MODUL 1

Himpunan dan Fungsi

Dr. Rizky Rosjanuardi

PENDAHULUAN

Pada modul ini dibahas konsep himpunan dan fungsi. Pada Kegiatan Belajar 1 dibahas konsep-konsep dasar dan sifat dari himpunan, sedangkan pada Kegiatan Belajar 2 dibahas konsep dasar dan sifat dari fungsi. Konsep-konsep ini menjadi dasar bagi sistem matematika dan sifat-sifat sistem matematika yang menjadi inti dari buku ini.

Salah satu alat yang paling penting dalam kajian matematika modern adalah teori himpunan. Matematika modern dapat digambarkan sebagai kajian tentang himpunan yang dilengkapi dengan berbagai struktur, yang dikenal dengan istilah sistem matematika. Setiap objek pada matematika modern pada akhirnya selalu kembali kepada kajian tentang himpunan.

Hubungan antara dua atau lebih himpunan dapat digambarkan melalui suatu fungsi. Konsep fungsi memungkinkan kita untuk dapat mengetahui keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya. Lebih dari itu, melalui fungsi tertentu, dalam hal ini fungsi yang mengawetkan struktur matematika (homomorfisma, transformasi linier), dapat dikaji keterkaitan satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan konsep himpunan;
2. menjelaskan pengertian himpunan secara informal dan aljabar himpunan;
3. menjelaskan konsep dan sifat-sifat relasi, fungsi serta aljabar dari fungsi;
4. menyelidiki keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya;
5. menyelidiki keterkaitan antara satu struktur matematika dengan struktur matematika lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan

1. Konsep Himpunan

Pada bagian ini akan dibahas pengertian himpunan secara informal, pengertian himpunan secara aksiomatis tidak akan dibahas. Secara informal, sebuah himpunan adalah sebuah koleksi atau kumpulan dari objek yang dapat diidentifikasi secara jelas. Objek-objek yang menyusun sebuah himpunan disebut unsur atau anggota dari himpunan.

Himpunan secara umum dilambangkan dengan huruf kapital miring dan anggotanya dengan huruf kecil miring. Dalam hal khusus, kita akan menggunakan notasi $\mathbb{Z}$ untuk himpunan bilangan bulat, $\mathbb{N}$ untuk himpunan bilangan asli, $\mathbb{Q}$ untuk himpunan bilangan rasional, $\mathbb{R}$ untuk himpunan bilangan real dan $\mathbb{C}$ untuk himpunan bilangan kompleks.

Jika x adalah unsur dari himpunan A, biasa digunakan notasi $x \in A$. Di luar itu, digunakan notasi $x \notin A$ untuk menyatakan bahwa x bukan anggota dari himpunan A.

Terdapat dua macam cara yang umum digunakan untuk menyatakan himpunan. Cara pertama adalah dengan mendaftarkan semua anggotanya dalam sepasang kurung, seperti $\{-1, 0, 1, 2\}$, atau menuliskan sebagian anggotanya dan menggunakan tiga buah titik yang menandakan bahwa sebagian dari anggotanya tidak dituliskan, seperti pada $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Bila cara mendaftar dirasakan tidak praktis lagi, kita dapat menuliskan sifat dari himpunan yang dimaksud dengan cara tertentu sehingga dapat dengan jelas menentukan sesuatu termasuk anggota himpunan itu atau tidak.

Untuk lebih spesifik, jika $P(x)$ adalah sebuah pernyataan yang bergantung pada variabel x, maka himpunan dari semua x yang membuat pernyataan $P(x)$ benar, dituliskan sebagai $\{x \mid P(x)\}$. Sebagai contoh, $\{x \mid x \text{ adalah bilangan ganjil yang lebih dari } 21\}$. Suatu himpunan tertentu dapat saja dituliskan dengan kedua cara, mendaftarkan anggotanya atau menuliskan sifat anggotanya, seperti pada contoh berikut:

$$\{0,1\}$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dan } -1 < x < 2\}$$

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dan } x^2 = x\right\},$$

semuanya mendefinisikan himpunan yang sama. Pada bahasan selanjutnya kita akan menuliskan $\{\, x \in A \mid P(x) \,\}$ untuk menggantikan $\{\, x \mid x \in A \text{ dan } P(x) \,\}$, sebagai contoh

$$\{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dan } -1 < x < 2 \,\} \text{ ditulis sebagai } \{\, x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 2 \,\},$$

dan

$$\left\{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dan } x^2 = x \,\right\} \text{ ditulis } \left\{\, x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; x^2 = x \,\right\}.$$

2. Aljabar Himpunan

Seperti halnya bilangan real yang dapat dioperasikan dengan bilangan real lainnya, kita akan membahas bagaimana konsep operasi pada himpunan.

Definisi 1.1

Dua buah himpunan A dan B adalah sama, dinotasikan dengan $A = B$, jika setiap unsur dari A adalah unsur dari B dan setiap unsur dari B adalah unsur dari A. Secara singkat, $A = B$ jika kedua himpunan ini dibentuk dari unsur-unsur yang sama.

Definisi di atas mengakibatkan bahwa sebuah himpunan akan terdefinisi secara lengkap bila kita telah mengetahui anggota-anggotanya. Sebagai contoh

$$\{\, 1,2,3 \,\} = \{\, 3,1,2,2 \,\}.$$

Karena setiap himpunan hanya terdiri dari bilangan 1, 2, dan 3. Urutan penulisan dalam mendaftar tidak diperhatikan, dan pengulangan penulisan anggota tidak memberikan informasi tambahan tentang himpunan itu.

Sekarang perhatikan himpunan berikut:

$$\left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0 \,\right\}.$$

Dari sifat bilangan real, kita telah memahami bahwa tidak ada bilangan real x yang kuadratnya negatif. Dengan demikian himpunan di atas tidak memiliki anggota, himpunan seperti ini disebut himpunan kosong atau himpunan hampa. Himpunan kosong dinotasikan dengan $\varnothing$. Jadi $\left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0 \,\right\} = \varnothing$.

Himpunan yang hanya terdiri dari sebuah anggota saja disebut himpunan **singleton.** Sebagai contoh $\{x\}$ adalah sebuah himpunan yang hanya beranggotakan x. Perhatikan bahwa $x \in \{x\}$, dalam hal khusus $\{\varnothing\} \neq \varnothing$, karena $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Relasi dasar dari himpunan adalah himpunan bagian.

Definisi 1.2
Himpunan A disebut himpunan bagian dari (atau termuat di) himpunan B bila setiap unsur dari A adalah juga anggota dari B. Dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Himpunan bagian biasa juga disebut subhimpunan atau subset.

Dari definisi di atas, notasi $A \subseteq B$ dapat dibaca sebagai ”jika $x \in A$ maka $x \in B$”. Definisi di atas tidak mengesampingkan kemungkinan bahwa A dan B bisa saja sama. Jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$, dikatakan bahwa A adalah subset sejati dari B, dan biasa dinotasikan dengan $A \subset B$.

Akan sangat membantu bila kita memandang setiap himpunan yang sedang dibicarakan adalah subset dari sebuah himpunan tertentu, misal S, himpunan ini kita sebut sebagai himpunan semesta. Pemilihan himpunan semesta bergantung kepada konteks yang sedang dibicarakan.

Teorema 1.1
Misalkan A, B, C adalah subset dari semesta S, maka
a) $A \subseteq A,\ \varnothing \subseteq A,\ A \subseteq S$,
b) $A \subseteq \varnothing$ jika dan hanya jika $A = \varnothing$,
c) $\{x\} \subseteq A$ jika dan hanya jika $x \in A$,
d) jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$,
e) $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Perhatikan bahwa $\varnothing \subseteq A$ diperoleh dari konsekuensi logika, bahwa hipotesis yang salah akan selalu memberikan konklusi apapun. Sebagai contoh ” jika $x \in \varnothing$, maka $x \in A$” adalah pernyataan yang benar, karena $x \in \varnothing$ adalah selalu salah.

Sekarang kita akan mendiskusikan bagaimana sebuah himpunan dapat dioperasikan dengan himpunan lainnya. Jika A dan B adalah subset-subset dari himpunan semesta S, operasi gabungan, irisan dan selisih didefinisikan pada definisi berikut.

Definisi 1.3
Gabungan dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}.$$

Irisan dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cap B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}.$$

Selisih dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $A - B$, adalah subset dari semesta S yang didefinisikan sebagai:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ tetapi } x \notin B \}.$$

Pada definisi gabungan, kata ”atau” adalah bermakna ”dan/atau”. Jadi pernyataan "$x \in A$ atau $x \in B$" meliputi pula kasus di mana x terletak pada A dan B. Selisih khusus $S - A$ disebut komplemen dari A dan cukup ditulis $-A$ atau A^C :

$$-A = \{ x \mid x \notin A \} .$$

Penulisan seperti ini sangat memudahkan kita, bila pada bahasan selanjutnya hanya melibatkan semesta yang sama S. Dapat dicatat bahwa dengan memanfaatkan konsep selisih, sebuah himpunan A adalah subset sejati dari himpunan B bila $A \subseteq B$ dan $B - A \neq \emptyset$.

Syarat perlu dan cukup bagi dua buah himpunan A dan B memiliki unsur bersama adalah $A \cap B \neq \emptyset$. Jika terjadi bahwa $A \cap B = \emptyset$, maka dikatakan bahwa kedua himpunan ini saling lepas.

Contoh 1.1
Misalkan $S = \{ 0,1,2,3,4,5,6 \}$ adalah semesta pembicaraan, dan misalkan

$$A = \{ 1,2,4 \}, \ B = \{ 2,3,5 \}.$$

Maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ dan $A \cap B = \{ 2 \}$, sedangkan komplemen relatif adalah

$$A - B = \{1,4\}, \quad B - A = \{ 3,5 \}.$$

Sedangkan

$$-A = \{ 0,3,5,6 \}, \ -B = \{ 0,1,4,6 \}.$$

Perhatikan bahwa $A - B$ dan $B - A$ adalah tidak sama dan saling lepas. Sebagai catatan, $A - B = B - A$ jika dan hanya jika $A = B$.

Jika A, B, C adalah himpunan-himpunan dengan $C \subseteq A$ dan $C \subseteq B$, maka diperoleh $C \subseteq A \cap B$. Dengan demikian diperoleh konsekuensi bahwa $A \cap B$ adalah himpunan terbesar yang merupakan subset dari A dan B. Dengan cara yang serupa, $A \cup B$ dapat diinterpretasikan sebagai himpunan terkecil yang memuat A dan B.

Berikut ini adalah teorema yang merupakan konsekuensi yang terkait dengan konsep gabungan, irisan dan komplemen. Teorema ini dapat dibuktikan dengan mudah.

Teorema 1.2
Jika A, B, C adalah subhimpunan dari sebuah semesta S, maka:
a) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$,
b) $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$,
c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
e) $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$,
f) $A \cup S = S,\ A \cap S = A$.

Satu hal yang harus diperhatikan bahwa pada himpunan tidak berlaku hukum penghapusan seperti pada bilangan real. Kondisi $A \cup B = A \cup C$ atau $A \cap B = A \cap C$ tidak mengakibatkan $B = C$. Sebagai contoh, terapkan kasus $A = S$ pada kesamaan pertama, dan $A = \varnothing$ pada kesamaan kedua.

Berikut ini dibahas beberapa sifat komplemen.

Teorema 1.3
Misalkan A, B adalah subset dari himpunan semesta S. Maka:
a) $-(-A) = A$,
b) $-\varnothing = S,\ -S = \varnothing$,
c) $A \cup (-A) = S,\ A \cap (-A) = \varnothing$,
d) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $-B \subseteq -A$.

Berikut ini adalah beberapa kesamaan yang mengaitkan komplemen dengan irisan dan gabungan. Sifat ini dikenal dengan aturan DeMorgan.

Teorema 1.4
Misalkan A, B subset dari sebuah himpunan semesta S, maka:
a) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$.
b) $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$.

Bukti:
a) Misalkan x adalah sebarang unsur dari $-(A \cup B)$, artinya $x \notin (A \cup B)$. Dengan demikian x tidak di A juga tidak di B. Dengan kata lain $x \in -A$ dan $x \in -B$, akibatnya $x \in (-A) \cap (-B)$.
Jadi $-(A \cup B) \subseteq (-A) \cap (-B)$.
Untuk sebaliknya, jika $x \in (-A) \cap (-B)$, maka x adalah anggota dari $-A$ dan $-B$, dengan kata lain $x \notin A$ dan $x \notin B$.
Dengan demikian $x \notin (A \cup B)$, artinya $x \in -(A \cup B)$.
Akibatnya $(-A) \cap (-B) \subseteq -(A \cup B)$. Jadi $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$.

b) Bagian ini dapat dibuktikan dengan cara serupa, dengan memanfaatkan fakta bahwa
$$-\left[(-A) \cup (-B)\right] = -(-A) \cap -(-B) = A \cap B .$$

Dalam suatu kesempatan, kita akan berurusan dengan himpunan yang anggotanya juga adalah himpunan, dengan kata lain himpunan dari himpunan. Kita akan menggunakan nama **keluarga dari himpunan** atau **famili dari himpunan** bagi himpunan yang seperti ini. Himpunan kuasa dari suatu himpunan adalah salah satu contoh dari keluarga himpunan.

Definisi 1.4
Misalkan A adalah sebuah himpunan sebarang. Himpunan yang anggotanya adalah semua subhimpunan dari A disebut **himpunan kuasa** dari A, dan dinotasikan dengan $P(A)$, yaitu:
$$P(A) := \left\{ B \mid B \subseteq A \right\} .$$

Perhatikan bahwa $\varnothing \subseteq A$, dan $A \subseteq A$ dengan demikian $\left\{ \varnothing, A \right\} \subseteq P(A)$. Jika $A = \varnothing$, tentu saja akan diperoleh bahwa $P(A) = \{\varnothing\}$ (ingat bahwa $\{\varnothing\} \neq \varnothing$). Hal lain yang harus diperhatikan adalah jika $x \in A$

maka $\{x\} \subseteq A$, dengan demikian $\{x\} \in P(A)$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa bila himpunan A memiliki banyak anggota yang berhingga, misalkan n buah, maka $P(A)$ memiliki 2^n buah anggota. Dengan alasan seperti ini, sering kali himpunan kuasa dari A dilambangkan dengan 2^A, tanpa memandang apakah himpunan A berhingga atau tidak.

Contoh 1.2
Misalkan himpunan $A = \{ a, b, c \}$. Himpunan kuasa dari A terdiri dari semua subhimpunan dari $\{ a, b, c \}$, dengan demikian

$$P(A) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \} .$$

Konsep irisan dan gabungan dari himpunan dapat diperluas kepada kasus yang lebih umum, yaitu kepada kasus sebarang berhingga buah himpunan atau sembarang tak hingga buah himpunan. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah subhimpunan-subhimpunan dari himpunan semesta S, kita tulis

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

untuk menyatakan gabungan dari seluruh A_i. Dengan cara serupa irisan dari seluruh A_i dituliskan dengan

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

Cara penulisan lain yang umum digunakan untuk irisan dan gabungan dari keluarga $\mathcal{A}$ adalah sebagai berikut.

$$\cup\mathcal{A} = \{ x \mid x \in A \text{ untuk suatu himpunan } A \in \mathcal{A} \},$$

dan

$$\cap\mathcal{A} = \{ x \mid x \in A \text{ untuk setiap himpunan } A \in \mathcal{A} \}.$$

Bila keluarga $\mathcal{A}$ terdiri dari himpunan A_i dengan i anggota dari himpunan indeks I, atau ditulis $\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \}$, maka gabungan dan irisan dari keluarga $\mathcal{A}$ dituliskan sebagai

$$\cup\{ A_i \mid i \in I \} \text{ dan } \cap\{ A_i \mid i \in I \}.$$

Kadang-kadang, irisan dan gabungan dari keluarga $\mathcal{A}$ dituliskan dengan

$$\cup A_i \text{ dan } \cap A_i$$

bila konteksnya jelas.

Contoh 1.3

Misalkan $A_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1/n \le x \le 1/n \}$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, maka

$$\cup\left\{ A_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \left\{ x \mid x \in A_n \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = A_1,$$

$$\cap\left\{ A_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \left\{ x \mid x \in A_n \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} = \{0\}.$$

Sebuah keluarga himpunan $\mathcal{F}$ yang tak kosong dikatakan membentuk rantai dari himpunan apabila $A, B \in \mathcal{A}$, mengakibatkan berlaku salah satu dari $A \subseteq B$ atau $B \subseteq A$. Sekarang misalkan $\mathcal{A} = \left\{ A_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Perhatikan bahwa keluarga $\mathcal{A}$ merupakan sebuah rantai dari himpunan.

Dari kesamaan dua himpunan, kita peroleh bahwa $\{a,b\} = \{b,a\}$, karena kedua himpunan memiliki anggota yang sama, yaitu a dan b. Ini artinya urutan penulisan adalah tidak berpengaruh sama sekali. Bila kita akan mempertimbangkan urutan penulisan, kita memerlukan konsep pasangan terurut. Pasangan terurut dari a dan b ditulis (a,b) bila komponen pertamanya a dan komponen keduanya b. Dua buah pasangan terurut (a,b) dan (c,d) dikatakan sama jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$.

Konsep lain yang cukup penting dalam teori himpunan adalah produk Cartesius, seperti didefinisikan di bawah ini.

Definisi 1.5

Misalkan A, B adalah himpunan. Produk Cartesius dari A dan B adalah himpunan

$$A \times B := \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Definisi di atas mempunyai implikasi bahwa $A \times B = \varnothing$ jika dan hanya jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$. Perhatikan bahwa bila himpunan A memiliki n buah unsur dan himpunan B memiliki m buah unsur, maka $A \times B$ memiliki mn buah unsur.

Contoh 1.4

Misalkan $A = \{-1, 0, 1\}$ dan $B = \{0, 2\}$. Maka

$$A \times B = \{(-1,0), (-1,2), (0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}.$$

sedangkan

$$B \times A = \{(0,-1), (0,0), (0,1), (2,-1), (2,0), (2,1)\}.$$

Secara umum, pasangan terurut $A \times B$ dan $B \times A$ adalah tidak sama. Dapat dibuktikan bahwa $A \times B = B \times A$ jika dan hanya jika $A = B$, $A = \varnothing$, atau $B = \varnothing$.

Dalam hal umum, misalkan $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah himpunan-himpunan sebarang. Didefinisikan produk Cartesius $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, atau cukup ditulis $\times A_i$ sebagai himpunan dari semua pasangan terurut *n*-tupel $(a_1, a_2, ..., a_n)$ di mana $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan bahwa jika A, B, C adalah subset dari suatu himpunan semesta S, maka berlaku:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2) Misalkan A, B, C adalah himpunan sebarang. Tunjukkan bahwa berlaku:
   a) $A - B \subseteq A$,
   b) $A - B = A \cap (-B)$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Misalkan $x \in A \cup (B \cap C)$. Maka berlaku salah satu $x \in A$ atau $x \in B \cap C$. Sekarang bila $x \in A$, akibatnya tentu saja $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$. Dengan demikian berlaku $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Di lain pihak, jika $x \in B \cap C$, maka $x \in B$ dengan demikian akibatnya

$x \in A \cup B$. Dari $x \in C$, diperoleh $x \in A \cup C$. Dari kedua kondisi ini diperoleh

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Sebaliknya, misalkan $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Akibatnya berlaku kedua hal berikut $x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cup C)$. Perhatikan bahwa kondisi $x \in (A \cup B)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in B$, pada saat yang bersamaan, kondisi $x \in (A \cup C)$ ekuivalen dengan $x \in A$ atau $x \in C$. Kedua kondisi ini mengakibatkan bahwa $x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$, jadi diperoleh bahwa $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dengan demikian diperoleh bahwa

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

2) a. Misalkan $x \in A - B$. Artinya $x \in A$ dan $x \notin B$. Dengan demikian $x \in A$. Jadi $A - B \subseteq A$.

b. Misalkan $x \in A - B$. Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in (-B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (-B). \end{aligned}$$

Jadi $A - B \subseteq A \cap (-B)$ dan $A \cap (-B) \subseteq A - B$.

Dengan demikian terbukti bahwa

$$A - B = A \cap (-B).$$

RANGKUMAN

Kegiatan Belajar 1 membahas konsep himpunan, pengertian himpunan secara informal dan aljabar himpunan. Konsep himpunan beserta sifat-sifatnya menjadi dasar bagi konsep-konsep matematika modern lainnya.

TES FORMATIF 1

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1) Misalkan A, B, C adalah himpunan-himpunan tak kosong. Buktikan bahwa

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) .$$

Skor 100

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Skor Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Fungsi (Pemetaan)

Konsep fungsi atau pemetaan menempati posisi yang sentral pada setiap cabang matematika. Pada cabang matematika yang lebih dekat dengan dunia aplikasi, misalnya Kalkulus, sebutan fungsi lebih populer digunakan dari pada sebutan pemetaan. Pada cabang matematika yang lebih abstrak, misalnya Struktur Aljabar, istilah pemetaan lebih populer digunakan dari pada istilah fungsi. Pada dasarnya sebuah fungsi adalah sebuah relasi atau hubungan yang mempunyai sifat khusus.

1. Relasi

Sebuah relasi pada dasarnya adalah sebuah himpunan dari pasangan terurut.

Definisi 1.6. Relasi
Misalkan *A*, *B* adalah himpunan-himpunan tak kosong. Sebuah relasi dari *A* ke *B* adalah sebuah subhimpunan dari $A \times B$.

Misalkan *R* sebuah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*. Jika $(x, y) \in R$, kita tulis $x \sim_R y$ atau cukup $x \sim y$ saja bila konteksnya jelas, dan dikatakan *x* berelasi dengan *y*. Jika $A = B$, maka relasi *R* adalah relasi biner pada *A*.

Contoh 1.5
Misalkan *A* berisi nama-nama semua propinsi di Indonesia dan $B = \mathbb{Z}$. Terhadap masing-masing propinsi di *A* dipasangkan bilangan bulat *n* yang menyatakan banyaknya penduduk propinsi yang bersangkutan pada tahun 2007. Maka $R = \{(a, n) \mid a \in A$ dan *n* adalah jumlah penduduk propinsi *a* pada tahun 2007} adalah subset dari $A \times \mathbb{Z}$. Dengan demikian *R* menyatakan sebuah relasi dari A ke $\mathbb{Z}$.

Contoh 1.6
Misalkan *R* adalah himpunan dari semua pasangan terurut (m, n) dari bilangan bulat dengan sifat $m < n$, yaitu

$$R = \{\, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n \,\}.$$

Maka R adalah sebuah relasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Misalkan R adalah sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Dengan melihat unsur-unsur dari R, kita dapat menemukan unsur-unsur A yang terkait dengan unsur-unsur dari B. Unsur-unsur dari A yang terkait dengan unsur-unsur di B adalah sebuah subhimpunan dari A, disebut **daerah asal (*domain*)** dari R. Unsur-unsur dari B yang berelasi dengan unsur dari A adalah sebuah subset dari B, disebut **jangkauan (*range*)** atau **bayangan (*image*)** dari R. Secara lebih formal, kita memiliki definisi berikut.

Definisi 1.7

Misalkan R sebuah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Maka **daerah asal** dari R, dinotasikan dengan $D(R)$ didefinisikan sebagai himpunan

$$\{\, x \mid x \in A \text{ dan terdapat } y \in B \text{ sedemikian sehingga } (x,y) \in R \,\}.$$

Jangkauan atau **bayangan** dari R, dinotasikan dengan $I(R)$ didefinisikan sebagai himpunan

$$\{\, y \mid y \in B \text{ dan terdapat } x \in A \text{ sedemikian sehingga } (x,y) \in R \,\}.$$

Contoh 1.7

Misalkan $A = \{\, 4,5,7,8,9 \,\}$ dan $B = \{\, 16,18,20,22 \,\}$. Definisikan $R \subseteq A \times B$ dengan

$$R = \{\, (4,16),\ (4,20),\ (5,20),\ (8,16),\ (9,18) \,\}.$$

Maka R adalah relasi dari A ke B. Perhatikan bahwa $(a,b) \in R$ jika dan hanya jika a membagi b, di mana $a \in A$ dan $b \in B$. Perhatikan bahwa $D(R) = \{\, 4,5,8,9 \,\}$ dan $I(R) = \{\, 16,18,20 \,\}$.

Contoh 1.8

Misalkan $S = \left\{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \ y > 0 \right\}$. Maka S adalah relasi biner pada $\mathbb{R}$. Himpunan S terdiri dari titik-titik pada bidang Euclid yang membentuk setengah lingkaran, terletak di atas sumbu-X dengan pusat di (0,0) dan berjari-jari 1.

Definisi 1.8
Misalkan R sebuah relasi biner pada himpunan A. Himpunan R disebut:

- **refleksif** jika untuk setiap $x \in A$, berlaku $x \sim x$,
- **simetris** jika untuk setiap $x, y \in A$, kondisi $y \sim x$ mengakibatkan $x \sim y$,
- **transitif,** jika untuk setiap $x, y, z \in A$, kondisi $x \sim y$ dan $y \sim z$ mengakibatkan $x \sim z$.

Definisi 1.9
Sebuah relasi biner E pada himpunan A disebut relasi ekuivalen (pada A) bila E memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 1.9
Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan

$$E = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,3), (3,2)\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa E adalah sebuah relasi ekuivalen pada A.

Contoh 1.10
Pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, didefinisikan relasi $\sim$ dengan aturan:

$a \sim b$ menyatakan bahwa $b - a$ habis dibagi 7.

Akan ditunjukkan bahwa $\sim$ adalah relasi ekuivalen.

(i) $a \sim a$ karena 0 habis dibagi 7

(ii) $a \sim b$ artinya $b - a$ habis dibagi 7, misal $b - a = 7m$.
Karena $a - b = -7m = 7(-m)$, artinya $b \sim a$.

(iii) $a \sim b$ artinya $b - a$ habis dibagi 7, memenuhi $b - a = 7k$.
Dan $b \sim c$ artinya $c - b$ habis dibagi 7, memenuhi $c - b = 7m$, sehingga $c - a = c - b + b - a = 7k + 7m = 7(k + m)$. Jadi $c - a$ habis dibagi 7.
Dengan demikian $a \sim c$.

Contoh berikut adalah perumuman dari contoh sebelumnya.

Contoh 1.11
Misalkan n sebuah bilangan bulat positif. Definisikan sebuah relasi $\equiv$ pada $\mathbb{Z}$ sebagai berikut: untuk setiap bilangan bulat x, y,
$x \equiv y$ jika dan hanya jika $n \mid (x - y)$, yaitu $x - y = nk$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Akan diperlihatkan bahwa relasi $\equiv$ adalah sebuah relasi ekuivalen.

i Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0n$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x$. Dengan demikian relasi $\equiv$ adalah refleksif.

ii Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$, dan misalkan pula $x \equiv y$. Akibatnya terdapat $q \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$.
Jadi $(-q)n = y - x$, sehingga $n \mid (y - x)$, artinya $y \equiv x$.
Dengan demikian sifat simetris telah terpenuhi.

iii Misalkan $x, y, z \in \mathbb{Z}$ di mana $x \equiv y$ dan $y \equiv z$. Maka terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$ dan $rn = y - z$.
Dengan demikian diperoleh $(q + r)n = x - z$ dan $q + r \in \mathbb{Z}$.
Akibatnya $x \equiv z$. Dengan demikian $\equiv$ memenuhi sifat transitif.
Jadi relasi $\equiv$ adalah sebuah relasi ekuivalen.

Relasi $\equiv$ pada contoh di atas biasa disebut **kongruensi modulo *n***, notasi lain yang umum digunakan untuk menyatakan $x \equiv y$ adalah $x \equiv y \bmod n$.

Definisi 1.10

Misalkan *E* sebuah relasi ekuivalen pada sebuah himpunan *A*. Untuk setiap $x \in A$, misalkan $[x]$ menyatakan himpunan

$$[x] = \{\, y \in A \mid y \equiv x \,\}.$$

Himpunan $[x]$ disebut kelas ekuivalen (relatif terhadap *E*) dari *x*.

Berikut ini adalah beberapa sifat dasar dari kelas ekuivalen.

Teorema 1.5

Misalkan $\sim$ sebuah relasi ekuivalen pada sebuah himpunan *A*. Maka:

i untuk setiap $x \in A$, $[x] \neq \varnothing$,

ii jika $y \in [x]$, maka $[x] = [y]$, dimana $x, y \in A$,

iii $A = \cup_{x \in A} [x]$, yaitu *A* adalah gabungan dari semua kelas ekuivalen relatif terhadap relasi $\sim$,

iv untuk setiap $x, y \in A$ hanya berlaku salah satu dari hubungan berikut:

$$[x] \cap [y] = \varnothing \text{ atau } [x] = [y].$$

Bukti:

i Misalkan $x \in A$ sebarang. Karena $\sim$ adalah relasi ekuivalen, maka $x \sim x$. Akibatnya $x \in [x]$. Jadi $[x] \neq \emptyset$.

ii Akan ditunjukkan bahwa $[x] \subseteq [y]$ dan $[y] \subseteq [x]$. Misalkan $a \in [x]$. Artinya $a \sim x$. Karena diketahui bahwa $y \in [x]$, maka $y \sim x$. Karena relasi ekuivalen bersifat transitif, maka diperoleh bahwa $a \sim y$. Ini berarti bahwa $a \in [y]$, dengan demikian $[x] \subseteq [y]$. Sekarang misalkan $b \in [y]$, artinya $b \sim y$. Dari hipotesis bahwa $y \in [x]$, diperoleh bahwa $y \sim x$. Dari sifat transitif relasi ekuivalen, diperoleh $b \sim x$. Dengan demikian $b \in [x]$. Jadi $[y] \subseteq [x]$.

iii Akan diperlihatkan bahwa $\cup_{x \in A}[x] \subseteq A$ dan $A \subseteq \cup_{x \in A}[x]$. Misalkan $x \in A$ sebarang. Perhatikan bahwa $[x] = \{a \in A : a \sim x\}$, dengan demikian $[x] \subseteq A, \forall x \in A$. Jadi $\cup_{x \in A}[x] \subseteq A$. Sekarang misalkan $a \in A$ sebarang. Karena $\sim$ adalah relasi ekuivalen, maka $a \sim a$, artinya $a \in [a]$. Karena $[a] \subseteq \cup_{x \in A}[x]$, maka $a \in \cup_{x \in A}[x]$. Dengan demikian $A \subseteq \cup_{x \in A}[x]$.

iv Misalkan $x, y \in a$ sebarang. Kita tinjau kemungkinan hubungan kelas ekuivalen $[x]$ dan $[y]$ adalah $[x] \cap [y] = \emptyset$ atau $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Bila yang terjadi adalah yang pertama, maka bukti selesai. Oleh karena itu kita asumsikan $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Harus ditunjukkan bahwa $[x] = [y]$. Misalkan $a \in [x] \cap [y]$, artinya $a \in [x]$ dan $a \in [y]$. Perhatikan bahwa $a \in [x] \Leftrightarrow a \sim x$, $a \in [y] \Leftrightarrow a \sim y$, akibatnya diperoleh bahwa $y \sim x$. Dengan demikian $y \in [x]$. Akibatnya, dari (ii) diperoleh bahwa $[x] = [y]$.

2. Fungsi

Berikut ini adalah terminologi dan notasi tentang pemetaan.

Definisi 1.11. Pemetaan (Fungsi)

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Sebuah relasi f dari A ke B disebut pemetaan atau fungsi dari A ke B jika:

i. $D(f) = A$, dan

ii. untuk setiap $(x, y), (x', y') \in f$, kondisi $x = x'$ mengakibatkan $y = y'$.

Kita akan gunakan notasi $f: A \to B$ untuk menyatakan sebuah pemetaan dari A ke B. Kita akan tulis $f(a) = b$, atau $f: a \mapsto b$ untuk menyatakan bahwa pemetaan f membawa a ke b. Secara operasional, definisi di atas menyatakan bahwa f adalah sebuah pemetaan dari A ke B bila

$$\text{untuk setiap } a = a' \in A \text{ berlaku } f(a) = f(a'). \qquad (*)$$

Sebuah relasi yang memenuhi kondisi (*) disebut terdefinisi dengan baik, atau bernilai tunggal.

Contoh 1.12

Perhatikan relasi ϕ yang memasangkan setiap unsur $n \in \mathbb{Z}$ dengan $(n, 2n+3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Akan kita tunjukkan bahwa relasi ini adalah sebuah pemetaan. Misalkan $m = n \in \mathbb{Z}$. Maka $2n+3 = 2m+3$, dengan kata lain $\phi(m) = \phi(n)$. Jadi ϕ terdefinisi dengan baik. Dengan demikian ϕ adalah sebuah pemetaan.

Contoh 1.13

Misalkan t adalah sebuah relasi yang memasangkan setiap pasangan terurut di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ dengan aturan $t(x, y) = x + y$. Dapat ditunjukkan bahwa t adalah sebuah pemetaan. Misalkan S adalah sebarang himpunan. Sebuah pemetaan dari $S \times S$ ke S disebut sebuah operasi pada S. Dengan demikian pemetaan t di atas adalah mendefinisikan operasi pada $\mathbb{Z}$.

Perlu ditekankan bahwa komponen utama sebuah fungsi terdiri dari aturan dan domainnya, sebagai contoh $f(x) = x^2 + 1$ belum bisa disebut fungsi tanpa kita menyertakan domainnya. Fungsi $f(x) = x^2 + 1$ $(1 \le x \le 4)$ adalah berbeda dengan $f(x) = x^2 + 1$, $(1 \le x \le 2)$, karena memiliki domain yang berbeda.

Dua buah fungsi f dan g dengan domain X dikatakan sama apabila $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di X. Sekarang misalkan f, g adalah fungsi dengan domain berturut-turut adalah X dan Y. Bila $X \subseteq Y$ dan $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di X, kita sebut fungsi g sebagai **perluasan (*extension*)** dari fungsi f, atau f adalah **pembatasan (*restriction*)** dari fungsi g.

Definisi 1.12
Misalkan A, B dan C adalah himpunan-himpunan tak kosong. Misalkan pula $f : A \to B,$ dan $g : B \to C$ adalah dua buah fungsi. Komposisi dari *f* dan *g* ditulis $f \circ g,$ adalah fungsi dari *A* ke *C* dengan definisi sebagai berikut:
$g \circ f = \{(x, z) : x \in A,\ z \in C$ terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z\}$.

Sekarang misalkan $f : A \to B$, $g : B \to C$ dan $(x, y) \in g \circ f$ yaitu $(g \circ f)(x) = z$. Berdasarkan definisi komposisi fungsi, terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $g(y) = z$. Sekarang $z = g(y) = g(f(x))$. Jadi, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Teorema 1.6
Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ adalah pemetaan-pemetaan. Maka
1. $g \circ f : A \to C$ adalah sebuah pemetaan dari *A* ke *C*.
2. Jika *f* dan *g* adalah satu-satu, maka $g \circ f$ adalah satu-satu.
3. Jika *f* dan *g* adalah pemetaan-pemetaan yang pada, maka $g \circ f$ pemetaan pada.

Bukti:
1. Misalkan $x \in A$. Karena f pemetaan dan $x \in A$, maka terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Sekarang karena *g* pemetaan dan $y \in B$, maka terdapat $z \in C$ sedemikian sehingga $g(y) = z$. Jadi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$ yaitu $(x, z) \in g \circ f$. Jadi $x \in D(g \circ f)$. Hal ini menunjukkan bahwa $A \subseteq D(g \circ f)$. Tetapi $D(g \circ f) \subseteq A$, dengan demikian $D(g \circ f) = A$.
   Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $g \circ f$ terdefinisi dengan baik. Misalkan $(x, z) \in g \circ f, (x_1, z_1) \in g \circ f$ dan $x = x_1,$ dimana $x, x_1 \in A$ dan $z, z_1 \in C.$ Dari definisi komposisi fungsi, maka terdapat $y, y_1 \in B$ sedemikian sehingga $f(x) = y,$ $g(y) = z,$ $f(x_1) = y_1$ dan $g(y_1) = z_1$. Karena *f* adalah pemetaan dan $x = x_1,$ kita peroleh $y = y_1$. Dengan cara yang serupa, karena g adalah pemetaan dan $y = y_1,$ diperoleh $z = z_1$.

Jadi $g \circ f$ terdefinisi dengan baik. Dengan demikian $g \circ f$ sebuah pemetaan dari A ke C.

2. Misalkan $x, x' \in A$ dan $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Maka

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big).$$

Karena g satu-satu, $f(x) = f(x')$. Karena f satu-satu, $x = x'$.
Jadi $g \circ f$ adalah satu-satu.

3. Misalkan $z \in C$. Maka terdapat $y \in B$ sedemikian sehingga $g(y) = z$, karena g adalah pada.
Karena f pada, terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$.
Jadi $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
Dengan demikian $g \circ f$ pada.

Teorema 1.7
Misalkan A himpunan tak kosong dan $f : A \to A$ pemetaan satu-satu. Maka $f^n : A \to A$ yaitu komposisi sebanyak n kali dari f adalah pemetaan satu-satu untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:
Andaikan terdapat bilangan asli n sedemikian sehingga f^n tidak satu-satu. Misalkan m adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga f^m tidak satu-satu. Akibatnya terdapat $x, y \in A$ sedemikian sehingga $x \neq y$ tetapi $f^m(x) = f^m(y)$. Tetapi $f\left(f^{m-1}(x)\right) = f\left(f^{m-1}(y)\right)$, akibatnya $f^{m-1}(x) = f^{m-1}(y)$ karena f satu-satu. Sekarang karena m adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga f^m tidak satu-satu, maka f^{m-1} adalah satu-satu. Akibatnya $x = y$, ini sebuah kontradiksi. Jadi f^n adalah satu-satu untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8
Misalkan A adalah himpunan tak kosong yang berhingga. Jika $f : A \to A$ adalah satu-satu, maka f adalah pada.

Bukti:
Misalkan $y \in A$, akan ditunjukkan bahwa terdapat sebuah unsur y' di A yang merupakan prapeta dari *y*. Sekarang perhatikan bahwa $f^n(y) \in A$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka $\left\{ y,\ f(y),\ f^2(y),\ \ldots \right\} \subseteq A$.

Karena A berhingga, tidak mungkin semua unsur dari himpunan $\left\{ y,\ f(y),\ f^2(y), \ldots \right\}$ adalah berbeda. Akibatnya, terdapat bilangan asli $s, t \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $s > t$ dan $f^s(y) = f^t(y)$. Maka $f^t\left(f^{s-t}(y) \right) = f^t(y)$. Dengan demikian $f^{s-t}(y) = y$, karena f^t satu-satu. Ambil $x = f^{s-t-1}(y) \in A$, maka $f(x) = y$. Jadi *f* pada.

Teorema 1.9
Misalkan $f : A \to B,\ g : B \to C$ dan $h : C \to D$. Maka

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Yaitu komposisi fungsi adalah bersifat asosiatif.

Bukti: Latihan.

Definisi 1.13
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong dan $f : A \to B$ sebuah pemetaan.

1. Pemetaan f disebut invertibel-kiri jika terdapat pemetaan $g : B \to A$ sedemikian sehingga $g \circ f = i_A$, di mana $i_A : A \to A$ adalah pemetaan identitas $i_A(x) = x$ untuk setiap $x \in A$.
2. Pemetaan *f* disebut invertibel-kanan jika terdapat pemetaan $h : B \to A$ sedemikian sehingga $f \circ h = i_B$, di mana $i_B : B \to B$ adalah pemetaan identitas $i_B(x) = x$ untuk setiap $x \in B$.

Sebuah pemetaan $f : A \to B$ disebut invertibel jika *f* sekaligus invertibel-kiri dan invertibel-kanan.

Contoh 1.14
Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(n) = 3n,$$
$$g(n) = \begin{cases} n/3 & \text{jika } n \text{ kelipatan } 3 \\ 0 & \text{jika } n \text{ bukan kelipatan } 3, \end{cases}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Sekarang perhatikan bahwa

$$(f \circ g)(n) = f(g(n))$$
$$= f(n) = 3n,$$
$$g(n) = \begin{cases} n/3 & \text{jika } n \text{ kelipatan } 3 \\ 0 & \text{jika } n \text{ bukan kelipatan } 3, \end{cases}$$

Maka,
$f \circ g \neq i_{\mathbb{Z}}$. Tetapi $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(3n) = n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Jadi, $g \circ f = i_{\mathbb{Z}}$. Dengan demikian g adalah invers-kiri dari f.

Kita mungkin perlu mencari invers-kiri (atau kanan) dari sebuah pemetaan. Tetapi tidak setiap pemetaan memiliki invers-kiri (atau kanan). Jadi, sebelum kita berusaha mencari invers-kiri (atau kanan) dari sebuah pemetaan, ada baiknya untuk mengetahui apakah sebuah pemetaan memiliki invers-kiri (atau kanan) atau tidak. Teorema berikut akan sangat bermanfaat untuk menentukan apakah sebuah pemetaan adalah invertibel-kiri (atau kanan) atau tidak.

Teorema 1.10
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong, dan $f : A \to B$ sebuah pemetaan. Maka berlaku pernyataan berikut:

i. f adalah satu-satu jika dan hanya jika f invertibel-kiri.
ii. f adalah pada jika dan hanya jika f invertibel-kanan.
iii. f adalah satu-satu pada jika dan hanya jika f invertibel.

Bukti:
i. Misalkan f invertibel kiri. Maka terdapat $g : B \to A$ sedemikian sehingga $g \circ f = i_A$.
Misalkan $x, y \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$. Maka
$$g\left(f(x)\right) = g\left(f(y)\right) \text{ atau } \left(g \circ f\right)(x) = \left(g \circ f\right)(y).$$

Jadi $i_A(x) = i_A(y)$, yaitu $x = y$. Dengan demikian f adalah satu-satu.

Sebaliknya misalkan f satu-satu. Maka untuk $y \in B$, berlaku y tidak memiliki prapeta, atau terdapat secara tunggal $x_y \in A$ sedemikian sehingga $f(x_y) = y$. Tetapkan $x \in A$. Definisikan $g : B \to A$ dengan

$$g(y) = \begin{cases} x \text{ jika } y \text{ tak memiliki prapeta di bawah } f \\ x_y \text{ jika } y \text{ memiliki sebuah prapeta di bawah } f \text{ dan } f(x_y) = y \end{cases}$$

untuk semua $y \in B$. Berdasarkan definisi dari g, $D(g) = B$. Untuk memperlihatkan bahwa g terdefinisi dengan baik, misalkan $y, y' \in B$ dan $y = y'$. Maka berlaku salah satu, yaitu y dan y' keduanya tak memiliki prapeta, atau terdapat masing-masing secara tunggal $x_y, x_{y'} \in A$ sedemikian sehingga $f(x_y) = y$ dan $f(x_{y'}) = y'$. Misalkan y dan y' keduanya tak memiliki prapeta. Maka $g(y) = x = g(y')$. Sekarang misalkan terdapat masing-masing secara tunggal $x_y, x_{y'} \in A$ sedemikian sehingga $f(x_y) = y$ dan $f(x_{y'}) = y'$.
Akibatnya $g(y) = x_y$ dan $g(y') = x_{y'}$. Karena $y = y'$, kita peroleh $f(x_y) = f(x_{y'})$. Karena f satu-satu, diperoleh $x_y = x_{y'}$, sehingga $g(y) = g(y')$. Selanjutnya kita harus menunjukkan bahwa g terdefinisi dengan baik, yang mengakibatkan g pemetaan. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $g \circ f = i_A$. Misalkan $u \in A$ dan misalkan pula $f(u) = v$ untuk suatu $v \in B$. Maka berdasarkan definisi dari g, $g(v) = u$. Jadi,

$$(g \circ f)(u) = g\left(f(u)\right) = g(v) = u = i_A(u) .$$

Dengan demikian, $g \circ f = i_A$.

ii. Misalkan f invertibel kanan. Maka terdapat $g : B \to A$ sedemikian sehingga $f \circ g = i_B$. Misalkan $y \in B$, dan misalkan pula $x = g(y) \in A$. Sekarang $y = i_B(y) = (f \circ g)(y) = f\left(g(y)\right) = f(x)$. Jadi f adalah pada.

iii. Terbukti dari (i) dan (ii).

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan L menyatakan himpunan dari semua garis lurus di bidang Euclid, dan E menyatakan relasi pada L yang untuk setiap $l_1, l_2 \in L$ didefinisikan sebagai berikut:

$$(l_1, l_2) \in E \text{ jika dan hanya jika } l_1 \text{ sejajar dengan } l_2 .$$

Buktikan bahwa E adalah sebuah relasi ekuivalen!

2) Misalkan $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat. Untuk $a, b \in \mathbb{Z}$, misalkan $K = \{a + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Buktikan bahwa $K = [a]$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Perhatikan bahwa setiap garis adalah sejajar dengan dirinya sendiri, dengan demikian E bersifat refleksif. Selanjutnya bila l_1 sejajar dengan l_2, maka l_2 akan sejajar dengan l_1, jadi E bersifat simetris. Terakhir, E memenuhi sifat transitif, karena bila l_1 sejajar dengan l_2 dan l_2 sejajar dengan l_3, akan mengakibatkan l_1 sejajar dengan l_3. Dengan demikian relasi E adalah sebuah relasi ekuivalen.

2) Akan ditunjukkan $[a] \subseteq \{ a + 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ dan $\{ a + 2n \mid n \in \mathbb{Z} \} \subseteq [a]$. Ambil $x \in [a]$, artinya $x \sim a$, yaitu $x - a = 2k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $x = a + 2k \in \{ a + 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Jadi $[a] \subseteq \{a + 2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = K$. Selanjutnya ambil $y \in K$, artinya $y = a + 2n$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $y - a = 2n$, artinya $y \sim a$. Hal ini berarti $y \in [a]$. Dengan demikian $K \subseteq [a]$. Jadi $K = [a]$.

RANGKUMAN

Kegiatan Belajar 2 membahas konsep dan sifat-sifat relasi, fungsi serta aljabar dari fungsi. Hubungan antara dua atau lebih himpunan dapat digambarkan melalui suatu fungsi. Konsep fungsi memungkinkan kita untuk dapat mengetahui keterkaitan antara satu himpunan dengan himpunan lainnya.

TES FORMATIF 2

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan tepat!

1) Perhatikan relasi ϕ yang memasangkan setiap bilangan rasional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ dengan $\left(\frac{p}{q}, p\right) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

   Periksa apakah ϕ sebuah pemetaan atau bukan.

   Skor 50

2) Misalkan $\sim$ relasi ekuivalen pada A. Tunjukkan bahwa jika
   a) $a \nsim b$ maka $[a] \neq [b]$
   b) $[a] \neq [b]$ maka $a \nsim b$.

   Skor 50

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Skor Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Dari definisi produk Cartesius, diperoleh

$$\begin{aligned} A\times(B\cap C) &= \{\,(x,y): x\in \ \text{ dan } \ y\in B\cap C\,\} \\ &= \{\,(x,y): x\in A \text{ dan } y\in B \text{ dan } y\in C\,\} \\ &= \{\,(x,y): (x,y)\in A\times B \text{ dan } (x,y)\in A\times C\,\} \\ &= \{\,(x,y): (x,y)\in (A\times B)\cap(A\times C)\,\} \\ &= (A\times B)\cap(A\times C). \end{aligned}$$

Tes Formatif 2

1) Perhatikan bahwa $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, tetapi $\phi\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},2\right)$ dan $\phi\left(\frac{4}{6}\right)=\left(\frac{4}{6},4\right)$.

   Jadi $\phi\left(\frac{2}{3}\right)\neq\phi\left(\frac{4}{6}\right)$, akibatnya relasi ϕ tidak terdefinisi dengan baik. Dengan demikian ϕ bukan sebuah pemetaan.

2) Ambil padanannya: tunjukkan $[a]=[b]$ maka $a\sim b$

   Misal $a,b\in A$ dengan $[a]=[b]$ harus ditunjukkan:

$$[a]=[b]\Rightarrow[a]\subseteq[b]\Rightarrow a\in[b]\Leftrightarrow a\sim b.$$

   Akan ditunjukkan $[a]\subseteq[b]$.

   Ambil $y\in[a]\Leftrightarrow y\sim a\sim b\Rightarrow y\sim b\Rightarrow y\in[b]$.

   Jadi $[a]\subseteq[b]$.

   Diketahui $[a]\subseteq[b]$. Akan ditunjukkan $[b]\subseteq[a]$.

   Ambil $y\in[b]$ akan ditunjukkan $y\in[a]$.

   $y\in[b]\Leftrightarrow y\sim b\sim a\Rightarrow y\sim a\Rightarrow y\in[a]$.

   Jadi $[b]\subseteq[a]$.

Daftar Pustaka

D.S. Malik, J. N. Mordeson, M.K. Sen. (1997). *Fundamentals of Abstract Algebra*. Mc Graw-Hill.

G. Mostow, J. H. Sampson, J. P. Meyer. (1963). *Fundamental Structures of Algebra*. Mc. Graw Hill.

I.M. Isaacs. (1994). *Algebra*. Brooks/Cole Publishing House.

I.N. Herstein. (1975). *Topics in Algebra*. John Wiley & Sons.

J.A. Galian. (1990). *Contemporary Abstract Algebra*, D.C. Heath Company.