Modul 1

Barisan dan Deret

Retno Wikan Tyasning Adnan

PENDAHULUAN

Pokok bahasan dalam modul ini terdiri atas dua kegiatan belajar. Yang pertama tentang barisan, yang kedua tentang deret dan contoh-contoh pemakaian deret. Pembahasan tentang barisan ditekankan pada penyelidikan kekonvergenan, sifat-sifat barisan terutama sifat yang merupakan syarat konvergenan dan juga sifat-sifat yang dimiliki oleh barisan yang konvergen.

Pada pembahasan deret terutama juga menyangkut kekonvergenan deret, sifat-sifat deret konvergen, uji kekonvergenan dan perhitungan jumlah deret.

Penggunaan deret akan Anda jumpai di berbagai bidang, seperti pada Statistika Matematika, Ekonomi, Perhitungan Keuangan dan sebagainya.
Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat memahami dan mengenal barisan dan deret secara baik.

Anda diharapkan mampu: menentukan apakah suatu barisan konvergen atau divergen; menentukan apakah suatu barisan monoton naik/monoton turun, terbatas ke atas atau terbatas ke bawah atau tidak; menentukan limit barisan yang konvergen.

Selain itu Anda mampu pula: menentukan apakah satu deret konvergen atau divergen; menentukan apakah suatu deret konvergen mutlak atau konvergen bersyarat; menentukan jumlah deret yang konvergen; menggunakan deret untuk hitung keuangan.

Kegiatan Belajar 1

Barisan

Pada Matematika 1 Anda telah banyak mempelajari fungsi-fungsi yang didefinisikan dengan domain suatu interval atau gabungan interval-interval. Berikut ini Anda akan mempelajari barisan dan sifat-sifatnya.

Definisi 1.1

Suatu fungsi berharga real yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif disebut suatu barisan. Lazimnya barisan diberi simbol dengan (a_n), (b_n), (c_n) dan sebagainya.

Selanjutnya:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

menyatakan barisan tak hingga atau dengan singkat barisan dan a_1 adalah suku pertama, a_2 adalah suku ke-2 dan a_n adalah suku ke–n dari barisan (a_n).

Contoh 1.1:

1) $a_n = n^2$

   $(a_n): 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

2) $(b_n)\ \dfrac{n-1}{n}$

   $(b_n): 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \ldots$

3) $c_n = \dfrac{1}{n}\log n$

   $\left(\dfrac{1}{n}\log\ n\right): \log\ 1, \dfrac{1}{2}\log\ 2, \dfrac{1}{3}\log\ 3,\ \ldots, \dfrac{1}{n}\log\ n,\ \ldots$

4) $d_n = nl^{\mathrm{n}}$

   $\left(nl^n\right): l^1, 2l^2, 3l^n, \ldots, nl^n, \ldots$

Definisi 1.2

Suatu barisan (a_n) dikatakan:

1) Naik, jika dan hanya jika $a_n < a_{n+1}, \forall n > 0$; ($\forall$ dibaca untuk setiap).
2) Tidak turun, jika dan hanya jika $a_n \leq a_{n+1}, \forall n > 0$.
3) Turun jika dan hanya jika $a_n > a_{n+1}, \forall n > 0$.
4) Tidak naik jika dan hanya jika $a_n \geq a_{n+1}, \forall n > 0$.

Selanjutnya jika salah satu sifat dari keempat sifat di atas berlaku, maka (a_n) dikatakan *monoton*. Barisan (a_n) dikatakan *terbatas ke atas* jika dan hanya jika terdapat bilangan A dengan sifat $a_n \leq A$ untuk semua bilangan bulat positif n. Setiap bilangan yang memiliki sifat seperti bilangan A disebut batas atas dari (a_n). Barisan (a_n) dikatakan *terbatas ke bawah* jika dan hanya jika terdapat bilangan B dengan sifat $a_n \geq B$ untuk semua n bulat positif. Bilangan B disebut *batas bawah* dari (a_n). Barisan (a_n) dikatakan *terbatas* jika dan hanya jika (a_n) terbatas ke atas dan *terbatas ke bawah* kalau dalam modul ini disebut n selalu dimaksudkan n bilangan bulat positif, kecuali bila diberikan keterangan lain.

Contoh 1.2:

1) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+3}.\frac{n+2}{n} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = 1 + \frac{2}{n^2+3n}$$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ untuk setiap n.

Barisan (a_n) naik monoton, terbatas $\dfrac{1}{3} \leq a_n < 1$.

2) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Jadi $\frac{a_2}{a_1}=1$ untuk $n=1$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ untuk $n \geq 2$.

Barisan (a_n) turun monoton, terbatas untuk $n \geq 2$ dan terbatas $0 < a_n \leq 1$.

Jika A adalah nilai minimum dari semua batas atas barisan (a_n) maka A disebut **batas atas terkecil** dari (a_n). Cobalah Anda katakan apa yang disebut **batas bawah terbesar** dari (a_n). Kemudian carilah batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari contoh-contoh barisan yang telah diberikan.

Definisi 1.3

Limit a_n untuk n menuju tak hingga adalah l, ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang ditentukan terdapat suatu bilangan bulat $N > 0$ dengan sifat untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|a_n - l| < \varepsilon$.

Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ jika dan hanya jika a_n dapat dibuat dekat sekehendak kita terhadap l dengan mengambil n yang cukup besar. Selain ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ dapat juga ditulis dengan $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$.

Contoh 1.3:

1) Buktikan $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n} = 3$

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$. Harus ditunjukkan terdapat $N > 0$ dengan sifat $\left|\frac{3n-2}{n} - 3\right| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$.

$$\left|\frac{3n-2}{n} - 3\right| = \left|\frac{3n-2-3n}{n}\right| = \left|-\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon .$$

Akan dipenuhi oleh $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Jadi dapat dipilih bilangan bulat $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

2) Jika $a_n = \overbrace{0,666...6}^{n \text{ angka}}$, buktikan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\overbrace{0,666...6}^{n \text{ angka}} - \frac{2}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{1,\overbrace{99\ldots8}^{n \text{ angka}} - 2}{3}\right| = \left|\frac{-0,000\ldots2}{3}\right|.$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

Pilih N sehingga $\dfrac{1}{10^N} < \varepsilon$ atau N bilangan bulat, $N \geq -\log \varepsilon$.

Definisi 1.4

Barisan (a_n) dikatakan *konvergen ke-a* jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Barisan yang tidak mempunyai limit dikatakan *divergen*.

Perhatikan bahwa limit untuk suatu barisan selalu dimaksudkan sebagai limit untuk n menuju tak hingga. Dikatakan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ atau $a_n \to \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M dapat ditentukan bilangan $N > 0$ sehingga $a_n > M$ untuk setiap $n > N$. Secara sama, $a_n \to -\infty$ jika untuk setiap bilangan positif N terdapat suatu bilangan positif N sehingga $a_n < -M$ untuk setiap $n > N$. Perlu Anda perhatikan bahwa ∞ dan $-\infty$ bukan bilangan dan barisan dengan limit seperti di atas adalah tidak konvergen.

Teorema 1.1

Limit suatu barisan, jika ada, adalah tunggal.

Bukti:

Andaikan $a_n \to l$ dan $a_n \to m$ dengan $l \neq m$. Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}|l-m|$. Jadi terdapat bilangan bulat positif N_1 dengan sifat untuk $n > N_1$ berlaku $|a_n - l| < \frac{1}{2}|l-m|$ dan terdapat bilangan bulat $N_2 > 0$ dengan sifat untuk $n > N_2$ berlaku $|a_n - n| < \frac{1}{2}(l-m)$. Ambil N = bilangan terbesar di antara N_1 dan N_2. Diperoleh

$$|a_n - l| + |a_n - m| < \frac{1}{2}|l-m| + \frac{1}{2}|l-m| = |l-m|$$

$$|l-m| = |l - a_n + a_n - m| \leq |l - a_n| + |a_n - m|.\text{Berarti}\,|l\text{ - }m| < |l-m|$$

$$jadi\, l \neq m \to |l-m| < |l-m|,$$

berarti $l \neq m$ salah (pengandaian salah atau kontradiksi) berarti $l = m$.

Jadi limit suatu barisan, jika ada adalah tunggal.

□

Teorima 1.2

Setiap barisan yang konvergen adalah terbatas.

Bukti:

Misal $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$. Ambil sebarang bilangan positif, misal 1, sebagai ε. Jadi terdapat N dengan sifat $|a_n - l| < 1$ untuk $n \geq N$. Berarti $|a_n| \langle 1 + |l|$ untuk $n \geq N$. Selanjutnya jika M adalah nilai maksimum dari $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |l|$ maka $|a_n| < M$. Jadi (a_n) terbatas.

□

Dari Teorema 1.2 di atas dapat diturunkan bahwa setiap barisan yang tidak terbatas adalah divergen. Anda perlu memperhatikan bahwa sifat terbatas pada suatu barisan tidak mengakibatkan bahwa barisan tersebut konvergen.

Contoh 1.4

$a_n = (-1)^n$.

Barisan ini terbatas, tetapi tidak konvergen.

Teorema 1.3

Jika suatu barisan terbatas dan tidak turun, maka barisan tersebut konvergen ke batas atas terkecil. Jika barisan itu terbatas dan tidak naik maka barisan tersebut konvergen ke batas bawah terbesar.

Bukti:

Andaikan (a_n) terbatas dan tidak turun dan andaikan l adalah batas atas terkecil. Jika $a_n \le l$ untuk semua n. Ambil ε sebarang bilangan positif. Karena l batas atas terkecil maka $l - \varepsilon$ bukan batas atas. Jadi terdapat k sehingga $a_k > l - \varepsilon$. Karena barisan tidak turun, maka $a_k \le a_n$ untuk $n > k$. Jadi $l - \varepsilon < a_n \le l$ untuk $n \ge k$, yang berarti $|a_n - l| < \varepsilon$ untuk semua $n \ge k$. Terbukti $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$. Untuk barisan terbatas dan tidak naik Anda dapat mencoba membuktikan sendiri.

Contoh 1.5

Tunjukkan (a_n) dengan $a_n (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ adalah konvergen.

Jawab:

$2 = (2^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (2.3^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}.3 \le 6$

$2 < a_n \le 6$.   Jadi (a_n) terbatas.

$$\begin{aligned}
\text{Perhatikan}\,(2^n + 3^n)^{\frac{n+1}{n}} &= (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}\,(2^n + 3^n) \\
&= (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}\,2^n + (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}\,3^n \\
&= (2^n)^{\frac{1}{n}}\,2^n + (3^n)^{\frac{1}{n}}\,3^n \\
&= 2^{n+1} + 3^{n+1}
\end{aligned}$$

Jadi $(2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} > (2^{n+1} + 3^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$

$a_n > a_{n+1}$

Karena juga terbatas maka (a_n) konvergen.

Teorema 1.4

Jika c bilangan real, $a_n \to l$ dan $b_n \to m$, maka

(1) $a_n + b_n \to l + m$

(2) $Ca_n \to Cl$

(3) $a_n b_n \to lm$.

Dengan syarat $m \neq 0$ dan b_n tidak pernah 0 untuk semua n .

(4) $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{m}$

(5) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{m}$ untuk $l \neq 0$

$\frac{a_n}{b_n}$ mungkin mempunyai atau tidak mempunyai limit untuk $l = 0$.

(6) $a_n^p \to l^p$

(7) $p^{a_n} \to p^1$

Bukti:

Misal untuk (3).

Pilih ε > 0.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - lm| &= |a_n b_n - a_n m + a_n m - lm| \\ &= |a_n (b_n - m) + m(a_n - l)| \\ &\leq |a_n||b_n - m| + |m||a_n - l| \end{aligned}$$

(a_n) konvergen, jadi terbatas, jadi terdapat $M > 0$ sehingga $|a_n| < M$ untuk semua n .

Karena $b_n \to m$ maka untuk $\frac{\varepsilon}{2M}$ terdapat bilangan bulat N_1 sehingga $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2M}$ untuk $n \geq N_1$.

Karena $a_n \to l$ maka untuk $\dfrac{\varepsilon}{|m|2}$ terdapat bilangan bulat N_2 sehingga $|a_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|m|2}$ untuk $n \geq N_2$.

Jika N adalah bilangan terbesar di antara N_1 dan N_2 maka untuk $n > N$ berlaku $|a_n b_n - lm| \leq |a_n| \dfrac{\varepsilon}{2M} + |m| \dfrac{\varepsilon}{|m|2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Jadi $a_n b_n \to lm$ untuk $n \to \infty$.

Buktikan untuk lainnya dapat Anda kerjakan sendiri.

Teorema 1.5

Andaikan untuk n yang cukup besar berlaku $a_n \leq b_n \leq c_n$, jika $a_n \to l$ dan $c_n \to l$ untuk $n \to \infty$ maka $b_n \to \ell$ untuk $n \to \infty$.
Anda dapat membuktikan sendiri.

Contoh 1.6

$$a_n = \frac{\cos n}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \to 0 \text{ untuk } n \to \infty$$

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ untuk } n \to \infty$$

$$\text{Jadi } \frac{\cos n}{n} \to 0 \text{ untuk } n \to \infty$$

Contoh 1.7

$$a_n = \sqrt{25 + \frac{1}{n^2}}$$

$$5 \le \sqrt{25+\frac{1}{n^2}} \le \sqrt{25+\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}} = 5+\frac{1}{n}$$

$$5+\frac{1}{n} \to 5.$$

Jadi $\sqrt{25+\frac{1}{n^2}} \to 5$.

Teorema 1.6

Jika untuk fungsi $f(x)$ dan barisan (c_n) berlaku:

(i) $c_n \to c$ untuk $n \to \infty$.

(ii) $f(x)$ kontinu di c .

(iii) untuk setiap n, c_n berada di dalam domain f , maka $f(c_n) \to f(c)$ untuk $n \to \infty$.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu di c, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ untuk $|x - c| < \varepsilon$. Karena $c_n \to c$ untuk $n \to \infty$ maka terdapat bilangan positif N sehingga untuk $n \ge N$ berlaku $|c_n - c| < \delta$.

Jadi untuk $n \ge N$ berlaku $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$.

Terbukti $f(c_n) \to f(c)$ untuk $n \to \infty$.

□

Contoh 1.8

(1) $\frac{\pi}{n} \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Jadi $\cos\frac{\pi}{n} \to \cos 0 = 1$ untuk $n \to \infty$.

(2) $\frac{\pi n^2 - \pi^2 n + 16}{4n^2} \to \frac{\pi}{n}$ untuk $n \to \infty$

$f(x) = \tan x$ adalah fungsi yang kontinu pada $x = \frac{\pi}{n}$.

Jadi $\tan \frac{\pi n^2 - \pi^2 n + 16}{4n^2} \to \tan\frac{\pi}{n}$ untuk $n \to \infty = 1$ untuk $n \to \infty$.

Definisi 1.5

Suatu barisan (a_n) disebut **barisan Cauchy** jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif N dengan sifat $|a_m - a_n| < \varepsilon$ untuk setiap $m \geq N$ dan $n \geq N$.

Teorema 1.7

Setiap barisan konvergen adalah barisan dan sebaliknya.

Bukti:

Misal $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$.

Ambil $\varepsilon < 0$.

Terdapat bilangan bulat $N > 0$ dengan sifat $|a_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ untuk $n \geq N$.

Ambil m dan n, $m \geq n$, $n \geq N$.

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - l + l - a_n| \leq |a_m - l| + |l - a_n| \\
&= |a_m - l| + |a_n - l| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi $|a_m - a_n| < \varepsilon$ untuk $m \geq n$, $n \geq N$.

Dapat dibuktikan pula bahwa barisan Cauchy adalah konvergen.

Apabila Anda sekarang telah memahami isi pembicaraan di muka cobalah Anda mengerjakan soal-soal latihan berikut. Setelah selesai bandingkan jawaban Anda dengan jawaban yang ada. Tentu saja mungkin ada perbedaan cara mengerjakan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan sifat terbatas, naik dan turunnya barisan-barisan di bawah ini.

a) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

b) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

c) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

d) $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$

e) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^e}$

2) Tunjukkan barisan $\left(\dfrac{5^n}{n!}\right)$ turun untuk $n \geq 5$.

3) Kalau barisan-barisan di bawah ini konvergen tentukan limitnya.

a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

b) $a_n = \dfrac{4n}{\sqrt{n^2+1}}$

c) $a_n = \log\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$

4) Andaikan (a_n) adalah barisan. Kemudian disusun barisan (l_n) dan (O_n) dengan $l_n = a_{2n}$ dan $O_n = a_{2n-1}$. Tunjukkan bahwa $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$ jika dan hanya jika $l_n \to l$ dan $O_n \to l$ untuk $n \to \infty$.

5) Tunjukkan bahwa $\dfrac{2^n}{n!} \to 0$ untuk $n \to \infty$.

6) Jika konvergen, tentukan limit barisan $\left(\sqrt[5]{\dfrac{n\left(\sqrt{n}+3\right)\left(\sqrt{n}-5\right)}{4n^2+1}}\right)$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) tidak monoton, terbatas ke bawah dan terbatas ke atas, $0 \leq a_n \leq \dfrac{2}{3}$.

b) naik, terbatas ke bawah dan tidak terbatas ke atas, $a_n \geq \dfrac{1}{2}$.

c) turun terbatas ke bawah dan terbatas ke atas $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$

d) tidak monoton, tidak terbatas ke bawah dan tidak terbatas ke atas.

2) $a_n = \frac{5^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}$$

untuk $n \le 3. a_{n+1} > a_n$

$n = 4 \; a_{n+1} = a_n$

$n \ge 4 \; a_{n+1} < a_n$

3) a) divergen

b) konvergen, $a_n \to 4$ untuk $n \to \infty$.

c) konvergen, $a_n \to \log 2$ untuk $n \to \infty$.

4) Andaikan $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$ akan dibuktikan $l_n \to l$, $O_n \to l$ untuk $n \to \infty$.
Ambil $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga untuk semua $n > N$ berlaku $|a_n - l| < \varepsilon$. Perhatikan $l_n = a_{2n}$. Jadi jika dipilih bilangan bulat positif $N_1 > \frac{N}{2}$ maka untuk semua $n > N_1$ berlaku $\left[l_n - l\right] < \varepsilon$. Perhatikan $O_n = a_{2n-1}$. Jadi jika dipilih bilangan bulat positif $N_2 > \frac{N+1}{2}$ maka untuk semua $n > N_2$ berlaku $[O_n - l] < \varepsilon$. Jadi $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$ mengakibatkan $l_n \to l$, $O_n \to l$ untuk $n \to \infty$. Selanjutnya masih harus dibuktikan. Jika $l_n \to l$ dan $O_n \to l$ untuk $n \to \infty$ maka $a_n \to l$ untuk $n \to \infty$. Tentunya tidak sukar untuk Anda membuktikannya.

5) $\dfrac{2^n}{n!} \to 0$ untuk $n \to \infty$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2.2.2\ldots 2}{1.2.3\ldots n} = 2\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0 \text{ untuk } n \to \infty$$

Jadi $\dfrac{2^n}{n!} \to 0$ untuk $n \to \infty$.

6. $$c_n = \frac{n\left(\sqrt{n}+3\right)\left(\sqrt{n}-5\right)}{4n^2+1} = \frac{\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)}{4+\dfrac{1}{n^2}}$$

$c_n \to \dfrac{1}{4}$ untuk $n \to \infty$.

$f(x) = \sqrt[5]{x}$ merupakan fungsi kontinu di $x = \dfrac{1}{4}$.

Jadi $\sqrt[5]{\dfrac{n\left(\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n-5}\right)}{4n^2+1}} \to \sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$ untuk $n \to \infty$.

RANGKUMAN

Barisan (a_n) adalah fungsi berharga real yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif. Barisan (a_n) dikatakan naik jika $a_n < a_{n+1}$, tidak turun jika $a_n \le a_{n+1}$ turun jika $a_n > a_{n+1}$, tidak naik jika $a_n \ge a_{n+1}$. Jika memenuhi salah satu sifat di atas dikatakan monoton. Barisan (a_n) dikatakan terbatas ke atas jika terdapat bilangan A dengan sifat $a_n \le A$ untuk semua n dan dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat bilangan B dengan sifat $a_n \ge A$ untuk semua n .

Barisan yang terbatas adalah barisan yang terbatas ke atas dan ke bawah. Jika barisan terbatas dan tidak turun maka barisan konvergen ke atas terkecil. Jika barisan terbatas dan tidak naik maka barisan konvergen ke batas bawah terbesar. Jika untuk tiga barisan berlaku $a_n \le b_n \le c_n$ untuk n cukup besar dan $a_n \to l, c_n \to l$ untuk $n \to \infty$ maka $b_n \to l$ untuk $n \to \infty$.

Jika $f(x)$ fungsi yang kontinu di c barisan $c_n \to c$ untuk $n \to \infty$ dan c_n berada di domain f, maka $f(c_n) \to f(c)$, $n \to \infty$. Jika Anda telah siap. kerjakan soal-soal pada Test Formatif berikut ini.

TES FORMATIF 1

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 5.

Berilah tanda-tanda sebagai berikut.

A. bila jawaban 1, 2, dan 3 betul;
B. bila jawaban 1 dan 3 betul;
C. bila jawaban 2 dan 4 betul;
D bila jawaban 4 yang betul;
E. bila jawaban semua betul.

1) Barisan $\left(\dfrac{\log(n+5)}{n+5}\right)$ mempunyai sifat ….

   1. turun
   2. terbatas ke atas
   3. terbatas ke bawah
   4. konvergen dengan limit $\dfrac{1}{5}$ log 5

2) Barisan $\left(\dfrac{3^{n+1}}{4^{n+1}}\right)$ ….

   1. turun
   2. tak terbatas ke atas
   3. mempunyai limit
   4. divergen

3) Barisan $\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)$ ....

1. mempunyai batas bawah terbesar = -1
2. mempunyai batas atas terkecil = 1
3. tidak monoton
4. konvergen dengan limit 0

4) Suatu barisan (a_n) didefinisikan dengan:

$a_1 = 1$ dan $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ untuk $n \geq 1$.

Barisan ini ....

1. terbatas ke bawah
2. terbatas ke atas
3. konvergen dengan limit 2
4. monoton

5) Suatu barisan (a_n) didefinisikan dengan

$a_1 = 1$ dan $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$ untuk $n \geq 1$.

Barisan ini ....

1. monoton
2. terbatas ke bawah
3. mempunyai limit 0
4. terbatas ke atas

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10.

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

6) Jika $0 < c < d$ maka $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c^n + d^n\right)^{\frac{1}{n}}$ = ...

A. tidak ada
B. e
C. $\frac{1}{e}$
D. d
E. 0

7) Jika $a_n = \dfrac{n-2}{n}$ dan $a_n \to \ell$ maka nilai terkecil k bulat positif supaya $\left|a_k - \ell\right| < \dfrac{1}{100}$ adalah ....

A. 100
B. 101
C. 199
D. 200
E. 201

8) Jika $a_n = (-1)\dfrac{n-1}{2n^2+2}$ maka barisan (a_n) mempunyai limit ....

A. -1
B. $-\dfrac{1}{2}$
C. 0
D. $\dfrac{1}{2}$
E. 1

9) Jika $a_n = (-1)\sqrt{\dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}}$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ adalah ....

A. $-\infty$
B. -1
C. 0
D. 1
E. tidak ada

10) Jika $a_n = \ell^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ adalah ....

A. 0
B. $\dfrac{1}{\ell}$
C. 1
D. ℓ
E. tidak ada

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\boxed{\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Deret

Berikut ini kita beralih pada pembicaraan topik baru, yaitu deret.

Definisi 1.6

Diberikan barisan $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$

Jumlah tak hingga suku-suku ini, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ disebut **deret tak hingga** atau disingkat **deret**. Dapat dipakai juga simbol $\sum u_n$ yang lebih sederhana. Di sini u_n juga disebut suku ke-*n* dari deret. Jumlah *n* suku terdepan, $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ disebut *jumlah parsial ke-n* dari deret $\sum u_n$.

Definisi 1.7

Deret $\sum u_n$ dikatakan **konvergen** jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = S$, suatu nilai yang berhingga. Selanjutnya *S* disebut jumlah deret. Deret yang tidak konvergen dikatakan **divergen**. Secara lain dapat dikatakan bahwa deret $\sum u_n$ konvergen dengan jumlah *S* jika barisan (S_n) konvergen ke *S*.

Teorema 1.8

Jika deret $\sum u_n$ konvergen dengan jumlah *S*, deret $\sum u_n$ konvergen dengan jumlah *T* dan *k* adalah bilangan konstan, maka:

1) deret $\sum (u_n + v_n)$ konvergen dengan jumlah *S* + *T*.
2) deret $\sum k u_n$ konvergen dengan jumlah *ks*.

Bukti:

1) $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$
$$W_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n)$$
$$= S_n + T_n$$
$\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = S + T$, menurut Teorema 1.4 Kegiatan Belajar 1.

Jadi $\Sigma W_n = \Sigma(u_n + v_n)$ konvergen dengan jumlah $S + T$. Anda dapat membuktikan sendiri bagian (2) dari Teorema di atas. Dapat diturunkan $\sum -(V_n) = \sum (-1) V_n$ adalah deret konvergen dengan jumlah $-T$. Jadi diperoleh $\sum (u_n - v_n)$ konvergen dengan jumlah $S - T$. Dan selanjutnya untuk k dan h konstan deret $\sum (ku_n - hv_n)$ konvergen dengan jumlah $kS - hT$.

Contoh 1.9:

1) $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots = \sum\limits_{n\to 1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Tunjukkan $\sum u_n$ konvergen dan tentukan jumlahnya.

Jawab :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ Jadi $\sum u_n$ konvergen dengan jumlah $S = \frac{1}{2}$.

2) $\sum u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots.$ Tunjukkan $\sum u_n$ konvergen dan tentukan jumlahnya.

Jawab :

$$\begin{array}{l} S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ \hline \frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} \end{array} -$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Jadi deret $\sum \frac{1}{3^n}$ konvergen dengan jumlah $S = \frac{1}{2}$

3) Buktikan deret $\sum (-1)^n$ divergen

Bukti :

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$S_4 = 0$$

$$\vdots$$

$$S_n = \begin{cases} -1, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 0, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Jadi $\sum (-1)^n$ divergen.

Sifat-sifat Deret

1) Jika setiap suku dari suatu deret dikalikan dengan konstanta yang tidak sama dengan 0 maka kekonvergenan (atau kedivergenan) deret tidak berubah.
2) Penghapusan (atau penambahan) sejumlah berhingga suku-suku dari (atau terhadap) suatu deret tidak mengubah kekonvergenan atau kedivergenan deret.

Teorema 1.9

Jika deret $\sum u_n$ konvergen, maka. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Perhatikan bahwa kebalikan teorema di atas tidak berlaku, $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$ tidak selalu berarti $\sum u_n$ konvergen.

Contoh 1.10:

1) **Deret Aritmatika**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{a+(n-1)b\} = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots$$

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+(n-1)b)$$

$$= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} = \frac{n}{2}(u_1 + u_2).$$

Deret ini divergen. Terlihat $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

2) **Deret Geometrik**

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} ar^{n-1} + a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$$

dengan *a* dan *r* konstanta.

$S_n + \dfrac{a(1-r^n)}{1=r}$ (buktikan dengan memperhatikan soal nomor 2 contoh 1.9).

Deret ini konvergen dengan jumlah

$S = \dfrac{a}{1-r}$ jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$.

3) **Deret harmonik**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots, p \quad \text{konstan.}$$

Deret ini konvergen untuk $p > 1$ dan divergen untuk $p \leq 1$.

Jika $p = 1$ deret menjadi $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$

Perhatikan $u_n \to 0$ tetapi deret divergen.

4) **Deret berganti-ganti (tanda)**

Deret $u_n + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ dengan sifat untuk setiap n dua suku berturutan u_n dan u_n + 1 selalu berbeda tanda.

Misalnya :

a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$

(Contoh 1.9 soal nomor 3).

b) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots$

Deret ini konvergen.

Seperti juga pada pembicaraan barisan maka kekonvergenan atau kedivergenan deret merupakan masalah yang utama. Untuk deret yang konvergen jumlah deret juga mendapatkan banyak perhatian. Oleh karena itu sangat diperlukan adanya alat-alat untuk menguji kekonvergenan/ kedivergenan deret.

Uji kekonvergenan/kedivergenan untuk deret dengan suku-suku tak negatif:

1. **Uji perbandingan**
   a) Andaikan $v_n \geq 0$ untuk semua $n > N$ dan andaikan $\sum v_n$ konvergen. Jika $0 \leq u_n \leq v_n$ untuk semua $n > N$ maka $\sum u_n$ juga konvergen.
   b) Andaikan $v_n > 0$ untuk semua $n > N$ dan andaikan $\sum v_n$ divergen. Jika $u_n > v_n$ untuk semua $n > N$, maka $\sum u_n$ juga divergen.
   Seperti juga uji-uji selanjutnya, di dalam pembicaraan ini tidak disertai bukti.

2. **Uji pembagian**
   a) Jika $u_n \geq 0$ dan $v_n \geq 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ atau $\neq \infty$, maka $\sum u_n$ dan $\sum v_n$ kedua-duanya konvergen atau kedua-duanya divergen.
   b) Jika dalam a) di atas $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ dan $\sum v_n$ konvergen, maka $\sum u_n$ konvergen.
   c) Jika dalam a) $A = \infty$ dan v_n divergen, maka $\sum u_n$ divergen.

3) Dari uji pembagian di atas dengan mengambil $v_n = \dfrac{1}{n^p}$ dapat diturunkan uji lain yang sering digunakan sebagai pengganti uji pembagian. Andaikan $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\, u_n = A$, maka
   a) $\sum u_n$ konvergen jika $p > 1$ dan A berhingga
   b) $\sum u_n$ divergen jika $p \leq 1$ dan $A \neq 0$.

4) **Uji integral**
   Jika $f(x)$ adalah positif, kontinu dan monoton turun untuk $x \geq N$ dan $f(n) = u_n$ untuk $n = N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots$ maka $\sum u_n$ konvergen atau

divergen sesuai dengan $\int_N^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_N^M f(x)\,dx$ konvergen atau divergen. Sering kali $N = 1$.

Contoh 1.11:

1) Pada contoh 1.10 nomor 3 diberikan bahwa $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$.

   Kita buktikan:

   Perhatikan $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$. Fungsi ini positif dan monoton turun.

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^p}\,dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right] \text{ untuk } p \neq 1 \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{(1-p)M^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\right],\ p \neq 1 \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} \text{ untuk } p > 1 \\ \infty, \text{untuk } p < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

   Jadi $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$ dan divergen untuk $p < 1$, untuk $p = 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\,dx \\
&= \ln M - \ln 1 = \infty
\end{aligned}
$$

   Jadi $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$, divergen untuk $p \leq 1$.

2) $\sum u_n = \dfrac{1}{2^n+1}$

Dengan uji perbandingan: $\dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$

$\sum \dfrac{1}{2^n}$ konvergen, jadi $\dfrac{1}{2^n+1}$ konvergen.

3) $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$

$\ln n < n$

$\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergen. Jadi $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ divergen

4) $u_n = \dfrac{n}{2n^3-3}$

$\lim_{n\to\infty} n^2 \dfrac{n}{2n^3-3} = \dfrac{1}{2}$

Jadi $\sum \dfrac{n}{2n^3-3}$ konvergen.

5) $u_n = \dfrac{\ln n}{(n+2)^{\frac{1}{2}}}$

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln n}{(n+2)^{1/2}} = \infty$

Jadi $\sum \dfrac{\ln n}{(n+2)^{1/2}}$ divergen

6) $u_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^3 - n}$

Uji pembagian:

Ambil $v_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} n^2 \; \frac{n+\sqrt{n}}{n^3 - n} = 1$$

$$\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergen}$$

$$\text{Jadi} \sum \frac{n+\sqrt{n}}{n^3 - n} \text{konvergen}$$

Uji untuk Deret Berganti-ganti

Suatu deret berganti-ganti konvergen jika dipenuhi:

a) $|u_{n+1}| \le |u_n| \, \text{untuk} \, n \ge 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \left(\text{atau} \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0\right).$

Contoh 1.12:

1) $u_n = \dfrac{(-1)}{\sqrt{n}} \, deret : -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dots$

Tampak di sini

a) $|u_{n+1}| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ Jadi $|u_{n+1}| \le |u_n|$ untuk $n \ge 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Jadi deret konvergen.

Definisi 1.8

Deret $\sum u_n$ dikatakan **konvergen mutlak** jika $\sum |u_n|$ adalah konvergen.

Jika $\sum |u_n|$ divergen, tetapi $\sum u_n$ konvergen maka $\sum u_n$ dikatakan **konvergen bersyarat**.

Teorema 1.10

Jika $\sum u_n$ konvergen mutlak maka $\sum u_n$ konvergen.

Contoh 1.13:

1) Deret $\sum u_n = \dfrac{\sin A}{1^2} + \dfrac{\sin 2A}{2^2} + \dfrac{\sin 3A}{3^2} + ... + \dfrac{\sin nA}{n^2} + ...$

   Perhatikan deret

   $$\sum u_n + \frac{|\sin A|}{1^2} + \frac{|\sin 2A|}{2^2} + \frac{|\sin 3A|}{3^2} + \ldots + \frac{|\sin nA|}{n^2} + \ldots$$

   $$u_n \le \frac{1}{n^2}$$

   Sudah kita kenal $\sum \dfrac{1}{n^2}$ deret konvergen.

   Jadi $\sum |u_n|$ konvergen.

   Deret $\sum u_n$ konvergen mutlak, berarti juga konvergen.

2) Deret $\sum u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ adalah konvergen. Tetapi deret $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ adalah divergen.

   Jadi $\sum u_n$ konvergen bersyarat.

Berikut ini Anda akan mempelajari uji kekonvergenan mutlak.

1. **Uji Rasio**

Andaikan $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$

maka jika:

(a) $L < 1$, deret $\sum u_n$ konvergen mutlak

(b) $L > 1$, deret $\sum u_n$ divergen

(c) $L = 1$, uji gagal (tidak menghasilkan keputusan).

2. **Uji akar *n***

Andaikan $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = L$

maka jika:

a) $L < 1$, deret $\sum u_n$ konvergen mutlak

b) $L > 1$, deret $\sum u_n$ divergen

c) $L = 1$, uji gagal

Dapat Anda perhatikan bahwa kedua uji di atas dapat digunakan untuk deret dengan suku-suku tak negatif dengan tidak memerlukan tanda nilai mutlak lagi.

Contoh 1.14:

1) Deret $\sum u_n = \sum \dfrac{2^n}{1.3.5\ldots(2n+1)}$

Uji rasio:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^n} = \frac{2}{2n+3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$. Jadi deret konvergen.

2) $\sum u_n = \sum \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Jadi deret konvergen.

3) $\sum u_n = \sum\left(\frac{n}{2+3n^2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2+3n^2} = 0 < 1$$

Jadi deret konvergen.

4) $\sum u_n = \sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}n(n+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+2)} = 1$$

Uji rasio ternyata gagal.

Kita coba dengan cara lain.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\ .$$

Deret menjadi:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Jadi $\sum u_n$ konvergen.

Sampai pelajaran ini Anda telah mengenal beberapa uji kekonvergenan. Jika suatu uji yang Anda pilih gagal menentukan kekonvergenan atau kedivergenan suatu deret, maka Anda dapat mencoba uji yang lain.

Deret aritmatika dan deret geometrik ternyata dapat diterapkan untuk perhitungan-perhitungan dalam Hitung Keuangan. Ternyata di sini jumlah parsial ke-n, S_n, banyak dimanfaatkan.

Selanjutnya, akan Anda pelajari contoh-contoh penggunaan deret dalam hitung keuangan terutama yang berhubungan dengan suku bunga kredit, investasi dan annuitas yang timbul sebagai masalah sehari-hari.

Suku bunga sederhana (tunggal)

Bunga adalah uang yang dibayarkan oleh pihak ke-2 kepada pihak pertama atas penggunaan sejumlah uang pihak pertama (yang disebut **uang pokok**).

Tingkat suku bunga adalah perbandingan yang dinyatakan dalam % antara bunga yang dikenakan dalam satu kurun waktu tertentu terhadap uang pokok. Biasanya untuk kurun waktu tertentu ini diambil 1 tahun. (Jika tidak diterangkan berarti kurun waktu 1 tahun). Jika besarnya bunga (I) untuk waktu t tahun atas uang pokok P dengan tingkat suku bunga r adalah

$$l = P\,r\,t$$

maka bunga yang diberlakukan di sini disebut ***bunga sederhana*** atau ***bunga tunggal***.

Dengan demikian Jumlah uang (A) menjadi

$$A = P + Prt = P(1 + rt)$$

Suku bunga majemuk

Kalau pada setiap akhir kurun waktu bunga ditambahkan pada uang pokok, sehingga setiap awal kurun waktu uang pokok menjadi (1 + r) kali uang pokok awal kurun waktu sebelumnya, maka dikatakan bunga adalah ***bunga majemuk***.

Jika r adalah suku bunga per tahun sedang perhitungan bunga dilakukan tiap $\frac{1}{k}$ tahun maka pada akhir tahun ke t berlaku.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{tk}$$

Di sini $\frac{1}{k}$ tahun disebut periode konversi. Jika $i = \frac{r}{k}, n = tk$ maka diperoleh $A = P(1+i)^n$.

Jika diinginkan sejumlah uang A pada akhir n periode konversi dengan suku bunga per periode konversi adalah i maka *nilai sekarang P* dari jumlah A tersebut adalah

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

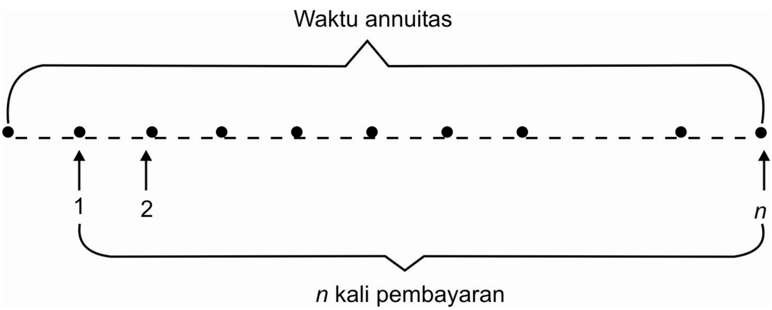
Annuitas

Banyak transaksi perdagangan yang dilakukan dengan pembayaran yang sama pada setiap akhir selang waktu tertentu. Selang waktu tersebut dinamakan *periode pembayaran*. Suatu deretan pembayaran ini disebut **annuitas**. Jangka waktu yang dihitung dari permulaan periode pembayaran pertama sampai dengan akhir periode pembayaran terakhir disebut ***waktu annuitas***.

Jumlah dari suatu annuitas adalah jumlah total yang dihitung akumulatif pada akhir waktu annuitas bila setiap pembayaran diinvestasikan dengan bunga majemuk dengan waktu konversi sama dengan periode pembayaran. Jika pembayaran annuitas agar periode waktu adalah 1 rupiah dengan bunga per periode waktu pembayaran i maka jumlah annuitas dengan n pembayaran adalah.

$$s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Jika pembayaran adalah R rupiah jumlah annuitas menjadi $s_{\overline{n|}\,i} = R\, s_{\overline{n|}\,i}$.



Dengan pembayaran 1 rupiah diperoleh

$$\begin{aligned} s_{\overline{n|}i} &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1 \\ &= 1 + (1+i) + \ldots (1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

Ini merupakan jumlah n suku pertama deret geometrik dengan $a = 1$ dan $r = 1 + i$. Jadi

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sebaliknya, nilai sekarang dari annuitas dengan pembayaran 1 rupiah seperti di atas adalah

$$\begin{aligned} a_{\overline{n|}i} &= \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} \\ &= \frac{1}{(1+i)^n}\left\{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right\} \\ &= \frac{1}{(1+i)^n} S_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ a_{\overline{n|}i} &= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

Jika pembayaran 2 rupiah, nilai sekarang annuitas $A_{\overline{n|}i} = R\, a_{\overline{n|}i}$

Pembayaran dengan cara annuitas ini dilakukan seperti pada pembayaran premi asuransi, pembelian dengan cara angsuran dan sebagainya. Walaupun namanya annuitas tetapi periode pembayaran tidak selalu tahunan, dapat bulanan, triwulanan dan sebagainya. Mari kita lihat beberapa contoh hitung keuangan berikut.

Contoh 1.15:

Dana sebesar 400 juta rupiah di investasikan dengan suku bunga 8%, dimajemukkan tiap tengah tahunan selama 5 tahun. Berapa besar jumlah uang pada akhir tahun ke-5 tersebut?

Jawab:

$$A = 8\%,\ i = \frac{80\%}{2} = 4\%,\ n = 2 \times 5 = 10$$

Jumlah uang pada akhir tahun ke-5 = 400 $(1,04)^{10}$ = 592.0977 juta rupiah.

Contoh 1.16:

Pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 harus dikembalikan setiap akhir bulan sebesar Rp100.000,00 dari sisa pinjaman saat itu ditambah bunga untuk pinjaman tersebut. Jika suku bunga 12%, berapakah total pengembalian uang seluruhnya?

Jawab:

Besar bunga yang harus dibayar pada:

Pengembalian ke-1 = 1% × Rp1.000.000,00 = Rp10.000,00
Pengembalian ke-2 = 1% × Rp900.000,00 = Rp9.000,00
Pengembalian ke-3 = 1% × Rp800.000,00 = Rp8.000,00
$\vdots$
Pengembalian ke-10 = 1% × Rp100.000,00 = Rp1.000,00

Total bunga $\frac{10}{2}$ = (Rp10.000 + Rp1.000) = Rp55.000,00

Total pengembalian = Rp1.000.000 + Rp55.000,00= Rp1.055.000,00

Contoh 1.17:

Suatu annuitas dibayar Rp100.000,00 tiap 3 bulan dalam waktu 5 tahun dengan suku bunga 12% per tahun. Tentukan jumlah annuitas dan nilai sekarang annuitas tersebut.

Jawab:

$i = \frac{12\%}{4} = 3\%$, $n = 4 \times 5 = 20$.

$$\text{Jumlah annuitas} = R.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$= 100.000\frac{(1.03)^{20} - 1}{0.03}$$

$$= \text{Rp}2.687.040,00.$$

$$\text{Nilai sekarang} = R.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$= 100.000\frac{1-(1.03)^{-20}}{0.03} \quad .$$

$$= \text{ Rp}1.487.750{,}00.$$

Jika Anda telah memahami uraian di atas, cobalah kerjakan soal-soal latihan berikut.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Selidikilah kekonvergenan atau kedivergenan dari deret-deret berikut.

1) $\sum u_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \ldots$

2) $\sum u_n = \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.4} + \frac{4}{3.5} + \ldots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \ldots$

3) $\sum u_n = \sin\frac{1}{1} + \sin\frac{1}{2} + \ldots + \sin\frac{1}{n} + \ldots$

4) $\sum u_n = \sum \frac{3n^2 + u - 3}{n^4 - n}$.

5) Selidikilah apakah deret berikut konvergen mutlak/konvergen atau divergen.

$$\sum u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \ldots .$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Konvergen

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergen} \longrightarrow \sum u_n \text{ konvergen}$$

2) Divergen

$$u_n = \frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+2}$$

$$\sum \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \text{divergen}$$

3) Divergen

Perhatikan $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$, deret divergen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

4) Konvergen

$$u_n = \frac{3n^2 + n - 3}{n^4 - n}, \sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}, \text{ deret konvergen}$$

5) Konvergen, konvergen bersyarat, $\sum u_n$ merupakan deret berganti-ganti

$$|u_{n-1}| < |u_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \text{Jadi} \sum u_n \text{ konvergen}$$

$$\sum |u_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) \text{divergen.}$$

Jadi konvergen tetapi tidak mutlak.

RANGKUMAN

Diberikan barisan $u_n, u_2, u_3, \ldots, u_n \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

disebut *deret tak hingga* atau *deret dengan simbol* $\sum u_n$.

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ disebut *jumlah parsial ke n dari deret* $\sum u_n$.

Deret $\sum u_n$ dikatakan *konvergen* ke *S* bila $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

S disebut *jumlah deret*.

Deret yang tidak konvergen dikatakan *divergen*. Jika $\sum |u_n|$ konvergen maka $\sum u_n$ dikatakan *konvergen mutlak*.

Dikenal beberapa cara uji kekonvergenan/kedivergenan.

1. Uji perbandingan

   Jika $0 \le u_n \le v_n$ untuk semua $n > N$ dan $\sum v_n$ konvergen, maka $\sum u_n$ juga konvergen.

   Jika $0 \le u_n \le v_n$ untuk $n > N$ dan $\sum v_n$ divergen, maka $\sum u_n$ juga divergen.

2. Uji pembagian

   Jika $u_n \le 0,\ v_n \le 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$ yang tidak sama dengan nol dan tidak ∞, maka $\sum u_n$ dan $\sum v_n$ kedua-duanya konvergen atau kedua-duanya divergen.

   Jika *A* = 0 dan $\sum v_n$ konvergen, maka $\sum u_n$ juga konvergen.

   Jika *A* = ∞ dan $\sum v_n$ divergen, maka $\sum u_n$ divergen.

   Untuk uji ini secara khusus dapat diambil $v_n = \dfrac{1}{n^p}$.

3. Uji integral

   Jika *f*(*x*) adalah positif, kontinu dan monoton turun untuk $x \ge N$ dan *f*(*n*) = u_n untuk *n* = *N*, *N* + 1, *N* + 2, ..., maka $\sum u_n$ konvergen atau divergen sesuai dengan

$$\int_{N}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

Konvergen atau divergen.

4. Jika $\sum u_n$ merupakan deret berganti-ganti dengan $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ untuk $n \geq 1$ dan $u_n = 0$ maka $\sum u_n$ konvergen.
5. Jika $\sum |u_n|$ konvergen maka $\sum u_n$ juga konvergen.
6. Uji rasio

   Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = L$, maka $\sum u_n$ konvergen mutlak bila $L < 1$ dan divergen jika $L > 1$.

7. Uji akar ke-n

   Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, maka $\sum u_n$ konvergen mutlak bila $L < 1$ dan $\sum u_n$ divergen bila $L > 1$.

TES FORMATIF 2

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 5.

Jawablah:

A. Apabila 1, 2, 3 benar

B. Apabila 1 dan 3 benar

C. Apabila 2 dan 4 benar

D. Apabila 4 saja benar

E. Apabila semua benar

1) Jika $\sum u_n = \sum \dfrac{\cos n}{n^3}$ *dan* $\sum v_n = \sum \dfrac{n+3}{n^2+1}$, maka ….

   1. $\sum v_n$ konvergen bersyarat
   2. $\sum v_n$ konvergen mutlak
   3. $\sum u_n$ konvergen bersyarat
   4. $\sum u_n$ konvergen mutlak

2) Jika $\sum u_n = \sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ dan $\sum v_n = \sum \dfrac{n^2+1}{3n^4+2}$, maka ….
   1. $\sum u_n$ divergen
   2. $\sum u_n$ konvergen
   3. $\sum v_n$ divergen
   4. $\sum v_n$ konvergen

3) Jika $\sum u_n = \sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$ *dan* $\sum v_n = \sin\dfrac{1}{1^2} + \sin\dfrac{1}{2^2} + \sin\dfrac{1}{3^2} + \ldots$ maka ….
   1. $\sum u_n$ konvergen
   2. $\sum u_n$ divergen
   3. $\sum v_n$ konvergen
   4. $\sum v_n$ divergen

4) Jika $\sum u_n = \sum ne^{-n^2}$ dan $\sum v_n = \sum \dfrac{\ln n}{(n+1)^{1/3}}$, maka ….
   1. $\sum u_n$ konvergen
   2. $\sum u_n$ divergen
   3. $\sum v_n$ divergen
   4. $\sum v_n$ konvergen

5) Jika $\sum u_n = \sum \dfrac{2^n}{n!}$ dan $\sum v_n = \sum \dfrac{n^n}{n!}$, maka ….
   1. $\sum v_n$ konvergen
   2. $\sum u_n$ konvergen
   3. $\sum (u_n + v_n)$ konvergen
   4. $\sum u_n$ divergen

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10. Pilihlah jawaban yang paling sesuai.

6) Deret $\sum \log \frac{n}{n+1}$ adalah ….

A. konvergen ke e
B. konvergen ke e^{-1}
C. konvergen ke 1
D. konvergen ke 0
E. divergen

7) Deret $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ adalah ….

A. konvergen ke $\frac{4}{3}$
B. konvergen ke $\frac{2}{3}$
C. konvergen ke $\frac{1}{3}$
D. konvergen ke 0
E. divergen

8) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}$, maka jumlah parsial ke-n, S_n = ….

A. $\frac{n+1}{n+2}+1$
B. $\frac{n+1}{n+2}+\frac{1}{2}$
C. $\frac{n+1}{n+2}-\frac{1}{2}$
D. $\frac{n+1}{n+2}-1$
E. $\frac{n+1}{n+2}$

9) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{2^{n+1}}$ maka jumlah parsial ke-*n*, S_n = ….

A. $\frac{n+1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}$

B. $\frac{n+1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2}$

C. $\frac{n+1}{2^{n+2}} - 1$

D. $\frac{n+1}{2^{n}} + \frac{1}{2}$

E. $\frac{n}{2^{n}} - \frac{1}{2}$

10) Seorang penabung tiap akhir bulan memasukkan sisa gajinya sebesar Rp100.000 dalam tabungannya. Jika suku bunga adalah 12% per tahun maka akhir tahun ke-2 besar tabungannya adalah ….

A. 2.697.346
B. 2.602.756
C. 2.592.828
D. 2.590.770
E. 2.560.508

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A.
2) B.
3) C.
4) E.
5) E.
6) D.
7) E.
8) C.
9) E.
10) C.

Tes Formatif 2

1) D.
2) C. $\sum u_n$ deret berganti, $|u_{n+1}|<|u_n|, \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$.
3) B. $\sum u_n$ deret berganti-ganti.

   Gunakan uji pembagian terhadap $\sum u_n$ dengan deret $\sum \frac{1}{n^2}$.
4) B. Pakailah uji integral untuk $\sum u_n$ dan uji pembagian dengan $\sum \frac{1}{n^{1/3}}$.
5) C. Ujilah kedua deret dengan uji rasio.
6) E. $S_n = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \ldots + \log\frac{n}{n+1} = \log\frac{1}{n+1}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$.
7) B. $$\sum\frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\ldots$$
   $$= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$
8) C. $$S_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2}.$$
9) B. $$S_n = \left(\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2^3} - \frac{2}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^4} - \frac{3}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n}\right) = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}.$$
10) A. Hitunglah sebagai jumlah parsial deret atau dengan rumus anuitas.

Daftar Pustaka

Kaplan, W. *Advanced Calculus*. Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Piskunov, N. *Differential an Integral Calculus*. Mir Publisher.

Salas, S.L. (1982). *Hillie Einas, Calculus Ed. VI*. John Wiley and Sons.

Spiegel, Murray. *Theory and Problems of Advanced Calculus*. McGraw Hill Book Co.