MODUL 1

Persamaan Diferensial: Pengertian, Asal Mula dan Penyelesaian

Drs. Sardjono, S.U.

PENDAHULUAN

Modul 1 ini berisi uraian tentang persamaan diferensial, yang mencakup pengertian-pengertian dalam persamaan diferensial, asal mula persamaan diferensial dan arti penyelesaian persamaan diferensial. Persamaan diferensial dalam praktik dapat dijumpai dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan antara lain Fisika, Teknik Kimia, Ekonomi dan Biologi. Dalam Statistika, persamaan diferensial dapat dijumpai dalam mata kuliah Proses Stokastik.

Bagi Anda, materi dalam modul ini merupakan suatu hal yang baru, belum pernah Anda jumpai ditingkat SLTA. Agar dapat mempelajari modul ini dengan baik, Anda harus sudah mempunyai pengetahuan yang cukup tentang derivatif dan integral, khususnya terampil mencari derivatif dan integral fungsi.

Dengan mempelajari modul ini Anda dapat memahami pengertian, asal mula dan penyelesaian persamaan diferensial, mencakup:

1. menerangkan pengertian persamaan diferensial;
2. menyebutkan tingkat dan pangkat suatu persamaan diferensial yang diberikan;
3. menuliskan persamaan diferensial dari masalah-masalah nyata yang sederhana;
4. menuliskan persamaan diferensial dari suatu primitif;
5. mencari persamaan diferensial dari keluarga kurva pada bidang datar;
6. menyelidiki dan menentukan apakah suatu fungsi yang diberikan merupakan penyelesaian suatu persamaan diferensial ataukah bukan;
7. mencari penyelesaian umum persamaan diferensial
   $y^{(n)} = G(x)$;

8. mencari penyelesaian khusus persamaan diferensial yang memenuhi sifat-sifat tertentu, jika penyelesaian umum atau primitifnya diberikan.

KEGIATAN BELAJAR 1

Definisi-definisi dan Asal Mula Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung derivatif-derivatif. Contoh-contoh persamaan diferensial:

1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$
2) $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$
3) $xy' + y = 3$
4) $y''' + 2y'' + y' = \sin x$
5) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$
6) $\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$
7) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$
8) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

Jika suatu persamaan mengandung satu atau lebih derivatif-derivatif terhadap suatu variabel tertentu, maka variabel ini disebut variabel bebas. Suatu variabel disebut tak bebas jika derivatif dari variabel ini ada.

Dalam persamaan diferensial 2), 4) dan 7) pada contoh di atas, x adalah variabel bebas, sedangkan y adalah variabel tak bebas.

Persamaan diferensial 1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x+5}$

Dalam hal ini variabel manapun, x atau y dapat dipandang sebagai variabel bebas, dan yang lain sebagai variabel tak bebas.

Dalam persamaan diferensial 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$$

terdapat dua variabel bebas yaitu *x* dan *y*, dan dalam persamaan diferensial 6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

terdapat tiga variabel bebas yaitu *t*, *x* dan *y*.

Jika dalam suatu persamaan diferensial hanya terdapat satu variabel bebas, maka derivatif yang terkandung dalam persamaan tersebut adalah derivatif biasa. Persamaan diferensial ini disebut persamaan diferensial biasa. Sebaliknya jika terdapat lebih dari satu variabel bebas, maka derivatif yang terkandung dalam persamaan tersebut merupakan derivatif parsial. Persamaan diferensial ini disebut **persamaan diferensial parsial**. Pada contoh-contoh di depan, persamaan 1), 2), 3), 4) dan 7) adalah persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan 5), 6) dan 8) adalah persamaan diferensial parsial.

Tingkat atau **order** dari suatu persamaan diferensial adalah tingkat dari tingkat tertinggi derivatif yang terkandung dalam persamaan diferensial tersebut. Pada contoh di depan, persamaan 1), 3) dan 5) adalah persamaan diferensial tingkat satu, persamaan 2), 6), 7) dan 8) adalah persamaan diferensial tingkat dua dan persamaan 4) adalah persamaan diferensial tingkat tiga.

Pangkat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari derivatif tingkat tertinggi yang terkandung dalam persamaan diferensial tersebut. Pada contoh di depan, persamaan 7) adalah persamaan diferensial pangkat dua, sedangkan semua persamaan yang lainnya adalah persamaan diferensial pangkat satu.

Dalam persoalan nyata, persamaan diferensial dapat dijumpai dalam Ilmu Fisika, Teknik, Biologi, Ekonomi, dan sebagainya. Dengan demikian persamaan diferensial mungkin timbul sebagai masalah Fisika, mungkin sebagai masalah Teknik dan mungkin pula sebagai masalah Biologi atau Ekonomi. Kadang-kadang pula persamaan diferensial timbul sebagai masalah geometri.

Contoh 1:

Seratus gram gula dilarutkan dalam air dengan kecepatan melarut sebanding dengan jumlah gula yang belum terlarutkan. Tentukan persamaan diferensial yang menyatakan kecepatan melarut setelah *t* menit!

Jawab:

Misalkan *y* adalah jumlah gula yang melarut setelah *t* menit. Maka kecepatan melarut gula tersebut adalah $\frac{dy}{dt}$. Jumlah gula yang belum terlarutkan adalah 100 - *y*. Jadi kecepatan melarut gula tersebut memenuhi persamaan $\frac{dy}{dt} = k(100 - y)$ dengan *k* adalah konstan pembanding.

Contoh 2:

Populasi ikan dalam suatu kolam naik dengan kecepatan sebanding dengan jumlah ikan dalam kolam tersebut. Tentukan persamaan diferensial yang menyatakan naiknya jumlah ikan setelah *t* minggu!

Jawab:

Misalkan *x* adalah populasi atau jumlah ikan setelah *t* minggu. Maka kecepatan naiknya jumlah ikan adalah $\frac{dx}{dt}$, memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \text{ dengan } k \text{ adalah konstan pembanding.}$$

Contoh 3:

Pada suatu kurva diketahui bahwa gradien garis singgung di setiap titik (*x*,*y*) yaitu $\frac{dy}{dx}$, adalah dua kali jumlah dari koordinat titik tersebut. Nyatakan persamaan diferensial yang dipenuhi oleh kurva tersebut!

Jawab:

Misalkan $y = f(x)$ adalah persamaan kurva tersebut. Disetiap titik (x,y) pada kurva ini, gradien kurva sama dengan $\frac{dy}{dx}$ dan jumlah koordinat titik tersebut adalah $x+y$. Jadi kurva f memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+y).$$

Contoh 4:

Di setiap titik (x,y) pada suatu kurva $y = f(x)$, gradien garis singgung pada kurva tersebut adalah sama dengan kuadrat dari absis titik tersebut. Tentukan persamaan diferensial yang dipenuhi oleh kurva f !

Jawab:

Gradien garis singgung dititik (x,y) pada kurva $y = f(x)$ adalah $\frac{dy}{dx}$, dan kuadrat dari absis titik tersebut adalah x^2. Jadi kurva f memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = x^2.$$

Contoh 5:

Pada suatu kurva diketahui bahwa gradien garis normal disetiap titik (x,y) pada kurva tersebut adalah sama dengan lima kali absis titik tersebut. Tentukan persamaan diferensial dari kurva ini!

Jawab:

Misalkan persamaan kurva tersebut adalah $y = g(x)$, maka gradien garis normal di titik (x,y) pada kurva ini adalah $-\frac{dx}{dy}$. Jadi persamaan diferensial dari kurva tersebut adalah

$$-\frac{dx}{dy} = 5x \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5x} \ .$$

Contoh 6:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dengan $f(x) > 0$, sumbu x, dan dua garis tegak, yang pertama tetap dan yang kedua variabel, diketahui sama dengan tiga kali panjang kurva tersebut diantara kedua buah garis tegak tersebut. Tentukan persamaan diferensial dari kurva f !

Jawab:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva f, sumbu x, garis $x = a$ dan garis variabel $x = x$ adalah

$$\int_a^x f(x)dx \text{ atau } \int_a^x y\ dx$$

sedangkan panjang kurva f diantara kedua garis tegak tersebut adalah

$$\int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\ dx.$$

Jadi persamaan diferensial dari kurva f adalah

$$\int_a^x y\ dx = 3\int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\ dx \text{ atau}$$

$$\mathrm{y} = 3\sqrt{1+(y')^2}.$$

Persamaan diferensial dapat diperoleh dalam banyak cara. Suatu cara diantaranya adalah dari primitif. Suatu **primitif** adalah suatu relasi antara variabel-variabel yang mengandung sejumlah konstan sembarang.

Persamaan-persamaan:

$$y = x^4 + Cx; \text{ C konstan sembarang;}$$

$$y = Ax^2 + Bx; \text{ A, B konstan sembarang;}$$

$$(x-C)^2 + (y-D)^2 = 1; \text{ C, D konstan sembarang;}$$

adalah primitif-primitif. Suatu primitif dengan n konstan sembarang, seluruh n konstan ini disebut murni jika mereka tidak dapat diganti dengan sejumlah konstan sembarang yang lebih kecil. Konstan sembarang A dan B dalam persamaan

$$y = Ae^{3x} + Bx$$

adalah murni. Demikian pula konstan sembarang C dan D dalam persamaan

$$(x - C)^2 + Dy = 0$$

juga murni. Tetapi konstan sembarang A, B dan persamaan

$$y = Cxe^{x+B} + Ax^2$$

tidak murni, sebab persamaan ini dapat ditulis dengan

$$y = Dxe^{x} + Ax^2$$

dimana $D = C\,e^{B}$. Dengan kata lain ketiga buah konstan sembarang A, B dan C dapat diganti dengan dua buah konstan sembarang D dan A. Jadi konstan sembarang A, B dan C dalam persamaan tersebut tidak murni. Untuk selanjutnya yang dimaksud dengan konstan sembarang adalah konstan sembarang murni.

Misalkan diberikan suatu primitif dengan n konstan sembarang. Persoalannya adalah bagaimana persamaan diferensial yang memenuhi sifat-sifat:

a. tingkat dari persamaan diferensial adalah sama dengan jumlah konstan sembarang dalam primitif yaitu n;
b. konsisten dengan primitif, artinya dipenuhi oleh primitif tersebut;
c. bebas dari konstan sembarang.

Persamaan diferensial yang memenuhi sifat-sifat di atas ini dapat diperoleh dengan mengeliminasi n buah konstan sembarang tersebut dari primitif dan dari derivatif-derivatif sampai tingkat n. Dari hasil eliminasi ini akan diperoleh persamaan diferensial yang dimaksud.

Contoh 7:

Tentukan persamaan diferensial yang konsisten dengan primitif

$$y = Ae^{-2x} + Be^{3x} \qquad (1)$$

Jawab:

Karena terdapat dua konstan sembarang dalam primitif tersebut, maka kita harus mencari lebih dahulu derivatif dari y sampai tingkat dua.

$$y' = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x} \tag{2}$$
$$y'' = 4Ae^{-2x} + 9Be^{3x} \tag{3}$$

Selanjutnya *A* dan *B* dieliminasi dari persamaan (1), (2) dan (3). Eliminasi *A* dari (1), (2) didapat

$$2y + y' = 5Be^{3x} \tag{4}$$

dan eliminasi *A* dari (2) dan (3) didapat

$$2y' + y'' = 15Be^{3x} \tag{5}$$

Akhirnya eliminasi *B* dari (4) dan (5) didapat

$$3(2y + y') - (2y' + y'') = 0 \text{ atau } y'' - y' - 6y = 0.$$

Contoh 8:

Carilah persamaan diferensial dari primitif

$$(x - A)^2 + y^2 = A^2 \tag{6}$$

Jawab:

Primitif ini mengandung sebuah konstan sembarang. Dengan mengambil derivatif terhadap *x* dari persamaan (6) didapat

$$\frac{d}{dx}\left[(x - A)^2 + y^2\right] = \frac{d}{dx}A^2$$
$$2(x - A) + 2yy' = 0$$
$$A = x + yy'$$

Dengan memasukan A ke persamaan (6) didapat

$$(x - x - yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2 \text{ atau } 2\text{xyy}' + x^2 - y^2 = 0$$

Contoh 9:

Eliminasikan *B* dan α dari persamaan

$$x = B\cos(\omega t + \alpha); \omega \quad \text{konstan tertentu}$$

Jawab:

Dari primitif ini, ambil derivatif sampai tingkat dua terhadap t, maka akan didapat

$$\frac{dx}{dt} = -\omega B \sin(\omega t + \alpha) \tag{7}$$

$$\text{dan } \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 B \cos(\omega t + \alpha) \tag{8}$$

Dari primitif dan persamaan (8), segera diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x = 0$$

Contoh 10:

Tentukan persamaan diferensial dari primitif

$$Cxy + C^2x + 4 = 0.$$

Jawab:

Ambil derivatifnya terhadap x, didapat

$$C(y + xy') + C^2 = 0$$

karena $C \neq 0$, maka $C = -(y + xy')$, masukkan hasil ini ke dalam primitif, didapat

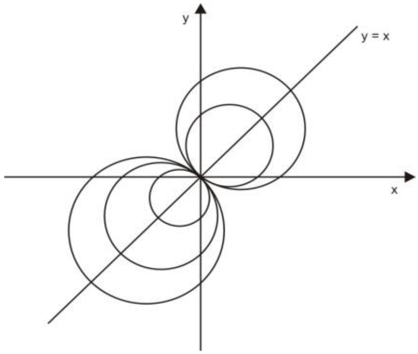
$$-(y + xy')\,xy + \left[-(y + xy')\right]^2 x + 4 = 0$$

$$\text{atau } x^3(y')^2 + x^2yy' + 4 = 0.$$

Suatu primitif dengan variabel x dan y dalam bidang datar xy akan menyajikan keluarga kurva. Setiap kurva anggota keluarga ini akan berkorespondensi dengan nilai tertentu dari konstan sembarang yang terdapat dalam primitif tersebut. Sebagai contoh, persamaan

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = 2C^2 \tag{9}$$

adalah persamaan lingkaran pusat (C,C) dan jari-jari $C\sqrt{2}$, jari-jari lingkaran ini sama dengan jarak pusat lingkaran ke titik pangkal koordinat 0(0,0). Jadi persamaan (9) menyajikan keluarga lingkaran-lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $y = x$ dan masing-masing anggota melalui titik 0(0,0). Gambar 1.1 di bawah ini menunjukkan gambar beberapa anggota keluarga lingkaran tersebut.



Gambar 1.1

Jika konstan C dalam persamaan (9) dieliminasi seperti dalam mencari persamaan diferensial dari suatu primitif, maka hasil yang diperoleh disebut persamaan diferensial dari keluarga kurva yang disajikan oleh persamaan (9). Dalam contoh ini,

$$\frac{dx}{dt}\left[(x-C)^2+(y-C)^2\right]=\frac{d}{dx}2C^2$$

$$2(x-C)+2(y-C)\frac{dy}{dx}=0$$

$$C=\frac{x+y}{1+\dfrac{dy}{dx}}$$

Masukkan hasil ini ke persamaan (9) akan didapat

$$\left[x-\frac{x+y}{1+\dfrac{dy}{dx}}\right]^2+\left[y-\frac{x+y}{1+\dfrac{dy}{dx}}\right]^2=2\left[\frac{x+y}{1+\dfrac{dy}{dx}}\right]^2$$

$$\text{atau}\,(x^2 - 2xy - y^2)\frac{dy}{dx} - (x^2 + 2xy - y^2) = 0 \qquad (10)$$

Jadi persamaan (10) adalah persamaan diferensial dari keluarga lingkaran-lingkaran persamaan (9).

Perhatikan bahwa persamaan (10) akan menentukan gradien dari garis singgung disetiap titik (x,y) pada keluarga lingkaran (9),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$$

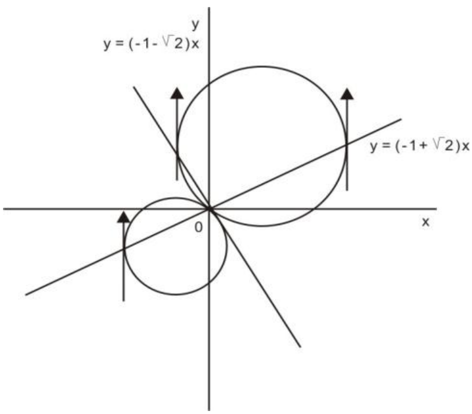
Garis singgung ini akan tegak lurus sumbu x jika $\frac{dy}{dx} = \infty$ atau jika $x^2 - 2xy - y^2 = 0$,

yaitu jika $y = (-1 + \sqrt{2})\ x$ (11)

atau $y = (-1 - \sqrt{2})\ x$ (12)

Jadi, disetiap titik (x,y) pada anggota keluarga kurva (9) yang terletak pada garis lurus (11) atau (12), garis singgung pada anggota keluarga tersebut akan tegak lurus pada sumbu x.

Gambar 1.2 di bawah ini memperlihatkan 2 anggota keluarga lingkaran (9), garis lurus (11) dan (12) dan garis singgung lingkaran di titik yang terletak pada garis lurus tersebut.



Gambar 1.2

Contoh 11:

Tentukan persamaan diferensial dari keluarga parabola-parabola yang puncaknya dititik 0(0,0) dan sumbu simetrisnya adalah sumbu *y*.

Jawab:

Keluarga parabola yang puncaknya dititik 0(0,0) dan sumbu simetrisnya sumbu *y*, mempunyai persamaan

$$y = ax^2,\ a \text{ konstan sembarang}$$

Ambil derivatifnya terhadap *x* didapat

$$y' = 2ax$$

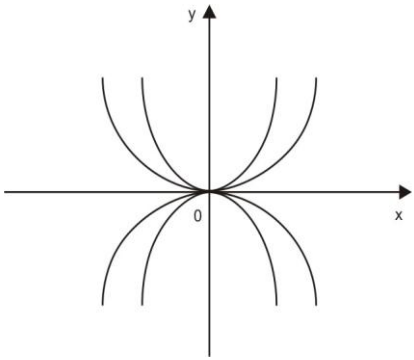
Eliminasi *a* dari kedua buah persamaan ini akan didapat

$$x^2 y' - 2xy = 0 \text{ atau}$$

$$xy' - 2y = 0 \text{ atau } x\,dy - 2y\,dx = 0,$$

sebab $x = 0$ masih memenuhi persamaan yang terakhir ini.

Beberapa anggota keluarga dari parabola-parabola $y = ax^2$ terlihat dalam Gambar 1.3 berikut ini.



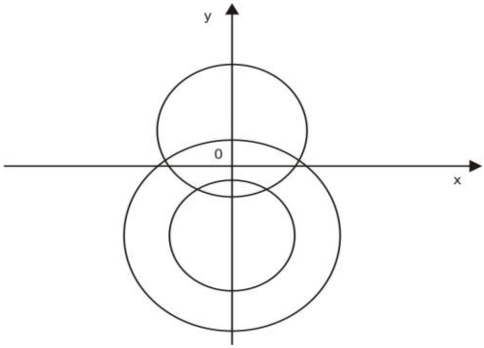
Gambar 1.3

Contoh 12:

Tentukan persamaan diferensial dari keluarga lingkaran-lingkaran yang pusatnya terletak pada sumbu *y*.

Jawab:

Beberapa anggota dari keluarga lingkaran-lingkaran ini tampak dalam Gambar 1.4 berikut ini.



Gambar 1.4

Misalkan pusat lingkaran (0,A) dan jari-jari B. Maka keluarga lingkaran-lingkaran ini mempunyai persamaan

$$x^2 + (y - A)^2 = B^2;\ A,\ B \text{ konstan sembarang.}$$

A dan B akan dieliminasi dengan lebih dahulu mencari derivatif sampai tingkat dua terhadap x,

$$2x + 2(y - A)y' = 0 \tag{13}$$

$$\text{dan } 2 + 2(y')^2 + 2(y - A)y'' = 0 \tag{14}$$

Eliminasi A dari persamaan (13) dan (14) akan didapat

$$xy'' - (y')^3 - y' = 0$$

Contoh 13:

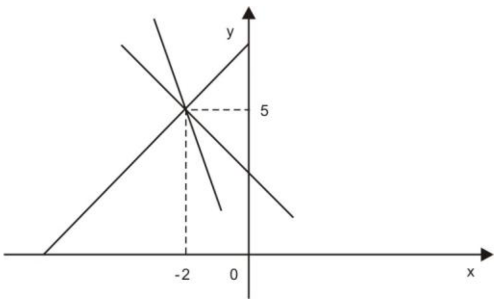
Tentukan persamaan diferensial dari keluarga garis-garis lurus yang melalui titik (-2,5).

Jawab:

Keluarga garis-garis lurus yang melalui titik (-2,5) mempunyai persamaan

$$y-5=m(x+2);\ m \text{ konstan sembarang.}$$

Beberapa anggota keluarga ini terlihat dalam Gambar 1.5.



Gambar 1.5

Dari persamaan $y-5=m(x+2)$, maka $y'=m$

Jadi $y-5=y'(x+2)$ atau $(x+2)y'-(y-5)=0$.

Contoh 14:

Carilah persamaan diferensial dari keluarga lingkaran-lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $y = a$ dan jari-jarinya r dengan a dan r konstan tertentu.

Jawab:

Pusat lingkaran terletak pada garis $y = a$, maka pusat lingkaran-lingkaran ini adalah (A,a) dengan A konstan sembarang. Jadi keluarga lingkaran-lingkaran tersebut mempunyai persamaan

$$(x-A)^2+(y-a)^2=r^2,$$

dengan A konstan sembarang, a dan r tetap.

Ambil derivatif terhadap x dari persamaan tersebut, didapat

$$2(x-A)+2(y-a)y'=0$$

Dengan eliminasi A dari kedua persamaan ini akan didapat

$$(y-a)^2(y')^2+(y-a)^2=r^2.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebutkan, apakah persamaan diferensial berikut ini merupakan persamaan diferensial biasa ataukah persamaan diferensial parsial. Sebutkan juga tingkat dan pangkat dari persamaan diferensial ini!

   a. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$

   b. $(x^2+y^2)\,dx+2xy\;dy=0$

   c. $y'''-3(y')^2+2y=0$

   d. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

   e. $x\dfrac{d^2y}{dt^2}-y\dfrac{d^2x}{dt^2}=5$

   f. $y''+2y'-8y=x^2+\cos x$

   g. $y'+P(x)y=Q(x)$

   h. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

   i. $x(y'')^3+(y')^4-y=0$

   j. $\dfrac{d^4y}{dx^4}=h(x).$

2) Ke dalam sebuah tabung silinder dimasukkan air sedemikian hingga volume air dalam tabung bertambah dengan kecepatan lima kali tinggi air dalam tabung. Jika jari-jari tabung ini 3, tentukan persamaan

diferensial yang menunjukkan kecepatan naiknya permukaan air dalam tabung tersebut!

3) Gradien garis singgung disetiap titik (x,y) pada kurva $y = f(x)$ diketahui sama dengan tiga kali absis titik tersebut. Tentukan persamaan diferensial yang dipenuhi oleh kurva tersebut!

4) Tentukan persamaan diferensial dari primitif berikut ini!
   a. $y = A + Be^{-4x}$
   b. $y = Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x$
   c. $y = C_1 x^2 + C_2 e^{2x}$
   d. $y^2 = -Cx^2 - x$
   e. $x \sin y + x^2 y = C$

5) Tentukan persamaan diferensial dari keluarga lingkaran yang menyinggung sumbu x!

6) Tentukan persamaan diferensial dari keluarga parabola-parabola yang puncaknya terletak pada sumbu y, sumbu simetrisnya sejajar sumbu x dan jarak titik fokus ke puncak parabola 5!

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a) Persamaan diferensial biasa tingkat dua pangkat satu
   b) Persamaan diferensial biasa tingkat satu pangkat satu
   c) Persamaan diferensial biasa tingkat tiga pangkat satu
   d) Persamaan diferensial parsial tingkat dua pangkat satu
   e) Persamaan diferensial biasa tingkat dua pangkat satu
   f) Persamaan diferensial biasa tingkat dua pangkat satu
   g) Persamaan diferensial biasa tingkat satu pangkat satu
   h) Persamaan diferensial parsial tingkat dua pangkat satu
   i) Persamaan diferensial biasa tingkat dua pangkat tiga
   j) Persamaan diferensial biasa tingkat empat pangkat satu.

2) Misalkan V adalah volume air dalam tabung pada saat permukaan air mencapai tingkat h dari dasar tabung maka

$$\frac{dV}{dt} = 5h \text{ karena}$$

$$V = \pi.3^2.h, \text{ maka } 9\pi \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = 5R \text{ atau } \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = \frac{5h}{9\pi}$$

3) $\dfrac{dy}{dx} = 3x$

4) Petunjuk : Eliminasikan semua konstan sembarang yang terdapat pada primitif
   a. $y'' + 4y' = 0$
   b. $y'' - 4y' + 13y = 0$
   c. $x(1-x)y'' + (2x^2 - 1)y' - 2(2x-1)y = 0$
   d. $(x + 2y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
   e. $(\sin y + 2xy)\,dx + (x \cos\ y + x^2)\,dy = 0.$

5) $\left[1 + (y')^2\right]^2 = \left[yy'' + 1 + (y')^2\right]^2$

   Petunjuk : Keluarga lingkaran-lingkaran ini mempunyai persamaan $(x - A)^2 + (y - B)^2 = B^2$; A, B konstan sembarang. Eliminasikan A dan B.

6) $x(y')^2 = 5$

   Petunjuk : Keluarga parabola-parabola ini mempunyai persamaan $(y + A)^2 = 20x; A$ konstan sembarang. Eliminasikan A.

RANGKUMAN

1) Pengertian-pengertian dalam kegiatan belajar 1: variabel bebas, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, tingkat suatu persamaan diferensial, pangkat suatu persamaan diferensial dan primitif;
2) Persamaan diferensial dapat dijumpai dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan;
3) Persamaan diferensial dapat diperoleh juga dari primitif dengan cara mengeliminasi konstan-konstan sembarang yang terdapat dalam primitif tersebut;
4) Persamaan diferensial dari keluarga kurva pada bidang datar dapat dicari dengan cara seperti dalam mencari persamaan diferensial dari primitif. Sebelumnya harus dicari lebih dahulu persamaan dari keluarga kurva tersebut.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Sebuah lingkaran bertambah luas dengan kecepatan berbanding lurus dengan jari-jari lingkaran tersebut. Jika R adalah jari-jari lingkaran tersebut pada saat t, maka jari-jari lingkaran tersebut memenuhi persamaan diferensial ….
   A. $\pi\, dR - kR\, dt = 0, k$ konstan pembanding
   B. $2\pi\, dR - k\ dt = 0,\ k$ konstan pembanding
   C. $2\pi\, R\ dR - k\ dt = 0,\ k$ konstan pembanding
   D. $\pi R^2\ dR - k\ dt = 0,\ k$ konstan pembanding

2) Gradien garis normal disetiap titik pada kurva *y* = *f(x)* diketahui sama dengan hasil kali absis dan ordinat titik tersebut. Maka kurva tersebut memenuhi persamaan ….
   A. $xy\, dx - dy = 0$
   B. $xy\, dx + dy = 0$
   C. $dx - xy\, dy = 0$
   D. $dx + xy\, dy = 0$

Untuk soal nomor 3 sampai dengan nomor 6, tentukan persamaan diferensial dari primitif yang diberikan

3) $ln\, y = Ax^2 + B$
   Jawab:
   A. $xyy'' + yy' - x(y')^2 = 0$
   B. $xyy'' + yy' + x(y')^2 = 0$
   C. $xyy'' - yy' - x(y')^2 = 0$
   D. $xyy'' - yy' + x(y')^2 = 0$

4) $xy^2 - 1 = Cy$
   Jawab:
   A. $y^3\, dx + (xy^2 + 1)\, dy = 0$
   B. $y^2\, dx + (xy^2 + 1)\, dy = 0$

C. $y^3\, dx + (xy+1)\, dy = 0$

D. $y^2\, dx + (xy+1)\, dy = 0$

5) $x = A\cos \omega t + B\sin \omega t,\ \omega$ konstan tertentu

Jawab:

A. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 t = 0$

B. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega t = 0$

C. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

D. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0$

6) $y = x^2 + C_1 x + C_2 e^{-x}$

Jawab:

A. $(x+y)y'' - xy' + y = x^2 + 2x + 2$

B. $(x+y)y'' + xy' - y = x^2 + 2x + 2$

C. $(x+y)y'' + xy' + y = x^2 + 2x + 2$

D. $(x+y)y'' - xy' - y = x^2 + 2x + 2$

7) Tentukan persamaan diferensial keluarga parabola-parabola yang puncaknya dan fokusnya terletak pada sumbu x!

Jawab:

A. $yy'' - (y')^2 = 0$

B. $yy'' + (y')^2 = 0$

C. $yy'' - x(y')^2 = 0$

D. $yy'' + x(y')^2 = 0$

8) Persamaan diferensial dari keluarga lingkaran-lingkaran pada bidang xy adalah ….

Jawab:

A. $\left[1-(y')^2\right]y''' - 3y'(y'')^2 = 0$

B. $\left[1-(y')^2\right]y''' + 3y'(y'')^2 = 0$

C. $\left[1+(y')^2\right]y''' - 3y'(y'')^2 = 0$

D. $\left[1+(y')^2\right]y''' + 3y'(y'')^2 = 0$

9) Tentukan persamaan diferensial dari keluarga lingkaran-lingkaran yang pusatnya di titik 0 (0,0)!

Jawab:

A. $x\,dx + y\,dy = 0$

B. $y\,dx + x\,dy = 0$

C. $x\,dx - y\,dy = 0$

D. $y\,dx - x\,dy = 0$

10) Tentukan persamaan diferensial dari keluarga garis-garis lurus yang berjarak 5 dari titik 0 (0,0)

Jawab:

A. $(xy' + y)^2 = 5\left[1+(y')^2\right]$

B. $(xy' + y)^2 = 25\left[1+(y')^2\right]$

C. $(xy' - y)^2 = 5\left[1+(y')^2\right]$

D. $(xy' - y)^2 = 25\left[1+(y')^2\right]$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Penyelesaian Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial tingkat n secara umum dapat disajikan dengan persamaan

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) \qquad (1)$$

Jika persamaan diferensial (1) berpangkat satu, maka ia dapat ditulis menjadi:

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Dengan suatu penyelesaian persamaan diferensial (2) dimaksud suatu fungsi $y = g(x)$ yang terdefinisikan dalam interval (a,b), dan yang mempunyai derivatif sampai tingkat n dalam interval tersebut sedemikian hingga persamaan (2) dipenuhi oleh fungsi tersebut. Sebagai contoh fungsi $y = g(x) = e^{2X}$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial

$$y'' - 4y = 0 \qquad (3)$$

sebab

$$y' = 2e^{2x},\ y'' = 4e^{2x}$$

sehingga

$$y'' - 4y = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$$

Fungsi $y = g_2(x) = 3e^{-2x}$ juga suatu penyelesaian persamaan diferensial (3), sebab

$$y' = -6e^{-2x},\ y'' = 12e^{-2x}$$

Jadi $$y'' - 4y = 12e^{-2x} - 12e^{-2x} = 0$$

Fungsi-fungsi $y = g_1(x) = e^{2x}$ dan $y = g_2(x) = 3e^{-2x}$ disebut penyelesaian khusus persamaan diferensial (3).

Persamaan diferensial (2) akan mempunyai penyelesaian yang dapat dituliskan dalam bentuk umum.

$$y = g(x, C_1, C_2, ..., C_n) \qquad (4)$$

dengan $C_1, C_2, ..., C_n$ adalah konstan-konstan sembarang. Jika fungsi g dalam persamaan (4) didapat dan ia sudah mencakup semua penyelesaian persamaan diferensial (2), maka (4) disebut penyelesaian umum persamaan diferensial (2). Sebagai contoh, penyelesaian umum persamaan diferensial (3) adalah:

$$y = C_1\ e^{2x} + C_2\ e^{-2x} \tag{5}$$

Penyelesaian khusus $y = g_1(x) = e^{2x}$ di atas, didapat jika $C_1 = 1$ dan $C_2 = 0.$ Dan penyelesaian khusus $y = g_2(x) = 3e^{-2x}$ didapat jika $C_1 = 0$ dan $C_2 = 3.$

Jika suatu persamaan diferensial tingkat n mempunyai bentuk persamaan

$$y^{(n)} = G(x) \tag{6}$$

dengan G terdefinisikan dan kontinu pada interval (a,b), maka penyelesaian umum persamaan diferensial ini dapat diperoleh dengan mengintegralkan *G(x) n* kali secara berurutan.

Contoh 1:

Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial $y' = 2x + 1$

Jawab:

$$\begin{aligned}
&y' = 2x + 1\\
&dy = (2x+1)\,dx\\
&\int dy = \int (2x+1)\,dx + C\\
&y = x^2 + x + C
\end{aligned}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial $y' = 2x + 1$ adalah $y = x^2 + x + C$ dengan C konstan sembarang.

Contoh 2:

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + x$

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + x$$

$$y = \int (e^{2x} + x)\, dx + C$$

$$y = \frac{1}{2}(e^{2x} + x^2) + C$$

Contoh 3:

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial $y'' = x^3 - \sin 2x$

Jawab:

$$y'' = x^3 - \sin 2x$$

karena *y*" adalah derivatif dari *y*', maka dengan tegralkan duakali berurutan didapat:

$$y' = \int (x^3 - \sin 2x)\, dx + C_1$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C_1$$

$$= \int \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C_1 \right] dx + C_2$$

$$= \frac{x^5}{20} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2$$

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut adalah:

$$y = \frac{x^5}{20} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2$$

Penyelesaian khusus suatu persamaan diferensial diperoleh dari penyelesaian umum dengan menambahkan syarat tertentu.

Contoh 4:

Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial $y' = 2x$. Kemudian carilah penyelesaian khusus yang melalui titik (1,4).

Jawab:

$$y' = 2x$$

Penyelesaian umum: $y = x^2 + C$

Penyelesaian khusus yang melalui titik (1,4) dapat diperoleh dengan memasukkan koordinat titik (1,4) ke penyelesaian umum, kemudian cari nilai *C*, dan akhirnya masukkan kembali nilai *C* ini ke penyelesaian umum tersebut.

$$4 = 1^2 + C;\ C = 3.$$

Jadi penyelesaian khusus yang melalui titik (1,4) adalah:

$$y = x^2 + 3.$$

Contoh 5:

Diberikan persamaan diferensial $y'' = x^2 - 1$.

a) Carilah penyelesaian umumnya, $y = g(x)$.
b) Carilah penyelesaian khusus yang memenuhi $g(0) = 1$ dan $g'(0) = 2$.
c) Carilah penyelesaian khusus yang memenuhi $g(1) = 2$ dan $g'(2) = 1$.
d) Carilah penyelesaian khusus yang melalui titik-titik (1,2) dan (3,5).

Jawab:

$$y'' = x^2 - 1$$

a) $$y' = \frac{x^3}{3} - x + C_1$$
$$y = g(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

b) Penyelesaian khusus memenuhi $g(0) = 1$ dan $g'(0) = 2$.
Maka: $C_2 = 1$ dan $C_1 = 2$

Jadi $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$

c) Penyelesaian khusus memenuhi $g(1) = 2$ dan $g'(2) = 1.$

Maka: $\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 2$

dan $\frac{2^3}{3} - 2 + C_1 = 1.$

Dari kedua buah persamaan ini didapat $C_1 = \frac{4}{12}$ dan $C_2 = \frac{25}{12}$

Jadi $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{12} + \frac{25}{12}$

atau $y = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2 + 4x + 25)$

d) Penyelesaian khusus melalui titik-titik (1,2) dan (3,5).
Maka

$2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + C_1 + C_2$ dan

$5 = \frac{3^4}{12} - \frac{3^2}{2} + 3C_1 + C_2$

Dari kedua buah persamaan ini didapat:

$C_1 = \frac{2}{12}$ dan $C_2 = \frac{27}{12}$

Jadi $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{12} + \frac{27}{12}$

atau $y = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2 + 2x + 27)$

Dari pembicaraan dalam Kegiatan Belajar 1 diketahui bahwa suatu persamaan diferensial dapat diperoleh dari suatu primitif. Jika suatu persamaan diferensial diketahui primitifnya, maka primitif ini merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut, dan Anda telah tahu bahwa primitif adalah fungsi yang mengandung konstan sembarang.

Suatu masalah, apakah primitif ini pasti merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut ? Untuk menjawab hal ini, pandanglah primitif $xy = C(x-1)(y-1)$.

Dengan mengambil derivatif terhadap x didapat:

$$x\frac{dy}{dx} + y = C\left[(x-1)\frac{dy}{dx} + (y-1)\right]$$

Selanjutnya dengan eliminasi C akan didapat persamaan diferensial

$$x\ (x-1)\ \frac{dy}{dx} + y\ \ (y-1) = 0.$$

Jadi persamaan diferensial ini mempunyai primitif

$$xy = C(x-1)(y-1).$$

Sekarang dapat Anda periksa bahwa y = 0 dan y = 1, keduanya merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Yang pertama, y = 0, dapat diperoleh dari primitif dengan mengambil C = 0, tetapi yang kedua, y = 1, tidak dapat diperoleh dari primitif tersebut. Jadi primitif $xy = C(x-1)(y-1)$ bukan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut, sebab tidak mencakup semua penyelesaian. Dari conntoh ini dapat diambil kesimpulan bahwa primitif belum tentu merupakan penyelesaian umum suatu persamaan diferensial.

Sekarang kita kembali ke contoh 4 dan contoh 5. Dari contoh 4 di atas, terdapat penyelesaian khusus persamaan diferensial $y' = 2x$ yang melalui titik (1,4) yaitu, $y = x^2 + 3$. Demikian pula dari contoh 5 bagian b), terdapat penyelesaian khusus persamaan diferensial $y'' = x^2 - 1$ yang memenuhi $y = 1$ dan $y' = 2$ untuk $x = 0$. Suatu masalah, apakah setiap persamaan diferensial

$$y' = F(x, y) \qquad (7)$$

terdapat penyelesaian yang melalui $(x_o,\ y_o)$?. Masalah yang sama untuk persamaan diferensial tingkat n

$$y^{(n)} = F(x,\ y,\ y^{(1)},\ y^{(2)}, ...,\ y^{(n-1)}) \qquad (8)$$

Adakah penyelesaian persamaan diferensial (8) yang memenuhi $y = y_o,\ y' = y'_o,\ y'' = y''_o,\ ...,\ y^{(n)} = y_o{}^{(n)}$ untuk $x = x_o$? Untuk itu pandanglah persamaan diferensial

$$y' = x^{-5/3} \tag{9}$$

Persamaan (9) mempunyai penyelesaian umum

$$y = -\frac{3}{2}x^{-2/3} + C \tag{10}$$

Penyelesaian khusus persamaan (9) yang melalui titik (1,0) ada, yaitu:

$$y = -\frac{3}{2}x^{-2/3} + \frac{3}{22} \tag{11}$$

Tetapi, adakah penyelesaian khusus yang melalui titik (0,1) ? Juga, adakah penyelesaian khusus yang melalui titik (0,7) ? Jelas bahwa tidak ada penyelesaian khusus persamaan diferensial (9) yang melalui titik (0,1) maupun titik (0,7). Kiranya terdapatnya penyelesaian khusus persamaan diferensial (7) yang melalui titik (x_o,y_o) perlu syarat-syarat tertentu. Syarat-syarat ini tercantum dalam Teorema Eksistensi untuk persamaan diferensial *y*' = *F*(*x*,*y*) seperti berikut ini.

Teorema Eksistensi untuk *y*' = *F*(*x*,*y*)

Misalkan $D = \{(x, y) | \ |x - x_o| \le a, |y - y_o| \le b \}$ dan misalkan *F*(*x*,*y*) dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ kontinu dalam *D*. Maka terdapat dengan tunggal $y = f(x), |x - x_o| \le h,$ dengan sifat:

a) $y' = F(x, y)$ untuk $|x - x_o| \le h$

b) $y_o = f(x_o)$

c) $|f(x) - y_o| \le b$ untuk $|x - x_o| \le h$

Teorema eksistensi ini menjamin terdapatnya penyelesaian persamaan diferensial *y*' = *F*(*x*,*y*) yang melalui titik (x_o,y_o) asal *F*(*x*,*y*) dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ kontinu dalam daerah disekitar (x_o,y_o). Bukti teorema ini memerlukan pengetahuan matematik yang lebih tinggi, sehingga tidak perlu disajikan di sini.

Sampai sejauh ini, baru dibicarakan asal mula persamaan diferensial, cara mencari persamaan diferensial dari primitif, cara mencari persamaan diferensial dari keluarga kurve pada bidang datar dan cara mencari penyelesaian umum dan penyelesaian khusus persamaan diferensial yang berbentuk $y^{(n)} = F(x)$. Dalam modul-modul berikutnya akan dibicarakan cara mencari penyelesaian umum persamaan diferensial yang mempunyai bentuk persamaan yang lain. Sebelum Anda pelajari modul-modul tersebut, kerjakan lebih dahulu soal-soal latihan dan Tes Formatif dalam Kegiatan Belajar 2 ini.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan bahwa $y = 2x + Ce^x$ adalah primitif dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} - y = 2(1-x)$.
   Kemudian carilah penyelesaian khusus yang memenuhi $y = 3$ untuk $x = 0$.

2) Perlihatkan bahwa $(y-C)^2 = Cx$ adalah primitif persamaan diferensial $4x\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$
   Selanjutnya carilah penyelesaian yang memenuhi $y = 2$ untuk $x = 1$.

3) Persamaan diferensial $(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$ mempunyai penyelesaian umum: $y = C_1x + C_2e^x$.
   Carilah penyelesaian khusus yang melalui titik-titik (0,1) dan (1,0).

4) Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial $y' = 2x - e^{-x}$ kemudian tentukan penyelesaian khusus yang melalui titik (0,3)!

5) Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos \pi x$, selanjutnya carilah penyelesaian khusus yang memenuhi $y' = 5$ dan $y = \frac{1}{\pi^2}$ untuk $\mathrm{x} = 0$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) *Petunjuk*: untuk membuktikannya, carilah persamaan diferensial dari primitif $y = 2x + Ce^x$, akan didapat $\frac{dy}{dx} - y = 2(1 - x)$.

   Penyelesaian khusus yang memenuhi y = 3 untuk x = 0 adalah $y = 2x + 3e^x$.

2) Petunjuk sama seperti soal nomor 1. Penyelesaian khusus yang memenuhi y = 2 untuk x = 1 adalah $(y-1)^2 = x$ dan $(y-4)^2 = 4x$.

3) *Petunjuk*: masukkan koordinat titik-titik (0,1) dan (1,e) ke persamaan $y = C_1x + C_2e^x$ untuk memperoleh C_1 dan C_2. Akhirnya dapatkan penyelesaian khusus $y = e^x$.

4) Penyelesaian umum: $y = x^2 + e^{-x} + C$

   Penyelesaian khusus: $y = x^2 + e^{-x} + 2$.

5) Penyelesaian umum: $y = -\frac{\cos \pi x}{\pi^2} + Ax + B$

   Penyelesaian khusus: $y = -\frac{1}{\pi^2}(-\cos \pi x + 5\pi^2 x + 2)$

RANGKUMAN

1) Suatu penyelesaian dari suatu persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut.
2) Penyelesaian umum suatu persamaan diferensial adalah fungsi yang mengandung konstan-konstan sembarang dan yang mencakup semua penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut.
3) Penyelesaian khusus suatu persamaan diferensial adalah penyelesaian yang mempunyai sifat-sifat tertentu, dapat diperoleh dari penyelesaian umum dan kadang-kadang dapat diperoleh dari primitif. Penyelesaian umum persamaan diferensial $y^{(n)} = G(x)$ didapat dengan mengintegralkan fungsi $G(x)$ n kali secara berurutan.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Persamaan diferensial $y' = xe^x$ mempunyai penyelesaian umum.
   A. $y = xe^x + C$
   B. $y = -xe^x + e^{-x} + C$
   C. $y = xe^x + e^x + C$
   D. $y = xe^x - e^x + C$

2) Penyelesaian umum persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = x \cos 3x - 5$ adalah ….
   A. $y = 1/9\ (3x \sin 3x - \cos 3x - 45x) + C$
   B. $y = 1/9\ (3x \sin 3x + \cos 3x - 45x) + C$
   C. $y = 1/9\ (-3x \sin 3x + \cos 3x - 45x) + C$
   D. $y = 1/9\ (3x \cos 3x + \sin 3x - 45x) + C$

3) Diketahui penyelesaian umum persamaan diferensial $(1 + \ln x)\, dx + (1 + \ln y)\, dy = 0$ adalah $x \ln x + y \ln y = C$. Maka penyelesaian khusus yang melalui titik (e^2, e^{-1}) adalah ….
   A. $x \ln x + y \ln y + 2e^2 + e^{-1} = 0$
   B. $x \ln x + y \ln y - 2e^2 - e^{-1} = 0$
   C. $x \ln x + y \ln y - 2e^2 + e^{-1} = 0$
   D. $x \ln x + y \ln y + 2e^2 - e^{-1} = 0$

4) Diketahui persamaan diferensial $(x + 2y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$ mempunyai primitif $Cx^2 + x + y^2 = 0$. Maka penyelesaian khusus persamaan diferensial tersebut yang melalui titik (-1,2) adalah ….
   A. $3x^2 + x + y^2 = 0$
   B. $3x^2 - x - y^2 = 0$
   C. $2x^2 - x - y^2 = 0$
   D. $2x^2 + x + y^2 = 0$

5) Penyelesaian khusus persamaan diferensial $y'' - 6x + e^{-x} = 0$ yang melalui titik (0,4) dan (-1,-e) adalah ….
A. $y = x^3 - e^{-x} + 4x + 5$
B. $y = -x^3 + e^{-x} + 4x + 5$
C. $y = -x^3 + e^{-x} - 4x - 5$
D. $y = x^3 + e^{-x} - 4x - 5$

6) Penyelesaian khusus persamaan diferensial $y'' = \sin x + e^{2x}$ yang memenuhi $y' = 1/2$ dan $y = -3/4$ untuk $x = 0$ adalah ….
A. $y = \sin x + \frac{1}{4}e^{2x} + 2x - 1$
B. $y = -\sin x + \frac{1}{4}e^{2x} + 2x - 1$
C. $y = \sin x + \frac{1}{4}e^{2x} + x - 1$
D. $y = -\sin x + \frac{1}{4}e^{2x} + x - 1$

7) Penyelesaian umum persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - xe^{-x} = 0$ adalah ….
A. $y = xe^{-x} + 2e^{-x} + Cx + D$
B. $y = -xe^{-x} + 2e^{-x} + Cx + D$
C. $y = xe^{-x} - 2e^{-x} + Cx + D$
D. $y = -xe^{-x} - 2e^{-x} + Cx + D$

Petunjuk: Pilihlah
A. Jika (1) dan (2) benar
B. Jika (1) dan (3) benar
C. Jika (2) dan (3) benar
D. Jika (1), (2) dan (3) benar semua.

8) Persamaan diferensial $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ mempunyai penyelesaian khusus ….
(1) $y = 2x^2 + e^x$
(2) $y = -5x + 2e^x$

(3) $y = 2x - 3e^x$

9) Persamaan diferensial $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$ mempunyai penyelesaian khusus.
   (1) $y = 2x^2 + x^2 \ln x + x$
   (2) $y = 5x^2 - 6x^2 \ln x + x + \frac{1}{6} x^2 (\ln x)^2$
   (3) $y = x^2 - x + \frac{1}{6} x^2 (\ln x)^2$

10) Fungsi-fungsi
   (1) $y = 2e^x - x^2 - 2x - 2$
   (2) $y = 12x^2 + 6x + 6$
   (3) $y = e^x + x^2 + 2x + 2$

   adalah penyelesaian khusus dari persamaan diferensial $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B

   Petunjuk : Misalkan V = luas lingkaran. Maka $V = \pi R^2$.

   Dari $\dfrac{dV}{dt} = kR$, *dapatkan* $2\pi R \dfrac{dR}{dt} = kR$.

2) D

   Petunjuk : gradien garis normal adalah $-\dfrac{dx}{dy}$

3) C

4) A

5) C

6) B

Petunjuk : Eliminasikan konstan-konstan sembarang yang terdapat dalam primitif.

7) B

   Petunjuk : Persamaan keluarga parabola-parabola: $y^2 = A(x - B)$

8) D

   Petunjuk : Persamaan keluarga lingkaran-lingkaran: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

9) A

   Petunjuk : Persamaan keluarga lingkaran-lingkaran: $x^2 + y^2 = A^2$.

10) D

   Petunjuk : Persamaan keluarga garis-garis lurus: $Cx \pm \sqrt{(5 - C^2)}\ y = 5$.

Tes Formatif 2

1) D
   Petunjuk : integrasikan fungsi xe^x.

2) B

3) C
   Petunjuk : Masukkan koordinat titik (e^2, e^{-1}) ke dalam penyelesaian umum untuk mendapatkan nilai *C*.

4) B
   Petunjuk : Masukkan koordinat titik (-1,2) ke dalam primitif untuk mendapatkan nilai *C*.

5) A
   Petunjuk : Carilah dahulu penyelesaian umumnya, kemudian masukkan koordinat titik (0,4) dan (-1,-e) ke dalam penyelesaian umum tersebut untuk mendapatkan konstan-konstan sembarang yang ada.

6) D
   Petunjuk : Carilah lebih dahulu penyelesaian umumnya kemudian masukkan syarat-syarat yang harus dipenuhi untuk mendapatkan konstan-konstan sembarang yang ada.

7) A

8) C
   Petunjuk : Untuk masing-masing fungsi dalam persamaan (1), (2) dan (3), selidikilah, apakah memenuhi persamaan diferensial tersebut ataukah tidak.

9) C

10) B

Daftar Pustaka

Braver, Nohel, John A, *Problems and Solutions in Ordinary Differential Equations*. W.A Benyamin, Inc.

Frank Ayres, Jr, *Theory and Problems of Differential Equations*. Schaum Publishing Co.

Kaplan. W, *Ordinary Differential Equations*. Addison Wesley Publishing Co, Inc.

Rainville, Earld & Bedient, Phillip E. (1974). *Elementary Differential Equations*. fifth edition, Macmillan Publishing Co, Inc.