sudah mendekati 37. Tinggal berapa lagi kekurangannya? Atau seperti yang akan disebutkan oleh penulisnya, “Apakah yang melengkapi $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ hingga mencapai 1?” Pada notasi modern, merupakan hal yang penting untuk mendapatkan pecahan x sehingga diperoleh

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + x = 1;$$

atau dengan permasalahan yang dinyatakan dengan cara yang berbeda, pembilang y dicari agar dapat memenuhi

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{y}{84} = 1,$$

di mana penyebut 84 adalah faktor persekutuan terkecil dari penyebut-penyebut 3, 4, dan 28. Dengan mengalikan kedua sisi persamaan terakhir ini dengan 84 akan menghasilkan $56 + 21 + 3 + y = 84$, sehingga diperoleh $y = 4$. Dengan demikian, sisa yang harus dijumlahkan dengan $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ agar mencapai 1 adalah $\frac{4}{84}$, atau $\frac{1}{21}$. Langkah selanjutnya adalah menentukan berapa jumlah yang harus dikalikan dengan $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ untuk memperoleh $\frac{1}{21}$ yang dibutuhkan. Ini berarti mencari penyelesaian untuk z dalam persamaan

$$z(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}) = \frac{1}{21}.$$

Dengan mengalikannya dengan 42 akan menghasilkan $97z = 2$ atau $z = \frac{2}{97}$, yang oleh penulis Mesir ketahui sama dengan $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$. Dengan demikian, keseluruhan perhitungan akan berlanjut seperti berikut ini.

$$\begin{array}{rll}
 & 1 & 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \\
 & 2 & 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \\
 & 4 & 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \\
 & 8 & 18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \\
 & 16 & 36 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \quad \checkmark \\
 & \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} & \frac{1}{21} \quad \checkmark \\
\hline
\text{Jumlah } 16 + & \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} & 37
\end{array}$$

Hasil dari pembagian 37 oleh $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ adalah $16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

3. Menampilkan Bilangan-bilangan Rasional

Terdapat beberapa cara modern untuk memperluas sebuah pecahan yang pembilangnya selain 2 sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan. Misalkan kita ingin memperluas $\frac{9}{13}$. Karena $9 = 1 + 4 \cdot 2$, salah satu caranya adalah dengan mengubah $\frac{9}{13}$ menjadi

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{13} + 4\left(\frac{2}{13}\right).$$

Pecahan $\frac{2}{13}$ dapat diuraikan dengan menggunakan tabel $\frac{2}{n}$ dan hasil-hasilnya dikumpulkan untuk menghasilkan jumlah pecahan-pecahan satuan tanpa pengulangan:

$$\begin{aligned}\frac{9}{13} &= \frac{1}{13} + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right)\\ &= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}\\ &= \frac{2}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}\\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}.\end{aligned}$$

Jawaban akhirnya adalah

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Apa yang membuat contoh ini bekerja adalah karena penyebut-penyebutnya 8, 52, dan 104 bilangan-bilangan yang habis dibagi 4. Kita mungkin tidak akan selalu beruntung seperti itu.

Meski kita sebaiknya tidak melakukan cara seperti itu, dapat dibuktikan bahwa tiap bilangan rasional positif adalah bilangan yang dapat ditunjukkan sebagai jumlah terhingga dari pecahan-pecahan satuan yang berbeda. Dua langkah sistematis akan melengkapi penguraian ini; kita bisa sebut cara ini sebagai metode *splitting* (pemisahan) dan metode Fibonacci. Metode pemisahan didasarkan pada apa yang biasa disebut identitas pemisahan

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

yang memungkinkan bagi kita untuk mengganti salah satu pecahan satuan dengan jumlah dari dua yang lainnya. Misalnya, untuk menguraikan $\frac{2}{19}$ pertama-tama kita tulis

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19}$$

dan kemudian pisahkan salah satu pecahan $\frac{1}{19}$ menjadi $\frac{1}{20} + \frac{1}{19 \cdot 20}$, sehingga diperoleh

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{380}.$$

Sekali lagi, pada kasus $\frac{1}{19}$, metode ini akan memulai dengan

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

dan memisahkan masing-masing dari dua pecahan satuan yang terakhir menjadi $\frac{1}{6} + \frac{1}{5 \cdot 6}$; dengan demikian,

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right).$$

Terdapat beberapa jalan terbuka bagi kita pada langkah ini. Dengan tidak memperhatikan penyederhanaan-penyederhanaan yang jelas seperti $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ dan $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$, marilah kita pisahkan $\frac{1}{6}$ dan $\frac{1}{30}$ menjadi penjumlahan $\frac{1}{7} + \frac{1}{6 \cdot 7}$ dan $\frac{1}{31} + \frac{1}{30 \cdot 31}$, secara berturutan, untuk sampai pada penguraian

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{930}.$$

Secara umum, metodenya adalah sebagai berikut. Mulailah dengan pecahan $\frac{m}{n}$, pertama-tama tulislah

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{\text{suman-suman } m-1}$$

Sekarang gunakan identitas pemisah untuk mengganti contoh-contoh $m - 1$ dari pecahan satuan $\frac{1}{n}$ dengan

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)},$$

diperoleh

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{\text{suman-suman } m-2}\right].$$

Lanjutkan dengan cara ini. Pada tahap selanjutnya, identitas pemisah, digunakan pada

$$\frac{1}{n+1} \text{ dan } \frac{1}{n(n+1)},$$

sehingga menghasilkan

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)+1}$$
$$+\frac{1}{n(n+1)[n(n+1)+1]}+\cdots$$

Meskipun banyaknya pecahan satuan (tampak seperti pengulangan) terus bertambah pada tiap tahapan, jumlah tersebut dapat menunjukkan bahwa pada akhirnya proses ini akan hilang.

Metode kedua yang mungkin kita gunakan terkait dengan matematikawan asal Italia pada abad ketiga belas Leonardo dari Pisa, yang lebih dikenal dengan nama patronimiknya, Fibonacci. Pada tahun 1202, Fibonnaci mempublikasikan suatu algoritma untuk mengekspresikan bilangan rasional mana pun antara 0 dan 1 sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan berbeda; hal ini ditemukan kembali dan diteliti secara lebih mendalam oleh J. J. Sylvester pada tahun 1880. Gagasannya seperti yang diuraikan berikut ini. Misalkan pecahan $\frac{a}{b}$ diketahui, di mana $0 < \frac{a}{b} < 1$. Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari bilangan bulat n_1 yang memenuhi

$$\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{n_1 - 1};$$

atau apapun yang menghasilkan jumlah yang sama, tentukanlah n_1 dengan satu cara di mana $n_1 - 1 < \frac{b}{a} \leq n_1$. Ketidaksamaan ini menunjukkan bahwa $n_1a - a < b \leq n_1a$, di mana $n_1a - b < a$. Kurangi $\frac{a}{b}$ oleh $\frac{1}{n_1}$ dan tunjukkan selisihnya sebagai sebuah pecahan, sehingga hasil yang diperoleh adalah $\frac{a_1}{b_1}$:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} = \frac{n_1a - b}{bn_1} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Hasil ini memungkinkan kita untuk menulis $\frac{a}{b}$ sebagai

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Hal yang harus diperhatikan adalah bahwa $a_1 = n_1a - b < a$. Dengan kata-kata lain, pembilang a_1 dari pecahan baru ini lebih kecil daripada pembilang a yang berasal dari pecahan aslinya.

Jika $a_1 = 1$, maka tidak lagi yang perlu dilakukan. Jika tidak, ulangi proses tersebut dengan menggunakan $\frac{a_1}{b_1}$ tetapi sekarang gunakan peranan $\frac{a}{b}$ untuk memperoleh

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{a_2}{b_2}, \qquad \text{di mana } a_2 < a_1.$$

Pada tiap langkah berturutan, penyebut dari pecahan sisanya mengecil. Pada akhirnya kita harus sampai pada pecahan $\frac{a_k}{b_k}$ di mana $a_k = 1$; karena deret yang benar-benar menurun seperti $1 \leq a_k < a_{k-1} < \cdots < a_1 < a$ tidak dapat berlanjut secara terus-menerus. Oleh karena itu, representasi $\frac{a}{b}$ yang diinginkan dapat dicapai, dengan menggunakan

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{b_k},$$

yaitu jumlah dari pecahan-pecahan satuannya.

Mari kita uji beberapa contoh yang mengilustrasikan metode Fibonacci.

Contoh 3.

Misalkan $\frac{a}{b} = \frac{2}{19}$. Untuk mencari n_1, perhatikan bahwa $9 < \frac{19}{2} < 10$, dan juga $\frac{1}{10} < \frac{2}{19} < \frac{1}{9}$; dengan demikian, $n_1 = 10$. Pengurangan yang dilakukan akan menghasilkan

$$\frac{2}{19} - \frac{1}{10} = \frac{20-19}{19 \cdot 10} = \frac{1}{190}.$$

Oleh karena itu, kita dapat menulis $\frac{2}{19}$ sebagai $\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$.

Contoh 4.

Untuk ilustrasi yang lebih meyakinkan, coba kita ubah pecahan $\frac{a}{b} = \frac{9}{13}$ sekali lagi. Membagi 9 menjadi 13, salah satunya akan diperoleh $1 < \frac{13}{9} < 2$, selanjutnya diperoleh $\frac{1}{2} < \frac{9}{13} < 1$; dengan demikian, $n_1 = 2$. Ini berarti bahwa pecahan satuan pertama dalam penguraian $\frac{9}{13}$ adalah $\frac{1}{2}$. Sekarang

$$\frac{9}{13} - \frac{1}{2} = \frac{18-13}{13 \cdot 2} + \frac{5}{26},$$

yang menunjukkan bahwa

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{5}{26}.$$

Seperti yang diharapkan, penyebut pada pecahan sisa lebih kecil dari penyebut pada pecahan awal; yaitu, $5 < 9$. Sekarang ulangi proses tersebut dengan pecahan $\frac{5}{26}$. Karena $5 < \frac{26}{5} < 6$, kita peroleh $\frac{1}{6} < \frac{5}{26} < \frac{1}{5}$ dan $n_2 = 6$. Dengan melakukan perhitungan dihasilkan

$$\frac{5}{26} - \frac{1}{6} = \frac{30-26}{26 \cdot 6} = \frac{4}{156} = \frac{1}{39},$$

sehingga diperoleh

$$\frac{5}{26} = \frac{1}{6} + \frac{1}{39}.$$

Dengan menggabungkannya, kita peroleh perluasan untuk $\frac{9}{13}$:

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Apakah maksud dari bahwa matematika Mesir pada dasarnya ‘bersifat penjumlahan’? Jelaskan secara singkat!
2) Carilah, dengan metode pembagian Mesir, hasilbagi-hasilbagi dari:
   a. 184 : 8.
   b. 19 : 8.
   c. 47 : 9.
   d. 1060 : 12.
   e. 61 : 8.
3) Dengan menggunakan tabel $\frac{2}{n}$, tulislah $\frac{13}{15}$, $\frac{9}{49}$, dan $\frac{19}{35}$ sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan tanpa pengulangan!

4) Tulislah $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{15}$, dan $\frac{7}{29}$ sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan berbeda dengan menggunakan (a) identitas pemisahan dan (b) metode Fibonacci!
5) Sebuah cara untuk menuliskan $\frac{2}{n}$, di mana *n* adalah bilangan ganjil, sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan, ditunjukkan sebagai berikut. Diketahui bilangan bulan *m*, misalkan $\frac{2}{n} = \frac{2m}{nm}$. Jika dari dari pembagi-pembagi *nm* suatu himpunan yang jumlahnya sama dengan 2*m* dapat dipilih, maka gunakan pembagi-pembagi itu sebagai pembilang-pembilang dari pecahan-pecahan yang penyebut-penyebutnya adalah *nm*. Hasilnya adalah suatu uraian pecahan satuan $\frac{2}{n}$. Untuk $\frac{2}{19}$, dapat kita misalkan *m* = 12, sehingga $\frac{2}{19} = \frac{24}{228}$. Dari pembagi-pembagi 1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, … untuk penyebut 228, adalah hal yang mungkin untuk

mencari empat himpunan bilangan bulat yang jumlah-jumlah dari masing-masingnya adalah 24; secara khusus

24 = 1 + 4 + 19 = 2 + 3 + 19
= 2 + 4 + 6 + 12
= 1 + 2 + 3 + 6 + 12.

Dengan menggunakan ini, dapat kita uraikan bahwa

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{228} + \frac{4}{228} + \frac{19}{228} = \frac{1}{228} + \frac{1}{57} + \frac{1}{12};$$
$$\frac{2}{19} = \frac{2}{228} + \frac{3}{228} + \frac{19}{228} = \frac{1}{114} + \frac{1}{76} + \frac{1}{12};$$
$$\frac{2}{19} = \frac{2}{228} + \frac{4}{228} + \frac{6}{228} + \frac{12}{228} = \frac{1}{114} + \frac{1}{57} + \frac{1}{38} + \frac{1}{19};$$
$$\frac{2}{19} = \frac{1}{228} + \frac{2}{228} + \frac{3}{228} + \frac{6}{228} + \frac{12}{228} = \frac{1}{228} + \frac{1}{114} + \frac{1}{76} + \frac{1}{38} + \frac{1}{19}.$$

Dengan menggunakan teknik ini, carilah perluasan-perluasan pecahan satuan dari $\frac{2}{15}$ dan $\frac{2}{43}$! [*Petunjuk*: Gunakan $m = 4$ dan $m = 12$, secara berturutan.]

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Istilah "bersifat penjumlahan," artinya bahwa kecenderungan matematikanya adalah menurunkan perkalian dan pembagian menjadi penjumlahan berulang. Perkalian dari dua bilangan dapat diselesaikan dengan cara menggandakan secara berturutan salah satu dari bilangan tersebut dan kemudian menambahkan pengulangan yang sesuai untuk memperoleh hasilkalinya.
2) a. 23.
   b. $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.
   c. $5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$.
   d. $88 + \frac{1}{3}$
   e. $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
3) $\frac{13}{15} = \frac{1}{15} + 6\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6};$

   $\frac{9}{49} = \frac{1}{49} + 4\left(\frac{2}{49}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{196};$

$$\frac{19}{35} = \frac{1}{35} + 9\left(\frac{2}{35}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{35}.$$

4) a. Jawaban-jawaban yang mungkin adalah: $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$;

$\frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{60}$; $\frac{7}{29} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{145}$.

b. $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$; $\frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{60}$; $\frac{7}{29} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{725}$.

5) Jumlah-jumlah 2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8 menghasilkan $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}$; sedangkan 2 + 4 + 6 + 12 = 24 menghasilkan $\frac{2}{43} = \frac{1}{43} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{258}$.

RANGKUMAN

Matematika Mesir pada dasarnya “bersifat penjumlahan,” artinya bahwa kecenderungan matematikanya adalah menurunkan perkalian dan pembagian menjadi penjumlahan berulang. Perkalian dari dua bilangan dapat diselesaikan dengan cara menggandakan secara berturutan salah satu dari bilangan tersebut dan kemudian menambahkan pengulangan yang sesuai untuk memperoleh hasilkalinya.

Metode pengalian dengan cara menggandakan dan menjumlahkan dapat bekerja baik karena setiap bilangan bulat (positif) dapat ditunjukkan sebagai jumlah pangkat berbeda dari 2; yaitu, seperti jumlah suku-suku dari barisan, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Pembagian yang dilakukan oleh bangsa Mesir dapat dijelaskan sebagai proses perkalian yang dibalikkan—pembaginya digunakan secara berulang untuk memperoleh hasilbaginya.

Saat matematikawan Mesir menghitung dengan pecahan, dia hanya menggunakan apa yang disebut sebagai pecahan-pecahan satuan; yaitu, pecahan-pecahan dengan bentuk $\frac{1}{n}$, di mana n adalah bilangan asli.

Dua cara yang sistematis untuk memperluas sebuah pecahan yang pembilangnya selain 2 sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan adalah metode *splitting* (pemisahan) dan metode Fibonacci.

TES FORMATIF 2

Jawablah soal-soal berikut ini disertai langkah-langkah penyelesaiannya!

Untuk Soal 1-3, gunakan metode perkalian Mesir untuk menghitung hasilkali-hasilkali dari:

1) $(11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8})37$!

2) $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})(9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$!

3) $(2 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$!

4) Diketahui $\frac{2}{n}$ dapat dituliskan sebagai jumlah dari pecahan-pecahan satuan apabila n habis dibagi 5, dengan aturan $\frac{2}{n} = \frac{1}{3}\frac{1}{n} + \frac{5}{3}\frac{1}{n}$. Tanpa melihat tabel dari Papirus Rhind, tentukan uraian pecahan-pecahan satuan dari: (a) $\frac{2}{25}$; dan (b) $\frac{2}{65}$!

5) Tunjukkan $\frac{2}{11}$ dan $\frac{2}{17}$ sebagai jumlah-jumlah dari pecahan-pecahan satuan dengan menggunakan metode Fibonacci!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Empat Permasalahan dalam Papirus Rhind

A. EMPAT PERMASALAHAN DALAM PAPIRUS RHIND

1. Metode Posisi Palsu

Papirus Rhind mengandung beberapa masalah "penyelesaian". Permasalahan ini dimulai dengan jumlah pecahan-pecahan satuan dan selanjutnya mencari pecahan-pecahan satuan untuk ditambahkan, untuk memperoleh nilai 1. Permasalahan 22, misalnya, meminta kita untuk melengkapi $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ sehingga menghasilkan jumlah 1. Dalam notasi modern, penulisnya menunjukkan perhitungan-perhitungan dengan terlebih dahulu memilih bilangan N yang sesuai dan pecahan-pecahan satuan $\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_k}$ untuk memenuhi persamaan

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}\right)N = N.$$

Dari sinilah jumlah yang diperluas itu akan sama dengan 1. Dengan menggunakan 30 untuk mengganti N—bilangan yang sesuai, karena salah satu kelipatannya adalah penyebut-penyebut yang diketahui—penulis itu mengamati bahwa

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right) 30 = 20 + 1 = 21,$$

di mana kurangnya 9 dari nilai 30 yang diinginkan. Tetapi

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right) 30 = 6 + 3 = 9.$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan diperoleh

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)30 = 30$$

sehingga penyelesaian yang diinginkan adalah

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10} = 1.$$

Banyak ruang dalam Papirus Rhind diisi dengan permasalahan-permasalahan praktis berkaitan dengan pembagian roti yang sama kepada sejumlah orang atau menentukan banyaknya butiran gandum yang dibutuhkan untuk membuat bir. Permasalahan-permasalahan ini sederhana dan tidak menggunakan persamaan linear selain di mana hanya satu kuantitas yang tidak diketahui. Permasalahan 24, misalnya, dibaca: "Suatu kuantitas ditambah $\frac{1}{7}$ bagiannya akan menjadi 19. Berapakah kuantitas itu?" Sekarang ini dengan menggunakan simbol aljabar, kita misalkan x sebagai kuantitas yang dicari dan persamaan yang harus diselesaikan adalah

$$x + \frac{x}{7} = 19 \quad \text{atau} \quad \frac{8x}{7} = 19.$$

Ahmes beralasan bahwa karena notasinya tidak menggunakan pecahan $\frac{2}{3}$, maka "Sebanyak 8 harus dikalikan agar menghasilkan 19, sebanyak itu pula 7 harus dikalikan untuk menghasilkan kuantitas yang tepat." Penulis tersebut menggunakan prosedur tertua dan paling umum dalam menangani persamaan-persamaan linear, yaitu metode posisi palsu, atau asumsi palsu. Singkatnya, metode ini digunakan untuk mengasumsikan nilai mana pun yang memudahkan untuk kuantitas yang diinginkan, dan dengan cara melakukan operasi-operasi permasalahan yang sedang dibahas, untuk menghitung suatu bilangan yang selanjutnya dapat diperbandingkan dengan bilangan yang diketahui. Jawaban yang benar memiliki relasi yang sama ke jawaban yang diasumsikan sebagaimana relasi yang dimiliki bilangan yang diketahui ke bilangan yang sedang dihitung itu.

Misalnya, dalam menyelesaikan persamaan $x + \frac{x}{7} = 19$, seseorang mengasumsikan secara salah bahwa $x = 7$ (pemilihan tersebut sesuai karena $\frac{x}{7}$ mudah untuk dihitung). Sisi kiri dari persamaan tersebut akan menjadi $7 + \frac{7}{7} = 8$, bukannya 19 (jawaban yang diinginkan). Karena 8 harus dikalikan dengan $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ agar menghasilkan jawaban 19 yang diinginkan, maka nilai sebenarnya dari x diperoleh dengan cara mengalikan asumsi palsu, misalnya, 7, dengan $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Hasilnya adalah

$$x = (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Sebenarnya, kita dapat menggunakan nilai mana pun yang sesuai untuk kuantitas yang tidak diketahui, katakanlah $x = a$. Jika $a + \frac{a}{7} = b$ dan $bc = 19$, maka $x = ac$ memenuhi persamaan $x + \frac{x}{7} = 19$; karenanya akan terlihat mudah bahwa

$$ac + \frac{1}{7}ac = \left(a + \frac{a}{7}\right)c = bc = 19.$$

Kita telah melihat bahwa orang-orang Mesir telah lebih dulu mengenal, setidaknya dalam bentuk elementernya, sebuah metode favorit pada Zaman Pertengahan, posisi palsu. Sekalinya metode tersebut dipelajari oleh bangsa Arab maka metode tersebut menjadi ciri menyolok dari teks-teks matematika bangsa Eropa mulai dari *Liber Abaci* (1202) karya Fibonacci hingga aritmetika pada abad keenam belas. Ketika simbol aljabar berkembang, aturan tersebut menghilang dari karya-karya matematika yang lebih berkembang. Berikut ini adalah sebuah contoh yang diambil dari *Liber Abaci*. Seorang pria tertentu membeli telur seharga 7 butir per 1 denarius dan menjualnya dengan harga 5 butir per 1 denarius, sehingga mendapatkan keuntungan 19 denarii. Pertanyaannya adalah: berapa banyak uang yang dia investasikan? Secara aljabar, permasalahan ini akan ditunjukkan oleh persamaan

$$\frac{7x}{5} - x = 19.$$

Prosedur posisi palsu yang ada di sini dalam mengasumsikan 5 untuk kuantitas yang tidak diketahui; maka $\frac{7}{5} \cdot 5 - 5 = 2$. Nilai 2 ini, dalam bahasa ekspresif Fibonacci, "akan seperti 19" (2 berhubungan dengan 19 seperti 5 berhubungan dengan bilangan yang dicari). Karena $2\left(\frac{19}{2}\right) = 19$ maka jawaban yang benar adalah

$$x = 5\left(\frac{19}{2}\right) = 47\frac{1}{2}$$

Perhatikan bahwa bilangan yang dimiliki oleh Fibonacci untuk kuantitas yang tidak diketahui tidak dipilih secara sebarang—ketika koefisien dari kuantitas yang tidak diketahui tersebut berupa sebuah pecahan, maka bilangan yang diasumsikan untuk kuantitas yang tidak diketahui tersebut adalah penyebut dari pecahan yang bersangkutan.

Namun demikian, telah kita pertimbangkan pula aturan dari metode posisi palsu di mana dibuat satu tebakan; tetapi terdapat suatu varian yang mengharuskan kita melakukan dua percobaan dan memperhatikan kesalahan yang disebabkan oleh masing-masing percobaan itu. Aturan posisi palsu ganda, demikian kadang-kadang ia disebut, yang merepotkan ini, dapat dijelaskan sebagai berikut. Untuk menyelesaikan persamaan $ax + b = 0$, kita misalkan g_1 dan g_2 sebagai dua tebakan dari nilai x, dan kita misalkan f_1 dan f_2 sebagai kesalahan-kesalahan dari keduanya, yaitu, nilai-nilai $ag_1 + b$ dan $ag_2 + b$, yang akan sama dengan nol jika kedua tebakan tersebut benar. Maka

(1) $ag_1 + b = f_1$ dan (2) $ag_2 + b = f_2$.

Dengan menguranginya, diperoleh

(3) $a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2$.

Dengan mengalikan persamaan (1) dengan g_2 dan persamaan (2) dengan g_1 menghasilkan

$$ag_1\, g_2 + bg_2 = f_1\, g_2 \qquad \text{dan} \qquad ag_2\, g_1 + bg_1 = f_2\, g_1.$$

Jika kedua persamaan terakhir ini saling mengurangi, hasilnya adalah

(4) $b(g_2 - g_1) = f_1\, g_2 - f_2\, g_1$.

Untuk menyelesaikan argumen tersebut, bagilah persamaan (4) oleh persamaan (3) untuk memperoleh

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1 - f_2}.$$

Tetapi karena $x = -\frac{b}{a}$, maka nilai dari x yang diperoleh adalah

$$x = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1 - f_2}.$$

Sebagai kesimpulannya, kita telah tempatkan dua nilai palsu untuk *x* pada lambang *ax* + *b*, dan dari percobaan-percobaan ini kita dapat memperoleh solusi dari persamaan *ax* + *b* = 0.

Untuk menjelaskannya secara lebih detil, mari kita lihat contoh aktual berikut. Misalnya, persamaan $x+\frac{x}{7}=19$, atau ekuivalen dengan $x+\frac{x}{7}-19=0$.

Kita gunakan dua tebakan untuk nilai *x*, misalkan $g_1 = 7$ dan $g_2 = 14$. Maka

$$7 + \frac{7}{7} - 19 = -11 = f_1 \text{ dan} 14 + \frac{14}{7} - 19 = -3 = f_2$$

Dari hasil ini diperoleh nilai yang benar dari *x* adalah

$$x = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1 - f_2} = \frac{(-11)14-(-3)7}{(-11)-(-3)} = \frac{133}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Mungkin tampak agak aneh, tetapi memang ada unsur penyederhanaan tertentu dalam aturan primitif ini, dan jangan merasa aneh karena aturan tersebut masih digunakan hingga akhir 1880-an. Dalam karyanya *Grounde of Artes*, Robert Recorde (1510–1558) melaporkan bahwa dia membuat teman-temannya heran karena dia telah mengajukan soal-soal yang sulit dan kemudian, dengan aturan kepalsuan, menemukan hasil yang benar dari jawaban-jawaban secara kebetulan dari “anak-anak tertentu atau orang-orang idiot yang hadir di tempat itu.”

2. Permasalahan yang Aneh

Kembali ke Papirus Rhind, kita dapat memperhatikan Permasalahan 28 contoh awal dari permasalahan “pemikiran sebuah bilangan”. Mari kita nyatakan pernyataan ini dan solusi Ahmes dalam permasalahan modern, dengan cara menambahkan beberapa detil klarifikasi.

Contoh 5.

Pikirkanlah sebuah bilangan, dan tambahkan $\frac{2}{3}$ dari bilangan ini dengan bilangan yang tadi Anda pikirkan. Dari jumlah tersebut kurangilah $\frac{1}{3}$-nya dan sebutkan jawaban Anda itu. Jika jawabannya adalah 10 maka kurangilah

$\frac{1}{10}$ dari 10 tersebut, sehingga diperoleh 9. Dengan demikian, inilah bilangan inilah yang pertama kali terpikirkan.

Bukti.

Jika bilangan asalnya adalah 9 maka $\frac{2}{3}$ dari bilangan tersebut adalah 6, sehingga jika dijumlahkan akan kita peroleh 15. Maka $\frac{1}{3}$ dari 15 adalah 5, sehingga jika 15 diambil 5 akan menghasilkan 10. Itulah cara perhitungannya.

Di sini penulis naskah tersebut benar-benar mengilustrasikan identitas aljabarnya

$$\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{10}\left[\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)\right]=n$$

dengan menggunakan sebuah contoh sederhana, dalam hal ini dia menggunakan bilangan n = 9. Dengan menyingkap "rahasia penghalang"-nya, sang penulis menambahkan frase kesimpulan tradisional, "Dan itulah cara kamu melakukannya."

Permasalahan 79 benar-benar meringkas dan mengandung sejumlah data aneh—yang tampaknya digunakan untuk menunjukkan suatu pengenalan terhadap jumlah deret geometri:

		Rumah	7
		Kucing	49
1	2801	Tikus	343
2	5602	Ikat	2401
4	11.204	Hekat (ukuran biji gandum)	16.807
Total	19.607	Total	19.607

Katalog beragam benda ini telah memunculkan beberapa gagasan yang fantastis. Beberapa ahli menilai simbol ini sebagai peristilahan simbolis yang diberikan untuk lima pangkat pertama dari 7. Untuk bagian kanan persamaan, kita tulis penjumlahan dari 7, 7^2, 7^3, 7^4, dan 7^5 dengan menggunakan penjumlahan biasa. Pada sisi kiri persamaan, jumlah dari deret yang sama diperoleh dari $7 \cdot 2801$, dengan perkalian yang dilakukan melalui metode pengulangan biasa. Karena $2801 = \left(\dfrac{7^5 - 1}{7 - 1}\right)$, hasilnya

$$7 \cdot 2081 = 7\left(\frac{7^5 - 1}{7 - 1}\right) = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$$

adalah apa yang sebenarnya diperoleh melalui proses substitusi dalam rumus modern untuk jumlah S_n dari suku-suku n dalam deret geometri:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdot\cdot\cdot + ar^{n-1} = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

(Kita catat dalam permasalahan sebelumnya bahwa $a = r = 7$ dan $n = 5$.) Apakah rumus seperti itu, bahkan untuk kasus-kasus yang lebih sederhana, diketahui oleh orang-orang Mesir? Tidak ada bukti yang kuat mengenai hal itu. Interpretasi yang lebih masuk akal dari apa yang dimaksudkan adalah sesuatu seperti: “Dalam masing-masing tujuh rumah terdapat tujuh kucing; tiap kucing membunuh tujuh tikus; tiap tikus memakan tujuh butir gandum; dan tiap butir gandum dapat menghasilkan tujuh hekat butiran gandum. Berapa banyak butiran yang terselamatkan?” Atau seseorang lebih memilih pertanyaan, “Rumah, kucing, tikus, butiran gandum, dan berhekat-hekat gandum—berapa banyak seluruhnya?

Sekitar 3000 tahun setelah zaman Ahmes, Fibonacci memuat dalam karyanya *Liber Abaci* deretan pangkat tujuh yang sama dengan tambahan satu suku:

Tujuh wanita tua berada di jalan menuju ke Roma;
Tiap wanita memiliki tujuh keledai;
Tiap keledai membawa tujuh karung;
Tiap karung berisi tujuh papan roti;
Bersama tiap papan roti terdapat tujuh bilah pisau;
Tiap pisau ada dalam tujuh sarung;
Berapakah totalnya?

Permasalahan di atas, terkait dengan bilangan tujuh, muncul pula dalam sebuah sajak anak-anak bahasa Inggris Lama, yang terjemahan salah satu versinya sebagai berikut:

Ketika aku sedang menuju ke Saint Ives,
Aku bertemu seorang pria dengan tujuh istri.

Tiap istri memiliki tujuh karung;
Tiap karung berisi tujuh kucing;
Tiap kucing memiliki tujuh anak kucing;
Anak-anak kucing, kucing-kucing, karung-karung, dan istri-istri,
Berapa banyak yang sedang menuju Saint Ives?

Di sini juga, diisyaratkan bahwa jumlah total dari suatu deret geometri dihitung, tetapi terdapat unsur kelakar dalam kata-kata pada baris pertama dan terakhir. Meski corak kelakar mengejutkan yang muncul di sini sangat mungkin memang berasal dari bangsa Anglo-Saxon, tetapi kita dapat melihat bagaimana permasalahan yang sama itu tetap lestari dari abad ke abad.

Isi Papirus Rhind diakhiri dengan doa berikut, yang mengungkapkan kekhawatiran pokok masyarakat agrikultur: “Tangkap serangga hama dan tikus-tikus, musnahkan rerumputan berbahaya; berdoa kepada Dewa Ra demi panas, angin dan air yang tinggi.”

3. Matematika Mesir sebagai Aritmetika Terapan

Dengan melihat kepada naskah-naskah matematika bangsa Mesir secara keseluruhan, kita akan temukan bahwa naskah-naskah itu hanyalah kumpulan permasalahan praktis dari persoalan-persoalan yang terkait perdagangan dan transaksi administratif. Pengajaran seni perhitungan muncul sebagai unsur utama dalam permasalahan-permasalahan tersebut. Segala sesuatu dinyatakan dalam istilah-istilah bilangan khusus, dan tidak terdapat jejak dari apa pun yang pantas disebut sebagai teorema atau aturan umum dari suatu prosedur. Jika kriteria untuk matematika keilmuan adalah keberadaan konsep bukti, maka bangsa Mesir kuno membatasi diri mereka pada “aritmetika terapan.” Mungkin penjelasan terbaik mengapa orang-orang Mesir tidak pernah melangkah lebih jauh ke seberang tingkat yang relatif primitif ini adalah karena mereka memiliki gagasan yang alami, tetapi tidak menguntungkan, untuk hanya menggunakan pecahan-pecahan yang berpembilang satu. Oleh karena itu, bahkan perhitungan-perhitungan paling sederhana sekalipun menjadi lamban dan sulit dilakukan. Kita sulit katakan apakah simbolisme mereka yang memang tidak memungkinkan penggunaan pecahan dengan pembilang-pembilang lain ataukah penggunaan eksklusif pembilang-pembilang satuan itu yang telah menjadi alasan untuk simbolisme yang digunakan oleh mereka untuk mengungkapkan pecahan-pecahan. Penanganan pecahan-pecahan selalu menjadi seni istimewa dalam matematika Mesir dan hal itu tampaknya dapat dijelaskan sebagai penghambat bagi prosedur-prosedur numerik.

Seperti halnya dibuktikan oleh Papirus Akhmin (namanya diambil dari nama kota di bagian atas Nil, tempat papirus itu ditemukan), tampak bahwa metode-metode dari penulis Ahmes masih tetap berlaku sampai beberapa abad kemudian. Dokumen ini, ditulis dalam bahasa Yunani sekitar tahun 500 hingga 800 M, hampir mirip dengan Papirus Rhind. Penulisnya, seperti pendahulunya yaitu Ahmes dari zaman kuno, menuliskan tabel-tabel pecahan yang diuraikan ke dalam pecahan-pecahan satuan. Mengapa matematika Mesir masih tetap sedemikian sama selama lebih dari 2000 tahun? Mungkin karena bangsa Mesir memasukkan penemuan-penemuan mereka ke dalam buku-buku suci, sehingga pada masa-masa selanjutnya orang-orang akan dianggap berbuat bid'ah jika mengubah metode atau hasil yang tercantum di sana. Apa pun penjelasannya, pencapaian matematis yang dilakukan Ahmes adalah hasil kerja keras dari para pendahulu dan tentu juga para penerusnya.

Gambar 1.2.
Potongan Papirus Rhind. (Sumber: *Museum Inggris*)

LATIHAN

Jawablah soal berikut ini disertai langkah-langkah penyelesaiannya!

Permasalahan 25, 26, dan 27 dari Papirus Rhind ditampilkan di bawah ini. Pecahkan tiap permasalahan tersebut dengan menggunakan metode posisi palsu, tunjukkan jawaban-jawaban Anda sebagai pecahan-pecahan satuan.

1) *Permasalahan 25*. Sebuah kuantitas dan $\frac{1}{2}$ bagiannya jika dijumlahkan akan menghasilkan 16. Berapakah kuantitas tersebut?
2) *Permasalahan 26*. Sebuah kuantitas ditambah $\frac{1}{4}$-nya menghasilkan 15. Berapakah kuantitas tersebut?
3) *Permasalahan 27*. Sebuah kuantitas ditambah $\frac{1}{5}$-nya menghasilkan 21. Berapakah kuantitas tersebut?
4) Jelaskan sifat-sifat dari naskah-naskah matematika Mesir Kuno pada umumnya!
5) Sebutkan salah satu alasan yang mungkin mengapa aritmetika bangsa Mesir Kuno dapat dipandang telah terbatas pada ‘aritmetika terapan’?
6) Berikan sebuah penjelasan yang mungkin mengapa matematika Mesir Kuno masih juga sedemikian sama setelah lebih dari 2000 tahun (misal, dari masa Papirus Rhind sampai masa Papirus Akhmin)?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $10 + \frac{2}{3} = 10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
2) 12
3) $17 + \frac{1}{2}$
4) Naskah-naskah itu hanya merupakan kumpulan permasalahan praktis dari persoalan-persoalan yang terkait perdagangan dan transaksi administratif. Pengajaran seni perhitungan muncul sebagai unsur utamanya. Segala sesuatu dinyatakan dalam istilah-istilah bilangan khusus, dan tidak terdapat jejak dari apa pun yang pantas disebut sebagai teorema atau aturan umum dari suatu prosedur.

5) Peradaban Mesir Kuno hanya menggunakan pecahan-pecahan yang berpembilang satu, sehingga perhitungan-perhitungan yang paling sederhana sekalipun menjadi lamban dan sulit dilakukan. Ini telah menjadi penghambat bagi prosedur-prosedur numerik.
6) Karena barangkali bangsa Mesir memasukkan temuan-temuan mereka ke dalam buku-buku suci, sehingga pada masa-masa selanjutnya orang-orang akan dianggap berbuat bid'ah jika mengubah metode atau hasil yang tercantum di sana.

RANGKUMAN

Metode posisi palsu, atau asumsi palsu, digunakan untuk mengasumsikan nilai mana pun yang memudahkan untuk kuantitas yang diinginkan, dan dengan cara melakukan operasi-operasi permasalahan yang sedang dibahas, untuk menghitung suatu bilangan yang selanjutnya dapat diperbandingkan dengan bilangan yang diketahui. Jawaban yang benar memiliki relasi yang sama ke jawaban yang diasumsikan sebagaimana relasi yang dimiliki bilangan yang diketahui ke bilangan yang sedang dihitung itu.

Naskah-naskah matematika Mesir Kuno pada umumnya hanyalah kumpulan permasalahan praktis dari persoalan-persoalan yang terkait perdagangan dan transaksi administratif. Pengajaran seni perhitungan muncul sebagai unsur utamanya. Segala sesuatu dinyatakan dalam istilah-istilah bilangan khusus, dan tidak terdapat jejak dari apa pun yang pantas disebut sebagai teorema atau aturan umum dari suatu prosedur.

Peradaban Mesir Kuno hanya menggunakan pecahan-pecahan yang berpembilang satu, sehingga perhitungan-perhitungan yang paling sederhana sekalipun menjadi lamban dan sulit dilakukan. Ini telah menjadi penghambat bagi prosedur-prosedur numerik mereka.

TES FORMATIF 3

Jawablah soal-soal berikut ini disertai langkah-langkah penyelesaiannya.

1) Permasalahan 3 sampai 6 dalam Papirus Rhind menjelaskan empat permasalahan praktis: pembagian 6, 7, 8, dan 9 papan roti secara sama rata kepada 10 orang. Pecahkan tiap permasalahan tersebut dengan

metode posisi palsu, tunjukkan jawaban-jawabannya dalam pecahan-pecahan satuan!

2) Selesaikan Permasalahan 32 dari Papirus Rhind, yang menyatakan bahwa: Sebuah kuantitas, jika $\frac{1}{3}$-nya dan $\frac{1}{4}$-nya ditambahkan, maka menghasilkan 2. Berapakah kuantitas tersebut? Tunjukkan jawabannya dengan menggunakan cara orang Mesir!
3) Dalam permasalahan 70 dari Papirus Rhind, seseorang diminta untuk mencari hasilbagi apabila 100 dibagi oleh $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; selesaikan oleh Anda permasalahan ini! [*Petunjuk*: Pada satu tahap nanti dalam perhitungannya, ambillah $\frac{2}{3}$ dari $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Perhatikan pula bahwa relasi $8(7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 63$ menunjukkan bahwa $\frac{2}{63}(7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$.]
4) Permasalahan 40 dari Papirus Rhind membahas tentang deret aritmetika dari lima buah suku. Pernyataannya: Bagilah 100 papan roti kepada 5 orang sedemikian hingga jumlah dari tiga bagian terbesarnya adalah 7 kali jumlah dua bagian yang terkecil. Selesaikan permasalahan-permasalahan ini dengan menggunakan teknik-teknik modern!
5) Terkait dengan Soal Nomor 4 di atas, dengan menggunakan metode posisi palsu, sang penulis papirus mengasumsikan selisih persekutuan sebesar $5 + \frac{1}{2}$ dan bagian terkecilnya adalah 1 (jadi, kelima bagian tersebut adalah 1, $6 + \frac{1}{2}$, 12, $17 + \frac{1}{2}$, 23). Carilah jawaban yang benar seperti hasil dari Soal Nomor 4 dari asumsi-asumsi tersebut!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Aristoteles berpendapat bahwa sains-sains matematis berasal dari kawasan Mesir, karena di sana kaum yang sekelas pendeta memiliki waktu luang yang cukup. Di sisi lain, terdapat suatu pandangan berbeda bahwa matematika muncul karena adanya kebutuhan-kebutuhan praktis. Peradaban Mesir membutuhkan aritmetika sederhana untuk melakukan transaksi dalam kegiatan berdagang mereka sehari-hari dan pemerintah membutuhkannya untuk menentukan pungutan pajak terhadap para penduduknya, untuk menghitung bunga pinjaman, untuk menghitung besarnya gaji, dan untuk menyusun kalender kerja.
2) Selain bermaksud untuk menaklukkan Mesir agar dapat menguasai jalur darat menuju wilayah taklukan Inggris yang kaya di India, Napoleon juga memperhatikan perkembangan ilmu pengetahuan. Napoleon bersama pasukan ekspedisinya membawa serta satu komisi ilmu pengetahuan dan seni, yang beranggotakan 167 orang ilmuwan terpilih yang bertugas mengumpulkan berbagai informasi dengan meneliti tiap aspek kehidupan bangsa Mesir pada masa-masa kuno dan zaman modern.
3) Karya ini ditulis oleh para ilmuwan terpilih yang ikut serta dalam invasi Napoleon ke Mesir. Ia dituliskan dalam 9 seri teks folio dan 12 seri teks lempengan, yang diterbitkan selama lebih dari 25 tahun. Teks itu sendiri dibagi menjadi empat bagian yang secara berturutan membahas tentang peradaban Mesir, monumen-monumen yang mereka bangun, Mesir modern, dan sejarah alamnya. Tidak pernah ada sebelumnya catatan yang dibuat tentang suatu negara asing dengan sedemikian lengkap, akurat, dan cepat, serta dibuat pada kondisi yang begitu sulit.
4) Nama papirus ini diambil dari nama orang yang terakhir memilikinya, A. Henry Rhind. Papirus ini ditulis dalam naskah hieratik (bentuk kursif hieroglif yang lebih sesuai untuk penggunaan pena dan tinta) sekitar 1650 S.M. oleh seorang penulis bernama Ahmes, yang meyakinkan kita bahwa papirus tersebut merupakan karya awal dari Dinasti Kedua Belas, tahun 1849–1801 S.M. Papirus tersebut bentuk aslinya merupakan gulungan sepanjang 18 kaki dan tinggi 13 inchi, tetapi ia tiba di Museum Inggris dalam dua bagian, sedangkan bagian tengahnya hilang. Bagian

yang hilang itu pernah disimpan oleh Edwin Smith, seorang egiptolog asal Amerika, sampai akhir hayatnya. Papirus Rhind yang lengkap ternyata berisi naskah matematika bangsa Mesir. Papirus Rhind saat ini dipelihara di Museum Inggris.

5) Suatu naskah matematika tiga bahasa yang dituliskan dalam huruf-huruf hieroglif, demotik, dan Yunani. Teks ini kemudian menjadi kunci untuk penguraian sistem tulisan hieroglif, kunci untuk memahami berbagai tulisan peninggalan peradaban Mesir Kuno.

Tes Formatif 2

1) $430 + \frac{1}{8}$
2) $17 + \frac{1}{16}$
3) $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
4) a. $\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$
   b. $\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$
5) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$; $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$

Tes Formatif 3

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.
2) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{76}$.
3) $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$.
4) Selesaikan persamaan-persamaan:
   $x + (x + d) + (x + 2d) + (x + 3d) + (x + 4d) = 100$
   $x + (x + d) = \frac{1}{7}[(x + 2d) + (x + 3d) + (x + 4d)]$
   untuk mendapatkan $x = \frac{10}{6}$, $d = \frac{55}{6}$.
5) Karena $1 + \left(6+\frac{1}{2}\right) + 12\left(17+\frac{1}{2}\right) + 23 = 60$, dan $60\left(1+\frac{2}{3}\right) = 100$ maka kalikan masing-masing dari 1, $6+\frac{1}{2}$, 12, $17+\frac{1}{2}$, dan 23 oleh $1+\frac{2}{3}$ untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Daftar Pustaka

Burton, D. M. (2007). *The History of Mathematics: An Introduction*. New York: McGraw-Hill.

Cumo, S. (2001). *Ancient Mathematics.* New York: Routledge.

Menniger, K. (1992). *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers.* Cambridge, Mass.: M.I.T. Press. (Dover reprint, 1992).

Robins, G., & Shute, C. (1990). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text.* New York: Dover.