MODUL 1

Bilangan Bulat

Prof. Drs. Gatot Muhsetyo, M.Sc.

PENDAHULUAN

Dalam modul Bilangan Bulat ini diuraikan tentang awal pembahasan bilangan sebagai kebutuhan hidup manusia, meliputi bilangan asli, bilangan cacah, dan bilangan bulat. Sebagai objek matematika, bilangan bulat dan operasinya dapat membentuk suatu sistem atau struktur. Uraian berikutnya tentang prinsip induksi matematika sebagai alat pembuktian teorema yang penggunaannya tersebar luas di dalam berbagai topik matematika.

Sifat-sifat operasi bilangan bulat diuraikan kembali sebagai dasar pembicaraan berikutnya, meliputi sifat komutatif, sifat asosiatif, sifat distributif, sifat unsur identitas, sifat inversi, dan sifat kanselasi.

Pembahasan Induksi matematika dimulai dengan notasi jumlah dan notasi kali beserta sifat-sifat dan penggunaannya, dan dilanjutkan penjelasan tentang konsep induksi matematika beserta penerapannya untuk membuktikan hubungan-hubungan tertentu.

Secara keseluruhan, materi pokok dalam modul ini meliputi bilangan asli, bilangan cacah, bilangan bulat, operasi bilangan bulat dan sifat-sifatnya, prinsip urutan yang rapi, bilangan bulat terbesar, sedikit uraian tentang bilangan rasional dan bilangan irasional, notasi jumlah dan notasi kali, dan diakhiri dengan prinsip induksi matematika.

Secara umum kompetensi yang diharapkan setelah mempelajari modul ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep bilangan bulat, operasi bilangan bulat, sistem bilangan bulat, induksi matematika sifat, dan keterkaitan antara topik-topik bilangan bulat dengan induksi matematika.

Secara khusus kompetensi yang diharapkan setelah mempelajari modul ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep bilangan bulat, konsep operasi bilangan bulat dan sifat-sifatnya, sistem bilangan bulat, penggunaan notasi jumlah, penggunaan notasi kali, induksi matematika, serta keterkaitan satu sama lain untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika tertentu.

Susunan Kegiatan Belajar

Modul 1 ini terdiri dari dua kegiatan belajar. Kegiatan Belajar 1 adalah Bilangan Bulat, dan Kegiatan Belajar 2 adalah Induksi Matematika. Setiap kegiatan belajar memuat uraian, contoh, tugas dan latihan, petunjuk jawaban tugas dan latihan, rangkuman, dan tes formatif. Pada bagian akhir Modul 1 ini ditempatkan kunci jawaban Tes Formatif 1 dan Tes Formatif 2.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian dan contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas dan latihan yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka pelajarilah petunjuk jawaban tugas dan latihan. Jika langkah ini belum berhasil menjawab permasalahan, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda dengan cara mencocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif. Ulangilah pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

KEGIATAN BELAJAR 1

Bilangan Bulat

Pembahasan tentang bilangan bulat (*integers*) tidak bisa dipisahkan dari uraian tentang bilangan asli (*natural numbers*) dan bilangan cacah (*whole numbers*) karena kreasi tentang bilangan-bilangan ini merupakan proses sosial dan budaya yang telah berlangsung berurutan dalam waktu ribuan tahun.

Konsep tentang bilangan dan cara mencacah atau menghitung, (*counting*) berkembang selama sekitar 15.000 tahun, mulai dari zaman prasejarah (*poleolithic, old stone age*) sampai dengan zaman sejarah (sekitar tahun 400 S.M.). Dalam periode atau zaman ini, manusia diduga telah mempelajari cara bertani atau bercocok tanam, cara beternak, cara menggunakan kalender, cara mengukur atau menimbang berat, cara memindahkan barang dengan kereta atau gerobak, cara membuat perahu, cara berburu, cara pengobatan tradisional, dan cara berhitung.

A. BILANGAN ASLI

Sejak periode sejarah, diduga dimulai sekitar tahun 400 S.M., orang mulai memikirkan bilangan sebagai konsep abstrak. Misalnya, mereka menyebut tiga kerikil dan tiga binatang mempunyai sifat persekutuan, yaitu suatu kuantitas yang disebut tiga. Sifat persekutuan tiga ini bisa dimiliki oleh kelompok benda apa saja sehingga sifat ini menjadi terbatas dari obyek atau sasaran pembicaraan. Dalam istilah yang lebih sederhana, sifat-sifat persekutuan satuan (*oneness*), duaan (*twoness*), atau tigaan (*threeness*) merupakan sifat persekutuan yang dimiliki oleh sebarang kumpulan benda untuk menunjukkan kesamaan kuantitas.

Keperluan tentang kuantitas merupakan kebutuhan dasar manusia dalam kehidupan berkeluarga dan bermasyarakat, terutama untuk menghitung atau mencacah dan membandingkan jumlah barang atau benda. Keperluan menghitung mendorong orang untuk mencari cara yang mudah, antara lain dengan membuat lambang bilangan (*numeral*) dan cara aturan penggunaannya atau sistem numerasi. Sistem numerasi adalah pembuatan sekumpulan lambang dasar dan sejumlah aturan untuk menghasilkan lambang-lambang bilangan yang lain.

Beberapa peradaban yang telah mengembangkan sistem numerasi antara lain adalah Mesir (sekitar tahun 3000 S.M.), Babylonia (sekitar tahun 2000 S.M.), Yunani atau Greek (sekitar tahun 600 S.M.), Maya (sekitar tahun 300 S.M.), Jepang – China (sekitar tahun 200 S.M.), Romawi (sekitar tahun 100 M), dan Hindu-Arab (mulai sekitar tahun 300 S.M. di India, sistem numerasi mengalami perubahan di wilayah timur tengah sekitar tahun 750 Masehi). Sistem numerasi berkembang di Eropa dan dipakai di seluruh dunia sampai sekarang.

Dari uraian di atas dengan singkat kita telah melihat perjalanan pengembangan konsep bilangan sejak pertama kali pada zaman Poleolithic sampai pada zaman sejarah. Dengan demikian kita perlu membuat asumsi bahwa manusia telah menemukan konsep bilangan asli (*counting/natural number*) dan telah menemukan himpunan lambang untuk menyatakan konsep bilangan asli yaitu 1, 2, 3, 4, ... Untuk selanjutnya himpunan bilangan asli dinyatakan dengan

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

B. BILANGAN CACAH

Masyarakat pada zaman pertanian dan sebelum zaman revolusi, hanya memerlukan mencacah, menjumlah, dan mengalikan. Seiring dengan perkembangan zaman, masyarakat memerlukan sistem bilangan yang dapat memenuhi keperluan lain, yaitu mengurangkan dan membagi. Dengan demikian mereka mempunyai tuntutan pekerjaan yang tidak sekedar berhitung (aritmetika) tetapi hal lain yang lebih luas.

Jika sebelumnya mereka menerima pernyataan tanpa bukti (postulat): jika p dan q adalah bilangan asli, maka $p+q$ adalah suatu bilangan asli, maka kesulitan akan muncul ketika pengertian pengurangan mulai diperkenalkan melalui penjumlahan:

$p-q=r$ jika ada r bilangan asli sedemikian hingga $p=q+r$

Kita bisa melihat kesulitan itu. Pengurangan pada unsur-unsur himpunan bilangan asli dapat dilakukan hanya jika p lebih dari q, artinya himpunan bilangan asli tidak bersifat tertutup terhadap pengurangan. Pada awalnya tentu mereka memahami bahwa:

$$3-2=1,\ 4-3=1,\ 5-4=1$$

dan mulai mempertanyakan bagaimana dengan

$$3-3=?\ ,\ 4-4=?,\ \ 5-5=?$$

Jawabannya adalah mereka perlu “tambahan” bilangan baru, yang kemudian disebut dengan nol (*zero*), yang diberi makna:

$$3 = 3 + 0,\ 4 = 4 + 0,\ 5 = 5 + 0$$

Sekarang kita telah menambahkan unsur baru 0 ke dalam sistem bilangan asli, sehingga diperoleh himpunan baru yang disebut himpunan bilangan cacah, dinyatakan dengan:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

C. BILANGAN BULAT

Dengan berkembangnya masyarakat industri, manusia memerlukan bilangan untuk keperluan pembukuan tingkat lanjut, antara lain untuk menghitung hutang dan piutang, serta tabungan dan pinjaman. Pertanyaan yang muncul adalah berapakah

$$6-7=?,\ 8-10=?,\ 3-10=?$$

Permasalahan ini serupa dengan usaha menambah bilangan-bilangan baru di dalam W sehingga mereka dapat melakukan semua pengurangan, atau himpunan baru yang diperoleh bersifat tertutup terhadap pengurangan.

Jawaban terhadap kesulitan mereka adalah tambahan bilangan-bilangan baru yang diperoleh dari:

$$0-1,\ 0-2,\ 0-3,\ 0-4,\ ...$$

yang kemudian dilambangkan dengan:

$$-1, -2, -3, -4, ...$$

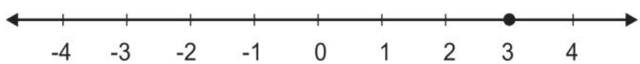
sehingga diperoleh himpunan baru yang disebut himpunan bilangan bulat, dan dinyatakan dengan:

$$Z = \{..., -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$$

Dengan digunakannya garis bilangan untuk menyatakan bilangan, dan memberi makna terhadap bilangan-bilangan di sebelah kanan nol sebagai bilangan positif serta di sebelah kiri nol sebagai bilangan negatif, maka himpunan bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai:

$$Z = \{..., -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$$

Dalam garis bilangan, maka bilangan 3 bulat diletakkan sebagai



D. SISTEM BILANGAN BULAT

Untuk keperluan menghitung, orang dapat melakukan penjumlahan, pengurangan, perkalian, atau pembagian bilangan. Apa yang dilakukan oleh orang itu kemudian disebut sebagai suatu operasi. Pada dasarnya suatu operasi adalah mengambil sepasang bilangan untuk mendapatkan bilangan lain yang tunggal. Bilangan yang diperoleh mungkin unsur atau bukan unsur dari himpunan tertentu.

Definisi 1.1
Suatu sistem matematika adalah suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi pada himpunan itu.

Notasi
Suatu sistem matematika yang terdiri dari himpunan *S* dan operasi * pada *S* ditunjukkan dengan $(S, *)$.
Jika # adalah operasi kedua pada *S*, maka $(S, *, \#)$ adalah sistem matematika yang terdiri dari himpunan *S*, operasi pertama *, dan operasi kedua #.

Berdasarkan pengetahuan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita catat beberapa definisi yang terkait dengan sifat operasi adalah:

Definisi 1.2
Misalkan *S* adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pada *S*. Operasi * disebut bersifat:

a. tertutup jika $p * q \in S$ untuk setiap $p, q, \in S$.
b. komutatif jika $p * q = q * p$ untuk setiap $p, q, \in S$.
c. asosiatif jika $p * (q * r) = (p * q) * r$ untuk setiap $p, q, r \in S$.
d. mempunyai unsur identitas jika untuk semua $p \in S$, ada $i \in S$, sehingga $p * i = i * p = p \cdot i$ disebut unsur identitas dari operasi *.
e. memenuhi sifat inversi (*invertibel*) jika untuk setiap $p \in S$, ada $x \in S$, sehingga $p * x = x * p = i \cdot x$ disebut inversi dari *p*, dan *p* disebut inversi dari *x*.

Definisi 1.3
Misalkan *S* adalah suatu himpunan. Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pertama dan # adalah suatu operasi kedua pada himpunan *S*. Operasi * bersifat distributif terhadap # jika

$p*(q\#r)=(p*q)\ \#\ (p*r)$ untuk semua $p,\ q,\ r\in S.$

Selanjutnya, sifat-sifat operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) pada himpunan bilangan bulat *Z*, merupakan aksioma sistem bilangan bulat $F(Z,+,\times)$, yaitu:

1. tertutup : $p+q\in Z$ dan $p\times q\in Z$ untuk semua $p,\ q,\in Z.$
2. komutatif : $p+q=q+p$ dan $p\times q=q\times p$ untuk semua $p,\ q\in Z.$
3. asosiatif : $p+(q+r)=(p+q)+r$ dan $p\times(q\times r)=(p\times q)\times r$ untuk semua $p,\ q,\ r\in Z.$
4. mempunyai unsur identitas penjumlahan 0, dan unsur identitas perkalian 1, yang bersifat
   $p+0=p$ dan $p\times 1=p$ untuk semua $p\in Z.$
5. memenuhi sifat inversi (*invertibel*) penjumlahan:
   untuk semua $p\in Z,$ ada $x\in Z,$ sehingga $p+x=0$
   x disebut inversi dari *p*, ditunjukkan dengan $x=-p.$
6. distributif perkalian terhadap penjumlahan
   $(p+q).\,r=(p.\,r)+(q.\,r).$
7. memenuhi hukum kanselasi:
   jika $p,\ q,\ r\in Z,\ r\neq 0,$ dan $pr=qr,$ maka $p=q$
   $p,\ q,\ r\in Z$ dan $p+r=q+r,$ maka $p=q.$

Dalam kaitannya dengan urutan bilangan bulat, kita akan menggunakan istilah himpunan bilangan bulat positif untuk himpunan bilangan asli $Z^{+}=\{1,\ 2,\ 3,...\}$. Urutan yang dimaksud adalah hubungan lebih kecil (atau lebih besar) antara dua bilangan bulat.

Definisi 1.4
Ditentukan $p,\ q\in Z$.
p disebut kurang dari *q* (atau *q* disebut lebih dari *p*), ditulis $p<q$ atau $q>p,$ jika ada suatu bilangan bulat positif *r* sehingga $q-p=r.$

Contoh 1.1

(a) 5 > 4 sebab ada bilangan bulat positif 1 sehingga 5 – 4 = 1

(b) 2 < 7 sebab ada bilangan bulat positif 5 sehingga 7 – 2 = 5

(c) $p > 0$ untuk setiap $p \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ sebab ada bilangan bulat positif p sehingga $p - 0 = p$.

Dua sifat dasar tentang urutan bilangan bulat yang perlu dipahami adalah:

(1) ketertutupan bilangan bulat positif:
$p+q$ dan pq adalah bilangan-bilangan bulat positif untuk semua bilangan-bilangan bulat positif p dan q.

(2) hukum trikotomi
Untuk setiap $p \in Z$ berlaku salah satu dari $p > 0$, $p = 0$, atau $p < 0$.

Himpunan bilangan bulat Z disebut suatu himpunan yang terurut karena Z memenuhi hukum trikotomi.

Contoh 1.2

Buktikan: Jika $p < q$ dan $r > 0$, maka $pr < qr$.

Bukti:
Diketahui bahwa $p < q$, maka menurut definisi 1.4, $q - p > 0$. Selanjutnya, karena $q - p > 0$ dan $r > 0$, maka menurut sifat dasar ketertutupan perkalian urutan bilangan bulat positif, $r(q-p) > 0$. Menurut sifat distributif, $r(q-p) = rq - rp$, dengan demikian $r(q-p) > 0$ berakibat $rq - rp > 0$. Dari definisi 1.4, diperoleh $rp < rq$, dan menurut sifat komutatif perkalian, $pr < qr$.

Contoh 1.3

Buktikan: $(-1)\,p = -p$

Bukti: $(-1)p + 1.p = (-1+1).p = 0$ dan $-p + p = -p + 1.p = 0$, sehingga $(-1)p + 1.p = -p + 1.p$. Berdasarkan hukum kanselasi, $(-1)\,p = -p$.

Contoh 1.4

Sistem $(Z, +)$, yaitu sistem bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan, merupakan suatu grup, dan juga merupakan grup Abel, sebab operasi $+$

terhadap bilangan bulat memenuhi sifat-sifat terhadap asosiatif, mempunyai unsur identitas, dan memenuhi sifat inversi.

Prinsip Urutan yang Rapi (*Well Ordering Principle*)

Suatu himpunan H disebut terurut rapi (*well ordered*) jika setiap himpunan bagian dari H yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.

Perlu diingat kembali bahwa k disebut unsur terkecil suatu himpunan S jika k kurang dari atau sama dengan x untuk semua $x \in S$ atau $k \leq x, \forall x \in S$.

Contoh 1.5

(a) $S = \{2, 5, 7\}$ mempunyai unsur terkecil 2 sebab $2 \leq x$ untuk semua $x \in S$, yaitu $2 \leq 2$, $2 \leq 5$, dan $2 \leq 7$.

(b) $M = \{3\}$ mempunyai unsur terkecil 3 sebab $3 \leq x$ untuk semua $x \in M$, yaitu $3 \leq 3$.

Contoh 1.6

(a) $S = \{2, 5, 7\}$ adalah himpunan yang terurut rapi sebab setiap himpunan bagian dari S yang tidak kosong, yaitu $\{2\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{5,7\}$ dan $\{2,5,7\}$ mempunyai unsur terkecil berturut-turut adalah 2,5,7,2,2,5, dan 2.

(b) Z^+ adalah himpunan yang terurut rapi sebab semua himpunan bagian dari Z^+ yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.

(c) Z adalah himpunan yang tidak terurut rapi sebab ada himpunan bagian dari Z yang tidak kosong dan tidak mempunyai unsur terkecil, misalnya $\{0, -1, -2, \ldots\}$.

Definisi 1.5

Bilangan riil terbesar $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x, yaitu $[x]$ adalah bilangan bulat yang memenuhi $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

Sebagai catatan perlu diingat kembali bahwa fungsi $f(x) = [x]$ disebut dengan fungsi bilangan bulat terbesar, atau juga disebut dengan fungsi lantai (*floor function*). Fungsi $g(x) = \lceil x \rceil$ disebut fungsi atap (*ceiling function*), di mana $\lceil x \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan *x*, misalnya $\lceil 2/3 \rceil = 1$ dan $\lceil -7/3 \rceil = -2$.

Suatu bilangan riil x disebut **rasional** jika dan hanya jika ada bilangan-bilangan bulat a dan $b, b \neq 0,$ dan $x = a/b.$ Suatu bilangan yang tidak rasional disebut bilangan **irasional**, misalnya $\log 5, \sqrt{3},$ bilangan e = 2,71828 ..., dan bilangan $\pi = 3{,}14\ldots$.

Contoh 1.7

(a) $[2/3] = 0, [7/3] = 2,$ dan $[\pi] = 3.$

(b) $[-2/3] = -1, [-7/3] = -3.$

(c) $[1{,}3] = 1, \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1.$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Tugas

Untuk memperluas wawasan Anda tentang sistem numerasi, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat sejarah bilangan. Selanjutnya jawablah beberapa pertanyaan berikut

1) Apa yang dimaksud dengan sistem numerasi bersifat aditif?
2) Apa yang disebut dengan sistem numerasi menggunakan nilai tempat?
3) Apa yang dimaksud dengan sistem numerasi bersifat multiplikasi?
4) Sebutkan beberapa cara menuliskan lambang bilangan dan terjadi pada sistem numerasi yang mana!
5) Sebutkan basis-basis bilangan yang pernah digunakan!

Latihan

1) Tunjukkan bahwa $p + (-q) = p - q$ untuk semua $p,\ q, \in Z!$
2) Tunjukkan bahwa $-(p.q) = p.(-q)$ untuk semua $p,\ q, \in Z!$
3) Diketahui $p,\ q,\ r \in Z,\ p < q$ dan $r < 0.$

   Buktikan: $p + r < q + r!$

4) Diketahui $p,\ q,\ r \in Z,\ p > r$ dan $q > r$.
Tunjukkan: $p > r$!

5) Diketahui $C = \{1, -1\}$ merupakan bagian dari bilangan bulat.
Selidiki apakah (C, x) merupakan sistem grup?

Petunjuk Jawaban Tugas dan Latihan

1) Sistem numerasi disebut bersifat aditif jika nilai bilangan sama dengan jumlah nilai setiap lambang bilangan yang digunakan.
Contoh:
Mesir Kuno: Lambang ୨ ୨ ୨ ୨ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | | |

2) Sistem numerasi disebut menggunakan nilai tempat jika nilai lambang bilangan didasarkan pada tempat atau posisi lambang bilangan, artinya lambang yang sama bernilai berbeda karena posisinya berbeda.
Contoh:

Babylonia	:	Lambang	:	△ < ▽
		Nilai 71	:	$(1 \times 60) + 10 + 1$
Desimal	:	Lambang	:	5 5 5

Nilai setiap lambang 5 berbeda karena letaknya yang berbeda

5 5 5

bernilai lima

bernilai lima puluh

bernilai lima ratus

3) Sistem numerasi disebut multiplikatif jika mempunyai lambang untuk bilangan-bilangan $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ b-1,\ b,\ b^2,\ b^3, \ldots,$ tidak mempunyai lambang nol, dan menggunakan nilai tempat.
Contoh:
Jepang-China: Lambang: ~ □ ξ ⊠ Ђ д ŧ) (ћ ƒ
Nilai : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000

4) Cara menuliskan lambang bilangan
(a) Acak, untuk sistem numerasi Mesir Kuno

(b) Mendatar (horizontal), untuk sistem-sistem numerasi Babylonia, Yunani (*Greek*), Romawi, Hindu-Arab
(c) Tegak (vertikal), untuk sistem-sistem numerasi Jepang-China dan Maya

5) Basis bilangan yang pernah digunakan
   (a) Basis 10 : sistem numerasi Jepang-China, Hindu Arab
   (b) Basis 20 : sistem numerasi Maya
   (c) Basis 60 : sistem numerasi Babylonia

RANGKUMAN

Berdasarkan seluruh paparan pada Kegiatan Belajar 1 ini, maka garis besar bahan yang dibahas meliputi definisi, teorema, contoh, dan latihan tentang bilangan bulat, terutama tentang konsep bilangan bulat, sistem bilangan bulat, operasi bilangan bulat dan sifat-sifatnya, dan aksioma sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat. Paparan kemudian dilanjutkan dengan prinsip urutan yang rapi serta hubungan dua bilangan bulat (sama dengan, lebih dari, kurang dari), dilengkapi dengan pengertian bilangan bulat terbesar, fungsi lantai, dan fungsi atap. Pada bagian akhir diingatkan kembali pengertian bilangan rasional dan bilangan irasional.

1. Himpunan bilangan bulat dinyatakan dengan $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
2. **Definisi 1.1**
   Suatu sistem matematika adalah suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi pada himpunan itu.
3. **Definisi 1.2**
   Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pada himpunan *S*.
   Operasi * disebut bersifat:
   a. tertutup jika $p*q \in S$ untuk setiap $p, q, \in S$.
   b. komutatif jika $p*q = q*p$ untuk setiap $p, q, \in S$.
   c. asosiatif jika $p*(q*r) = (p*q)*r$ untuk setiap $p, q, r \in S$.
   d. mempunyai unsur identitas jika untuk semua $p \in S$, ada $i \in S$, sehingga $p*i = i*p = p$. i disebut unsur identitas operasi *.
4. **Definisi 1.3**
   Ditentukan bahwa * adalah suatu operasi pertama dan # adalah suatu operasi kedua pada himpunan *S*.
   Operasi * bersifat distributif terhadap # jika

$p*(q \ \# \ r) = (p*q) \ \#(p*r)$ untuk semua $p, \ q, \ r \in S.$

5. **Definisi 1.4**
   Ditentukan $p, \ q, \in Z.$
   p disebut kurang dari q (atau q disebut lebih dari p), ditulis $p < q$ atau $q > p,$ jika ada suatu bilangan bulat positif r sehingga $q - p = r.$
6. **Definisi 1.5**
   Bilangan riil terbesar $\left[x\right]$ adalah bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x, yaitu $\left[x\right]$ adalah bilangan bulat yang memenuhi $\left[x\right] \leq x \leq \left[x\right] + 1.$
7. **Prinsip Urutan yang Rapi (*Well Ordering Principle*)**
   Suatu himpunan H disebut terurut rapi (*well ordered*) jika setiap himpunan bagian dari H yang tidak kosong mempunyai unsur terkecil.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Skor 10
   Jika $a, b \in Z, a < b, c > 0$, maka buktikan bahwa $ac < bc$.
2) Skor 10
   Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat positif kurang dari 1
3) Skor 10
   Tentukan apakah himpunan-himpunan berikut terurut rapi
   (a) $A = \{-2, 3, 4\}$
   (b) $B = \left\{\frac{2}{3}, 2, \sqrt{5}\right\}$
   (c) himpunan bilangan bulat negatif
   (d) himpunan bilangan cacah
   (e) himpunan bilangan rasional
   (f) himpunan bilangan riil
4) Skor 10
   Carilah nilai-nilai dari:
   (a) $\left[0{,}12\right]$

(b) $\left[\dfrac{7}{9}\right]$

(c) $\left[5\dfrac{2}{3}\right]$

(d) $\left[-1\dfrac{3}{5}\right]$

5) Skor 20
Jika k adalah suatu bilangan bulat, maka buktikan bahwa:
$[x+k]=[x]+k$ untuk setiap bilangan riil x.

6) Skor 10
Carilah nilai $[x]+[-x]$ jika x adalah suatu bilangan riil.

7) Skor 20
Buktikan bahwa $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$ jika x adalah suatu bilangan riil.

8) Skor 10
Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah suatu bilangan irasional.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Skor Jawaban yang Benar}}{100} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Prinsip Dasar Matematika

Prinsip induksi matematika merupakan suatu alat berharga untuk membuktikan hasil-hasil yang terkait dengan bilangan asli, atau hubungan tertentu yang dapat diperluas berlaku untuk semua bilangan asli. Hasil-hasil yang terkait terutama tentang penjumlahan, dan hubungan tertentu antara lain dapat berupa ketidaksamaan, keterbagian, atau diferensial.

Dalam kaitannya dengan hasil penjumlahan, prinsip induksi matematika melibatkan notasi jumlah (*summation*) dan notasi kali (*product*). Kedua notasi ini sangat bermanfaat untuk menyederhanakan tulisan sehingga menjadi lebih singkat dan lebih mudah dipahami.

A. NOTASI JUMLAH DAN NOTASI KALI

Notasi jumlah adalah notasi yang dilambangkan dengan $\sum$, dan notasi kali adalah notasi yang dilambangkan dengan Π, dan didefinisikan sebagai:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i = x_1 . x_2 \ ... x_r$$

Huruf i dari indeks notasi jumlah atau notasi kali disebut variabel *dummy* karena dapat diganti oleh sebarang huruf, misalnya:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = \sum_{j=1}^{r} x_j = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i = \prod_{j=1}^{r} x_j = \prod_{k=1}^{r} x_k$$

i = 1 disebut batas bawah (*lower limit*) dan $i = r$ disebut batas atas (*upper limit*).

Contoh 1.1

(a) $\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

(b) $\prod_{i=1}^{4} i = 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4 = 24$

(c) $\sum_{k=1}^{5} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

(d) $\prod_{k=1}^{5} 3 = 3\ .\ 3\ .\ 3\ .\ 3\ .\ 3 = 243$

(e) $\sum_{t=1}^{3} t^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

(f) $\prod_{t=1}^{3} t^2 = 1^2 .\ 2^2 .\ 3^2 = 36$

Selanjutnya, indeks jumlah tidak harus dimulai dari 1, artinya dapat dimulai dari bilangan bulat selain 1 asalkan batas bawah tidak melebihi batas atas.

Contoh 1.2

(a) $\sum_{i=3}^{5} i = 3 + 4 + 5 = 12$

(b) $\sum_{t=4}^{6} (2t - 1) = (2.4 - 1) + (2.5 - 1) + (2.6 - 1) = 27$

(c) $\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2\ .\ 2^3\ .\ 2^4 = 4\ .\ 8\ .\ 16 = 512$

(d) $\prod_{t=2}^{4} (t - 1) = (2 - 1)(3 - 1)\ (4 - 1) = 1\ .\ 2\ .\ 3 = 6$

Beberapa sifat yang terkait dengan notasi jumlah adalah:

(1) $$\sum_{i=r}^{s} tx_i = tx_r + tx_{r+1} + \ldots + tx_s$$
$$= t\left(x_r + x_{r+1} + \ldots + x_s\right)$$
$$= t\sum_{i=r}^{s} x_i$$

(2) $$\sum_{i=r}^{s}(x_i + y_i) = (x_r + y_r) + (x_{r+1} + y_{r+1}) + \ldots + (x_s + y_s)$$
$$= (x_r + x_{r+1} + \ldots + x_s) + (y_r + y_{r+1} + \ldots + y_s)$$
$$= \sum_{i=r}^{s} x_i + \sum_{i=r}^{s} y_i$$

(3) $$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_i y_j = \sum_{i=a}^{b}\left(x_i \sum_{j=c}^{b} y_j \right)$$
$$= \sum_{i=a}^{b} x_i (y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d)$$
$$= x_a (y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d) + x_{a+1}(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d) + \ldots +$$
$$x_b (y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d)$$
$$= (x_a + x_{a+1} + \ldots + x_d)(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d)$$
$$= \left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right).$$

(4) $$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_i y_j = \left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right)$$
$$= \left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right)\left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)$$
$$= \sum_{j=c}^{d}\sum_{i=a}^{b} y_j x_i$$
$$= \sum_{j=c}^{d}\sum_{i=a}^{b} x_i y_j.$$

Contoh 1.3

(a) $$\sum_{i=3}^{5} 2x_i = 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2(x_3 + x_4 + x_5) = 2\sum_{i=3}^{5} x_i$$

(b) $$\sum_{i=2}^{4}(2a_i + 3b_i) = (2a_2 + 3b_2) + (2a_3 + 3b_3) + (2a_4 + 3b_4)$$

$$= (2a_2 + 2a_3 + 2a_4) + (3b_2 + 3b_3 + 3b_4)$$
$$= 2(a_2 + a_3 + a_4) + 3(b_2 + b_3 + b_4)$$
$$= 2\sum_{i=2}^{4} a_i + 3\sum_{i=2}^{4} b_i .$$

(c) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} ij^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(i.1^2 + i.2^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} 5i = 5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 5\cdot 3 = 30$$

(d) $$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} ij^2 = \sum_{j=1}^{2}\left(1\cdot j^2 + 2\cdot j^2 + 3\cdot j^2\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{2} 6j^2 = 6\cdot 1^2 + 6\cdot 2^2 = 6\cdot 1 + 6\cdot 4 = 30$$

B. PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA (*PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION*)

S adalah suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan asli yang unsur-unsurnya memenuhi hubungan

Jika: (a) $1 \in S$

(b) $k \in S$ berakibat $(k+1)\ S$

maka: *S* memuat semua bilangan asli, yaitu $S = N$.

Bukti:

Misalkan $S \subset N$ dan unsur-unsur *S* memenuhi suatu hubungan (a) dan (b). Harus dibuktikan bahwa $S = N$. Untuk membuktikan $S = N$ digunakan bukti tidak langsung.

Anggaplah $S \neq N$, maka tentu ada $F \subset N$ dan $F \neq \varnothing$ yang mana $F = \{t \in N \mid t \notin S\}$.

Karena $F \neq \varnothing$ dan $F \subset N$, maka menurut prinsip urutan rapi *F* mempunyai unsur terkecil misalkan $k \in F$ tetapi $k \notin S$.

$k \neq 1$ sebab $1 \in S$, berarti $k > 1$, dan akibatnya $k - 1 \in N$.

k adalah unsur terkecil *F*, maka $k - 1 \notin F$ sebab $k - 1 < k$, berarti $k - 1 \in S$.

$k - 1 \in S$ dan *S* memenuhi (b), maka

$(k-1) + 1 \in S$, atau $k - 1 + 1 \in S$, yaitu $k \in S$.

Terjadi kontradiksi karena $k \notin S$ dan $k \in S$, jadi $S = N$.

Dalam pernyataan lain, prinsip induksi matematika dapat ditulis dengan $S(n)$ adalah suatu pernyataan yang memenuhi hubungan untuk satu atau lebih $n \in N$.

Jika: (a) $S(1)$ benar

(b) $S(k)$ benar berakibat $S(k+1)$ benar

maka $S(k)$ benar untuk semua $n \in N$.

Contoh 1.4

Buktikan untuk sebarang $n \in Z^+, \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Bukti:

Misalkan $S(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$, maka

$S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$:

$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$ dan $\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}.1(1+1) = \frac{1}{2}.2 = 1$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1+2+...+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

Harus dibuktikan $S(k+1)$ benar, yaitu:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+1...+k+k+1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+1+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \underbrace{1+2+...+k}_{\frac{1}{2}k(k+1)} + k+1 = \frac{1}{2}k(k+1)+k+1$$

$$= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right) = (k+1).\frac{1}{2}(k+2)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}.$$

Jadi: $S(n)$ benar untuk sebarang $n \in Z^+$.

Contoh 1.5

Buktikan untuk sebarang $n \in Z^+, \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Bukti:

Misalkan $S(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, maka

$S(1)$ benar, sebab untuk $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \text{ dan } \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}.1.2.3 = 1.$$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Harus dibuktikan $S(k+1)$ benar, yaitu

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + ... + k^2}_{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left\{\frac{1}{6}k(2k+1) + (k+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1) + (2k^2 + k + 6k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Jadi, $S(n)$ benar untuk sebarang $n \in Z^+$.

Contoh 1.6

Buktikan: untuk semua $n \in Z^+$, dan $n \geq 6$, $4n < n^2 - 7$

Bukti:

$S(n): 4n < n^2 - 7,\ n \geq 6$

$S(6)$ benar sebab untuk $n = 6$

$4n = 4.6 = 24,\ n^2 - 7 = 6^2 - 7 = 36 - 7 = 31,$ dan $24 < 31$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k \geq 6.$

$4k < k2 - 7$

Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu untuk $n = k+1$.

$4(k+1) < (k+1)^2 - 7$, perhatikan

$4(k+1) = 4k + 4 < (k^2 - 7) + 4$

$4k + 4 < (k^2 - 7) + 13,$ sebab $4 < 13$

$4k + 4 < (k^2 - 7) + (2k+1),$ sebab $2k + 1 \geq 13$ untuk $n \geq 6$

$4k + 4 < (k^2 + 2k + 1) - 7$

$4k + 4 < (k+1)^2 - 7$

Jadi: $4n < n^2 - 7$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 6.$

Contoh 1.7

Buktikan: $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ habis dibagi oleh 43 untuk semua $n \in Z^+.$

Bukti:

Misalkan $S(n): 6^{n+2} + 7^{2n+1}$ habis dibagi oleh 43

$S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$: maka

$6^{n+2} + 7^{2n+1} = 6^3 + 7^5 = 559 = 43(13)$ habis dibagi oleh 43

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k$:

$6^{k+2} + 7^{2k+1}$ habis dibagi oleh 43

Misalkan $6^{k+2} + 7^{2k+1} = p.43$ untuk suatu $p \in Z^+.$

Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu untuk

$n = k+1,\ 6^{k+3} + 7^{2k+3}$ habis dibagi oleh 43

$$\begin{aligned}
&(6^{k+3} + 7^{2k+3}) - (6^{k+2} + 7^{2k+1}) \\
&\quad = (6^{k+3} - 6^{k+2}) + (7^{2k+3} - 7^{2k+1}) \\
&\quad = 6^{k+2}\left(6-1\right) + 7^{2k+1}\left(7^2 - 1\right) \\
&\quad = 5 \cdot 6^{k+2} + 48.7^{2k+1} \\
&\quad = 5 \cdot 6^{k+2} + \left(5 + 43\right) \cdot 7^{2k+1} \\
&\quad = 5\left(6^{k+2} + 7^{2k+1}\right) + 43.7^{2k+1} \\
&\quad = 5 \cdot 43p + 43 \cdot 7^{2k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6^{k+3} + 7^{2k+3} - 43p &= 5.43p + 43.7^{2k+1} \\
6^{k+3} + 7^{2k+3} &= 6\left(43p\right) + 43.7^{2k+1} \\
&= 43\left(6p + 7^{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

$6^{k+3} + 7^{2k+3}$ habis dibagi oleh 43 sebab mempunyai faktor 43
Jadi: $6^{n+3} + 7^{2n+3}$ habis dibagi oleh 43 untuk semua $n \in Z^+$.

Tugas
Buktikan dengan induksi matematika
1) $n < 2^n$ untuk semua $n \in Z^+$.
2) $n^3 - n$ habis dibagi 3 untuk semua $n \in Z^+$.
3) $2^n < n\,!$ untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Petunjuk Jawaban Tugas

1) $S(n)\ :\ n < 2^n$
   $S(1)$: benar sebab untuk $n = 1$: $n = 1$, $2^n = 2^1 = 2$, dan $1 < 2$
   Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $k < 2^k$
   Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu $(k+1) < 2^{k+1}$
   $k < 2^k \rightarrow k+1 < 2^k + 1$
   $\rightarrow k+1 < 2^k + 2^k$ (sebab $2^k \geq 1$ untuk sebarang $k \geq 1$)
   $\rightarrow k+1 < 2.2^k$
   $\rightarrow k+1 < 2^{k+1}$
   Jadi: $n < 2^n$ untuk setiap $n \in Z^+$.
2) $S(n) : n^3 - n$ habis dibagi oleh 3
   $S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$:
   $n^3 - n = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$ dan 0 habis dibagi oleh 3.
   Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $k^3 - k$ habis dibagi oleh 3, sebut $k^3 - k = p.3$ untuk suatu $p \in Z^+$
   Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu
   $(k+1)^3 - (k+1)$ habis dibagi oleh 3
   $$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1)\\ &= \left(k^3 - k\right) + 3(k^2 + k)\\ &= 3p + 3\left(k^2 + k\right)\\ &= 3\left(p + k^2 + k\right)\end{aligned}$$

$(k+1)^3-(k+1)$ habis dibagi 3 sebab mempunyai faktor 3

Jadi: n^2-n habis dibagi 3 untuk setiap $n \in Z^+$.

3) $S(n): 2^n < n!$ untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$

$S(4)$ benar sebab untuk $n=4$:

$$2^n = 2^4 = 16,\ n! = 4! = 24,\ \text{dan } 16 < 24$$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $2^k < k!$

Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar yaitu:

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

$$2^{k+1} = 2^k.2 < 2.k!$$

$$2^{k+1} < (k+1).k! \text{ sebab } k+1 \geq 2 \text{ untuk sebarang } k \in Z^+$$

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

Jadi: $2^{k+1} < (k+1)!$ untuk setiap bilangan asli *n*.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Buktikan dengan induksi matematika

1) Di dalam barisan harmonis:

$$H_t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{t}.$$

berlaku

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

2) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{t=1}^{r} t^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2 = r(r+1)(2r+1)/6$ untuk setiap $n \in Z^+$.

5) $\displaystyle\sum_{r=2}^{s} \frac{1}{r^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{s^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2s+1}{2s(s+1)}$

dengan menggunakan hubungan:

$$\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $S(n): H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$

$$H_t = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{t}$$

$S(0)$ benar sebab untuk $n=0$:

$$H_{2^0} = H_1 = 1,\ 1+\frac{n}{2} = 1+0, \text{ dan } 1 \geq 0$$

Misalkan H_{2^k} benar, yaitu untuk $n=k$:

$$H_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}$$

Harus dibuktikan $H_{2^{k+1}}$ benar, yaitu untuk $n=k+1$:

$$H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1)/2$$

Perhatikan

$$H_{2^{k+1}} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{H_2k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= H_{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq \left(1+\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq \left(1+\frac{k}{2}\right)+2^k.\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}$$ sebab terdapat 2^n suku masing-masing tidak kurang dari $\frac{1}{2^{k+1}}$

$$\geq \left(1+\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1)/2$$

Jadi $H_{2^{n+1}} \geq 1+(n+1)/2$ untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 0$.

2) $S(n): \dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0.$

$S(0)$ benar sebab $\dfrac{dx^n}{dx} = \dfrac{dx^0}{dx} = \dfrac{d}{dx} = 0,$ dan $nx^{n-1} = 0.x^{-1} = 0$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $\dfrac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$

Harus dibuktikan $S(k+1)$ benar, yaitu $\dfrac{dx^{k+1}}{dx} = (k+1)x^k.$ Dari Kalkulus,

$\dfrac{dx^k}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x}.$ Maka

$$\frac{dx^{k+1}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{k+1} - x^{k+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k.(x+\Delta x) - x^{k+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k x + (x+\Delta x)^k.\Delta x - x^k.x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ x\frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} + \frac{(x+\Delta x)^k.\Delta x}{\Delta x} \right\}$$

$$= xk^k x^{k-1} + x^k$$

$$= kx^k + x^k$$

$$= (k+1)x^k$$

3) Cara 1:

Gunakan hubungan:

$\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$ untuk mengganti setiap suku deret.

Cara ini disebut cara teleskopis

Cara 2:

Gunakan induksi matematika, tunjukkan:

$\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}.$

4) Tunjukkan bahwa

$$k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2=(k+1)(k+2)(2k+3)/6$$

5) $$\sum_{r=2}^{s}\frac{1}{r^2-1}=\sum_{r=2}^{s}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left\{\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2s+1}{2s(s+1)}$$

RANGKUMAN

Berdasarkan seluruh paparan pada Kegiatan Belajar 2 ini, maka garis besar bahan yang dibahas meliputi Definisi, Teorema, Contoh, dan Latihan tentang induksi matematika, terutama tentang notasi jumlah dan sifat-sifatnya, notasi kali dan sifat-sifatnya, prinsip pertama induksi matematika, dan pernyataan lain induksi matematika. Hal lain yang ditampilkan berkaitan dengan hubungan jumlah deret, hubungan pertidaksamaan, hubungan keterbagian, dan hubungan diferensial.

1. **Notasi Jumlah dan Kali**

$$\sum_{i=1}^{r}x_i=x_1+x_2+\ldots x_r$$

$$\prod_{i=1}^{r}x_i=x_1\,.x_2\,\ldots x_r$$

2. **Sifat-sifat:**

(a) $$\sum_{i=r}^{s}tx_i=t\sum_{i=r}^{s}x_i$$

(b) $$\sum_{i=r}^{s}(x_i+y_i)=\sum_{i=r}^{s}x_i+\sum_{i=r}^{s}y_i$$

(c) $$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d}x_iy_j=\left(\sum_{i=a}^{b}x_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d}y_j\right)$$

(d) $\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_i y_j = \sum_{j=c}^{d}\sum_{i=a}^{b} x_i y_j$

3. **Prinsip Induksi Matematika**
   S adalah suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan asli yang unsur-unsurnya memenuhi hubungan:
   Jika: (a) $1 \in S$
   (b) $k \in S$ berakibat $(k+1) \in S$
   maka: S memuat semua bilangan asli, yaitu $S = N$.
4. **Pernyataan Lain Induksi Matematika**
   $S(n)$ adalah suatu pernyataan yang memenuhi hubungan untuk satu atau lebih $n \in N$.
   Jika: (a) $S(1)$ benar
   (b) $S(k)$ benar berakibat $S\ (k+1)$ benar
   maka $S(k)$ benar untuk semua $n \in N$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Skor 10

   Carilah $\sum_{t=2}^{5} 3$
2) Skor 10

   Carilah $\prod_{k=3}^{6} 2$
3) Skor 15

   Carilah $\sum_{r=1}^{5}\sum_{s=1}^{6} rs$
4) Skor 15

   Carilah $\sum_{s=1}^{3}\prod_{t=1}^{4} st$
5) Skor 20

   Carilah $\sum_{s=1}^{t} \frac{1}{s(s+1)}$

6) Skor 10

Carilah $\sum_{k=1}^{50} k^2$

7) Skor 10

Carilah $\sum_{m=1}^{n} m(m+1)$

8) Skor 5

Carilah $\sum_{r=0}^{10} (-2)^r$

9) Skor 5

Carilah $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 10 \cdot 11$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Skor Jawaban yang Benar}}{100} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Misalkan $a, b, c \in Z, a < b$ dan $c > 0,$ maka sesuai definisi $b - a > 0.$ Karena himpunan bilangan bulat positif tertutup terhadap perkalian, $c > 0,$ dan $b - a > 0,$ maka $c(b - a) > 0$ atau $cb - ca > 0,$ berarti $ca < cb$ atau $ac < bc.$
2) Misalkan ada bilangan bulat positif kurang dari 1, maka sesuai dengan prinsip urutan yang rapi, $Z^+ \subset Z^+$ dan Z^+ tidak kosong dan mempunyai unsur terkecil a sehingga $a < 1,$ dengan $a > 0.$ Selanjutnya $a^2 = a.a < 1.a = a.$ Karena $a^2 > 0,$ berarti a^2 adalah suatu bilangan bulat positif kurang dari a, merupakan kontradiksi.
3) (a) terurut rapi
   (b) terurut rapi
   (c) tidak terurut rapi
   (d) terurut rapi
   (e) tidak terurut rapi
   (f) tidak terurut rapi
4) (a) 0
   (b) 0
   (c) 5
   (d) −2
5) Dari $[x] \le x \le [x] + 1$ dapat ditentukan bahwa $[x] + k \le x + k \le [x] + k + 1.$ Karena $[x] + k$ adalah suatu bilangan bulat, maka $[x + k] = [x] + k.$
6) Jika x adalah suatu bilangan bulat, maka $[x] + [-x] = x - x = 0.$ Jika x bukan bilangan bulat, maka $x = z + r,$ di mana z adalah suatu bilangan bulat dan r adalah suatu bilangan riil dengan $0 < r < 1.$ Dengan demikian dapat ditentukan bahwa
$$[x] + [-x] = [z + r] + [-z - r] = z + (-z - 1) = -1.$$
7) Misalkan $x = [x] + r$ dengan $0 \le r < 1.$ Jika $r < (1/2),$ maka $x + (1/2) = [x] + \{r + (1/2)\} < [x] + 1$ karena $r + (1/2) < 1.$ Akibatnya, $[x + (1/2)] = [x],$ berarti $2x = 2[x] + 2r < 2[x] + 1$ karena $2r < 1.$
   Jadi $[2x] = 2[x].$

Jika $(1/2) \le r < 1$, maka $[x]+1 \le x+\{r+(1/2)\} < [x]+2$, berarti $[x]+(1/2) < [x]+1$.

Akibatnya,

$$2[x]+1 \le 2[x]+2r = 2([x]+r) = 2x < 2[x]+2$$

Sehingga

$[2x] = 2[x]+1$, dan $[x]+[x+(1/2)] = [x]+[x]+1 = 2[x]+1 = [2x]$

8) Misalkan $\sqrt{2}$ adalah suatu bilangan rasional, maka tentu ada bilangan-bilangan bulat a dan b sehingga $\sqrt{2} = a/b$. Akibatnya, $S = \left\{k\sqrt{2} \middle| k \in Z^+\right\}$ adalah suatu himpunan bilangan bulat positif yang tidak kosong, sehingga S mempunyai unsur terkecil $s = t\sqrt{2}$. Dengan demikian $s\sqrt{2} - s = s\sqrt{2} - t\sqrt{2} = (s-t)\sqrt{2}$.

Karena $s\sqrt{2} = 2t$ dan s merupakan bilangan-bilangan bulat, maka: $s\sqrt{2} - s = s\sqrt{2} - t\sqrt{2} = (s-t)\sqrt{2}$ juga merupakan suatu bilangan bulat, dan $s\sqrt{2} - s = s\left(\sqrt{2}-1\right) > 0$ karena $\sqrt{2} > 1$, $s\sqrt{2} - s < s$ karena $s = t\sqrt{2}$, $s\sqrt{2} = 2t$ dan $\sqrt{2} < 2$. Hal ini bertentangan dengan pemilihan s sebagai unsur bulat positif terkecil dari S. Jadi $\sqrt{2}$ adalah irasional.

Tes Formatif 2

Gunakan Prinsip Induksi Matematika beserta sifat-sifat notasi jumlah dan kali sehingga diperoleh:

1) $\sum_{t=2}^{5} 3 = 3+3+3+3 = 12$

2) $\prod_{k=2}^{6} 2 = 2.2.2.2 = 16$

3) $\sum_{r=1}^{5} \sum_{s=1}^{6} rs = \sum_{r=1}^{5} (r+2r+3r+4r+5r+6r) = \sum_{r=1}^{5} 21r = 21\sum_{r=1}^{5} r$

4) $\sum_{s=1}^{3} \prod_{t=1}^{4} st = \sum_{s=1}^{3} (s.2s.3s.4s) = \sum_{s=1}^{3} 24s^4 = 24\sum_{s=1}^{3} s^4$

5) $\sum_{s=1}^{t} \frac{1}{s(s+1)} = \sum_{s=1}^{t} (\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1})$

6) $\sum_{k=1}^{50} k^2 = \frac{1}{6}(50)(50+1)(100+1) = 42925$

7) $\sum_{m=1}^{n} m(m+1) = \sum_{m=1}^{n} (m^2 + m) = \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)$

$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

8) $\sum_{r=0}^{10} (-2)^r = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 - 512 + 1024 = 683$

9) $2 + 6 + 12 + ... + 110 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 10.11 = \frac{1}{3}.10.11.12 = 440$

Daftar Pustaka

Agnew, J. (1972). *Exploration in Number Theory*. Belmont: Brooks/Cole.

Anderson, J.A. and Bell, J.M. (1977). *Number Theory with Applications*. New Jersey: Prentice-Hall.

Niven, I., Zuckerman, H.S., and Montgomery, H.L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers*. New York: John Wiley & Sons.

Ore, O. (1948). *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill.

Redmond, D. (1996). *Number Theory*. New York: Marcel Dekker.

Rosen, K.H. (1993). *Elementary Number Theory and Its Applications*. Massachusetts: Addison-Wesley.