MODUL 1

Geometri di Bidang Euclid

Dr. Wono Setya Budhi

PENDAHULUAN

Geometri merupakan ilmu pengetahuan yang sudah lama, mulai dari ribuan tahun yang lalu. Berpikir secara geometris dari satu bentuk ke bentuk yang lain, ditentukan dalam hampir setiap kebudayaan manusia. Subjek seperti yang kita kenal, muncul lebih dari 4000 tahun yang lalu di Mesopotamia, Mesir, India, dan Cina. Salah satu yang terkenal berasal dari Mesir. Karena Sungai Nil setiap tahun membanjiri tanah yang sangat luas dan garis kepemilikan terhapuskan. Sehingga survei dan pengukuran sangat penting bagi orang Mesir kuno. Ini merupakan kepentingan praktis yang mungkin merupakan pemicu untuk munculnya ilmu pengetahuan geometri. Geometri Mesir sebagian besar merupakan ilmu empiris (berdasarkan percobaan), yang terdiri dari prosedur ataupun aturan yang tidak jelas asal usulnya, dan diperoleh dari percobaan dan pengamatan. Sebagian besar rumus merupakan perkiraan yang diperoleh hanya sebagai kepentingan untuk pekerjaan, tetapi cukup tepat dalam memberikan jawaban untuk bekerja. Tetapi orang Mesir kuno juga menyadari prinsip-prinsip yang lebih umum, seperti kasus khusus dari Teorema *Pythagoras* dan formula untuk volume.

The Mesopotamians kuno, atau Babel, tampaknya memiliki pemahaman yang lebih maju tentang geometri. Mereka tahu Teorema *Pythagoras* jauh sebelum *Pythagoras*. Mereka menemukan beberapa hal berbasis bukti dari teorema, dan tampaknya tahu sebuah metode umum yang menghasilkan suatu segitiga yang panjang sisinya tiga kali lipat dan tetap siku-siku. Di India, teks kuno menerapkan Teorema *Pythagoras* untuk masalah geometrik yang berhubungan dengan desain struktur. Tampak bahwa Teorema *Pythagoras* juga ditemukan di Cina pada sekitar waktu yang sama. Sekitar 2500 tahun yang lalu ada perubahan besar dalam cara geometri dipraktekkan yaitu matematikawan Yunani memperkenalkan abstraksi, deduksi logis, dan bukti ke geometri. Mereka bersikeras bahwa hasil geometri didasarkan pada penalaran logis dari prinsip-prinsip pertama. Dalam teori ini membuat hasil geometri yang tepat, tertentu, dan tak terbantahkan, bukan hanya mungkin atau perkiraan. Hal ini juga berakibat geometri keluar dari dunia pengalaman sehari-hari dan membuatnya subjek studi dengan objek pembicaraan yang abstrak. Proses memperkenalkan logika ke geometri tampaknya mulai dengan Thales dari Miletus sekitar 600 SM dan sampai pada puncaknya dalam karya Euclid dari Alexandria pada kira-kira 300 SM. Euclid adalah orang yang paling terkenal dari geometri Yunani dan namanya masih universal terkait dengan geometri yang dipelajari di sekolah hari ini. Sebagian besar ide-ide yang termasuk dalam apa yang kita sebut sebagai "Geometri Euclid" mungkin tidak berasal dari Euclid dirinya sendiri, melainkan kontribusi Euclid adalah untuk mengatur dan menyajikan hasil geometri Yunani dengan cara yang logis dan koheren. Ia menerbitkan hasilnya dalam serangkaian tiga belas buku yang dikenal sebagai Elemen.

Elemen Euclid disusun menurut aturan logika yang ketat. Euclid memulai setiap buku dengan daftar definisi dari istilah teknis yang akan digunakan dalam buku tersebut. Dalam Buku I ia menyatakan adanya lima "dalil atau aksioma" dan lima "notasi biasa". Ini adalah asumsi yang dimaksudkan untuk dapat diterima tanpa bukti. Baik dalil-dalil dan pengertian umum adalah laporan dasar yang kebenarannya harus jelas bagi setiap orang yang masuk akal. Inilah yang merupakan titik awal untuk geometri. Euclid mengakui bahwa tidak mungkin untuk membuktikan semuanya bahwa ia harus memulai suatu tempat, tapi ia berusaha untuk menjadi jelas tentang apa yang asumsinya itu.

Sebagian besar dari postulat Euclid adalah pernyataan sederhana tentang fakta-fakta intuitif jelas dan tak terbantahkan tentang bidang atau ruang. Contohnya, aksioma kedua yang tentang menggambar garis lurus melalui dua titik yang diberikan. Postulat atau Aksioma II mengatakan bahwa ruas garis lurus dapat diperpanjang ke segmen yang lebih panjang. Postulat atau Aksioma III mengatakan tentang kemungkinan untuk membangun lingkaran dengan pusat diberikan dan jari-jari diketahui. Secara tradisi ketiga postulat pertama telah dikaitkan dengan alat-alat yang digunakan untuk menggambar benda-benda tersebut pada selembar kertas. Kedua postulat pertama mengatakan bahwa ada dua kegunaan yang berbeda dari penggaris yang diperbolehkan, yaitu penggaris dapat digunakan untuk menggambar potongan garis melalui dua titik atau untuk memperpanjang potongan garis. Postulat ketiga mengatakan bahwa kompas dapat digunakan untuk membangun lingkaran dengan pusat diberikan dan jari-jari juga diketahui. Dengan demikian ketiga postulat pertama hanya memungkinkan penggaris dan jangka dapat digunakan untuk mengonstruksi geometri.

Tetapi pertanyaan kita hadapi adalah masalah yang aksioma Euclid tidak mengandung semua asumsi yang diperlukan. Oleh karena itu banyak aksioma lain yang muncul. Salah satu aksioma yang muncul diberikan oleh David Hilbert (34), yang pada akhir abad ke sembilan belas membuat proyek khusus untuk menemukan set aksioma untuk geometri. Aksioma Hilbert ini sangat banyak dalam semangat karya asli Euclid, dan mereka murni geometris dan tidak menggunakan koordinat atau bilangan real. Terdapat total 20 aksioma yang secara hati-hati mengeja secara akurat tentang hal-hal yang diasumsikan dalam geometri biasa. Ada banyak argumen baik yang mendukung untuk menggunakan aksioma Hilbert untuk pelajaran geometri di tingkat perguruan tinggi seperti ini, dan di masa lalu merupakan standar yang cukup untuk melakukannya. Alasan utama untuk ini adalah fakta bahwa aksioma Hilbert merupakan hal paling setia melestarikan semangat kerja asli Euclid sambil membangun geometri pada landasan yang benar-benar ketat. Bagi mereka yang ingin belajar geometri berdasarkan aksioma Hilbert, ada pada buku yang ditulis oleh Greenberg dan Hartshome.

Pada materi tambahan ini kita akan memilih aksioma yang berbeda, yang didasarkan pada sistem bilangan real. Salah satu alasan kita tidak menggunakan aksioma Hilbert adalah kenyataan bahwa aksioma yang menguraikan secara rinci semua asumsi geometris tanpa memanfaatkan pengetahuan kita tentang bagian-bagian lain matematika. Jumlah aksioma yang besar dan, meskipun demikian, pengembangan geometri harus dimulai dengan bukti hasil yang sangat teknis yang tampaknya intuitif jelas bagi kebanyakan orang. Alasan kedua kita memilih untuk tidak menggunakan aksioma Hilbert adalah fakta bahwa semua buku pelajaran sekolah kontemporer tinggi menggunakan sistem aksioma untuk geometri yang didasarkan pada pengukuran dan bilangan real.

Pada awal abad ketujuh belas sebuah revolusi besar terjadi di koordinat geometri ketika diperkenalkan ke dalam geometri. Dua matematikawan yang paling dekat dengan perkembangan ini adalah Rene Descartes dan Pierre de Fermat. Penggunaan koordinat memungkinkan untuk membawa teknik aljabar kuat menyelesaikan masalah geometrik dan pada akhirnya membawa perkembangan kalkulus. Pada gilirannya, memungkinkan masalah geometri untuk dianalisis menggunakan metode lain selain metode deduktif aksiomatik. Sulit bagi kebanyakan dari kita untuk benar-benar menghargai bagaimana pendekatan revolusioner ini dan tampak asing bagi geometri Euclid. Kita telah diajarkan sejak kecil untuk mengidentifikasi titik-titik pada bidang dengan pasangan angka dan kurva dengan persamaan.

Pendekatan geometri di mana titik dikenali sebagai pasangan bilangan real dan sifat geometrik dipelajari melalui penggunaan operasi aljabar dan simbolisme disebut sebagai geometri analitik. Salah satu ciri geometri analitik adalah mengenali kurva dengan persamaan aljabar. Jenis geometri dilakukan oleh Euclid, di mana titik dipandang sebagai objek geometri murni, koordinasi tidak digunakan, dan kebenaran geometri dikembangkan oleh penalaran deduktif dari aksioma, disebut geometri sintetis.

Mengingat betapa luas cara berpikir analitik dan bagaimana hal ini sangat bermanfaat dalam pembuktian, tampaknya wajar untuk memasukkan koordinat ke dalam dasar-dasar geometri, dan itulah yang akan diperbuat dalam materi tambahan ini. Dalam pendekatan ini, geometri tidak diperlakukan sebagai subjek yang terisolasi, tapi seperti banyak cabang lain matematika, dibangun pada sistem bilangan real.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat memahami dan menentukan titik dan garis dalam bidang Euclid dengan menggunakan aljabar. Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini Anda akan dapat:

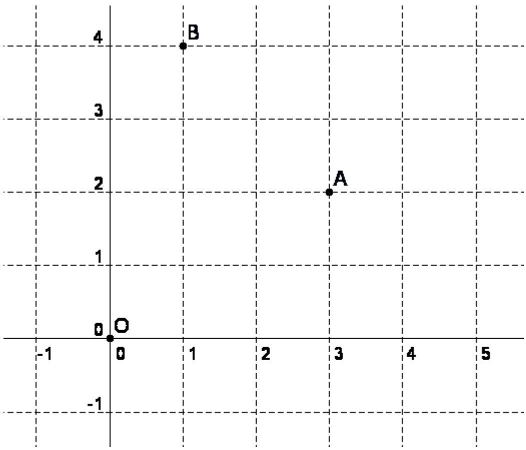
1. menentukan tiap titik pada bidang sebagai vektor dan menghitung jarak antara dua titik;
2. menentukan persamaan garis secara vektor.

KEGIATAN BELAJAR

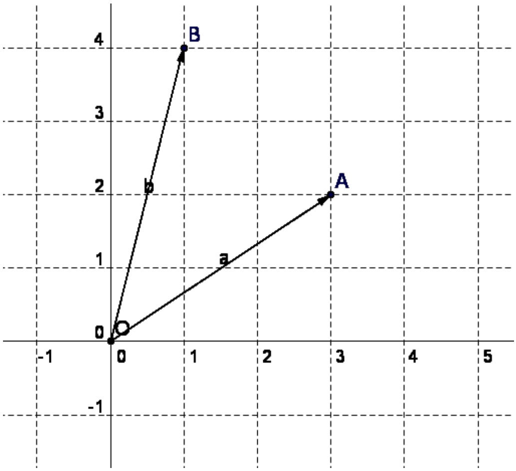
Geometri di Bidang Euclid

Kita akan melakukan geometri di bidang berkoordinat. Sistem koordinat menjadi landasan bagi geometri analitik. Salah satu keuntungan dari pendekatan analitik ini adalah mudahnya kita menyatakan berbagai sifat-sifat geometris dan sifat-sifat berlandaskan koordinat.

Pada geometri ini kita akan menggunakan himpunan $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ sebagai tempat bermain. Anggota dari himpunan tersebut disebut sebagai titik. Berbeda dengan ruang vektor, sebagai himpunan titik, titik khusus $(0,0)$ tidak mempunyai keistimewaan. Setiap titik dianggap sama.



Gambar 1.1.
Ilustrasi titik (x_1, x_2)



Gambar 1.2.
Ilustrasi vektor $\left(x_1, x_2\right)$

Tetapi untuk menyatakan perubahan, penjumlahan dua vektor tetap diperlukan. Oleh karena itu, di geometri ini $\mathbb{R}^2$ akan mempunyai dua kegunaan, yaitu sebagai himpunan titik dan himpunan vektor sekaligus.

Definisi 1.1

1. Operasi jumlah vektor
   Jumlah dua anggota di $\mathbb{R}^2$ yaitu $x = \left(x_1, x_2\right)$ dan $y = \left(y_1, y_2\right)$ adalah vektor $x + y = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2\right)$
2. Perkalian skalar
   Perkalian skalar di $\mathbb{R}^2$ antara $x = \left(x_1, x_2\right)$ dan skalar bilangan real α adalah vektor $\alpha x = \left(\alpha x_1, \alpha x_2\right)$

Walaupun titik dan vektor merupakan dua hal yang berbeda, tetapi di sini kita akan menggunakan penulisan yang sama. Sedangkan untuk keperluan ilustrasi akan digambar berbeda. Titik $\left(x_1, x_2\right)$ akan digambar sebagai noktah di koordinat sesuai dengan titik tersebut. Sedangkan vektor

(x_1, x_2) akan digambar sebagai potongan garis berarah dengan awal di titik $(0,0)$ dan berakhir pada titik tersebut.

Teorema 1.1
Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di atas memenuhi sifat :

1. Sifat Assosiatif
   Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ berlaku $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. Sifat Komutatif
   Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$ berlaku $x+y = y+x$
3. Adanya Unsur Identitas
   Ada unsur $O(0,0)$ dengan sifat $x+O = x = O+x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.
4. Adanya Unsur Invers
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ ada elemen $y \in \mathbb{R}^2$ sehingga $x+y = y+x = 0$
5. Sifat Identitas untuk Perkalian Skalar
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ berlaku $1x = x$
6. Sifat Distributif Perkalian Skalar terhadap Operasi Penjumlahan
   Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$ dan $c \in \mathbb{R}$ berlaku $c(x+y) = cx+cy$
7. Sifat Distributif Penjumlahan terhadap Operasi Penjumlahan Bilangan Real
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ dan $c, d \in \mathbb{R}$ berlaku $(c+d)x = cx+dx$
8. Sifat Perkalian Bilangan terhadap Perkalian Skalar
   Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ dan $c, d \in \mathbb{R}$ berlaku $c(dx) = (cd)x$

Himpunan dengan satu operasi (dalam hal di atas adalah operasi (+)) dan memenuhi sifat 1, 3, dan 4 disebut grup. Dengan demikian $\mathbb{R}^2$ dengan operasi (+) merupakan grup. Akibat dari sifat ini pada persamaan linear di grup tersebut yaitu, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}^2$ persamaan $a+x=b$ selalu mempunyai jawab dan tunggal. Sedangkan himpunan dengan satu operasi (+) dan perkalian skalar yang memenuhi sifat 1 sampai dengan 8 disebut ruang vektor. Itulah sebabnya, anggota dari $\mathbb{R}^2$ juga disebut vektor.

Selanjutnya kita melengkapi ruang vektor $\mathbb{R}^2$ dengan sebuah operasi biner yang sangat penting, disebut hasil kali dalam. Operasi ini memberi jalan kepada kita untuk menentukan sudut antara dua vektor serta menentukan panjang sebuah ruas garis. Kedua konsep ini sangat penting dalam geometri.

Definisi 1.2
Misalkan $x=(x_1,x_2)$ dan $y=(y_1,y_2)$ dua vektor di $x,y\in\mathbb{R}^2$, maka hasil kali dalam adalah $\langle x+y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$

Jika kita mempunyai konsep baru, maka kita mencoba menyelidiki hubungan antara konsep baru ini dengan konsep yang ada, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Hubungan yang ada dituliskan dalam sifat berikut :

Teorema 1.2
Hasil kali dalam memenuhi sifat :

1. Sifat Penjumlahan
   Untuk setiap $x,y\in\mathbb{R}^2$ berlaku $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$
2. Sifat Perkalian Skalar
   Untuk setiap $x,y\in\mathbb{R}^2$ dan $c\in\mathbb{R}$ berlaku $\langle cx,y\rangle=c\langle x,y\rangle$
3. Sifat Simetri
   Untuk setiap $x,y\in\mathbb{R}^2$ berlaku $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$
4. Jika $\langle x,y\rangle=0$ untuk setiap $x\in\mathbb{R}^2$, maka $y=0$.

Sifat-sifat dengan mudah dapat dibuktikan. Bukti dari sifat ini diserahkan kepada Anda.

Berdasarkan konsep hasil kali dalam, kita dapat mendefinisikan konsep panjang vektor. Hasilnya, kita dapat mendefinisikan konsep panjang ruas garis.

Definisi 1.3
Panjang vektor $x=(x_1,x_2)$ di $\mathbb{R}^2$ adalah $x=\sqrt{\langle x,x\rangle}$

Seperti pada hasil kali dalam, kita harus menyelidiki hubungan antara konsep panjang vektor dengan penjumlahan vektor dan hasil kali skalar. Ternyata untuk hasil kali skalar sesuai, artinya berlaku suatu kesamaan. Sedangkan dengan penjumlahan vektor, sifat panjang vektor perlu penyesuaian menjadi suatu pertaksamaan. Sifat ini disebut sebagai ketaksamaan segitiga.

Teorema 1.3
Panjang vektor memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $|x| \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$
2. Jika $|x| = 0$, maka $x = O = (0,0)$
3. $|cx| = |c||x|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ dan untuk setiap $c \in \mathbb{R}$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$
   Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = cy$ dan $c \geq 0$

Salah satu sifat yang penting adalah keorthogonalan. Dua vektor $u, v \in \mathbb{R}^2$ disebut orthogonal jika $\langle u, v \rangle = 0$.

Sebagai contoh, jika $u = (u_1, u_2)$, maka vektor $v = (-u_2, u_1)$ atau $v = (u_2, -u_1)$ merupakan vektor yang orthogonal terhadap u. Jika x sebarang vektor, mudah diperlihatkan bahwa

$$x = \frac{\langle x, u \rangle}{|u|^2} u + \frac{\langle x, v \rangle}{|v|^2} v$$

Khususnya jika $|u| = 1$ dan $|v| = 1$, maka $x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v$

A. BIDANG EUCLID

Bidang Euclid adalah ruang vektor $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi dengan pengertian jarak antara dua titik. Jika P, Q dua titik di $\mathbb{R}^2$, maka jarak dua titik antara P, Q didefinisikan sebagai $d(P,Q) = |P - Q|$

Tulisan ini merupakan salah satu contoh penulisan vektor dan titik yang dicampurkan. Sebagai titik, tentu tidak mengenal penulisan $P - Q$. Dalam hal ini, ruas kanan dari tulisan ini dibaca sebagai dua vektor.
Diskusikan hubungan antara fungsi *d* dan pengertian panjang vektor $|-|$.

Teorema 1.4
Jarak dua titik mempunyai sifat:
1. Jarak $d(P,Q)\geq 0$ untuk setiap titik P dan Q
2. $d(P,Q)=0$ jika dan hanya jika $P=Q$
3. $d(P,Q)=d(Q,P)$
4. $d(P,Q)+d(Q,R)\geq d(P,R)$

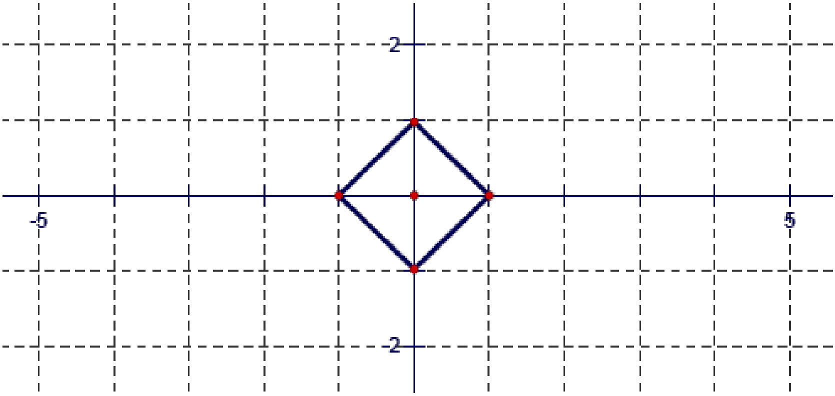
Sifat pertama mengatakan bahwa jarak harus selalu lebih besar atau sama dengan nol. Selanjutnya, dua titik berjarak sama dengan nol hanya terjadi jika dua titik tersebut berimpit. Sifat ketiga mengatakan bahwa jarak dari P ke Q, akan sama dengan jarak dari Q ke P. Sifat terakhir, jarak antara P dan R tentu lebih kecil jika kita bergerak mulai dari P ke R dengan melewati titik ke tiga Q.

Keempat sifat pada Teorema 1.4 dipandang sebagai sifat dasar jarak. Artinya setiap fungsi dua peubah yang memenuhi keempat sifat di atas disebut jarak. Sebenarnya kita dapat mendefinisikan fungsi yang lain, misalkan:

$$d_1=(P,Q)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

dengan $P(x_1,x_2)$ dan $Q(y_2,y_2)$.

Anda dapat menguji bahwa fungsi ini memenuhi keempat sifat di atas. Tetapi akibat definisi ini, geometri yang dihasilkan sesuai dengan geometri Euclid. Oleh karena itu, jarak dua titik di atas disebut sebagai jarak Euclid, karena geometri yang dihasilkan sama dengan geometri Euclid.
Pada $d_1(P,Q)$ bentuk lingkaran adalah sebagai berikut



Gambar 1.3.
Ilustrasi $d_1(P,Q)$

B. GARIS DI BIDANG EUCLID

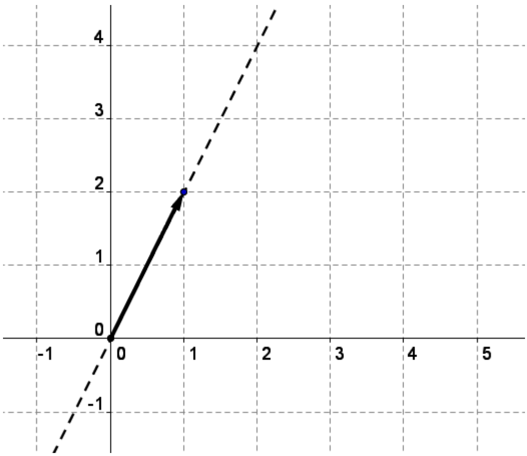
Ada beberapa cara untuk menyatakan persamaan garis di bidang Euclid. Kita sudah mengenal persamaan garis $ax+by=c$ dengan $a^2+b^2 \neq 0$ (syarat bahwa *a* dan *b* tidak keduanya sama dengan nol). Tetapi karena kita juga bekerja pada vektor, maka kita akan menggunakan persamaan vektor.

Kita mulai dengan yang sederhana. Misalkan $v=(v_1,v_2)$ sebuah vektor di $\mathbb{R}^2$, maka himpunan $\left\{tv : t \in \mathbb{R}^2\right\}$ menyatakan semua vektor yang merupakan kelipatan dari *v*. Dalam hal ini ujung dari semua vektor terletak pada garis yang melalui titik $O(0,0)$ dan titik (v_1,v_2).

Contoh 1.1

Misalkan $v=(1,2)$ menyatakan vektor di $\mathbb{R}^2$. Tuliskan persamaan garis $\left\{tv : t \in \mathbb{R}^2\right\}$ dalam bentuk $ax+by=c$.

Penyelesaian :
Jika $X = (x, y)$ terletak pada garis tersebut, maka $(x, y) = tv = t(1,2)$.
Dengan demikian $x = t$ dan $y = 2t$.
Dengan menghilangkan *t*, maka persamaan garis tersebut adalah $y = 2x$.



Gambar 1.4.

Grafik $y = 2x$

C. PERSAMAAN GARIS UMUM

Persamaan garis melalui *P* dengan arah vektor $v = (v_1, v_2)$ dapat dituliskan sebagai semua vektor

$X = P + tv$ dengan $t \in \mathbb{R}$.

Sekali lagi perhatikan bahwa penulisan vektor ini tercampur antara penulisan vektor dan titik. Dalam hal ini, pada penjumlahan tersebut titik *P* harus dipandang sebagai vektor.

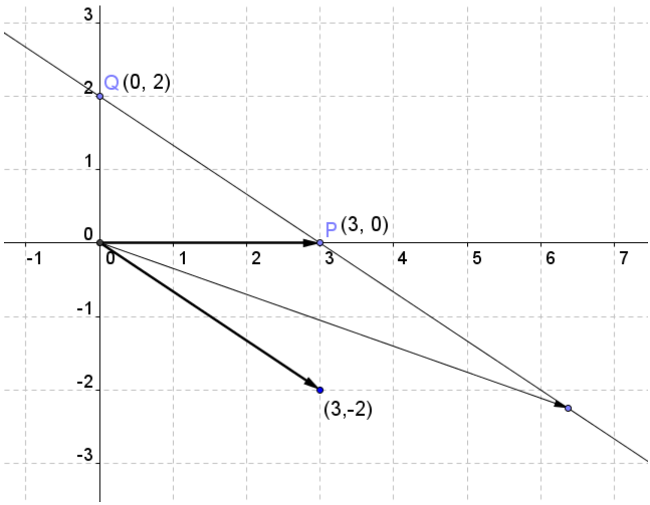
Jika *t* berubah, maka ujung dari vektor *X* berada pada suatu garis. Perhatikan bahwa parameter *t* dapat dipandang sebagai waktu. Jika $t = 0$, maka vektor *X* berada di titik *P* dan jika $t > 0$, maka vektor *X* akan berada "di arah" *v*. Sedangkan untuk $t < 0$, maka vektor *X* akan berada di bagian yang lain.

Contoh 1.2

Tuliskan persamaan garis $2x+3y=6$ dalam bentuk persamaan vektor di atas.

Penyelesaian:

1. Pertama, kita harus memilih titik P yang berada di garis tersebut. Misalkan $y=0$, maka $x=3$. Dengan demikian, kita dapat mengambil $P(3,0)$.
2. Untuk menentukan vektor arah *v*, maka kita harus mengambil dua titik di garis tersebut. Misalkan $Q(0,2)$, maka vektor arah *v* dapat dinyatakan sebagai $v=P-Q=(3,-2)$.
3. Persamaan vektor untuk garis tersebut adalah $X=(3,0)+t(3,-2)$



4. Perhatikan bahwa persamaan garis ini tidak tunggal, kita dapat saja mengambil salah satu persamaan dengan bentuk berikut:

$X=(0,2)+t(3,-2)$

$X=(3,0)+t(-3,2)$

$X=(6,-2)+t(3,-2)$

5. Persamaan lain tentu dapat diambil. Misalkan saja, vektor $v = 2(3,-2) = (6,-4)$ atau $v = -3(3,-2) = (-9,6)$ juga dapat digunakan.

Untuk menyederhanakan tulisan, persamaan vektor $X = P + tv$ disingkat sebagai $X = P + [v]$.

Persamaan garis dapat juga dituliskan dalam bentuk hasil kali dalam. Dalam hal ini menggunakan vektor normal dari garis. Jika $v = (v_1, v_2)$, maka vektor yang tegak lurus terhadap garis adalah $N = (v_2, -v_1)$ atau $N = (-v_2, v_1)$. Selanjutnya, setiap vektor yang ujungnya berada pada garis memenuhi $\langle X - P, N \rangle = 0$

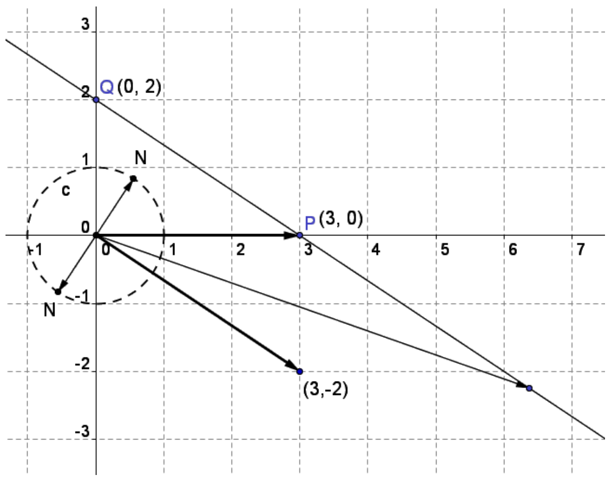
Umumnya vektor N akan diambil sebagai vektor dengan panjang satu. Jadi, untuk kasus ini, vektor

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(v_2^2 + v_1^2\right)}}(v_2, -v_1) \text{ atau } N = \frac{1}{\sqrt{\left(v_2^2 + v_1^2\right)}}(-v_2, v_1)$$

Sebagai contoh, untuk persamaan garis di atas, ambillah nilai

$$N = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}}(2,3) = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

Pada pembicaraan di sini, persamaan garis akan mempunyai salah satu bentuk dari $ax + by = c$ atau $X = P + tv = P + [v]$ atau $\langle X - P, N \rangle = 0$.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tuliskan persamaan garis $3x-4y=12$ dalam dua bentuk yang lain.
2) Tuliskan persamaan garis $X=(1,3)+[(2,1)]$ dalam dua bentuk yang lain.
3) Tuliskan syarat dua garis sejajar untuk persamaan garis dengan bentuk:
   a. $ax+by=c$
   b. $X=P+[v]$
   c. $\langle X-P,N\rangle=0$
4) Tuliskan syarat dua garis tegak lurus untuk persamaan garis dengan bentuk:
   a. $ax+by=c$
   b. $X=P+[v]$
   c. $\langle X-P,N\rangle=0$
5) Diketahui dua titik $P(3,-4)$ dan $Q(1,2)$. Persamaan garis melalui *P* dan *Q* dapat dituliskan sebagai $X=tP+(1-t)Q$ dengan $t\in\mathbb{R}$. Selidiki posisi titik jika $t=0,\frac{1}{2},1$ terhadap posisi titik *P* dan *Q*.
6) Tentukan persamaan garis (dalam bentuk vektor) yang diminta
   a. Melalui $P(2,-1)$ dan sejajar garis $X=(3,-4)+[(1,3)]$.
   b. Melalui $P(2,-1)$ dan tegak lurus garis $X=(3,-4)+[(1,3)]$.
   c. Melalui $P(3,-4)$ dan $Q=(1,-4)$
7) Tentukan titik potong antara garis $X=(3,2)+[(3,1)]$ dan $X=(5,7)+[(-1,3)]$.
8) Diketahui persamaan garis $x+2y-4=0$ dan titik $A(5,7)$. Carilah koordinat titik *B* sebagai proyeksi titik *A* ke garis. Perhatikan bahwa titik

B merupakan titik potong garis yang diketahui dan garis melalui *A* tegak lurus terhadap garis.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Ambil titik $P(4,0)$ dan vektor arah $v=(0,-3)-(4,0)=(4,-3)$. Jadi, persamaan dalam bentuk vektor adalah $X=P+[v]$ atau $X=(4,0)+[(4,-3)]$

   Tentu saja, titik *P* dapat diambil yang lain. Demikian pula dengan vektor normal $N=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. Persamaan dalam bentuk normal adalah $\langle X-P,N\rangle=0$

2) Ambillah titik $P(1,3)$ dan titik yang lain $Q=(1,3)+(2,1)=(3,4)$. Tentu saja dapat mengambil titik $(1,3)+t(2,1)$ dengan t sebarang bilangan. Jadi, persamaan garis adalah $y=m(x-1)+3$

   Ganti $x=3$ dan $y=4$, maka $4=m(3-1)+3$ atau $m=\frac{1}{2}$

   Dengan demikian persamaan garis tersebut adalah $y=\frac{1}{2}(x-1)+3$ atau $2y-x-2=0$

3) Syarat garis sejajar
   a. Untuk persamaan $a_1x+b_1y+c_1=0$ dan $a_2x+b_2y+c_2=0$ adalah $m=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ jika $b_1=0$ dan $b_2=0$. Dalam hal ini, $a_1=a_2$, jika $b_1=b_2$ masing-masing tak nol.

      Dalam hal $a_1=a_2=0$, maka syarat sejajar $b_1=b_2$. Ingat bahwa $a_1^2+b_1^2=0$ dan $a_2^2+b_2^2=0$. Syarat yang lebih kompak adalah $a_1b_2-a_2b_1=0$
   b. Garis $X=P+[v_1]$ dan $X=Q+[v_2]$ sejajar jika ada bilangan $\lambda=0$ sehingga $v_1=\lambda v_2$. Ingat bahwa $v_1\neq 0$ dan $v_2\neq 0$.
   c. Garis $\langle X-P,N_1\rangle=0$ dan $\langle X-Q,N_2\rangle=0$ sejajar jika ada bilangan $\lambda\neq 0$ sehingga $N_1=\lambda N_2$.

4) Syarat garis tegak lurus
   a. Syarat garis dengan persamaan $a_1x+b_1y+c_1=0$ dan $a_2x+b_2y+c_2=0$ tegak lurus adalah $a_1a_2+b_1b_2=0$
   b. Syarat garis $X=P+[v_1]$ dan $X=Q+[v_2]$ tegak lurus adalah $\langle v_1,v_2\rangle=0$
   b. Syarat garis $\langle X-P,N_1\rangle=0$ dan $\langle X-Q,N_2\rangle=0$ tegak lurus adalah $\langle N_1,N_2\rangle=0$
5) Jika $t=0$, menyatakan titik *Q*, jika $t=\frac{1}{2}$, menyatakan titik tengah *P* dan *Q*. Sedangkan $t=1$, menyatakan titik *P*.
6) Menentukan persamaan garis
   a. $X=(2,-1)+[(1,3)]$
   b. $X=(2,-1)+[(-3,1)]$ atau $X=(2,-1)+[(3,-1)]$
   c. $v=(1,-4)-(3,-4)=(-2,0)$ dan $X=(3,-4)+[(-2,0)]$
7) Untuk menentukan titik potong antara garis $X=(3,2)+[(3,1)]$ dan $X=(5,7)+[(-1,3)]$. Tuliskan $X=(x,y)$, maka dari persamaan garis pertama
   $$x=3+3t$$
   $$y=2+t$$
   Untuk persamaan garis kedua
   $$x=5-s$$
   $$y=7+3s$$
   Berdasarkan kedua sistem persamaan, diperoleh
   $$3+3t=5-s$$
   $$2+t=7+3s$$
   Jawab persamaan ini adalah $s=-\frac{13}{10}$, $t=\frac{11}{10}$. Dengan menggantikan nilai *s*, atau *t* ke persamaan yang sesuai, maka diperoleh titik potongnya yaitu $\left(\frac{63}{10},\frac{31}{10}\right)$.
8) Persamaan garis yang melalui titik $(5,7)$ dan tegak lurus garis yang diketahui adalah $2x-y=2\times 5-7=3$

Selanjutnya, titik potong adalah jawab dari sistem persamaan

$$x + 2y - 4 = 0$$

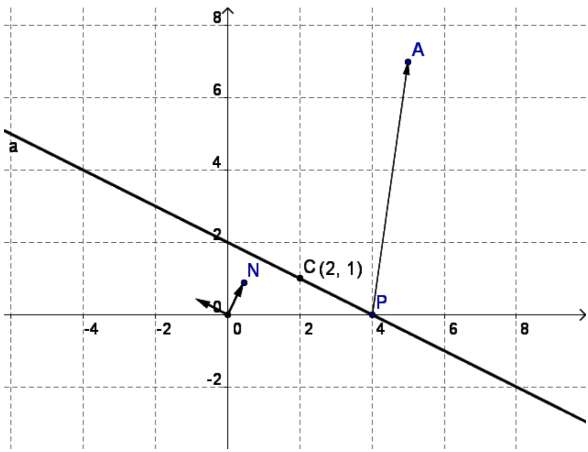
$$2x - y - 3 = 0$$

yaitu $x = 2$ dan $y = 1$.

Penyelesaian dengan menggunakan vektor.

Dalam hal ini vektor normal garis adalah $N = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ dan vektor yang tegak lurusnya adalah $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$. Selanjutnya, ambil satu titik di garis $P(4,0)$. Kemudian, tuliskan vektor $X = (5-4, 7-0) = (1,7)$. Proyeksi vektor ini ke garis adalah $\langle X, u \rangle u = \frac{1}{5}(-2+7)(-2,1) = (-2,1)$

Jumlahkan dengan vektor *P*, maka $(4-2, 0+1) = (2,1)$



RANGKUMAN

Pada modul ini kita sudah mempelajari geometri pada bidang koordinat, yaitu bidang yang dilengkapi dengan titik yang dilengkapi dengan bilangan yang menyatakan suatu posisi. Pada bidang tersebut terdapat aksioma operasi “penjumlahan” titik dan perkalian dengan skalar. Pada bidang ini terdapat "titik" dan vektor. Antara kedua objek ini tidak dibedakan secara nyata. Sifat dari operasi ini dinyatakan dalam Teorema 1.1. Bidang koordinat ini juga dilengkapi dengan hasil kali dalam dan jarak dua titik, untuk $x(x_1, x_2), y(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ hasil kali dalam titik adalah $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ dan jarak kedua titik adalah

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Selain itu kita juga sudah mempelajari cara menyatakan persamaan suatu garis yaitu, seperti biasa, $ax + by = c$, atau persamaan parameter $X = (a_1, a_2) + t(b_1, b_2)$ atau persamaan normal $\langle X - P, N \rangle = 0$ dengan P titik di bidang dan N vektor normal.

TES FORMATIF

Jawablah pertanyaan ini dengan tepat!

1) Diketahui dua titik $P(3, -4)$ dan $Q(1, 2)$. Persamaan garis melalui P dan Q dapat dituliskan sebagai $X = tP + (1-t)Q$ dengan $t \in \mathbb{R}$. Selidiki posisi titik jika $t = -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ terhadap posisi titik P dan Q.
2) Diketahui segitiga ABC dengan $A(3, 2)$, $B(6, 3)$, dan $C(5, 7)$. Tentukan
   a. Persamaan garis tinggi segitiga melalui titik A.
   b. Persamaan garis tinggi segitiga melalui titik B.
   c. Persamaan garis tinggi segitiga melalui titik C.
   d. Apakah ketiga garis tinggi melalui satu titik.

Kunci Jawaban Tes Formatif

1) Diketahui dua titik $P(3,-4)$ dan $Q(1,2)$. Persamaan garis melalui P dan Q adalah $X = tP + (1-t)Q$ dengan $t \in \mathbb{R}$.
   Jika $t = -2$, maka $X = -2(3,-4) + (1-(-2))(1,2) = (-3,14)$
   Jika $t = -\frac{1}{2}$, maka $X = (0,5)$
   Jika $t = \frac{1}{2}$, X menyatakan titik tengah P dan Q, atau $X = (2,-1)$
   Jika $t = 2$, maka $X = (5,-10)$
2) Diketahui segitiga ABC dengan $A(3,2)$, $B(6,3)$ dan $C(5,7)$.
   a. Garis tinggi segitiga melalui titik A, berarti garis yang tegak lurus garis BC dan melalui titik A.
      Persamaan garis BC adalah $y = -4x + 27$. Persamaan garis yang tegak lurus garis BC dan melalui titik $A(3,2)$ adalah $4y - x = 4(2) - 3 = 5$.
   b. Persamaan garis AC adalah $2y = 5x - 11$. Persamaan garis yang tegak lurus garis AC dan melalui titik $B(6,3)$ adalah $5y + 2x = 27$.
   c. Persamaan garis AB adalah $3y = x + 3$. Persamaan garis yang tegak lurus garis AB dan melalui titik $C(5,7)$ adalah $y + 3x = 22$.
   d. Persamaan garis tinggi (1) $4y - x = 5$
      Persamaan garis tinggi (2) $5y + 2x = 27$
      Persamaan garis tinggi (3) $y + 3x = 22$
      Dengan sistem persamaan linear diperoleh titik potong ketiga garis tersebut yaitu $\left(\frac{37}{13}, \frac{83}{13}\right)$

Daftar Pustaka

Edward C. Wallace, Stephen F. West. (1998). *Roads to Geometry*. Prentice Hall.

George Edward Martin. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. Springer Verlag.

Patrick Ryan. (2009). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*. Cambridge University Press.