MODUL 1

Teori Himpunan

Dr. Subanar

PENDAHULUAN

Karena banyak karakteristik dari masalah probabilitas dapat dinyatakan secara formal dan dimodelkan secara ringkas dengan menggunakan notasi himpunan elementer, maka pertama-tama kita pelajari teori himpunan.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat: melakukan operasi himpunan; menghitung titik sampel; menentukan ruang sampel diskrit dan kontinu dan melakukan perkalian himpunan.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan dan Operasinya

Suatu *himpunan* adalah koleksi objek yang dinamakan anggota atau elemen. Misalnya {mobil, apel, pensil} adalah himpunan dengan elemen-elemen mobil, apel, dan pensil. Himpunan {muka, belakang} mempunyai dua elemen yaitu muka dan belakang. Himpunan {1, 2, 3, 5} mempunyai empat elemen. Himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf besar *A, B, H* dan seterusnya.

Anggota atau elemen suatu himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf kecil dan dihimpun dengan menggunakan suatu notasi { }. Jadi $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ mempunyai arti himpunan *A* dengan anggota-anggota $a_1, a_2, ..., a_n$.

Himpunan bagian dari himpunan *A* atau biasa ditulis dengan *B* adalah himpunan yang elemen-elemennya juga anggota dari *A*. Himpunan-himpunan yang dibicarakan adalah himpunan-himpunan bagian dari himpunan *S*, di mana kemudian *S* disebut *semesta (space).*

Suatu himpunan dapat pula disajikan dengan syarat keanggotaan. Jadi *A* = {seluruh bilangan bulat positif} mempunyai arti himpunan dengan anggota-anggota 1, 2, 3, …

Bila *P*(*x*) menyatakan proporsi *P* tentang objek *x*, maka himpunan yang didefinisikan dengan *P*(*x*), ditulis $\{x \mid P(x)\}$ adalah koleksi objek-objek *x* yang mempunyai sifat *P*.

Sebagai contoh, $\{x \mid x \text{ bilangan bulat positif yang lebih kecil dari } 4\}$ adalah himpunan {1, 2, 3}. Lambang $\in$ menyatakan anggota dan $\notin$ bukan anggota.

Contoh 1.1.1

$a \in A$ mempunyai arti *a* anggota dari *A* sedangkan $a \notin A$ berarti a bukan anggota dari *A*.

Himpunan kosong atau himpunan hampa adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan ini dilambangkan dengan Ø. Sebagai contoh $\varnothing = \{x \mid x \text{ bilangan real dan } x^2 = -1\}$ adalah himpunan kosong karena kuadrat bilangan real *x* selalu taknegatif. Bila suatu himpunan memuat *n* anggota, maka cacah seluruh himpunan bagiannya adalah 2^n.

Contoh 1.1.2

Misalkan a_i menyatakan angka yang tampak pada sisi suatu dadu. Angka pada sisi ini adalah anggota dari himpunan $S = \{a_1, a_2, ..., a_6\}$ Dalam keadaan ini, n = 6; karena itu S mempunyai $2^6 = 64$ himpunan bagian, yaitu $\varnothing, \{a_1\} ... \{a_6\}, \{a_1, a_2\}, ... \{a_1, a_2, a_3\} ..., S$.

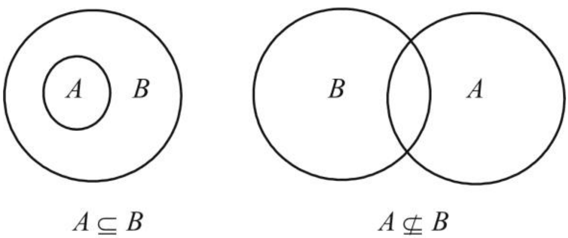
Pada umumnya, anggota-anggota suatu himpunan adalah sebarang objek. Sebagai contoh, 64 himpunan bagian dari himpunan S pada contoh di atas dapat dipandang sebagai anggota dari himpunan lain. Himpunan diketahui secara lengkap bila anggota-anggotanya semuanya diketahui. Jadi kita mengatakan dua himpunan *A* dan *B* sama bila mereka mempunyai anggota yang sama dan ditulis *A* = *B*.

Contoh 1.1.3

1. Bila $A = \{1, 2, 3\}$ dan
   $B = \{x \mid x$ bilangan bulat positif yang memenuhi : $x^2 < 12\}$ maka $A = B$.
2. Bila *A* = {ALGOL, FORTRAAN, BASIC} dan
   B = {BASIC, FORTRAAN, ALGOL} maka *A* = *B*.

A. HIMPUNAN BAGIAN

Bila setiap anggota dari *A* juga anggota dari *B*, yaitu, bila $x \in A$ maka $x \in B$, maka *A* disebut *himpunan bagian (subset)* dari *B*, atau *A* termuat dalam *B*, dan ditulis $A \subseteq B$. Bila *A* bukan himpunan bagian dari *B*, kita tulis $A \not\subseteq B$ (lihat Gambar 1.1)



Gambar 1.1.

Diagram, seperti yang terlihat pada Gambar 1.1, yang digunakan untuk menunjukkan hubungan antar himpunan disebut diagram Venn. Pada pokok bahasan berikutnya diagram Venn akan digunakan secara luas.

Contoh 1.1.4

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $D = \{6, 7, 8\}$
   Maka $B \subseteq A$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$.
   Tetapi $D \not\subseteq B$, $D \not\subseteq C$, $D \not\subseteq B$.
2. Bila A sebarang himpunan, maka $A \subseteq A$.
   Ini berarti, semua himpunan adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri.

B. OPERASI HIMPUNAN

Sekarang kita akan membicarakan beberapa operasi yang akan mengombinasikan beberapa himpunan yang akan menghasilkan himpunan lain. Operasi-operasi tersebut, yang analogi dengan operasi yang kita kenal pada bilangan real, memainkan peran penting dalam teori probabilitas.

Definisi Gabungan

> Bila A dan B merupakan dua himpunan, *gabungan* A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang memuat semua elemen yang berada dalam A atau B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Perhatikan bahwa $x \in A \cup B$ bila $x \in A$ atau $x \in B$ atau x berada dalam A dan B kedua-duanya.

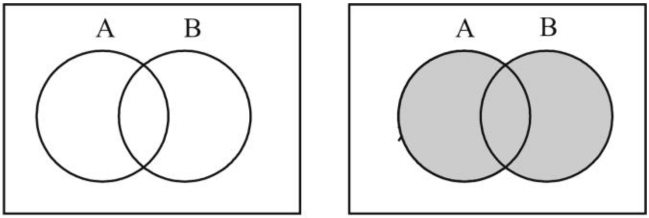
Contoh 1.1.5

Misalkan $A = \{a,b,c,e,f\}$, $B = \{b,d,r,s\}$. Tentukan $A \cup B$.

Penyelesaian

Karena $A \cup B$ memuat semua anggota yang berada dalam A atau B, maka $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{a,b,c,d,e,f,r,s\}$. Kita dapat mengilustrasikan gabungan dua himpunan dengan menggunakan diagram Venn sebagai berikut. Bila A dan B

adalah himpunan-himpunan yang terlihat dalam Gambar 1.2 (a), maka $A \cup B$ adalah himpunan titik-titik pada daerah yang diarsir yang terlihat pada Gambar 1.2 (b).



(a) (b)

Gambar 1.2.

Bila *A* dan *B* himpunan, irisan dari *A* dan *B*, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan semua anggota yang berada dalam *A* dan *B*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Contoh 1.1.6

Misalkan $A = \{a, b, c, e, f\}$, $B = \{b, e, f, r, s\}$, $C = \{a, t, u, v\}$.
Tentukan $A \cap B$, $A \cap C$, dan $B \cap C$.

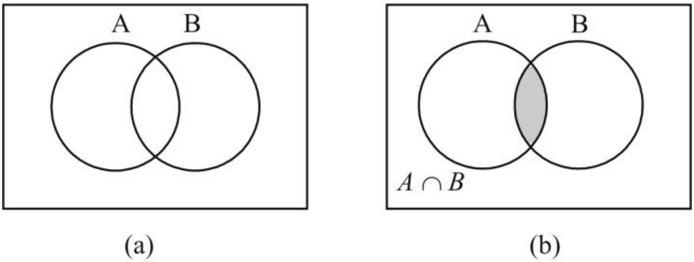
Penyelesaian

Anggota-anggota *b*, *e*, dan *f* adalah anggota yang berada dalam *A* dan *B* bersama-sama. Sehingga $A \cap B = \{b, e, f\}$

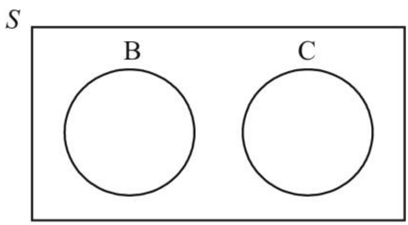
Dengan pengamatan yang sama, $A \cap C = \{a\}$

Karena tidak ada anggota yang berada dalam *B* dan *C* bersama-sama maka $B \cap C = \varnothing$

Dua himpunan yang tidak mempunyai anggota yang berserikat (anggota bersama), seperti *B* dan *C* dalam contoh di atas, disebut saling asing. Kita dapat mengilustrasikan irisan dua himpunan dengan menggunakan diagram Venn sebagai berikut. Bila *A* dan *B* himpunan-himpunan seperti terlihat dalam Gambar 1.3 (a), maka $A \cap B$ adalah himpunan semua titik-titik dalam daerah terarsir seperti terlihat dalam Gambar 1.3(b). Gambar 1.4 mengilustrasikan diagram Venn untuk dua himpunan yang saling asing.



Gambar 1.3.



Gambar 1.4.

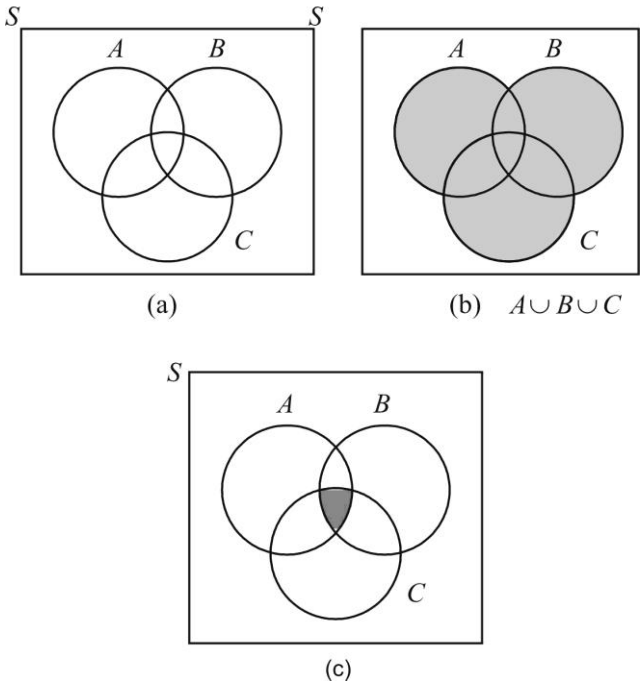
Operasi gabungan dan operasi irisan untuk tiga atau lebih himpunan dapat didefinisikan dengan cara yang sama dengan dua himpunan. Jadi

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in C\}$$

dan

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \text{ dan } x \in C\}.$$

Daerah terarsir pada Gambar 1.5. adalah gabungan himpunan-himpunan *A*, *B*, dan *C* yang terlihat pada Gambar 1.5 (a) dan daerah terarsir pada Gambar 1.5 (c) adalah irisan dan daerah terarsir himpunan-himpunan *A*, *B*, dan *C*.



Gambar 1.5.

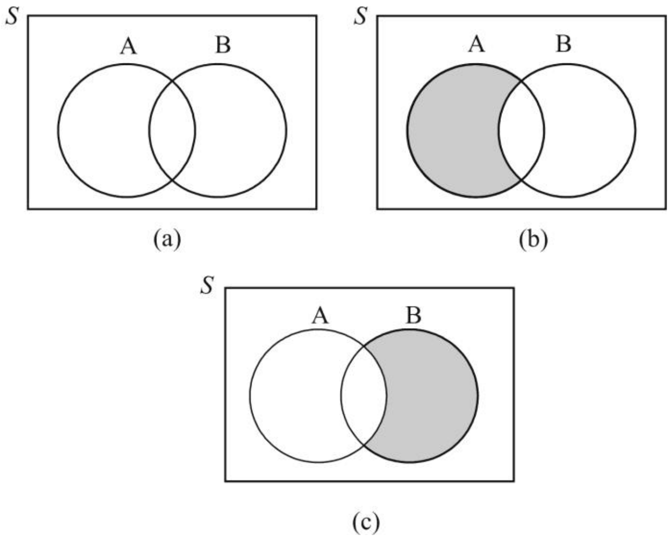
Secara umum, bila $A_1, A_2, ..., A_n$ himpunan bagian dari S maka $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ akan dinyatakan dengan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ akan dinyatakan dengan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Contoh 1.1.7
Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5, 7}, B = {1, 3, 8, 9}, C = {1, 3, 6, 8}. $A \cap B \cap C$ adalah himpunan elemen-elemen yang berada dalam A, B dan C. Jadi $A \cap B \cap C = \{1,3\}$

Selisih. Bila A dan B himpunan, maka selisih A dan B ditulis $A - B$ kita definisikan sebagai $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

Contoh 1.1.8
Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{b, c, d, e\}$,
Maka $A - B = \{a\}$ dan $B - A = \{d, e\}$.

Bila A dan B himpunan-himpunan seperti terlihat pada Gambar 1.6 (a) maka $A - B$ dan $B - A$ adalah himpunan titik-titik dalam daerah yang diarsir pada Gambar 1.6 (b) dan (c).



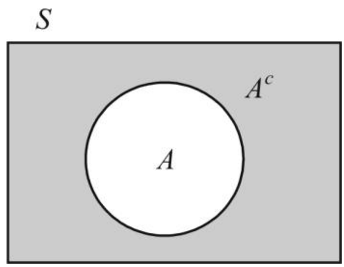
Gambar 1.6.

Bila S himpunan semesta yang memuat A, maka $S - A$ disebut komplemen A dan ditulis dengan A^c. Jadi $A^c = \{x \mid x \notin A\}$.

Contoh 1.1.9
Misalkan $A = \{x \mid x \text{ bilangan bulat dan } x \geq 4\}$, maka

$A^c = \{x \mid x \text{ bilangan bulat dan } x < 4\}$.

Bila A himpunan dalam Gambar 1.7 maka komplemennya adalah daerah terarsir dalam gambar tersebut.



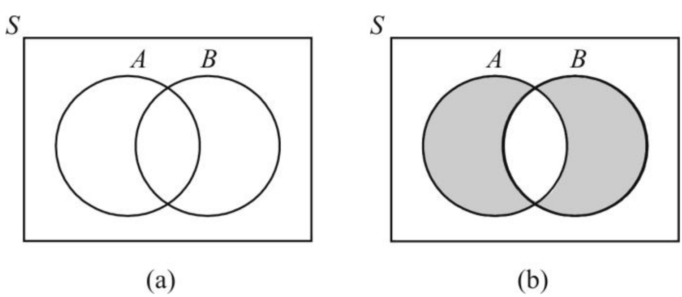
Gambar 1.7.

Bila A dan B himpunan, maka selisih simetris (*symmetric difference*) dari A dan B ditulis $A \oplus B$ kita definisikan sebagai himpunan anggota-anggota yang berada dalam A atau B, tetapi tidak pada kedua A dan B.
Jadi

$$A \oplus B = \{(x \in A \text{ dan } x \notin B) \text{ atau } (x \in B \text{ dan } x \notin A)\}$$

Contoh 1.1.10
Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, c, e, f, g\}$ Maka $A \oplus B = \{b, d, e, f, g\}$.`
Bila A dan B seperti terlihat pada Gambar 1.8 (a) maka "selisih simetris" adalah terarsir seperti terlihat pada Gambar 1.8 (b). Dengan mudah dapat dilihat bahwa

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



Gambar 1.8.

1. Sifat-sifat Aljabar Operasi Himpunan

Operasi-operasi pada himpunan yang baru saja kita definisikan memenuhi banyak sifat aljabar. Beberapa di antaranya mempunyai sifat-sifat aljabar yang dimiliki sistem bilangan real. Semua sifat-sifat utama yang terdapat di sini dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi-definisi yang diberikan dan aturan-aturan logika. Kita hanya akan membuktikan beberapa sifat dan yang tersisa sebagai latihan untuk Anda.

2. Sifat-sifat Operasi Himpunan

Operasi-operasi pada himpunan yang didefinisikan di atas memenuhi sifat-sifat berikut:

Komutatif

a. $A \cup B = B \cup A$

b. $A \cap B = B \cap A$

Assosiatif

c. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributif

e. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

f. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Idempoten

g. $A \cup A = A$

h. $A \cap A = A$

Komplemen

i. $\left(A^c\right)^c = A$

j. $A \cup A^c = S$

k. $A \cap A^c = \varnothing$

l. $\varnothing^c = S$

m. $S^c = \varnothing$

n. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
o. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$\Big\}$ Hukum De Morgan.

Himpunan Semesta
p. $A \cup S = S$
q. $A \cap S = A$

Himpunan Kosong
r. $A \cup \varnothing = A$
s. $A \cap \varnothing = \varnothing$

Bukti:
Kita hanya akan membuktikan Sifat n. yaitu $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dan meninggalkan lainnya sebagai latihan. Caranya: Kita harus membuktikan: $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ yaitu jika $x \in (A \cup B)^c$ maka $x \in A^c \cap B^c$, dan sebaliknya $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$, yaitu jika $x \in A^c \cap B^c$, maka $x \in (A \cup B)^c$.
Misalkan $x \in \left(A \cup B\right)^c$. Maka $x \notin A \cup B$, sehingga $x \notin A$ dan $x \notin B$. Ini berarti $x \in A^c \cap B^c$, sehingga $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.
Sebaliknya, misalkan $x \in A^c \cap B^c$. Maka $x \notin A$ dan $x \notin B$, sehingga $x \notin A \cup B$, atau $x \in (A \cup B)^c$. Akibatnya $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.
Oleh karena $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ dan $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$, berarti $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Terbukti.

3. Prinsip Penjumlahan

Himpunan *A* disebut hingga bila mempunyai *n* anggota yang berbeda di mana *n* bilangan bulat positif. Dalam hal ini n disebut cacah anggota dari *A* dan ditulis dengan *n*(*A*).

Sekarang misalkan *A* dan *B* sebarang himpunan hingga. Kadang-kadang berguna untuk mendapatkan rumus untuk $n(A \cup B)$, cacah gabungan. Bila *A* dan *B* saling asing, yaitu bila $A \cap B = \varnothing$, maka setiap elemen dari $A \cup B$ nampak di *A* atau *B* tetapi tidak pada kedua-duanya. Karena itu $n\,(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Bila *A* dan *B* saling berpotongan, seperti terlihat pada Gambar 1.9, maka $A \cap B$ berada dalam kedua himpunan A dan B, dan jumlahan $n(A)+n(B)$ memuat cacah elemen di $A\cap B$ dua kali. Untuk mengoreksi duplikasi ini, kita mengurangi $n\left(A\cap B\right)$. Jadi, kita mempunyai dalil berikut, yang sering disebut prinsip penjumlahan.

Teorema

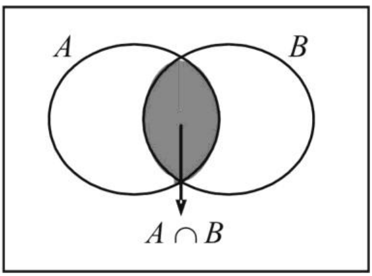
Bila A dan B himpunan hingga, maka $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

Contoh 1.1.11
Misalkan $A=\{a,b,c,d,e\}$ dan $B=\{c,e,f,h,k,m\}$.
Hitunglah $n(A\cup B)$

Penyelesaian
Kita mempunyai $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,h,k,m\}$ dan $A\cap B=\{c,e\}$
juga, $n(A)=5$, $n(B)=6$, $n(A\cup B)=9, n(A\cap B)=2$
Maka $n(A\cup B)=9=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+6-2=9$

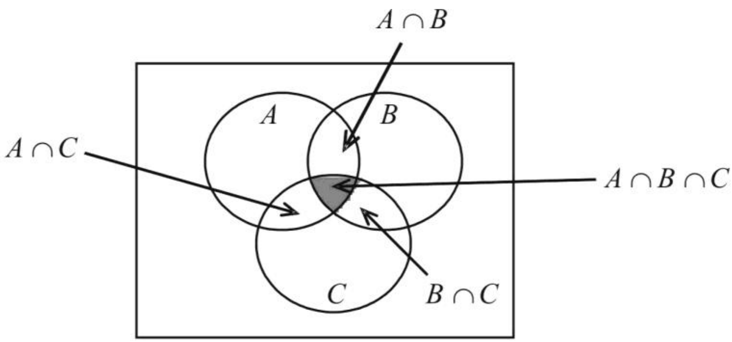
Bila A dan B saling asing, yaitu $A\cap B=\varnothing$, maka $n\left(A\cap B\right)=0$. Akibatnya dalil di atas menjadi

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$



Gambar 1.9.

Keadaan untuk tiga himpunan lebih rumit (kompleks) dan ini dapat digambarkan dalam Gambar 1.10.



Gambar 1.10.

Prinsip penjumlahan untuk tiga himpunan dinyatakan dalam dalil berikut.

Teorema

Bila A, B, dan C himpunan berhingga, maka

$$n\left(A \cup B \cup C\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right) + n\left(C\right) - n\left(A \cap B\right) - n\left(B \cap C\right) - n\left(A \cap C\right) + n\left(A \cap B \cap C\right)$$

Contoh 1.1.12

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\},\ B = \{a, b, e, g, h\}$

$C = \left\{b, d, e, g, h, k, m, n\right\}$

Hitunglah $n\left(A \cup B \cup C\right)$.

Penyelesaian

Kita mempunyai $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n\}$

$A \cap B = \{a, b, e\}$, $\quad A \cap C = \{b, d, e\}$

$B \cap C = \{b, e, g, h\}$, $\quad A \cap B \cap C = (b, e\}$.

Maka $n(A) = 5$, $\quad n(B) = 5$, $\quad n(C) = 8$

$n(A \cup B \cup C) = 10,\ n(A \cap B) = 3,\ n(A \cap C) = 3,\ n(B \cap C) = 4$.

$n(A \cap B \cap C) = 2$.

Maka

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\
&= 5+5+8-3-3-4+2\\
&= 10
\end{aligned}
$$

Contoh 1.1.13

Sebuah perusahaan komputer harus menyewa 25 *programmer* untuk mengerjakan tugas-tugas sistem *programming* dan 40 *programmer* untuk terapan *programming*. Dari yang disewa tersebut 10 harus dapat mengerjakan kedua-duanya. Berapa *programmer* yang harus disewa?

Penyelesaian

Misalkan A menyatakan himpunan *programmer* untuk sistem *programming* yang disewa, dan B untuk terapan *programming*, maka $n(A)=25$, $n(B)=40$ dan $n(A\cap B)=10$. Cacah *programmer* yang harus disewa adalah $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=25+40-10=55$.

Contoh 1.1.14

Sebuah survei dilakukan untuk mengetahui apa kendaraan yang dipakai karyawan ke kantornya. Setiap responden diminta memilih BUS, KERETA API, atau MOBIL PRIBADI sebagai alat transportasi utama. Seorang responden boleh memberikan lebih satu jawaban. Hasil survei adalah sebagai berikut:

(a) 30 orang menjawab BUS.
(b) 35 orang menjawab KERETA API.
(c) 100 orang menjawab MOBIL PRIBADI.
(d) 15 orang menjawab BUS dan KERETA API.
(e) 15 orang menjawab BUS dan MOBIL PRIBADI.
(f) 20 orang menjawab KERETA API dan MOBIL PRIBADI.
(g) 5 orang menggunakan ketiga-tiganya.

Berapakah cacah karyawan yang mengikuti survei?

Penyelesaian

Misalkan A, B, dan C masing-masing menyatakan himpunan-himpunan karyawan yang menjawab BUS, KERETA API, dan MOBIL PRIBADI.

Maka
$n(A)$ = 30, $n(B)$ = 35 dan $n\left(C\right)=100$, $n\left(A\cap B\right)$=15,
$n\left(A\cap C\right)=15$, $n\left(B\cap C\right)=20$, dan $n\left(A\cap B\cap C\right)=5$.
Jumlah karyawan yang mengikuti survei adalah
$n\left(A\cup B\cup C\right)=30+35+100-15-15-20+5$.
$=120$.

4. Fungsi Karakteristik

Konsep yang sangat berguna untuk himpunan adalah fungsi karakteristik. Bila *A* himpunan bagian dari semesta *S*, fungsi karakteristik f_A dari *A* didefinisikan sebagai berikut:

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & \text{bila } x\in A\\ 0 & \text{bila } x\notin A\end{cases}$$

Sifat-sifat fungsi karakteristik

a. $f_{A\cap B}=f_A\ f_B$, yaitu $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\ f_B(x)$ untuk setiap x.

b. $f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_A f_B$, yaitu $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)$ untuk setiap x.

c. $f_{A\oplus B}=f_A+f_B-2f_A f_B$, yaitu $f_{A\oplus B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)$ untuk setia

Bukti:

a. $f_{\mathrm{A}}(x)f_{\mathrm{B}}(x)$ sama dengan 1 bila dan hanya bila $f_{\mathrm{A}}(x)$ dan $f_{\mathrm{B}}(x)$ semuanya sama dengan 1 dan ini terjadi bila dan hanya bila *x* berada di *A* dan *B* yaitu dalam $A\cap B$. Karena $f_{\mathrm{A}}\ f_{\mathrm{B}}$ sama dengan 1 pada $A\cap B$ dan 0 untuk yang lain, ia harus sama dengan $f_{\mathrm{A\cap B}}$.

b. Bila $x\in A$, maka $f_A(x)=1$, sehingga $f_A\left(x\right)+f_B\left(x\right)-f_A\left(x\right)f_B\left(x\right)=$ $1+f_B(x)-f_B(x)=1$. Bila *x* tidak di *A* atau *B*, maka $f_A(x)=f_B(x)=0$, sehingga $f_A\left(x\right)+f_B\left(x\right)-f_A\left(x\right)f_B\left(x\right)=0$. Jadi $f_A+f_B-f_A\ f_B$ sama dengan 1 pada $A\cup B$ dan 0 untuk yang lain, sehingga sama dengan $f_{\mathrm{A\cup B}}$.

c. Bukti dari sifat 3 ditinggalkan sebagai latihan untuk Anda.

5. Perluasan Gabungan dan Irisan

Operasi gabungan dan irisan dapat diperluas juga ke koleksi tak hingga himpunan. Bila $A_1, A_2, A_3, \ldots$ koleksi himpunan, semuanya didefinisikan pada ruang sampel S, maka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ x \in S \;\middle|\; x \in A_i \text{ untuk suatu } i \right\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ x \in S \;\middle|\; x \in A_i \text{ untuk setiap } i \right\}$$

Contoh 1.1.15

Misalkan $S = (0,1]$ dan $A_i = \left[\left(\frac{1}{i}\right),1\right]$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ maka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[\left(\tfrac{1}{i}\right),1\right] = \left\{ x \in (0,\,1] \;\middle|\; x \in \left[\left(\tfrac{1}{i}\right),1\right] \text{ untuk suatu } i \right\}$$

$$= \{x \in (0,1]\} = (0,1].$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left[\left(\tfrac{1}{i}\right),1\right] = \left\{ x \in (0,1] \;\middle|\; x \in \left[\left(\tfrac{1}{i}\right),1\right] \text{ untuk setiap } i \right\}$$

$$= \left\{ x \in \left(0,1\right] \;\middle|\; x \in [1,1] \right\}$$

$= \{1\}$ himpunan ini terdiri dari titik 1.

Banyak sifat-sifat operasi himpunan hingga yang berlaku untuk operasi gabungan dan irisan yang banyaknya tak hingga. Sebagai contoh, hukum De Morgan menjadi

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Akhir Kegiatan Belajar 1 ini kita akhiri dengan definisi-definisi berikut.

Definisi

Dua himpunan A dan B disebut saling asing bila $A \cap B = \varnothing$. Himpunan $A_1, A_2, \ldots$ disebut saling asing pasangan (*mutually exclusive*) bila $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk setiap $i \neq j$.

Contoh 1.1.16
$A_i = [i, i+1),\ i = 0,\ 1,\ \ldots$ saling asing pasangan.

Definisi

Bila $A_1, A_2, \ldots$ saling lepas (*pairwise disjoint*) dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$ maka, koleksi $A_1, A_2, \ldots$ disebut partisi dari S.

Contoh 1.1.17
Misalkan $S = [1, \infty)$, maka $A_i = [i, i+1)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ merupakan partisi dari S, sebab $A_1 = [1,2), A_2 = [2,3), A_3 = [3,4), \ldots$, sehingga $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = S$.

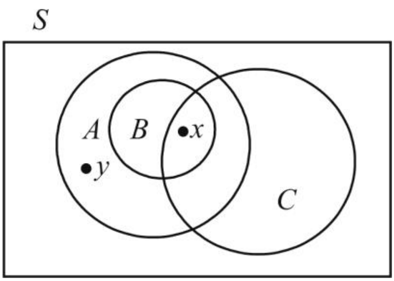
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan $A = B$ bila dan hanya bila $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$!
2) Bila A = {1, 2, 5, 8, 11}. Jawab masing-masing pertanyaan di bawah benar atau salah.
   (a) $\{5,1\} \subseteq A$
   (b) $\{8,1\} \in A$
   (c) $\{1,6\} \not\subseteq A$
   (d) $\{1,8,2,11,5\} \not\subseteq \mathrm{A}$
   (e) $\varnothing \subseteq A$
   (f) $\{2\} \subseteq A$
   (g) $A \subseteq \{11, 2, 5, 1, 8, 4\}$
   (h) $\{3\} \notin A$.

3) Pada setiap himpunan di bawah tulis himpunan yang bersesuaian dalam bentuk $\{x|P(x)\}$ dengan $P(x)$ sifat yang menggambarkan elemen-elemen dari himpunan.
   (a) {2, 4, 6, 8, 10}
   (b) {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*}
   (c) {1, 4, 9, 16, 25, 36}
   (d) {–2, –1, 0, 1, 2}

4) Dengan menggunakan gambar di bawah ini, jawab pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar atau salah!



   (a) $A \subseteq B$
   (b) $B \subseteq A$
   (c) $C \subseteq B$
   (d) $x \in B$
   (e) $x \in A$
   (f) $y \in B$

5) Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5}. Mana dari himpunan-himpunan di bawah yang sama dengan A?
   (a) {4, 1, 2, 3, 5}
   (b) {2, 3, 4}
   (c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   (d) $\{x \mid x$ bilangan bulat $x^2 \leq 25\}$
   (e) $\{x \mid x$ bilangan bulat positif $x \leq 5\}$
   (f) $\{x \mid x$ bilangan rasional positif $x \leq 5\}$

6) Misalkan $A = \{x \mid x$ bilangan bulat dengan $x^2 \leq 16\}$

Jawab pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar atau salah.

(a) $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq A$

(b) $\{-3, -2, -1\} \subseteq A$

(c) $\varnothing \subseteq A$

(d) $\{x \mid x$ bilangan bulat dan $|x| < 4\} \subseteq A$

(e) $A \subseteq \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

7) Buktikan $A \oplus B = B \oplus A$.

8) Bila $A \bigcup B = A \bigcup C$, apakah $B = C$? Jelaskan.

9) Misalkan A dan B sebarang himpunan. Buktikan $A \subseteq B$ bila dan hanya bila $B^c \subseteq A^c$.

10) Buktikan.

(a) $A \subseteq B$ bila dan hanya bila $A \cup B = B$

(b) $A \subseteq B$ bila dan hanya bila $A \cap B = A$.

RANGKUMAN

1. Operasi gabungan dan irisan pada himpunan mempunyai sifat komutatif, asosiatif, dan distributif.
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
3. $f_{A \cap B} = f_A f_B$

   $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$

   $f_{A \oplus B} = f_A + f_B - 2 f_A f_B$
4. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in S \mid x \in A_i \text{ untuk suatu } i\}$

   $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{x \in S \mid x \in A_i \text{ untuk setiap } i\right\}$.
5. Hukum De Morgan.

   $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Dari himpunan-himpunan di bawah, yang merupakan himpunan kosong adalah ….
   A. $\{x \mid x \text{ bilangan real dan } x^2 - 1 = 0\}$
   B. $\{x \mid x \text{ bilangan real dan } x^3 + 1 = 0\}$
   C. $\{x \mid x \text{ bilangan real dan } x^2 = 9\}$
   D. $\{x \mid x \text{ bilangan real dan } x^4 - 1 = 0\}$
   E. $\{x \mid x \text{ bilangan real dan } x = x + 1\}$

2) Misalkan $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$
   $A = \{a, b, c, g\}$; $B = \{d, e, f, g\}$; $C = \{a, c, f\}$; $D = \{f, h, k\}$, maka $A \cup B$ adalah ….
   A. $\{a, b, c, d, e, g\}$
   B. $\{a, b, c, d, e, f\}$
   C. $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
   D. $\{a, b, d, e, f, g\}$
   E. $\{a, b, e, f, g\}$

3) Dari soal 2, $B \cap D$ adalah ….
   A. $\{h\}$
   B. $\{f\}$
   C. $(e\}$
   D. $\{d\}$
   E. $\{k\}$

4) Dari soal 2, $A \oplus C$ adalah ….
   A. $\{f, g\}$
   B. $\{b, g\}$
   C. $\{d, f, g\}$
   D. $\{b, f, g\}$
   E. $\{a, f, g\}$

5) Misalkan $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
A = {1, 2, 3, 4, 6, 8}; B = {2, 4, 5, 9}
$C=\{x \mid x \text{ bilangan bulat positif dan } x^2 \leq 16\}$ $A \cup C$ adalah ….
A. {1, 2, 3, 4, 6, 8}
B. {1, 2, 4, 6, 8}
C. {2, 3, 6, 8}
D. {1, 4, 6, 8}
E. {1, 3, 4, 6, 8}

6) Dari soal 5, $A \bigcap C$ adalah ….
A. {3, 5}
B. {1, 2, 4}
C. $\varnothing$
D. {4, 5, 6}
E. {1, 3, 4}

7) Dari soal 5, $A \oplus B$ adalah ….
A. {1, 5, 6, 8, 9}
B. {1, 6, 8, 9}
C. {1, 2, 6, 8, 9}
D. {1, 2, 8, 9}
E. {1, 2, 5, 6}

8) Misal A, B, dan C himpunan hingga dengan $n(A)$ = *6* , $n(B)$ = 8, $n(C)$ = 6, $n(A \cup B \cup C) = 11$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cap C) = 2$, adalah ….
A. 2
B. 3
C. 1
D. 5
E. 6

9) Misal $A_n = [1,\ 1+\frac{1}{n})$, n=1, 2, 3, 4, ... maka $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$ adalah ….
A. $\left[1, \frac{1}{2}\right)$
B. $\varnothing$
C. 0
D. 1
E. {1}

10) Dari soal 9, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ adalah ….
A. [1, 2)
B. [1, 2]
C. $\left[1, \frac{1}{2}\right)$
D. {1}
E. $\varnothing$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Himpunan Terhitung, Perkalian, dan Keluarga Himpunan

Kita menggunakan notasi-notasi khusus untuk himpunan-himpunan tertentu, seperti

N = {1, 2, 3, …} untuk himpunan bilangan bulat positif,

Z = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …} untuk himpunan bilangan bulat,

$R = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ untuk himpunan bilangan real,

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ untuk selang terbuka,

$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ untuk selang tertutup,

$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ untuk selang setengah terbuka/tertutup,

$(a,b] = \{x \mid a \le x < b\}$ untuk selang setengah tertutup/terbuka.

Dua himpunan A dan B disebut ekuivalen dan ditulis $A \sim B$ bila terdapat korespondensi 1–1 antara A dan B.

Contoh1.2.1

Himpunan A = {1, 2, 3} dan B = {2, 4, 6} ekuivalen karena adanya korespondensi 1–1 antara A dan B berikut

$$\begin{array}{cccc} A: & 1 & 2 & 3 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B: & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

Bila $A \sim B$, maka $B \sim A$. Juga bila $A \sim B$ dan $B \sim C$ maka $A \sim C$.

Himpunan yang ekuivalen dengan himpunan {1, 2, …, n} untuk suatu bilangan asli n disebut *hingga*; bila tidak demikian disebut *takhingga*. Himpunan takhingga yang ekuivalen dengan himpunan bilangan positif N disebut *terhitung* (*denumerabel*); bila tidak ekuivalen dengan bilangan positif N disebut *tak terhitung (non-denumerabel*).

Suatu himpunan yang merupakan himpunan kosong, hingga, atau denumerabel disebut *terhitung*; bila tidak termasuk dalam kriteria tersebut disebut *tak terhitung*.

Teorema Gabungan terhitung dari himpunan yang terhitung adalah terhitung. (1.21)

Contoh 1.2.2
Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional dalam selang [0,1] adalah takhingga terhitung atau denumerabel.

Penyelesaian
Kita harus menunjukkan bahwa terdapat korespondensi 1-1 antara himpunan bilangan rasional dalam [0,1] dan N.
Korespondensi yang dimaksud dinyatakan dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{6}\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\ldots \end{array}$$

Perhatikan bahwa bilangan rasional diurutkan menurut naiknya penyebut. Bilangan rasional seperti $\frac{2}{4}$, yang sama dengan $\frac{1}{2}$, diabaikan karena telah terhitung.

Contoh 1.2.3
Tunjukkan bahwa gabungan terhitung dari himpunan yang terhitung adalah terhitung.

Penyelesaian
Pandang himpunan-himpunan $S_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots\}$, $S_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots\}$. Terdapat sejumlah terhitung himpunan-himpunan $S_1, S_2, \ldots$ dan masing-masing himpunannya adalah terhitung.

Sekarang kita dapat menulis elemen-elemennya dalam bentuk

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{21} & & a_{31} & \rightarrow & a_{41}\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_{12} & & a_{22} & & a_{32} & & a_{42\ldots} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_{13} & & a_{23} & & a_{33} & & a_{43}\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_{14} & & a_{24} & & a_{34} & & a_{44}\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & \\
a_{15}\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Bila kita mengikuti arah anak panah, maka akan didapat himpunan $\{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{41}, a_{32}, ...\}$ dan hasil terakhir menunjukkan adanya korespondensi 1–1 dengan *N*.

Contoh 1.2.4

Tunjukkan bahwa himpunan semua bilangan real [0,1] adalah tak terhitung.

Penyelesaian

Setiap bilangan real dalam [0,1] mempunyai ekspansi desimal $0{,}a_1\ a_2, ...$ dengan $a_1, a_2, ...$ salah satu dari angka 0, 1, 2, …, 9.

Bila ekspansi desimalnya berhenti seperti 0,7324, maka bilangan tersebut di tulis 0,73240000 … dan ini sama dengan 0,73239999 …

Bila semua bilangan real dalam [0,1] terhitung, maka kita dapat menempatkan mereka dalam korespondensi 1–1 dengan *N* dalam bentuk daftar sebagai berikut:

$$
\begin{array}{l}
1 \leftrightarrow 0{,}a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, ... \\
2 \leftrightarrow 0{,}a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, ... \\
3 \leftrightarrow 0{,}a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, ... \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

Sekarang kita bentuk bilangan

$$0,b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

dengan $b_1 = 6$ bila $a_{11} = 5$ dan $b_1 = 5$ bila $a_{11} \neq 5$, $b_2 = 6$ bila $a_{22} = 5$ dan $b_2 = 5$ bila $a_2 \neq 5$ dan seterusnya. [Pemilihan 5 dan 6 dengan sendirinya dapat diganti dengan dua bilangan yang lain]. Dari cara pembentukan di atas, terlihat bahwa bilangan $0,b_1 b_2 b_3 \ldots$ berbeda dengan setiap bilangan dalam daftar di atas dan tidak dapat berada dalam daftar. Kontradiksi dengan andaian bahwa setiap bilangan real dalam [0,1] telah diikutkan. Karena [0,1] tidak dapat dikorespondensikan dengan *N* maka [0,1] tak terhitung.

A. PERKALIAN HIMPUNAN

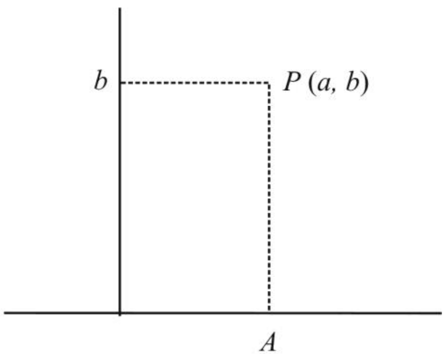
Misalkan *A* dan *B* dua himpunan sebarang. Perkalian himpunan *A* dan *B*, ditulis $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (*a*, *b*) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ yaitu

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Perkalikan suatu himpunan dengan dirinya sendiri, katakanlah $A \times A$, akan dinyatakan dengan A^2.

Contoh 1.2.5

Dalam bidang Cartesian $R^2 = R \times R$ (Gambar 1.11) setiap titik *P* menyajikan pasangan berurutan (*a*, *b*) dari bilangan real *a* dan *b* demikian juga sebaliknya, pasangan berurutan (*a*, *b*) dari bilangan real *a* dan *b* menentukan setiap titik *P*.



Gambar 1.11.

Contoh 1.2.6

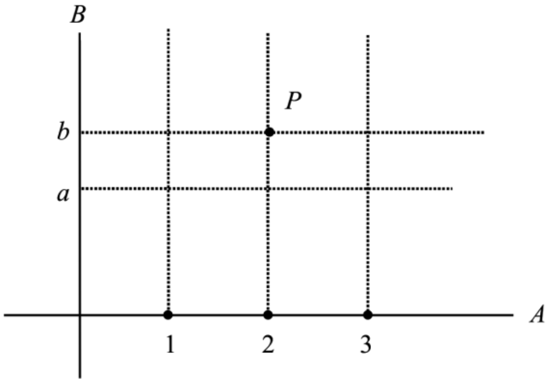
Misalkan A = {1,2,3} dan B = {a, b}. Maka

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.

Karena A dan B tidak memuat terlalu banyak elemen, maka dimungkinkan untuk menyajikan $A \times B$ dengan diagram koordinat seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.12. Di sini garis-garis tegak melalui titik-titik dari A dan garis-garis mendatar melalui titik-titik dari B dan bertemu dalam 6 titik yang menyajikan $A \times B$. Titik P adalah pasangan berurutan (2,b). Secara umum bila himpunan A mempunyai s elemen dan himpunan B mempunyai t elemen, maka $A \times B$ mempunyai $s \times t$ elemen.

Konsep perkalian himpunan dapat diperluas ke sejumlah hingga himpunan dengan cara seperti biasa Perkalian himpunan $A_1,\ A_2\ ...,\ A_m$ yang dinyatakan dengan $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ atau $\prod_{i=1}^{m} A_i$ adalah himpunan m-tuples $(a_1, a_2, ..., a_m)$ dengan $a_i \in A_i$ untuk setiap i.

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = \{(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_m) | a_i \in A_i \text{ untuk setiap } i\}$$



Gambar 1.12.

Contoh 1.2.7

Misalkan A = {a, b}, B = {2, 3}, dan C = {3, 4}. Tentukan.

$A \times (B \cup C)$

$(A \times B) \cup (A \times C)$

Penyelesaian

Karena $B \cup C = \{2,3,4\}$ maka $A \times (B \cup C)$ adalah

$A \times (B \cup C) = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,2),(b,3),(b,4)\}$.

Contoh 1.2.8

Buktikan $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cap C) &= \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \cap C\} \\
&= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B, y \in C\} \\
&= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B, (x,y) \in A \times C\} \\
&= (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned}
$$

Contoh 1.2.9

Misalkan A = {1, 2, 3}, B = {2, 4} dan C = (3, 4, 5}. Tentukan $A \times B \times C$.

Penyelesaian

Metode yang enak untuk menentukan $A \times B \times C$ adalah melalui apa yang disebut ‘diagram pohon’ di bawah.

Diagram pohon disusun dari kiri ke kanan. $A \times B \times C$ terdiri dari tripel terurut yang disusun di sebelah kanan “pohon”.

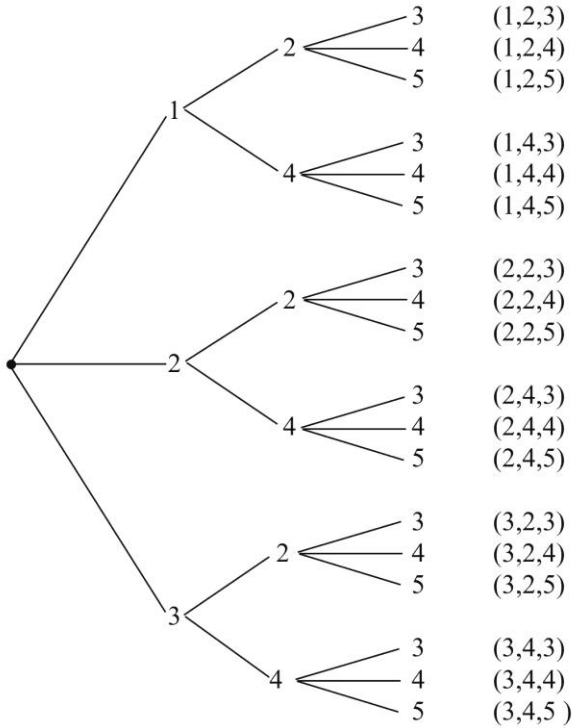


Diagram Pohon

Contoh 1.2.10
Bila $A \subset B$ dan $C \subset D$, buktikan $(A \times C) \subset (B \times D)$.

Bukti:
Misalkan (x,y) sebarang elemen dalam $A \times C$. Maka $x \in A$ dan $y \in C$. Karena $A \subset B$ dan $C \subset D$ maka $x \in B$ dan $y \in D$. Ini berarti $(x,y) \in B \times D$.

Karena kita telah menunjukkan, bila $(x,y) \in A \times C$ maka $(x,y) \in B \times D$, terbukti $(A \times C) \subset (B \times D)$.

B. KELUARGA HIMPUNAN

Kadang-kadang anggota suatu himpunan dapat juga merupakan himpunan. Sebagai contoh, setiap garis dalam himpunan garis adalah himpunan titik-titik. Untuk memperjelas situasi ini, kita menggunakan istilah keluarga untuk himpunan sedemikian.

Contoh 1.1.11

1. Anggota dari keluarga himpunan {{2,3}, {2}, {5,6}} adalah himpunan-himpunan {2,3}, {2} dan {5,6}.

2. Pandang sebarang himpunan *A*. Kuasa himpunan *A* ditulis *P*(*A*), adalah keluarga dari semua himpunan bagian dari *A*. Pada khususnya, bila $A = \{a, b\}$, maka
   $P(A)=\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$ atau $\{A, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$.
   Bila A = {a, b, c} maka
   $P(A)=\{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$.

Secara umum, bila *A* hingga dan mempunyai *n* elemen, maka *P*(*A*) mempunyai 2^n elemen. Dengan alasan ini *P*(*A*) sering ditulis 2^A.

Definisi

Misalkan *A* keluarga himpunan bagian dari *S* dengan *S* semesta. *A* disebut *lapangan* (*field*) bila

(a) $S \in \mathcal{A}$

(b) Bila $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(c) Bila $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Bila syarat (c) diubah menjadi

(c′) Bila $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$ maka *A* disebut $\sigma-$ *lapangan* ($\sigma-$ *field*).

Contoh 1.1.12

Misalkan S adalah semesta. Maka $A=\{\varnothing,S\}$, $B=\{\varnothing,A,A^c,S\}$, maupun 2^S merupakan lapangan.

C. HIMPUNAN DALAM TEORI PROBABILITAS

Dalam teori probabilitas biasanya kita mempelajari gejala acak (random) sebagai lawan dari gejala yang tertentu atau deterministik. Dalam hal ini kita ingin mempelajari hasil percobaan dan percobaan ini tidak selalu menghasilkan hasil yang sama. Persoalan kita adalah mengumpulkan semua hasil yang mungkin dari percobaan ini, dan ini berfungsi sebagai himpunan semesta S. Himpunan bagian A, B, C … dari S menyatakan kejadian yang mungkin muncul dan ingin diketahui probabilitas atau peluangnya untuk terjadi. Dalam menghitung probabilitas tersebut biasanya kita menggunakan manipulasi teori himpunan yang telah kita bicarakan di muka.

Contoh 1.1.13

Misalkan kita melemparkan sepasang dadu ke atas dan kita perhatikan permukaan yang 'muncul'. Hasil yang didapat adalah pasangan bilangan bulat (i, j) dengan $1 \le i, j \le 6$. Jadi, dalam hal ini semesta S adalah

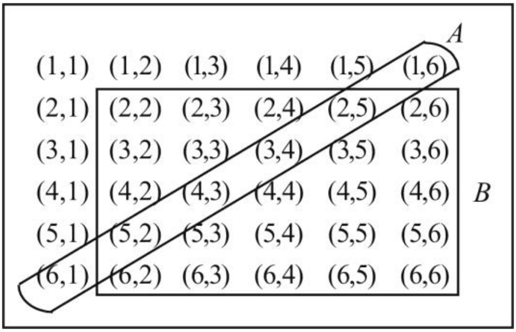
$$S = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,4), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{matrix}\right\}$$

Misalkan A menyatakan kejadian 'jumlahnya 7' maka
$A=\{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\}$.

Perhatikan bahwa A merupakan himpunan bagian dari S. Sekarang misalkan B menyatakan 'tiada dadu yang menunjukkan 1'. Maka

$$B = \begin{Bmatrix} (2,2), & (3,2), & (4,2), & (5,2), & (6,2) \\ (2,3), & (3,3), & (4,3), & (5,3), & (6,3) \\ (2,4), & (3,4), & (4,4), & (5,4), & (6,4) \\ (2,5), & (3,5), & (4,5), & (5,5), & (6,5) \\ (2,6), & (3,6), & (4,6), & (5,6), & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Jumlahnya 7 dan 'tiada dadu menunjukkan 1' adalah himpunan titik-titik dalam $A \cap B$={(2,5), (3,4), (4,3), (5,2)}. (Gambar 1.13).



Gambar 1.13.
S, A, B, dan $A \cap B$

Contoh 1.1.14
Dari rumah sampai ke kantor, seorang karyawan melewati tiga perempatan yang semuanya mempunyai lampu pengatur lalu lintas. Pada setiap perempatan seorang karyawan dapat stop (*s*) atau terus (*t*). Dalam hal ini *S* atau semestanya adalah *S* = {*ttt, tts, tss, tst, sss, sst, stt, sts*}.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan *Q* menyatakan himpunan semua bilangan rasional. Buktikan himpunan-himpunan berikut denumerabel!

(a) $\{x \mid x \in Q, x \geq 1\}$

(b) $\{x \mid x \in Q, x \geq 0\}$

(c) $\{x \mid x \in Q, x < 0\}$

2) Buktikan bahwa terdapat korespondensi 1-1 antara titik-titik dalam selang $0 \leq x \leq 1$ dan
   (a) $-4 \leq x \leq 4$
   (b) $-4 < x < 6$

3) Selidiki apakah persyaratan berikut benar atau salah?
   (a) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
   (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

4) Misalkan $A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ ...\},\ n = 1,\ 2,\ 3\ ...$ tentukan
   (a) $A_2 \cap A_7$
   (b) $A_6 \cap A_8$
   (c) $A_3 \cup A_{12}$

5) Bila A = {1, 2, 3, 4} tentukan himpunan kuasa 2^A dari A!

6) Misalkan A dan B kedua-duanya merupakan lapangan dari himpunan-himpunan bagian dari S. Tunjukkan bahwa $A \cup B$ belum tentu merupakan lapangan!

7) Seperti pada soal nomor 6, buktikan bahwa $A \cap B$ merupakan lapangan!

8) Misalkan $A = B \cap C$. Perhatikan pernyataan berikut apakah benar atau salah? $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$

9) Dari soal nomor 8, buktikan $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$

10) Buktikan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup\ ...$$

RANGKUMAN

1. Himpunan tak hingga yang ekuivalen dengan himpunan bilangan bulat positif N disebut denumerabel.
2. Suatu himpunan yang merupakan himpunan kosong, hingga, atau denumerabel disebut terhitung.
3. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.
4. Misalkan A keluarga himpunan bagian dari S, dengan S semesta. A disebut σ – lapangan bila
   a. $S \in A$
   b. Bila $A \in A \Rightarrow A^c \in A$
   c. Bila $A_1, A_2, A_3, \ldots \in A \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Bila B = {1, {2, 3}, 4} maka cacah anggota himpunan kuasa dari B, $P(B)$ adalah ….
   A. 15 D. 16
   B. 14 E. 10
   C. 8

2) Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan B = {1, {2, 3}, 4} cacah anggota dari $A \times B$ adalah ….
   A. 16 D. 8
   B. 12 E. 10
   C. 0

3) Misalkan $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$, $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ Maka $A_3 \cap A_{12}$ adalah ….
   A. A_3 D. $\varnothing$
   B. A_4 E. A_{12}
   C. N

4) Dengan A_n seperti pada soal nomor 3 maka $A_2 \cup A_8$ adalah ….
A. A_2
B. A_8
C. A_{16}
D. N
E. $\varnothing$

5) Misalkan J = {2, 4, 6, 8, …} dan A_n seperti pada soal 3. Maka $\bigcap_{n \in J} A_n$ adalah ….
A. N
B. J
C. A_2
D. A_3
E. $\varnothing$

6) Misalkan $B_n = \left\{x \mid a < x < b + \frac{1}{n}\right\},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ adalah ….
A. $\{x \mid a \le x < b\}$
B. $\{x \mid a < x < \infty\}$
C. $\{x \mid a < x < 0\}$
D. $\{x \mid a < x \le b\}$
E. $\{x \mid a < x < b\}$

7) Dalam perjalanan ke kantornya seorang karyawan harus melewati 4 lampu pengatur lalu lintas. Pada setiap lampu pengatur lalu lintas ia dapat stop (*s*) atau terus (*t*). Dalam hal ini cacah anggota dari ruang sampel *S* adalah ….
A. 32
B. 10
C. 8
D. 16
E. 12

8) Sebuah mata uang seimbang dilemparkan tiga kali. Misalkan *M* menyatakan sisi muka dan *B* sisi belakang. Misalkan *A*: paling sedikit mendapatkan dua muka; *D*: dua lemparan pertama muka dan *C* : lemparan terakhir belakang, maka A^c adalah ….
A. {*MMM*, *MBB*}
B. {*MMB*, *BBM*, *MBM*}
C. {*MBB*, *BBB*, *BBM*, *BMB*}
D. {*BBB*, *MBB*, *BBM*}
E. {*MBB*, *BBM*, *BMB*}

9) Dari soal 8, $A \cap D$ adalah ….
   A. {*MMB*, *MMM*}
   B. {*MBB*, *BBB*, *BBM*, *BMB*}
   C. {*MMB*}
   D. {*MMM*}
   E. {*BBB*, *MBM*}

10) Dari soal 8, $A \cup C$ adalah ….
   A. *S*
   B. *A*
   C. {*MMM*, *MMB*, *MBM*, *BBB*}
   D. {*MMM*, *BBB*, *BMB*}
   E. {*MMM*, *MMB*, *MBM*, *BMM*, *MBB*, *BBB*, *BMB*}

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) E
2) C
3) B
4) D
5) A
6) B
7) A
8) C
9) E
10) A

Tes Formatif 2

1) C
2) B
3) E
4) A
5) E
6) D
7) D
8) C
8) A
10) E

Daftar Pustaka

Dudewicz, E.J. & Mishra, S.N. (1988). *Modern Mathematical Statistics.* Jhon Wiley.

Lipschutz, S. (1982). *Probability*. Mc. Graw Hill.