MODUL 1

Sampling dengan Simulasi Komputer

Sutawanir Darwis

PENDAHULUAN

Metode statistika merupakan alat untuk menyelesaikan masalah apabila solusi analitik tidak mungkin diperoleh. Dengan metode statistika diperoleh solusi parsial. Survei yang didasarkan atas sampel dinamakan survei sampel. Survei sensus merupakan hal khusus dari sampel survei; sensus merupakan survei berdasarkan 100% sampel. Survei geologi dirancang untuk mendeteksi cadangan mineral dan bahan tambang lainnya. Survei tanah dirancang untuk memetakan jenis tanah di suatu lokasi.

Misalkan hendak diteliti persentase mahasiswa yang setuju dengan sistem ujian semester terhadap sistem ujian dua semester. Suatu solusi yang mungkin adalah menanyai semua mahasiswa pada universitas yang bersangkutan. Persentase mahasiswa yang setuju dapat dihitung dan permasalahan telah terpecahkan. Tetapi, misalkan terdapat 30.000 mahasiswa, dan fasilitas hanya memungkinkan untuk menanyai 200 mahasiswa maka solusi yang berdasarkan informasi dari 200 mahasiswa yang dipilih sebagai sampel merupakan solusi parsial. Misalkan 150 dari 200 menyatakan setuju maka sekurang-kurangnya 50 dari 30.000 tidak setuju. Persentase sebenarnya merupakan bilangan antara 150/30.000 sampai 29.950/30.000, yaitu dari 0,5% sampai 99,8%. Persentase setuju berdasarkan data sampel adalah 150/200 = 75%.

Permasalahan yang muncul adalah bagaimana mengukur ketelitian nilai taksiran; dalam hal ini 75%, terhadap nilai sebenarnya, namakan ε. Masalah ketelitian suatu penaksir dikaitkan dengan pernyataan

$$P\,(|\hat{\theta} - \theta| \leq 0{,}07) \geq 0{,}95$$

atau dinyatakan secara verbal peluang sekurang-kurangnya 95% selisih antara $\hat{\theta}$ dengan θ tidak lebih dari 0,07.

Dalam pernyataan ini, $\hat{\theta}$ adalah penaksir untuk θ dan nilainya dapat berubah bila diambil sampel 200 lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Populasi, Sampel, dan Penaksir

Populasi adalah kumpulan objek yang menjadi perhatian penelitian. Misalnya, populasi mahasiswa, populasi petani, populasi ikan. Pada populasi dikaitkan satu atau beberapa karakteristik yang hendak diukur.

Sampel didefinisikan sebagai bagian dari populasi. Sampel merupakan wakil populasi, yang mana informasi dari sampel digunakan untuk menyimpulkan keadaan populasi. Pemilihan sampel merupakan hal yang penting dalam metode sampling. Istilah sampel acak berarti tiap anggota populasi mempunyai peluang sama untuk terpilih sebagai sampel jika sampel diperoleh dari kelompok tertentu maka kesimpulan yang diperoleh lebih mencerminkan kelompok dari pada populasi, dalam hal ini dikatakan hasil yang diperoleh merupakan hasil yang bias, tidak mencerminkan keadaan populasi.

Masalah ketelitian (*accuracy*) taksiran parameter dapat diselesaikan dengan eksperimen. Survei pendapat mahasiswa tentang sistem ujian semester pada bagian pendahuluan hanya mempunyai dua jawaban yang mungkin setuju atau tidak setuju.

Eksperimen di mana hanya ada dua hasil yang mungkin dikenal dengan nama eksperimen Bernoulli. Proses pengambilan sampel dari populasi mahasiswa untuk mengukur ketelitian taksiran proporsi dapat dimodelkan dengan eksperimen Bernoulli sebagai berikut.

Populasi mahasiswa direpresentasikan oleh 30.000 kelereng. Misalkan, 21.426 di antaranya berwarna merah dan sisanya berwarna hitam. Warna merah merepresentasikan jawaban setuju dan hitam menyatakan tidak setuju. Proporsi sebenarnya (proporsi teoretis) adalah θ = 21426/30.000 = 0,7142. Misalkan, diambil sampel sebesar 200 dan 145 di antaranya berwarna merah maka taksiran θ adalah $\hat{\theta}$ = 145/200 = 0,725. Perbedaan antara nilai sebenarnya dengan taksiran untuk parameter, θ adalah $|0,725-0,7142|=0,0108$. Untuk menentukan ketelitian penaksir $\hat{\theta}$, dilakukan pengulangan pengambilan sampel sebesar 200, dari populasi 30.000 kelereng. Misalkan, dilakukan pengulangan 1000 kali dan diperoleh tabel frekuensi berikut.

Tabel 1.1

Distribusi $|\hat{\theta} - \theta|$ dari 1000 Pengulangan Pengambilan Sampel Ukuran 200 dari Populasi Bernoulli

	Frekuensi	Frekuensi Relatif
$\lvert \hat{\theta} - \theta \rvert < 0{,}01$	225	22,5%
$0{,}01 \leq \lvert \hat{\theta} - \theta \rvert < 0{,}05$	646	64,6%
$0{,}05 \leq \lvert \hat{\theta} - \theta \rvert < 0{,}10$	124	12,4%
$0{,}10 \leq \lvert \hat{\theta} - \theta \rvert < 0{,}20$	4	0,4%
$0{,}20 \leq \lvert \hat{\theta} - \theta \rvert < 0{,}50$	1	0,1%
$0{,}50 \leq \lvert \hat{\theta} - \theta \rvert$	0	0%

Hasil Tabel 1.1 menyatakan bahwa 225 kali dari 1000 pengulangan nilai $|\hat{\theta} - \theta|$ kurang dari 0,01; 646 dari 1000 nilai $|\hat{\theta} - \theta|$ terletak di antara 0,01 sampai 0,05, dan seterusnya.

Hasil Tabel 1.1 dapat dinyatakan dengan notasi peluang (kemungkinan)

$$P\ (0{,}01 \leq |\hat{\theta} - \theta| \leq 0{,}05) \approx 64{,}6\%$$

Bila dikerjakan secara manual, proses pengulangan pengambilan sampel ukuran 200 merupakan pekerjaan yang membutuhkan waktu cukup lama. Pekerjaan ini dapat digantikan oleh komputer. Proses pengulangan pengambilan sampel oleh komputer dikenal dengan nama simulasi pengambilan sampel. Salah satu algoritma pembangkit bilangan acak adalah *Linear Congruential Generator* (LCG)

Algoritma LCG

1. Tetapkan konstanta a, c, m dan I_0.
   Konstanta a, c, m dipilih agar tidak terjadi pengulangan bilangan yang sama. Misalnya a = 16.807, c = 0, $m = 2^{31} - 1$.
2. Hitung: $I_n = (a\ I_{n-1} + c) \bmod m$.
   = sisa hasil pembagian ($a\ I_{n-1} + c$) dengan m,
   misalnya 75mod7 = 5, karena 75 : 7 =10, sisa 5.

3. Hitung: $u_n = I_n / m$.
   Dari langkah 2 dan 3 terlihat bahwa $0 \le u_n < 1$, karena $0 \le I_n < m$. Ulangi langkah 2 dan 3 sebanyak bilangan yang diinginkan. Sebagai contoh, untuk a = 25173, c = 13849, m = 65536 dan I_0 = 11 diperoleh

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (a\, I_0 + c) \bmod m \\
&= (25173 \times 11 + 13849) \bmod 65536 = 28608 \\
& \text{Karena } (25173 \times 11 + 13849)/65536 = 10, \text{ sisa } 28608. \\
u_1 &= 28608/65536 = 0{,}436523 \\
I_2 &= (a\, I_1 + c) \bmod m \\
&= (25173 \times 28608 + 13849) \bmod 65536 = 53465 \\
u_2 &= 53465/65536 = 0{,}815811
\end{aligned}
$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan u suatu bilangan acak yang diperoleh melalui metode *LCG*. Unit populasi yang terambil sebagai sampel ditentukan dari rumus $N* u + 1$, di mana N menyatakan ukuran populasi. Misal 3 bilangan acak yang pertama adalah 0,43341, 0,27638, 0,74742. Tuliskan mata dadu yang muncul pada 3 lantunan pertama.
2) Misal pada algoritma LCG diambil I = 11, a = 2749, c = 447, m = 19243. Tuliskan 3 bilangan acak pertama berdasarkan algoritma *LCG*.
3) Histogram merupakan alat untuk mempelajari distribusi suatu populasi. Suatu histogram dapat dinyatakan dalam suatu tabel frekuensi seperti tabel berikut.

Selang Kelas	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif	Frekuensi Relatif	Frekuensi Rel Kumulatif
$(c_1, c_2]$	O_1	N_1	f_1	F_1
$(c_2, c_3]$	O_2	N_2	f_2	F_2
…	…	…	…	…
$(c_{k-1}, c_k]$	O_{k-1}	N_{k-1}	f_{k-1}	F_{k-1}
$(c_k, c_{k+1}]$	O_k	$N_k = N$	f_k	$F_k = 1$

O_i = banyaknya anggota pada selang kelas $(c_i, c_{i+1}]$

$N_i = O_1 + O_2 + ... + O_i$ = banyaknya anggota kelas $(c_i, c_{i+1}]$

$f_i = O_i / N$

$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i = N_i / N$

N = ukuran populasi = $\sum_{i=1}^{k} O_i = N_k$

k = banyaknya selang kelas

Penentuan data yang terambil pada populasi yang dikelompokkan dalam k. kelas ditentukan melalui prosedur berikut:

i. Ambil suatu bilangan acak, misal u

ii. Ambil kelas interval i, I memenuhi $F_{i-1} \leq u < F_i$

iii. Data yang terpilih sebagai sampel $x = c_i + \dfrac{(u - F_{i-1})}{f_i} A_i$ dengan

$A_i = c_i - c_{i-1}$

Misal tabel frekuensi umur 417 bola lampu diberikan pada tabel berikut.

Selang Kelas	Frekuensi	Frekuensi Relatif	Frekuensi Relatif Kumulatif
(201 – 300]	1	0,002	0,0020
(300 – 400]	0	0,000	0,0020
(400 – 500]	0	0,000	0,0020
(500 – 600]	3	0,007	0,0090
(600 – 700]	10	0,024	0,0330
(700 – 800]	21	0,050	0,0830
(800 – 900]	45	0,108	0,1920
(900 – 1000]	91	0,218	0,4100
(1000 – 1100]	85	0,204	0,6140
(1100 – 1200]	80	0,192	0,8060
(1200 – 1300]	44	0,106	0,9120
(1300 – 1400]	23	0,055	0,9670
(1400 – 1500]	9	0,022	0,9886
(1500 – 1600]	3	0,007	0,9956
(1600 – 1700]	2	0,004	0,9996
	417		

Tentukan data yang terambil sebagai sampel bila 3 bilangan acak pertama adalah 0,10480, 0,37570, 0,90229.

4) Misal waktu pelayanan 40 pelanggan, setelah dikelompokkan, tercatat sebagai berikut.
   Tentukan data yang terpilih sebagai sampel bila 5 bilangan acak yang pertama adalah 0,716; 0,617; 0,167; 0,432; 0,324.

5) Misalkan $X_1,\ X_2,...,X_n$ menyatakan data pada suatu populasi berukuran *N*. Unit populasi yang terambil sebagai sampel ditentukan dengan rumus $j = Integer(N*u+1)$, dengan *u* suatu bilangan acak yang diperoleh dari metoda *LCG*. Tentukan data yang terpilih sebagai sampel dari populasi: 65, 74, 70, 75, 82, 75, 66, 64, 71, 72, dengan *N*=10, jika 5 bilangan acak yang pertama adalah 0,71 0,62 0,17 0,43 0,32.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Ambil *N* = 6, misal $j = Integer(N*u+1)$. Untuk *u* = 0,43341 maka $j = Integer(6\times 0,43341+1) = Integer(3{,}60046) = 3$. Jadi, mata dadu yang muncul pada lantunan pertama adalah mata 3.

2)
$$
\begin{aligned}
I_1 &= (2749 \times 11 + 447) \bmod 19243\\
&= 30686 \bmod 19243\\
&= 11443 \text{ (hasil bagi 30686:19243 mempunyai sisa 11443).}\\
u_1 &= 11443/19243\\
&= 0{,}5947\\
I_2 &= (2749 \times 11443 + 447) \bmod 19243\\
&= 31457254 \bmod 19243\\
&= 14192 \text{ (hasil bagi 31457254:19243 mempunyai sisa 14192).}\\
u_2 &= 14192/19243\\
&= 0{,}7375 \text{ dan seterusnya}\\
I_3 &= (2749 \times 14192 + 447) \bmod 19243\\
&= 39014255 \bmod 19243\\
&= 8694 \text{ (hasil bagi 39014255:19243 mempunyai sisa 8694).}\\
u_3 &= 8694/19243\\
&= 0{,}4518 \text{ dan seterusnya}
\end{aligned}
$$

3) Untuk bilangan acak u = 0,1048. Kelas interval yang memenuhi $F_{i-1} \le u < F_i$. Diperoleh I = 7 data yang terpilih sebagai sampel

$$x = c_7 + \frac{u - F_6}{f_7} \times 47$$

$$= 801 + \frac{0{,}1048 - 0{,}083}{0{,}108}\,99 \quad = 801 + 19{,}98 = 820{,}98$$

4) Lihat Latihan no. 3

5) Untuk bilangan acak 0,71, diperoleh j = Int (10 × 0,71 + 1) Int (8,1) = 8. Jadi unit populasi yang terpilih sebagai sampel adalah unit ke-8 nilai datanya 64. untuk bila 0,62 diperoleh j = Int (10 × 0,62 + 1) = 7 dan nilai data 66.

RANGKUMAN

Proses pengambilan sampel dapat disimulasikan dengan algoritma LCG (*Linear Congruential Generator*).

1. Pilih konstanta a, c, m dan I_0. Konstanta dipilih agar tidak terjadi pengulangan munculnya bilangan yang sama.
2. Hitung $I_k = (a\, I_{k-1} + c) \bmod m$, k = 1, 2, 3.
3. Hitung $u_k = I_k/m$, $0 \le u_k \le 1$.

Unit populasi yang terpilih sebagai sampel adalah unit populasi dengan indeks j = Integer (N * u + 1), dengan N = ukuran populasi dan u bilangan acak yang diperoleh dari algoritma LCG.

Untuk data yang dikelompokkan, data yang terpilih sebagai sampel

$$x = c_i + \frac{u - F_{i-1}}{f_7} \times A_i$$

dengan $F_{i-1} \le u < F_i$ dan $A_i = c_i - c_{i-1}$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika pada algoritma LCG diambil a = 2, c = 4, m = 19, dan I_0 = 11 maka $I_1=(aI_0+c)\text{mod } m$ ….
   A. 3
   B. 7
   C. 11
   D. 26

2) Jika pada algoritma LCG diambil a = 2, c = 0, m = 11, dan F_0 = 11, dan $I_1=(aI_0+c)\text{mod } m$ maka $u_1 = I_1/m$ ….
   A. 0
   B. 1/11
   C. 2/11
   D. 3/11

3) Jika suatu populasi berukuran N = 20 dan dari algoritma LCG diperoleh bilangan acak 0,43 maka unit populasi yang terpilih sebagai sampel adalah j = ….
   A. 6
   B. 7
   C. 8
   D. 9

4) Jika suatu populasi berukuran N = 40 dan dari algaritma LCG diperoleh bilangan u = 0,97 maka unit populasi yang terpilih sebagai sampel adalah j = ….
   A. 37
   B. 38
   C. 39
   D. 40

5) Misalkan suatu populasi dikelompokkan kedalam kelas-kelas berikut.

Selang Kelas	Frekuensi
(10, 15]	1
(15, 20]	2
(20, 25]	4
(25, 30]	2
(30, 35]	1

Jika bilangan acak yang terpilih dari algaritma LCG adalah u = 0,8 maka data yang terpilih sebagai sampel adalah ....

A. $\frac{5}{9}$

B. 25

C. $25\frac{5}{9}$

D. 26

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Populasi dan Simulasi

Data yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari berjumlah hingga, merupakan representasi suatu populasi. Misalnya seperti data yang dibicarakan pada Kegiatan Belajar 1, 200 peserta kuliah dapat dianggap sebagai wakil dari populasi takhingga. Data pengukuran tekanan udara merupakan sampel dari populasi takhingga. Semua nilai tekanan udara yang mungkin $P(X=0) = f(0) = 1-\theta$

Pada kegiatan belajar ini akan dibahas simulasi untuk membangkitkan sampel dari suatu populasi.

Populasi 30.000 peserta ujian masuk dapat direprensentasikan oleh takhingga bilangan 0 atau 1; 0 jika berusia kurang dari 25 tahun dan 1 bila berusia lebih dari atau sama dengan 25 tahun. Kedua proporsi dinyatakan oleh $1-\theta$ dan θ. Frekuensi relatif dari kedua nilai yang mungkin disebut peluang $P(X=x) = f(x)$; $P(X=0) = f(0) = 1-\theta$ dan $P(X=1) = f(1) = \theta$. Fungsi distribusi kumulatif adalah jumlah kumulatif semua nilai peluang untuk titik-titik $\leq x$;

$$F(x) = P\,(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1-\theta & , \quad 0 \leq x < 1 \ , \quad 0 < \theta < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

dan $f(x) = P(X=x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \ x = 0, \ 1$

Peluang $f(x) = P(X=x)$ memenuhi hukum peluang:

i. $0 < f(x) \leq 1$

ii. $\sum_x P(X=x) = 1$

$F(x)$ merupakan fungsi tangga, dan loncatan merupakan nilai peluang $P(X=x)$. Sebagai contoh, diberikan distribusi peluang

$$P(X=0)=\frac{1}{4},\ P(X=1)=\frac{1}{2}, P(X=2)=\frac{1}{4}$$

maka distribusi kumulatif $F(x)$ adalah

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/4, & 0 \le x\ 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Populasi abstrak di mana banyaknya nilai yang mungkin berhingga atau terhitung dinamakan populasi diskrit dan peubah acak X disebut peubah acak diskrit. Himpunan semua nilai peubah acak X yang mungkin disebut pendukung, notasi S_X. Untuk setiap $x \in S_X$, $f(x)=P(X=x)$ menyatakan peluang dari $X = x$.

Peubah acak X dikatakan berdistribusi seragam jika $f(x)=P(X=x)$ bernilai sama untuk setiap $x \in S_X$. Jika $S=\{1, 2, ..., n\}$ maka $f(x)=P(X=x)=\frac{1}{n}$, notasi $X \sim U[1, 2, ..., n]$. Jika setiap bialangan 0, 1, …, 9 mempunyai peluang sama untuk terpilih maka X = angka yang muncul berdistribusi U[0,9], fungsi peluangnya adalah

$$f(x)=P(X=x)=\frac{1}{10},\ x=0, 1, ..., 9$$

Distribusi Bernoulli adalah distribusi dengan pendukung yang terdiri dari 2 nilai; $S=\{0, 1\}$. Distribusi Bernoulli merupakan representasi dari eksperimen yang mempunyai dua nilai yang mungkin: sukses (kode 1) dan gagal (kode 0). Distribusi peluang Bernoulli diberikan oleh

$$P(X=1)=f(1)=p,\ P(X=0)=f(0)=1-p.$$

Jika eksperimen Bernoulli diulangi n kali dan saling bebas maka X = banyaknya sukses dari n eksperimen Bernoulli berdistribusi binomial dan dinotasikan dengan $X \sim b(n, p)$ dan distribusi peluang binomial diberikan oleh

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ q = 1 - p,\ \ x = 0,\ 1, \ldots, n$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Peubah acak X = banyaknya eksperimen Bernoulli yang diperlukan untuk memperoleh sukses berdistribusi geometrik dengan distribusi peluang

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1},\ x = 1, 2, 3, \ldots .$$

Hasil pengukuran yang mungkin suatu besaran (berat, isi, jarak) direprentasikan oleh selang, misalnya $a \le x \le b$. Distribusi dengan pendukung berupa selang disebut distribusi kontinu. Fungsi f merupakan fungsi densitas dari X jika:

1. $f(x) \ge 0$, $\quad -\infty < x < \infty$
2. $P(a < x < b) = \int_{x=a}^{b} f(x)\ dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$
4. $\int_{a}^{a} f(x)\ dx = 0 = P\ (X = a)$

Fungsi distribusi dari variabel kontinu adalah

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt\ .$$

Untuk variabel kontinu, $F(x)$ merupakan fungsi kontinu juga.

Berapa contoh distribusi untuk variabel kontinu

1. Distribusi seragam $X \sim U(a,b)$ dengan densitas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \ yang\ lain \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

2. Distribusi normal baku $Z \sim N(0,1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = \phi(z), \quad -\infty < z < \infty$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} f(t)\, dt = \Phi(z)$$

Nilai $\phi(z)$ dan $\Phi(z)$ disajikan pada tabel normal.

3. Distribusi eksponensial $X \sim Exp(\frac{1}{\lambda})$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Momen ke–k dari peubah acak X

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k f(x), & X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, f(x)\, dx, & X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Variansi, $V(X)$, merupakan momen kedua terhadap mean $\mu = E(X)$.

$$V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beberapa sifat mean dan variansi.

a. $E(aX + b) = aE(X) + b$

b. $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Sampling dari distribusi diskrit

Misalnya, diberikan distribusi peluang peubah acak diskrit X,

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, \; P(X = 1) = \frac{1}{2}, \; P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Dapat diturunkan fungsi distribusi dari *X*,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Permasalahan yang dihadapi adalah bagaimana *menggenerate* (membangkitkan) nilai-nilai *X* dari distribusi ini. Misalkan 1000 bilangan di-*generate*, dengan harapan 25% bernilai 2. Frekuensi relatif, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, dapat diperoleh dari distribusi seragam $U(0,1)$. Selang [0,1] dibagi menjadi 3 selang, [0, 0,25), [0,25, 0,75), [0,75, 1). Jika $u \in$ [0, 0,25) maka *X* = 0, jika $u \in$[0,25, 0,75) maka *X* = 1, jika $u \in$ [0,75, 1) maka *X* = 2. Metode ini disebut metode balikan CDF (*cumulative distribution function*). Peubah acak *u* ~ (0,1) diperoleh dari metode LCG.

Algorima balikan CDF

1. *Gerenate* bilangan acak *u*, *u* ~ *U*(0,1).
2. Tentukan nilai *X* terkecil sehingga $F(X) > u$, $X = \min\{x \mid F(x) > u\}$.
3. *X* bilangan acak dari distribusi peluang $f(x) = P(X = x)$.

Contoh:

Misal dengan algoritma LCG (*Linear Congruential Generator*) diperoleh barisan bilangan,

k	0	1	2	3	4	5	6	7
I_k	1	37	25	29	11	21	9	13
u_k	$\frac{1}{38}$	$\frac{37}{38}$	$\frac{25}{38}$	$\frac{29}{38}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{21}{38}$	$\frac{9}{38}$	$\frac{13}{38}$
	=	=	=	=	=	=	=	=
	0,03	0,97	0,66	0,76	0,29	0,55	0,24	0,34

k	7	8	9	10	11	12	13
I_k	13	33	5	7	11	17	13
u_k	$\frac{13}{38}$	$\frac{33}{38}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{7}{38}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{17}{38}$	$\frac{13}{38}$
	=	=	=	=	=	=	=
	0,34	0,87	0,13	0,18	0,29	0,45	0,34

Misal ingin meng-*generate* peubah acak *X* dengan fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Selang [0,1] dibagi menjadi selang [0, 0,25), [0,25, 0,75), [0,75, 1]

Untuk u = 0,03, $X = \min\{x \mid F(x) > 0,03\} = 0.$

Untuk u = 0,97, $X = \min\{x \mid F(x) > 0,97\} = 2.$

Diperoleh tabel

U	0,03	0,97	0,66	0,76	0,29	0,55	0,24	0,34
X	0	2	1	2	1	1	0	1

U	0,87	0,13	0,18	0,29	0,45	0,34	0,03	
X	2	0	0	1	1	1	0	

Atau

X	#	**Frekuensi Relatif**
0	5	$\frac{5}{15}$
1	7	$\frac{7}{15}$
2	3	$\frac{3}{15}$
	15	

: dibaca jumlah (frekuensi)

Contoh:

Diketahui generator $I_i = 3I_{i-1}$ (mod 64), $I_0 = 25$ diperoleh barisan bilangan: 25, 11, 33, 35, 41, 59, 49,19, 57, 43, 1, 3, 9, 27, 17, 51, 25 dan barisan $u_i = I_i/64$

0,39	0,17	0,52	0,55	0,64	0,92	0,77	0,30	0,89
0,67	0,02	0,05	0,15	0,42	0,27	0,80	0,39	

Untuk menggenerate bilangan dengan distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

dilakukan sebagai berikut.

1. Bagi selang [0,1) menjadi Selang [0, 0,25), [0,25, 0,50), [0,50, 0,75) dan [0,75, 1) dan diperoleh
2.

U	0,39	0,17	0,52	0,55	0,64	0,92	0,77	0,30	0,89
X	2	1	3	3	3	4	4	2	4

U	0,67	0,02	0,05	0,15	0,42	0,27	0,80	0,39
X	3	1	1	1	2	2	4	2

3. Tabel Frekuensi

X	#	**Frekuensi Relatif**
1	4	4/17
2	5	5/17
3	4	4/17
4	4	4/17
	17	1

Sampling dari Distribusi Kontinu

Fungsi disribusi F dari distribusi kontinu merupakan fungsi kontinu dan monoton naik. Akibatnya, F merupakan fungsi 1 – 1. Prosedur *generate* bilangan X dari distribusi dengan fungsi distribusi $F(x)$:

1. *Generate* bilangan u dari distribusi seragam $U[0,1)$.
2. $U = F(x)$, dengan F fungsi distribusi X
3. $X = F^{-1}(u)$.

Metode di atas dinamakan metode balikan (inverse) CDF. Dengan

$$X = F^{-1}(u),$$

diperoleh

$$\begin{aligned} P\,(X \le x) &= P(F^{-1}(u) \le x) \\ &= P(u \le F(x)) \quad = F_u\,(F(x)) \\ &= F(x) \qquad\qquad (u \sim u[0,1)) \end{aligned}$$

Karena $U \sim U[0,1)$, diperoleh

$$F\,(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & 0 \le u < 1 \\ 1, & u \ge 1 \end{cases}$$

Contoh. Misal $X \sim Exp\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$. Densitas X diberikan oleh

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Fungsi distribusi dari X,

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Untuk memperoleh bilangan dari distribusi eksponensial $Exp\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ dilakukan langkah-langkah berikut.

1. *Generate* barisan bilangan u_1, u_2, …. Dari $U[0,1)$.
2. $u_j = F\,(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, diperoleh

$$X_j = \frac{-\ln\,(1 - u_j)}{\lambda}.$$

Contoh:

Misal $u_1 = 0,3714,\ u_2 = 0,5893,\ \ u_3 = 0,8810$

Dengan λ = 2, diperoleh

$$X_1 = \frac{-\ln\ (1 - 0,3714)}{2} = 0,2321\,,\quad X_2 = 0,4449,\quad \text{dan}\ \ X_3 = 0,0643$$

Jika $U \sim U[0,1)$ maka $1-U \sim U[0,1)$. Sehingga U pada rumus $X_j = \dfrac{-\ln\ (1 - u_j)}{\lambda}$ dapat diganti dengan 1 – U. Diperoleh

$$X_j = \frac{-\ln\ (u_j)}{\lambda}\ .$$

Pada contoh di atas, λ = 2, diperoleh

$$X_1 = \frac{-\ln\ (0,3714)}{2} = 0,4952\,,\quad X_2 = 0,2644,\quad \text{dan}\ \ X_3 = 0,0633$$

Contoh:

Misalkan X mempunyai densitas

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\qquad x > 1$$

Fungsi distribusi F diberikan oleh

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x},\qquad x > 1$$

Untuk menggenerate X dari distribusi ini, ambil $U = 1 - \dfrac{1}{x}$ dan selesaikan persamaan $X = \dfrac{1}{1-U}$. Barisan bilangan U_1, U_2, …. dapat ditransformasikan menjadi barisan bilangan X_1, X_2, ….

Syarat agar metode balikan CDF adalah (1) $F(x)$ mempunyai bentuk eksplisit dan (2) persamaan $u = F(x)$ dapat diselesaikan. Kedua syarat di atas tidak dapat diterapkan pada distribusi normal baku $N(0,1)$. CDF distribusi normal $N(0,1)$ hanya dapat dinyatakan sebagai integral

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

Diperlukan metode lain dalam hal metode balikan CDF tidak dapat diterapkan

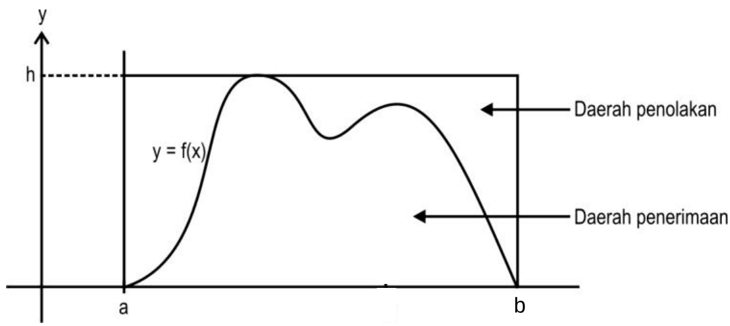
Metode Sampling Penerimaan (*Acceptance Sampling*). Misalnya (a,b) suatu selang pada garis bilangan. Misal $h = maks\ f(x)$. Jadi h merupakan titik $a \leq x \leq b$ tertinggi dari fungsi densitas $f(x)$; h dapat dicapai pada $x = a$ maupun pada $x = b$. Buat persegi panjang $(a,b)\times(0,h)$. Luas persegi panjang adalah $h(b-a)$ sedangkan luas daerah di bawah densitas $f(x)$ sama dengan 1.

Prosedur untuk menggenerate peubah acak dengan densitas f(x) adalah sebagai berikut.

Algoritma sampling penerimaan:

1. Misal u_1, u_2 dua bilangan acak dari distribusi U(0,1)
2. Generate $X = (b-a)U_1 + a$. X berdistribusi U (a,b)
3. Generate $Y \sim U(0,h)$ dengan transformasi $y = hu_2$.

   Titik (X, Y) merupakan titik acak berdistribusi seragam pada persegi panjang $(a,b)\times(0,h)$.
4. Bandingkan Y dengan $f(X)$. Jika $Y \leq f(X)$ maka terima X sebagai bilangan acak yang diinginkan. Jika $Y > f(X)$ maka tolak X (tidak terpakai).
5. Ulangi proses 1 sampai 4 hingga diperoleh barisan bilangan acak X_1, X_2, …., X_n.



Gambar 1.1. Metode Sampling Penerimaan

Contoh:

Generate peubah acak dari distribusi dengan fungsi densitas

$f(x)=2310\ x^4(1-x)^6,\quad a<x\le 1$

dengan metode algoritma sampling.

Penyelesaian

Turunan pertama

$f'(x)=4620\,x^3(1-x)^5\,(2-5x)$

Persamaan $f'(x)=0$ memberikan $x=\dfrac{2}{5}$ dan $h=maks\{f(x)\}=2,759.$

Tentukan persegi panjang $(0,\ 1)\times(0,\ 2,76)$ dan generate bilangan acak X dengan algoritma berikut.

1. Generate $u_1\sim U(0,1)$ dan $u_2\sim U(0,1)$
2. Ambil $X = U_1$ dan $Y = 2,76\ U_2$
3. Jika $Y\le f(x)$, terima x sebagai bilangan acak selain itu tolak.

Menggenerate Normal Acak

Distribusi normal baku $N(0,1)$ memegang peranan sangat penting dalam statistika. Normal acak dapat digenerate dengan metode balikan CDF, sampling penerimaan, teorema limit sentral, dan Box-Muller.

1. Metode Balikan CDF

Misal $X\sim N(0,1)$. Fungsi distribusi dari X diberikan oleh

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ dan balikannya $\Phi^{-1}(u)$. Baik $\Phi(x)$ maupun $\Phi^{-1}(u)$ tidak memiliki bentuk eksplisit. Untuk itu telah dikembangkan kesempatan

a) Generate $u\sim U(0,1)$

b) $w=\sqrt{-2\ln u}$

c) Untuk $0<U\le 0,5$

$$X=\Phi^{-1}(u)=\frac{a_0+a_1w+a_2w^2}{1+b_1w+b_2w^2+b_3w^3}-w$$

dengan
$a_0 = 2{,}515517$ $a_1 = 0{,}802853$ $a_2 = 0{,}0103028$
$b_1 = 1{,}432788$ $b_2 = 0{,}189269$ $b_3 = 0{,}001308$

Untuk $0{,}5 < U < 1$

$$X = -\Phi^{-1}(1-u) = \frac{a_0 + a_1 w + a_2 w^2}{1 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3} - w$$

dengan $w = \sqrt{-2\ln(1-u)}$

2. Metode Sampling Penerimaan

Metode sampling penerimaan didefinisikan pada persegi panjang $(a,b)\times(0,h)$, $h = maks\ f(x)$, $a \le x \le b$. Distribusi normal didefinisikan pada selang (-∞, ∞). Penerapan metode sampling penerimaan pada distribusi normal memerlukan pemotongan selang (-∞, ∞) menjadi selang (*a*, *b*). Misalnya, bila selang (-∞, ∞) dipotong menjadi selang (-4, 4) maka peluang mendapatkan *X* di luar selang ini sangat kecil;
$P(|X| \ge 4) \simeq 0{,}00007$

3. Metode Teorema Limit Sentral

Salah satu metode sederhana untuk menggenerate bilangan acak normal adalah teorema limit sentral.

Teorema Limit Setral
Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel acak dari distribusi dengan mean $E(X) = \mu$ dan variansi $V(X) = \sigma^2 < \infty$.

Maka, untuk n besar, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

berdistribusi hampir normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n, yaitu $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

Jadi, untuk *n* cukup besar,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Prosedur untuk menggenerate satu bilangan Z adalah sebagai berikut

(1) Generate $X_1, X_2, ..., X_n$ dari distribusi $U(0,1)$.

(2) Hitung ekspetasi (mean) dan variansi $U(0,1)$, $E(X) = \frac{1}{2}$,

$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{12}$, dan $\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{12}}$. Dan distribusi dari mean adalah $\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12n}\right)$

(3) $Z = \dfrac{\bar{X} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12n}}} \sim N(0,1)$

(4) $n = 12,\ Z = 12(\bar{X} - \frac{1}{2}) = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$.

4. Box-Muller

a. Generate $U_1 \sim U(0,1)$, $U_2 \sim U(0,1)$

b. $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$, $S = V_1^2 - V_2^2$

c. Jika $S \geq 1$, ulangi menggenerate u_1, u_2.

Jika $S < 1$, hitung $Z_1 = V_1\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}$ dan $Z_2 = V_2\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}$

Dapat ditunjukkan $P(S \geq 1) = 1 - \frac{\pi}{2} = 0,2146 \simeq 21\%$. Metode Box-Muller merupakan metode eksak.

Box – Muller polar

(i) Generate $U_1 \sim U(0,1)$ dan $U_2 \sim U(0,1)$

(ii) $Z_1 = \sqrt{-2\ln S}\cos 2\pi u_2$ dan $Z_2 = \sqrt{-2\ln S}\sin 2\pi u_2$

Z_1, Z_2 merupakan pasangan $N(0,1)$

Contoh:

Misalkan $U \sim U(0,1)$. Tentukan solusi X dari persamaan $U = F(X)$ bila X mempunyai densitas

a. $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

b. $f(x) = 0,5e^{-0,5x}, \quad x > 0$

Penyelesaian

a. $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$U = F(X) = X^2, \quad 0 \le X^2 \le 1$$

$$X = \sqrt{U}$$

b. $f(x) = 0,5e^{-0,5x}, \quad x > 0$

untuk $x < 0,\ F(x) = P(X \le x) = 0$

untuk $x \ge 0,\ F(x) = P(X \le x) = \int_0^x 0,5e^{-0,5t}dt$

$$= 0,5 \times \frac{-1}{0,5}\int_0^x e^{-0,5t}d(-0,5)t$$

$$= e^{-0,5t}\Big|_0^x$$

$$= 1 - e^{-0,5x}$$

Persamaan $u = F(x)$ memberikan

$u = 1 - e^{-0,5x}, \quad 0 < u < 1$

$u - 1 = -e^{-0,5x}$

$1 - u = e^{-0,5x}$

$\ln(1-u) = -0,5x$

$x = -2\ln(1-u)$

Penyelesaian $U = F(X)$ diberikan oleh

$X = -2\ln(1-U)$, $0 < U < 1$

Contoh:

Tuliskan algoritma sampling penerimaan untuk membangkitkan bilangan X yang berdistribusi

a. $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

b. $f(x) = 0,5e^{-0,5x}, \quad x > 0$

Penyelesaian

a. $h = \underset{0<x<1}{maks}\{f(x)\} = \underset{0<x<1}{maks}\{2x\} = 2$

Algoritma sampling penerimaan:

1. Bangkitkan $U_1 \sim U(0, 1)$, $U_2 \sim U(0, 1)$
2. $X = (1-0)U_1 + 0 = U_1$

   $Y = 2U_2$
3. Jika $Y \leq f(X)$, terima X, selain itu tolak.

b. $h = \underset{x\geq 0}{maks}\{f(x)\} = \underset{x\geq 0}{maks}\{0,5e^{-0,5x}\} = 0,5$

Algoritma sampling penerimaan:

1. Bangkitkan $U_1 \sim U(0, 1)$, $U_2 \sim U(0, 1)$
2. Misal selang (-∞, ∞) dipotong menjadi (0,4).

   $X = (4-0)U_1 + 0 = 4U_1$

   $= 4\ U_1$

   $Y = 0,5U_2$
3. Jika $Y \leq f(X)$, terima X, selain itu tolak.

Distribusi binomial dan penerapannya dalam simulasi. Misal p, $0 < p < 1$, menyatakan peluang bahwa penyataan A benar. Misalkan dari n trial, pernyataan A benar r kali, $0 \leq r \leq n$. Tentukan peluang bahwa pernyataan A benar. Permasalahan ini dapat didekati dengan distribusi binomial.

Peluang memperoleh $X = r$ sukses dari n trial bebas bila peluang sukses $= p$, adalah

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, ..., n$$

dengan $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Distribusi di atas dinamakan distribusi binomial, dan diberi notasi $X \sim b(n, p)$.

Untuk n > 20 dan p $\simeq$ 0,5, distribusi binomial dapat dihampiri oleh distribusi normal,

$P(X = i) \simeq P(i - \frac{1}{2} < Y < i + \frac{1}{2})$ dengan $X \sim b(n, p)$ dan $Y \sim b(np, np(1-p))$.

Penyelesaian p dari pertaksamaan

$$\left| \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right| < z_\alpha$$

diberikan oleh

$$p: \quad \frac{\hat{p} + (z^2/2n)}{1 + (z^2/n)} \pm \frac{z}{1 + (z/2n)} \left\{ \frac{\hat{p}(1-\hat{p}}{n} + \frac{z^2}{4n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\hat{p} + (z^2/2n)}{1 + (z^2/n)} \pm d$$

dengan $z = z_{\alpha/2}$ dan $d = \dfrac{z}{1 + z^2/n} \left\{ \dfrac{\hat{p}\ (1-\hat{p})}{n} + \dfrac{z^2}{4n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$

Bila n cukup besar dan p dekat dengan 0,5,

$$1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} \simeq 1, \quad \hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} \simeq p, \quad d \simeq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$(1-\alpha)100\%$ selang kepercayaan untuk p:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Contoh:

Misalkan dari suatu simulasi dengan n = 1000 diperoleh $\hat{p}$ = 0,0005 maka 95% selang kepercayaan p :

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (0{,}0021,\ 0{,}0117) \qquad \text{(eksak)}$$

$$\simeq (0{,}0006,\ 0{,}0094) \qquad \text{(hampiran)}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan fungsi distribusi $F(x)$ dari peubah acak X dengan fungsi densitas

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{3},\quad x = -1,0,1$

c) $f(x) = \dfrac{x}{15},\quad x = 1,2,3,4,5$

2) Tentukan fungsi distribusi $F(x)$ dari fungsi densitas

a. $f(x) = 3(1-x)^2,\quad 0 < x < 1$

b. $f(x) = \dfrac{3(1-x)^2}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty < x < \infty$

c. $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty < x < \infty$

3) Tentukan solusi X dari persamaan $U = F(x)$ dari distribusi dengan densitas

a. $f(x) = 3(1-x)^2,\quad 0 < x < 1$

b. $f(x) = \dfrac{3(1-x)^2}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty < x < \infty$

c. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

4) Tentukan solusi $X = F^{-1}(u)$ dari fungsi densitas

a. $f(x) = \frac{x}{12}, \quad 1 < x < 5$

b. $f(x) = \frac{x+1}{48}, \quad -1 < x < 7$

c. $f(x) = 12x^2(1-x), \quad 0 < x < 1$

5) Tentukan rumusan $u = F(x)$, apakah *x* dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi *u*; $x = F^{-1}(u)$ dari densitas

a. $f(x) = 1 - |x|, \quad |x| < 1$

b. $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi/2$

c. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$

d. $f(x) = kx(1-x), \quad 0 < x < 1,$ k konstanta

6) Tentukan nilai maksimum dari fungsi densitas berikut.

a. $f(x) = 1 - |x|, \quad |x| < 1$

b. $f(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1,$

c. $f(x) = 12x^2(1-x), \quad 0 < x < 1,$

d. $f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$

e. $f(x) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

f. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$

7) Misal Y berdistribusi seragam $U(0, 1)$; $Y \sim U(0, 1)$ Misal *F* fungsi distribusi peubah acak kontinu $F(x_1) < F(x_2)$ bila $x_1 < x_2$ dan $0 < F(x) < 1$.
Definisikan peubah acak *X* dengan transformasi $Y = Y(x)$. Tunjukkan *X* mempunyai fungsi distribusi $F(x)$.

8) Misal *X* peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi $F(x)$. Tunjukkan $Y = Y(x)$ berdistribusi seragan $U(0, 1)$.

9) Misal peubah acak $U_1 \sim U(0,1)$, dan $U_2 \sim U(0,1)$, Y_1, Y_2 bebas stokastik.
Peubah acak X_1, X_2 didefinisikan dengan:
$X_1 = \left(-2 \ln Y_1\right)^{\frac{1}{2}} \, cos(2\pi \, Y_2)$ dan $X_2 = \left(-2 \ln Y_2\right)^{\frac{1}{2}} \, sin\,(2\pi Y_2)$
Tentukan
a. distribusi gabungan X_1, X_2
b. distribusi marjinal X_1.

10) Tuliskan algoritma sampling penerimaan untuk menggenerate bilangan acak X dengan densitas
$f(x) = 12x^2(1-x), \quad 0 < x < 1,$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \; 3 \\ 1, & 3 \le x \; 4 \\ 1, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$

b. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 \le x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

c. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{1}{15}, & 1 \le x < 2 \\ \dfrac{2}{15}, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{3}{15}, & 3 \le x < 4 \\ \dfrac{4}{15}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

2) a. Untuk $0 < x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} 3(1-t)^2\, dt$

$$= -\int_{0}^{x} 3(1-t)^2\, d(1-t)$$

$$= -3\left.\frac{(1-t)^3}{3}\right|_{0}^{x} = -\left[(1-x)^3 - 1\right]$$

$$= 1-(1-x)^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

b. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan x - \arctan\,(-\infty)\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan x - (-\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$$

c) $$F(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Untuk $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{t}\, dt$

$$= \frac{1}{2} e^{t}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-\infty}) = \frac{1}{2}(e^{x} - 0) = \frac{1}{2}\, e^{x}\,.$$

Untuk $x > 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{t}\ dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\ e^{-t}\ dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} - 1) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

Jadi $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\, e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

3) a. $f(x) = 3(1-x)^2, \quad 0 < x < 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$u = F(x) = 1-(1-x)^3, \qquad 0 < u < 1$$

$$u - 1 = -(1-x)^3$$

$$(1-x)^3 = 1-u$$

$$1-x = (1-u)^{\frac{1}{3}}$$

$$-x = (1-u)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$x = 1-(1-u)^{\frac{1}{3}}$$

Jadi $x = 1-(1-u)^{\frac{1}{3}}$

b. $F(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad -\infty < x < 1$$

$$u = F(x), \qquad 0 < u < 1$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

$$\pi\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \arctan x$$

$$x = \tan \, \pi \left(u - \frac{\pi}{2}\right)$$

c. $F(x) = \frac{1}{2}\ e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$

$$F\ (x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$u = F(x), \qquad 0 < u < 1$

Untuk $\quad 0 < u < \frac{1}{2}$,

$u = \frac{1}{2} e^{x}$

$2u = e^{x}$

$x = \ln(2u)$

Untuk $\quad \frac{1}{2} < u < 1$,

$u = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$

$u - 1 = -\frac{1}{2} e^{-x}$

$-2(u-1) = e^{-x}$

$e^{-x} = 2(1-u)$

$-x = \ln(2(1-u))$

$x = -\ln(2(1-u))$

$$x = \begin{cases} \ln 2u, & 0 < u < \frac{1}{2} \\ -\ln 2(1-u), & \frac{1}{2} \leq u < 1 \end{cases}$$

4) a. $f(x) = \dfrac{x}{12}, \quad 1 < x < 5$

Untuk $1 < x < 5$,

$$F\ (x) = \int_{1}^{x} \frac{t}{12}\ dt = \left.\frac{t^2}{24}\right|_{1}^{x} = \frac{x^2 - 1}{24}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{24}, & 1 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

$$u = F(x) = \frac{x^2 - 1}{24}, \quad 0 < u < 1$$

$$24u = x^2 - 1$$

$$x^2 = 24u + 1, \quad 24u + 1 > 0$$

Karena $X > 0$ maka solusi $x = F^{-1}(u)$ adalah $x = \sqrt{24u+1}$

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{48}, \quad -1 < x < 7$

Untuk $-1 < x < 7$, $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t+1}{48} dt$

Misal: $z = t + 1$, integral menjadi

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t+1}{48} dt = \int_{0}^{x+1} \frac{z}{48} dz = \frac{1}{48} \times \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{x+1}$$

$$= \frac{1}{96}(x+1)^2 - 0 = \frac{1}{96}(x+1)^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{96}(x+1)^2, & -1 < x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

$$u = F(x), \quad 0 < u < 1$$

$$u = \frac{1}{96}(x+1)^2$$

$$(x+1)^2 = 96u, \quad -1 < x < 7$$

$$x + 1 = \sqrt{96u}, \quad x + 1 > 0$$

$$x = -1 + \sqrt{96u}$$

$$x = F^{-1}(u) = -1 + \sqrt{96u}$$

c. $f(x) = 12x^2(1-x), \quad 0 < x < 1$

Untuk $0 < x < 1$

$$F(x) = \int_0^x 12\, t^2\,(1-t)dt$$

$$= \int_0^x 12(t^2 - t^3)\,dt = 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = 4x^3 - 3x^4$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x^3 - 3x^4, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$u = F(x) = 4x^3 - 3x^4,\quad 0 < u < 1$$

$$3x^4 - 4x^3 = -u$$

$$x^3(3x-4) = -u$$

$$x^3 = -\tfrac{u}{3x-4}$$

$$x = \left(-\tfrac{u}{3x-4}\right)^{1/3}$$

Disini x tidak dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari u.

5) a. $f(x) = 1 - |x|,\quad |x| < 1$

$$= \begin{cases} 1 + x, & -1 < x < 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Untuk $-1 < x < 0$,

$$F(x) = \int_{-1}^x (1+t)dt = \int_{-1}^x (1+t)d(1+t) = \left.\frac{(1+t)^2}{2}\right|_{-1}^x$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)^2$$

Untuk $0 < x < 1$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x (1-t)\,dt = \frac{1}{2} - \left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[(1-x)^2 - 1\right] = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \le x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$u = F(x),\ \ 0 < u < 1$

Untuk $0 < u < \frac{1}{2}$: $u = F(x) = \frac{1}{2}(1+x)^2$

$$(1+x)^2 = 2u$$
$$1 + x = \sqrt{2u}$$
$$x = \sqrt{2u} - 1$$

Untuk $\frac{1}{2} < u < 1$: $u = F(x) = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$

$$\tfrac{1}{2}(1-x)^2 = 1 - u$$
$$(1-x)^2 = 2(1-u),\ \ 1 - x > 0$$
$$1 - x = \sqrt{2(1-u)}$$
$$x = 1 - \sqrt{2(1-u)}$$

b. $f(x) = \sin x,\ \ 0 < x < \pi/2$

Untuk $0 < x < \pi/2$:

$$F(x) = \int_0^x \sin t\, dt = -\cos t\Big|_0^x = 1 - \cos x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \cos x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$u = F(x) = 1 - \cos x,\ \ 0 < u < 1$

$\cos x = 1 - u$

$$x = arc\cos(1-u)$$

c. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$

Untuk $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x te^{-t}dt = -\int_0^x td(e^{-t})$$

$$= -\left[t\, e^{-t}\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t}\, dt \right] = -\left[x\, e^{-x} + e^{-t}\Big|_0^x \right]$$

$$= -\left[x\, e^{-x} + e^{-x} - 1 \right] = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$u = F(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}, \qquad 0 < u < 1,\ x \geq 0$$

$$xe^{-x} + e^{-x} = 1 - u$$

$$e^{-x}(x+1) = 1 - u$$

$$x + 1 = \frac{1-u}{e^{-x}}$$

$$x = e^{x}(1-u) - 1$$

Disini x tidak dapat dinyatakan sebagai fungsi eksplisit.

d. $f(x) = kx(1-x), \quad 0 < x < 1$

Untuk $0 < x < 1$,

$$F(x) = \int_0^x kt(1-t)\,dt = k\int_0^x t - t^2\, dt = k\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ k\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right), & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$u = F(x) = 3x^2 - 2x^3$

$2x^3 - 3x^2 = u$

$x^2(2x - 3) = u$

$$x = \sqrt{\frac{u}{2x - 3x}}$$

x tidak dapat dinyatakan sebagai fungsi dari u secara eksplisit.

6) a. Dari grafik maksimum $f(x) = 1$

b. $f(x) = 6x - 6x^2$

$f'(x) = 6 - 12x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\underset{0<x<1}{maks}\{f(x)\} = f(\frac{1}{2}) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

c. $f(x) = 12x^2 - 12x^3, \quad 0 < x < 1$

$f'(x) = 24x - 36x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(2 - 3x) = 0$

$\rightarrow x = 0$ atau $x = \frac{2}{3}$

$\underset{0<x<1}{maks}\{f(x)\} = f(\frac{2}{3}) = 12 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$

d. $f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$

$f'(x) = -e^{-x} < 0, \quad x \geq 0$

$\underset{x \geq 0}{maks}\, f(x) = f(0) = 1$

e. $f(x) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

$$= \begin{cases} e^{x}, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Dari grafik *f*, $\underset{x}{maks}\, f(x) = f(0) = 1$

f. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1.$

$\underset{x \geq 0}{maks}\, f(x) = f(1) = e^{-1}$

7) Jika $0 < F(x) < 1$ pertaksamaan $X \le x$ ekivalen dengan $F(X) \le F(x)$.

$$P(X \le x) = P(F(X) \le F(x)) = P(Y \le F(x)) = G(F(x))$$
$$= F(x),\ 0 < F(x) < 1$$

G merupakan fungsi distribusi Y,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

Hasil di atas merupakan dasar simulasi peubah acak kontinu. Bangkitkan peubah acak Y, selesaikan persamaan $Y = F(x)$ baik secara eksplisit maupun numerik. Proses penyelesaian persamaan $Y = F(x)$ menghasilkan fungsi balikan $X = F^{-1}(Y)$.

8) Untuk 0 < y < 1

$$P(Y \le y) = P[F(X) \le y] = P(X \le F^{-1}(y))$$
$$= F(F^{-1}(y))$$
$$= y,\quad 0 < y < 1$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

Jadi $Y \sim U(0, 1)$.

9) Densitas gabungan $Y_1,\ Y_2$

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & 0 < y_1 < 1,\quad 0 < y_2 < 1 \\ 0, & \textit{lainnya} \end{cases}$$

Transformasi balikan (invers):

$$Y_1 = \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2\pi} arc\tan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Jacobian transformasi

$$J = \begin{vmatrix} -x_1 \exp\left(\dfrac{-x_1^2 + x_2^2}{2}\right) & -x_2 \exp\left(\dfrac{-x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \\ \dfrac{-x_2 / x_1^2}{2\pi\left(1 + x_2^2 / x_1^2\right)} & \dfrac{1/x_1}{2\pi\left(1 + x_2^2 / x_1^2\right)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$$

Sehingga $\quad f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(-\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$

10) $\underset{0 < x < 1}{maks}\{ f(x)\} = \dfrac{16}{9}$

Algoritma sampling penerimaan

1. Generate $U_1 \sim U(0, 1), U_2 \sim U(0, 1)$
2. $X = U_1, \; Y \sim \dfrac{16}{9} U_2$
3. Jika $Y \le f(x)$ terima X.

   Jika $Y > f(x)$ tolak X.

RANGKUMAN

1. Fungsi distribusi dan fungsi densitas peubah acak X :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t \le x} f(t), & X \quad diskrit \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, & X \;\; kontinu \end{cases}$$

2. Beberapa distribusi: Bernoulli, Binomial, seragam, eksponensial, normal.
3. Sampling dari distribusi diskrit melalui algoritma balikan CDF
   a. Bangkitkan $U \sim U(0, 1)$

b. $X = \min\{x \mid F(x) > u\}$

c. X bilangan acak dari distribusi $f(x) = P(X = x)$

4. Sampling dari distribusi kontinu
   a. metode balikan CDF.
      Misal X peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x)$
      Algoritma balikan CDF
      i. Generate $U \sim U(0, 1)$
      ii. Selesaikan $X = F^{-1}(u)$ dengan cara eksplisit atau cara numerik.
   b. metode sampling penerimaan.
      Misal X peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x)$; $F'(x) = f(x)$.
      Misal (a,b) suatu selang, dan $h = \underset{a \le x \le b}{maks}\{f(x)\}$

      Algoritma sampling penerimaan
      i. Generate U_1, U_2: $U_1 \sim U(0, 1), U_2 \sim U(0, 1)$
      ii. $X = (b-a)U = 1 + a, \quad X \sim U(a, b)$

         $Y = hU_2, \quad Y \sim U(0, h)$
      iii. Jika $Y \le f(x)$, terima X, selain itu tolak $N(0, 1)$.
   c. Metode Limit Sentral untuk distribusi normal.
      i. Generate $X_1, X_2, ..., X_{12}$ dari distribusi $U(0, 1)$
      ii $Z = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$ berdistribusi $N(0, 1)$
   d. Metode Box-Muller untuk distribusi normal $N(0, 1)$.
      i. Generate $U_1 \sim U(0, 1)$, $U_2 \sim U(0, 1)$
      ii. $Z_1 = (-2 \ln U_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2)$

         $Z_2 = (-2 \ln U_1)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2)$

         Z_1, Z_2 ~ normal bivariate dengan densitas

         $$f(z_1, z_2) = \tfrac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right)$$

         $Z_1 \sim N(0, 1)$ dan $Z_2 \sim N(0, 1)$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu peubah acak X mempunyai fungsi densitas

$$f(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x=0,1; \quad 0<\theta<1$$

Fungsi distribusi peubah acak X adalah ....

A. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases} \theta, & x<0 \\ 1-\theta, & x\geq 0 \end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \theta, & 0\leq x<1 \\ 1-\theta, & x\geq 1 \end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\theta, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$

2) Suatu peubah acak *X* mempunyai fungsi densitas

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Fungsi distribusi *X* adalah ....

A. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leq x<\theta \\ 1, & x\geq \theta \end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\theta}, & x<\theta \\ 1, & x\geq \theta \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \theta x, & 0 \le x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$

3) Suatu peubah acak X dengan fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Fungsi distribusi $F(x)$ = ...

A. $(1 - e^{-x})\, I\,(x \ge 0)$

B. $(1 + e^{x})\, I\,(x \ge 0)$

C. $(e^{-x} - 1)\, I\,(x \ge 0)$

D. $e^{-x} I\,(x \ge 0)$

Dengan $I\,(x \ge 0) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

4) Fungsi acak X mempunyai fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - 0{,}75\, e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Misal $u = F(x), \quad 0 < x < 1,$ maka $x = F^{-1}(u) = ...$

A. $\ln(1-u)$

B. $\ln \frac{4}{3}(1-u)$

C. $-\ln \frac{4}{3}\,(u-1)$

D. $-\ln \frac{4}{3}\,(1-u)$

5) Diketahui fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(x+1) & 0 \le x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

dan $u = F(x), \quad 0 < x < 1,$ maka $x = F^{-1}(u) = ...$

A. 1 – 2u
B. 1 - u
C. -1 + 2 u
D. -1 + u

6) Diketahui fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{x+2}{4}, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Misal u_1 = 0,1, u_2 = 0,2. Dengan algoritma sampling penerimaan diperoleh X dan Y = ...

A. $X = -0,8,\quad Y = \frac{1}{20}$
B. $X = -0,1,\quad Y = \frac{3}{20}$
C. $X = -0,6,\quad Y = \frac{1}{20}$
D. $X = -0,6,\quad Y = \frac{3}{20}$

7) Diketahui fungsi distribusi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Misal U_1 = 0,8, U_2 = 0,9. Dengan algoritma sampling penerimaan

A. X = 0,8 Y = 0,45
B. X = 0,9 Y = 0,40
C. X = 0,8 Y = 0,9
D. X = 0,9 Y = 0,8

8) Diketahui fungsi densitas eksponensial terpotong (*truncated*)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{1 - e^{-4}}, & 0 \le x < 4 \end{cases}$$

Jika $u_1 = 0{,}2$, $u_2 = 0{,}1$, algoritma sampling penerimaan memberikan ....

A. $X = 0{,}2$
B. $X = 0{,}8$
C. $X = 0{,}8 \qquad Y = \frac{1}{10(1-e^{-4})}$
D. $X = 0{,}2 \qquad Y = 10(1-e^{-4})$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B
2) A
3) D
4) C
5) C

Tes Formatif 2

1) $f(0) = P(X = 0) = 1-\theta, \quad f(1) = P(X = 1) = \theta$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-\theta, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Jawaban yang benar *D*.

2) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

Jawaban yang benar *A*.

3) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = (1-e^{-x})I(x \ge 0)$$

Jawaban yang benar *A*.

4) $u = F(x) = 1-0,75e^{-x}$

$u-1 = -\frac{3}{4}e^{-x}$

$\frac{3}{4}(1-u) = e^{-x}$

$-x = \ln \frac{3}{4}(1-u)$

$x = -\ln \frac{3}{4}(1-u)$

Jawaban yang benar *D*.

5) $u = F(x) = \frac{1}{2}(x+1)$

$2u = x+1$

$x = 2u-1$

Jawaban yang benar *C*.

6) $x = (b-1)u_1 + a = 2 \times 0,1 - 1 = -0,8$

$y = hu_2 = \frac{1}{4} \times 0,2 = \frac{1}{20}$

Jawaban yang benar *A*.

7) $u_1 = 0,8\,,\ u_2 = 0,9$

$x = (b-1)u_1 + a = 0,8 + 0 = 0,8$

$y = hu_2 = \frac{1}{2} \times 0,9 = 0,45$

Jawaban yang benar *A*.

8) $u_1 = 0,2\,,\ u_2 = 0,1$

$x = (b-1)u_1 + a = 4 \times 0,2 + 0 = 0,8$

$y = hu_2 = \frac{1}{2} \times 0,9 = 0,45$

$Y = hu_2 = \frac{1}{(1-e^{-4})} \times 0,1 = \frac{1}{10(1-e^{-4})}$

Jawaban yang benar *C*.

Daftar Pustaka

Hogg, R. V., and Craig. A.T., 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. 4th Ed. Macmillan

Kennedy, W. J., and Gentle, J. E., 1979. *Statistical Computing*. Marcel Dekker.

Yang, M. C. K., and Robinson, D. H., 1986, *Understanding and Learning Statistics by Computer, World Scientific*.