MODUL 1

Metode Regresi Linier

Prof. DR. Maman Djauhari

PENDAHULUAN

Analisis regresi linier, baik yang sederhana maupun yang ganda, telah Anda pelajari dalam mata kuliah Metode Statistika II. Dengan demikian modul ini tidak dimaksudkan untuk membahas kembali analisis regresi linier, akan tetapi dimaksudkan untuk mempelajari penggunaan metode regresi linier dalam peramalan berdasarkan data runtun waktu. Oleh karena itu, sasaran umum yang ingin dicapai setelah Anda mempelajari modul ini, Anda diharapkan terampil menggunakan metode regresi linier dalam peramalan.

Modul ini terdiri atas dua Sub Pokok Bahasan. Setelah mempelajari Sub Pokok Bahasan pertama, Anda diharapkan dapat:

1. menaksir parameter β1, β2 dan σ_ε^2 pada setiap periode T;
2. menentukan persamaan regresi di setiap akhir periode T;
3. menaksir $\mathrm{Var}\left(b_1[T]\right)$ dan $\mathrm{Var}\left(b_2[T]\right)$;
4. mencari interval konfidensi untuk β_1 dan β_2 setiap akhir periode T;
5. menghitung harga statistik penguji t_0 untuk menguji $H0 : \beta_i = 0$ lawan $H_1 : \beta_i \neq 0$; $i = 1,2,\ldots$;
6. menentukan daerah kritis serta melakukan pengujian H0 lawan H1;
7. menaksir harga $E(x_T)$; $T = 1, 2, 3, \ldots$;
8. menghitung ramalan harga x pada periode (T. + τ) yang dibuat di akhir periode T;
9. mencari interval prediksi untuk $x_T+\tau$ di akhir periode T.

Selanjutnya setelah mempelajari Sub Pokok Bahasan kedua, Anda diharapkan dapat:

1. menentukan persamaan normal pada saat T;
2. menaksir parameter $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$, dan σ_ε^2 pada saat T;
3. menentukan matriks G^{-1} pada saat T;

4. menaksir Var $\left(b_1[T]\right)$; i = 1, 2, …, k;
5. menentukan persamaan regresi pada saat T;
6. mencari interval konfidensi untuk β_i pada saat T; i = 1, 2, …, k;
7. menghitung statistik penguji t_0 untuk menguji $H_0 : \beta_i = 0$ lawan $H_1 : \beta_i \neq 0$ = 1, 2, …, k pada saat T;
8. menentukan daerah kritis serta melakukan pengujian H_0 lawan H_1 ;
9. menaksir harga E (x_T); T = 1, 2, 3, …. ;
10. menghitung ramalan harga x pada periode $(T + \tau)$ di akhir periode T; di mana τ = 1, 2, 3, …. ;
11. mencari interval prediksi untuk $x_{T+\tau}$ di akhir periode T; τ = 1, 2, 3, ….

KEGIATAN BELAJAR 1

Metode Regresi Linier Sederhana

Seringkali data runtun waktu dapat digambarkan dengan baik oleh model regresi linier sederhana: $x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$; $t = 1, 2, \ldots, T$

dimana: x_t = pengamatan x pada periode t
β_1, β_2 = parameter yang tidak diketahui
t = periode
ε_t = galat random pada periode t

Dalam model itu diasumsikan bahwa ε_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ_ε^2, serta $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$ independen. Jadi, $E(x_t) = \beta_1 + \beta_2 t$

Hal ini berarti bahwa ε_t adalah galat random dari x_t terhadap meannya. Terlihat bahwa mean dari pola runtun waktu $E(x_t)$ berubah secara linier, berbentuk garis lurus, $\beta_1 + \beta_2 t$. Sedangkan parameter β_1, β_2 dan σ_ε^2 akan kita taksir berdasarkan data yang ada.

A. PENAKSIRAN TITIK

Misalkan kita menggunakan data runtun waktu selama T periode; $x_1, x_2, \ldots x_T$. Tulis b_1 dan b_2 penaksir kuadrat terkecil dari β_1 dan β_2. Persamaan regresinya (persamaan penaksiran pola data) adalah:

$$\hat{x}_t = b_1 + b_2 . t \qquad (1)$$

Harga b_1 dan b_2 kita peroleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat random (JKGR);

$$\text{JKGR} = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (x_t - \beta_1 - \beta_2 t)^2$$

Jadi, b_1 dan b_2 adalah jawab dari persamaan-persamaan;

$$\frac{\partial \text{JKGR}}{\partial \beta_1} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \text{JKGR}}{\partial \beta_2} = 0$$

Dari kedua persamaan ini dapat ditunjukkan bahwa b_1 dan b_2 adalah jawab dari persamaan berikut, yang disebut persamaan normal.

$$b_1 T + b_2 \sum_{t=1}^{T} t = \sum_{t=1}^{T} x_t \quad \text{dan} \quad b_1 \sum_{t=1}^{T} t + b_2 \sum_{t=1}^{T} t^2 = \sum_{t=1}^{T} t\, x_t$$

Dengan menggunakan metode eliminasi, dari persamaan normal ini diperoleh;

$$b_2 = \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} t\right)\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right) - T \sum_{t=1}^{T} t\, x_t}{\left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2 - T\left(\sum_{t=1}^{T} t^2\right)} \quad \text{dan} \quad b_1 = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} x_t - b_2 \sum_{t=1}^{T} t\right)$$

mengingat bahwa: $\sum_{t=1}^{T} t = \frac{1}{2} T(T+1)$ dan $\sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{1}{6} T(T+1)(2T+1)$ maka dengan sedikit manipulasi aljabar dapat diturunkan bahwa:

$$b_1 = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} x_t - \frac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, x_t \tag{2}$$

$$b_2 = \frac{12}{T(T^2-1)} \sum_{t=1}^{T} t x_t - \frac{6}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T} t\, x_t \tag{3}$$

Harga b_1 dan b_2 akan tergantung pada T, yakni saat di mana dilakukan penaksiran. Oleh karena itu, untuk selanjutnya b_1 dan b_2 diberi subscript T, menjadi $b_1[T]$ dan $b_2[T]$.
Berdasarkan persamaan (1), (2), dan (3), ramalan harga x pada periode (T + τ) yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$X_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T]\,(T+\tau) \qquad \tau = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Catatan: *Lambang* [ ] *digunakan untuk subscript dan lambang* ( ) *secara umum digunakan untuk operasi*.

Perlu dicatat, setelah periode (T + τ) dilalui dan data tentang $x_{T+\tau}$ diperoleh, maka penaksir untuk β_1 dan β_2 harus diperbaharui/diremajakan. Selain menaksir β_1 dan β_2 variansi galat random σ_ε^2 pun perlu ditaksir. Dalam Metode Statistik II Anda telah mempelajari bahwa untuk model regresi linier sederhana, taksiran dari σ_ε^2 di akhir periode T adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{x}_t)^2 \tag{5}$$

atau

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-2}\left\{\sum_{t=1}^{T}x_t^2 - b_1[T]\sum_{t=1}^{T}x_t - b_2[T]\sum_{t=1}^{T}tx_t\right\} \tag{6}$$

Catatan: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ lebih mudah dihitung melalui rumus (6)

Contoh 1:
Seorang manager sebuah pabrik hendak meramal biaya total bulanan untuk pemeliharaan alat-alat. Untuk itu tersedia data 10 bulan terakhir berikut.

Bulan/periode (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Biaya pemeliharaan x (dalam ribuan rupiah)	880	850	830	950	1000	1125	1310	1260	1300	1250

Untuk maksud itu, digunakan model $x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$

Hitunglah:
1. $b_1[10]$ dan $b_2[10]$
2. Ramalan biaya pemeliharaan pada periode 11 yang dibuat di akhir periode 10.
3. Harga $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ di akhir periode 10.

Penyelesaian:

Dari data itu kita peroleh $\sum_{t=1}^{10} x_t = 10755$; $\sum_{t=1}^{10} t\,x_t = 64070$;

dan $\sum_{t=1}^{10} x_t^2 = 11910125$

Jadi,

a. $$b_1[10] = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{10} x_t - \frac{6}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{10} tx_t$$
$$= \frac{2(21)}{10(9)}(10755) - \frac{6}{10(9)}(64070) = 747,67$$

$$b_2[10] = \frac{12}{T(T^2-1)}\sum_{t=1}^{10} t\,x_t - \frac{6}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{10} x_t$$
$$= \frac{12}{10(99)}(64070) - \frac{6}{10(9)}(10755) = 59,61$$

b. Ramalan biaya pemeliharaan pada periode (T + τ) yang dibuat di akhir periode T, secara umum adalah: $\hat{x}_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T](T+\tau)$

Jadi, ramalan biaya pemeliharaan pada periode 11 yang dibuat di akhir periode 10 adalah:

$$\hat{x}_{11}[10] = b_1[10] + b_2[10](11)$$
$$= 747,67 + (59,61)(11)$$
$$= 1403,38 = 1403 \text{ (dibulatkan)}$$

c. Taksiran variansi galat random adalah:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{T-2}\left\{\sum_{t=1}^{10} x_t^2 - b_1[T]\sum_{t=1}^{10} x_t - b_2[10]\sum_{t=1}^{10} tx_t\right\}$$
$$= \frac{1}{10-2}\{11910125 - (747,67)(10755) - (59,61)(64070)\}$$
$$= \frac{1}{8}(49721,45) = 6215,18$$

B. INTERVAL KONFIDENSI UNTUK β_1 DAN β_2

Statistik $b_1[T]$ dan $b_2[T]$ adalah penaksir titik tak bias pada saat T dari β_1 dan β_2. Selain taksiran titik, diperlukan pula taksiran selangnya atau interval konfidensinya. Untuk itu perlu kita taksir dulu variansi dari $b_1[T]$ dan variansi $b_2[T]$.

Dalam Metode Statistika II Anda telah mempelajari bahwa jika x menyatakan variabel bebas dan y variabel tak bebas dalam model regresi linier sederhana, maka:

Variansi dari b_1 = var (b_1) = $$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sigma_\varepsilon^2$$

Variansi dari b_2 = $$\operatorname{var}\left(b_2\right)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

Dalam modul ini yang menjadi variabel bebasnya adalah t; t = 1, 2, …., T. Oleh karena itu,

var ($b_1[T]$) = $$\frac{\sum_{t=1}^{T} t^2}{T\sum_{t=1}^{T}\left(t-\bar{t}\right)}\sigma_\varepsilon^2 \text{ dengan } \bar{t}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t$$

var ($b_2[T]$ = $$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{T}\left(t-\bar{t}\right)^2}$$

Dengan menggunakan hubungan $\sum_{t=1}^{T} t=\frac{1}{2}T(T+1);\sum_{t=1}^{T} t^2=\frac{1}{6}T(T+1)(2T+1)$

dan $\bar{t}=\frac{1}{2}(T+1)$

Maka diperoleh:

var ($b_1[T]$ = $\frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\sigma_\varepsilon^2$ dan var ($b_2[T]$) = $\frac{12}{T(T^2-1)}\sigma_\varepsilon^2$

Jadi, taksiran variansi dari $b_1[T]$ dan variansi dari $b_2[T]$ adalah:

$$\hat{V}ar\,(b_1[T]) = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \qquad \text{dan} \qquad \hat{V}ar\,(b_2[T]) = \frac{12}{T(T^2-1)}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

Dengan demikian interval konfidensi 100 (1 - γ) % untuk β_1 yang kita buat diakhir periode T adalah:

$$b_1[T] - \delta_1 \le \beta \le b_1[T] + \delta_1 \quad \text{dimana: } \delta_1 = t_{\gamma/2,(T-2)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[T]\right)}$$

Catatan:
Jika $t \sim t_{T\text{-}2}$, maka besaran $t_{\gamma/2,(T-2)}$ memenuhi $P(t \ge t_{\gamma/2,(T-2)}) = \gamma/2$

Selanjutnya, interval konfidensi 100 (1 - γ) % untuk β_2 yang kita buat di akhir periode T adalah:

$$b_2[T] - \delta_2 \le \beta_2 \le b_2[T] + \delta_2 \qquad \text{dimana: } \delta_2 = t_{\gamma/2,(T-2)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(b_2[T]\right)}$$

C. PENGUJIAN SIGNIFIKAN β_1 DAN β_2

Untuk menguji signifikansi parameter β_1 di akhir periode T; i = 1, 2, maka hipotesis H_0 dan H_1 kita nyatakan sebagai berikut:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \text{ lawan } H_1 : \beta_1 \ne 0;\ i = 1, 2$$

Statistik pengujinya adalah $t_0 = \dfrac{b_i[T]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[T]\right)}}$

Hipotesis H_0 ditolak pada saat T (artinya β_1 signifikan tidak nol) untuk tingkat signifikansi γ, bila
$t_0 > t_{\gamma/2,(T-2)}$ atau $t_0 < -\,t_{\gamma/2,(T-2)}$

Catatan:
Harga $t_{\gamma/2,(T-2)}$ disebut titik kritis dari t_0.

Contoh 2:

Lihat kembali contoh 1. Pada contoh itu;

1. Hitunglah $\hat{V}ar\left(b_1[10]\right)$ dan $\hat{V}ar\left(b_2[10]\right)$
2. Carilah interval konfidensi 90% untuk β_1 dan juga untuk β_2 yang dibuat di akhir periode 10.
3. Apakah β_1 (dan juga β_2) signifikan tidak nol untuk tingkat signifikansi γ = 5 % di akhir periode 10?

Penyelesaian:

1. Pada contoh 1 telah dihitung $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ = 6215,18. Jadi,

$$\hat{V}ar\left(b_1[10]\right) = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{2(21)}{10(9)}(6215{,}18) = 2900{,}42$$

$$\hat{V}ar\left(b_2[10]\right) = \frac{12}{T(T^2-1)}\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{12}{10(99)}(6215{,}18) = 75{,}36$$

2. Di sini γ = 0,10 dan T = 10. Dari tabel distribusi t kita peroleh $t_{\gamma/2,(T-2)}$ = $t_{0,05;(8)}$ = 1,860

   Jadi, δ_1 = $t_{0,05;(8)}\sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[10]\right)} = (1{,}860)\sqrt{2900{,}42}$ atau δ_1 = 100,17.

   Pada contoh 1 telah dihitung $b_1[10]$ = 747,67. Maka interval konfidensi 90% untuk β_1 yang dibuat di akhir periode 10 adalah

$$b_1[10] - \delta_1 \le \beta_1 \le b_1[10] + \delta_1 \text{ atau } 647{,}50 \le \beta_1 \le 847{,}84$$

   Selanjutnya kita peroleh pula $\delta_2 = t_{0,05;(8)}\sqrt{\hat{V}ar(b_2)[10]} = 16{,}15.$

   Pada contoh 1 telah dihitung $b_2[10]$ = 59,61. Maka interval konfidensi 90% untuk β_2 yang dibuat di akhir periode 10, adalah:

$$b_2[10] - \delta_2 \le \beta_2 \le b_2\,[10] + \delta_2 \text{ atau } 43{,}46 \le \beta_2 \le 75{,}76$$

3. Untuk tingkat signifikansi γ = 5%, di akhir periode 10 titik kritisnya adalah $t_{0,025;(8)}$ = 2,306
   Untuk menguji $H_0 : \beta_1 = 0$ lawan $H_1 : \beta_1 \neq 0$, statistik pengujinya adalah

$$t_0 = \frac{b_1[10]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[10]\right)}} = \frac{747,67}{\sqrt{2900,42}} = 13,883$$

   Ternyata $t_0 > 2,306$. Jadi, $H_0 : \beta_1 = 0$ ditolak, maka β_1 signifikan tidak nol

   Untuk menguji $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_0 : \beta_2 \neq 0$, statistik pengujinya adalah:

$$t_0 = \frac{b_2[10]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(b_2[10]\right)}} = \frac{59,61}{\sqrt{75,36}} = 6,867$$

   Ternyata $t_0 > 2,306$. Jadi $H_0 : \beta_2 = 0$ ditolak, maka β_2 signifikan tidak nol

D. INTERVAL PREDIKSI UNTUK $X_{T+\tau}$

Penaksiran dalam bentuk interval, selain interval konfidensi adalah interval prediksi. Interval prediksi tidak lain adalah interval konfidensi untuk harga pengamatan di masa depan. Misalkan $x_{T+\tau}$ menyatakan harga pengamatan pada periode $(T + \tau)$; $\tau > 0$, yang ingin ditaksir di akhir periode T. Penaksir titik untuk $x_{T+\tau}$ di akhir periode T adalah $\hat{x}_{T+\tau}[T]$ yang diberikan oleh persamaan (4);

$$\hat{x}_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T](T+\tau)$$

Bagaimanakah interval prediksi untuk $x_{T+\tau}$? di dalam Modul 7 akan ditunjukkan bahwa:

$$\hat{x}_{T+\tau}[T] \sim N\left(x_{T+\tau}, Var\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)\right)$$

di mana $Var\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right) = \left\{1 + \frac{2}{T(T^2-1)}\{(2T-1)(T-1) + 6\tau(T+\tau-1)\}\right\}\sigma_\varepsilon^2$

Jadi, taksiran untuk $\text{Var}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)$ adalah:

$$\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)=\left\{1+\frac{2}{T(T^2-1)}\{(2T-1)(T-1)+6\tau(T+\tau-1)\}\right\}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

Berdasarkan hal ini, maka interval prediksi 100 (1 - γ) % untuk $x_{T+\tau}$ yang dibuat diakhir periode T adalah:

$$\hat{x}_{T+\tau}[T]-\delta\leq x_{T+\tau}\leq\hat{x}_{T+\tau}[T]+\delta \quad \text{dimana} \quad \delta=t_{\gamma/2,(T-2)}\cdot\sqrt{\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)}$$

Contoh 3:

Lihat kembali Contoh 1. Pada contoh itu, carilah interval prediksi 95% untuk x_{11} yang dibuat diakhir periode 10.

Penyelesaian:

Di sini γ = 0,05, T = 10 dan τ = 1. Jadi, $t_{\gamma/2,(T-2)}=t_{0,025;(8)}=2,306.$ Pada contoh 1 telah kita peroleh σ_ε^2 = 6215,18 dan $\hat{x}_{11}[10]$ = 1403,38. Jadi,

$$\begin{aligned}\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)&=\left\{1+\frac{2}{10(99)}\{19(9)+6(10+1-1)\}\right\}(6215,18)\\&=\left\{1+\frac{2}{990}(231)\right\}(6215,18)=9115,597\end{aligned}$$

dan

$$\delta=t_{0,025;(8)}\sqrt{\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)}=(2,306)\sqrt{9115,597}=220,17$$

Maka interval prediksi 95 % untuk x_{11} yang dibuat diakhir periode 10 adalah:

$$\hat{x}_{11}[10]-\delta\leq x_{11}\leq\hat{x}[10]+\delta \quad \text{atau} \quad 1183,21\leq x_{11}\leq 1623,55$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Lihat kembali contoh 1.

Pada contoh itu, hitunglah;

1) $b_1[9]$ dan $b_2[9]$
2) Ramalan biaya pemeliharaan pada periode 11 yang dibuat di akhir periode 9.
3) Harga $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ di akhir periode 9.
4) Harga $\hat{V}\text{ar}(b_1[9])$ dan $\hat{V}\text{ar}(b_2[9])$
5) Interval konfidensi 95 % untuk β_1 dan β_2 di akhir periode 9.
6) Statistik penguji t_0 di akhir periode 9, untuk menguji $H_0 : \beta_1 = 0$ lawan $H_1 : \beta_1 \neq 0$.
7) Seperti nomor 6, tapi untuk $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_1 : \beta_2 \neq 0$.
8) Titik kritis bagi soal nomor 6 dan nomor 7 dengan tingkat signifikansi $\gamma = 5\%$.
9) Interval prediksi 90 % untuk x_{12} yang dibuat di akhir periode 8.

Petunjuk Jawaban Latihan

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 8 gunakan data 9 periode pertama. Untuk soal nomor 9, gunakan data 8 periode pertama.

Kunci jawaban latihan:

1) 719,03 dan 67,42
2) 1460,65
3) 5202,07
4) 2745,53 dan 86,70
5) $595,11 \leq \beta_1 \leq 842,95$ dan $45,40 \leq \beta_2 \leq 89,44$
6) 13,722
7) 7,241
8) 2,365
9) $1256,61 \leq x_{12} \leq 1847,35$

RANGKUMAN

1. Model regresi linier sederhana untuk data runtun waktu adalah: $X_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$; $t = 1, 2, .., T$
   di mana: x_t = data/pengamatan harga x pada periode t
   β_1, β_2 = parameter yang tidak diketahui
   ε_t = galat random pada periode t; $\varepsilon_t \sim N(0, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$
   dan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_T$ independen

2. Di akhir suatu periode T, penaksir kuadrat terkecil untuk β_1 dan β_2 adalah $b_1[T]$ dan $b_2[T]$:

$$b_1[T] = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{T} x_t - \frac{6}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{T} t\, x_t \text{ dan}$$

$$b_2[T] = \frac{12}{T(T^2-1)}\sum_{t=1}^{T} t\, x_t - \frac{6}{T(T-1)}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

   di sini harga T adalah T = 1, 2, 3, ….

3. Persamaan regresi yang dibuat diakhir periode T adalah: $\hat{x}_t = b_1[T] + b_2[T].t$

4. Taksiran $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{x}_t)^2 \text{ atau}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-2}\left\{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - b_1[T]\sum_{t=1}^{T} x_t - b_2[T]\sum_{t=1}^{T} t x_t\right\}$$

5. Taksiran variansi dari $b_1[T]$ dan variansi dari $b_2[T]$ di akhir periode T berturut-turut adalah:

$$\hat{V}ar(b_1[T]) = \frac{2(2T+1)}{T(T-1)}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \text{ dan } \hat{V}ar(b_2[T]) = \frac{12}{T(T^2-1)}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

6. Di akhir periode T, interval konfidensi 100 (1 - γ)% untuk β_1 adalah:

$b_1[T] - \delta_1 \le \beta_1 \le b_1[T] + \delta_1$ dengan $\delta_1 = t_{\gamma/2,(T-2)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[T]\right)}$

7. Di akhir periode T, interval konfidensi 100 (1 - γ) % untuk β_2 adalah:
   $b_2[T] - \delta_2 \le \beta_2 \le b_2[T] + \delta_2$ dengan $\delta_2 = t_{\gamma/2,(T-2)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(b_2[T]\right)}$

8. Pengujian signifikansi parameter β_1 dan β_2 dirumuskan sebagai berikut:
   $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_1 : \beta_2 \neq 0$ i = 1, 2
   Statistik pengujinya $t_0 = \dfrac{b_1[T]}{\sqrt{\hat{V}ar\left(b_1[T]\right)}}$
   Untuk tingkat signifikansi γ, titik kritisnya $t_{\gamma/2,(T-2)}$ dan daerah kritisnya $|t_0| > t_{\gamma/2,(T-2)}$

9. Taksiran harga E(x) yang dibuat di akhir periode T adalah:
   $\hat{x}_t = b_1[T] + b_2[T].t;\ t = 1, 2, 3, \ldots$

10. Ramalan harga x pada periode (T + τ) yang dibuat di akhir periode T adalah:
    $\hat{x}_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T](T+\tau)$ disini T = 0, 1, 2, …. dan τ = 1, 2, 3, ….

11. Taksiran variansi dari $\hat{x}_{T+\tau}[T]$ adalah:
    $$\hat{V}ar\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right) = \left\{1 + \frac{2}{T(T^2-1)}\left\{(2T-1)(T-1) + 6\tau(T+\tau-1)\right\}\right\}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

12. Interval prediksi 100 (1 - γ) % untuk $\hat{x}_{T+\tau}$ yang dibuat di akhir periode T adalah: $\hat{x}_{T+\tau}[T] - \delta \le x_{T+\tau} \le \hat{x}_{T+\tau}[T] + \delta$ dimana $\delta = t_{\gamma/2,(T-2)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)}$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Sebuah perusahaan alat-alat kantor menjual almari arsip. Jumlah penjualan (x) almari arsip berlaci empat selama 18 bulan terakhir adalah sebagai berikut:

Bulan (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x	12	4	16	9	10	15	6	8	10	11	15	7	16	12	20	9	13	11

Peramalan jumlah penjualan bulan-bulan berikutnya menggunakan data tersebut dengan model regresi linier sederhana.

1) Di akhir periode ke 15 kita peroleh $b_1[15]$ = ….
   A. 14,120
   B. 8,343
   C. 5,777
   D. 2,888

2) Di akhir periode ke 18 kita peroleh $b_2[18]$ = ….
   A. 1,816 B
   B. 1,362 C
   C. 0,454
   D. 0,206

3) Di akhir periode ke 15, maka $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ = ….
   A. 17,454
   B. 16,711
   C. 12,533
   D. 4,178

4) Di periode ke 18, maka $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ = ….
   A. 16,005
   B. 13,048
   C. 8,486
   D. 4,001

5) Di akhir periode ke 15 maka $\hat{V}ar\left(b_2[15]\right)$
   A. 0,747
   B. 0,249
   C. 0,062
   D. 0,558

6) Di akhir periode ke 18, maka $\hat{V}ar\left(b_1[18]\right)$ = ….
   A. 3,870
   B. 0,992
   C. 2,959
   D. 1,967

7) Di akhir periode 15, interval konfidensi 95% untuk β_1:
   A. $1{,}855 \leq \beta_1 \leq 3{,}640$
   B. $1{,}855 \leq \beta_1 \leq 3{,}440$
   C. $3{,}640 \leq \beta_1 \leq 13{,}246$
   D. $3{,}440 \leq \beta_1 \leq 13{,}246$

8) Di akhir periode 18, interval konfidensi 90% untuk:
   A. $0{,}333 \leq \beta_2 \leq 0{,}723$
   B. $-0{,}111 \leq \beta_2 \leq 0{,}723$
   C. $0{,}333 \leq \beta_2 \leq 0{,}523$
   D. $-0{,}111 \leq \beta_2 \leq 0{,}523$

9) Statistik penguji untuk $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_1 : \beta_2 \neq 0$ di akhir periode 15, adalah t_0 = ….
   A. 2,353.
   B. 1,944
   C. 1,534
   D. 1,239

10) Statistik untuk $H_0 : \beta_1 = 0$ lawan $H_1 : \beta_1 \neq 0$ di akhir periode 18, adalah t_0 = ….
   A. 3,369
   B. 4,765
   C. 7,361
   D. 11,353

11) Ramalan jumlah penjualan periode 19 yang dibuat di akhir periode 15, adalah $\hat{x}_{19}[15] = ...$ (dibulatkan)
   A. 19
   B. 16
   C. 14
   D. 10

12) Ramalan jumlah penjualan periode 19 yang dibuat di akhir periode 18, adalah $\hat{x}_{19}[18] = ...$ (dibulatkan)
   A. 15
   B. 14
   C. 13
   D. 11

13) Di akhir periode 15, maka $\hat{V}ar(\hat{x}_{19}[15]) = ...$
   A. 5,115
   B. 15,344
   C. 21,504
   D. 26,160

14) Di akhir periode 18, maka $\hat{V}ar(\hat{x}_{19}[18]) = ...$
   A. 19,875
   B. 17,249
   C. 13,374
   D. 4,458

15) Interval prediksi 90% untuk x_{19} yang dibuat di akhir periode 15, adalah ….
   A. $7 \leq x_{19} \leq 25$
   B. $7 \leq x_{19} \leq 21$
   C. $9 \leq x_{19} \leq 25$
   D. $9 \leq x_{19} \leq 21$

16) Interval prediksi 95% untuk x_{19} yang dibuat di akhir periode 18, adalah …. (dibulatkan)
   A. $6 \leq x_{19} \leq 23$
   B. $4 \leq x_{19} \leq 23$
   C. $6 \leq x_{19} \leq 20$
   D. $4 \leq x_{19} \leq 20$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Metode Regresi Linier Ganda

Dalam Modul 4 dan 5 Anda akan mempelajari metode-metode peramalan yang menerapkan model regresi linier ganda pada data runtun waktu. Untuk data runtun waktu, model regresi linier ganda, secara umum kita tuliskan:

$$x_t = \beta_1 + \beta_2 z_2[t] + \ldots + \beta_k z_k[t] + \varepsilon_t;\ t = 1, 2, \ldots, T$$

di mana: x_t = pengamatan x pada periode t (variabel tak bebas)

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ = parameter yang tidak diketahui

t = periode

$z_2[t], z_3[t], \ldots, z_k[t]$ = variabel bebas yang merupakan fungsi dari t

ε_t = galat random pada periode t; $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ dan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ independen

Jadi, $E(x_t) = \beta_1 + \beta_2 z_2[t] + \ldots + \beta_1 z_k[t]$

Berikut adalah contoh-contoh model tersebut

Contoh 4:

Jika pola data runtun waktu x_t dianggap merupakan fungsi kuadrat dari t, maka modelnya adalah: $x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2\ \varepsilon_t$

Model ini ekivalen dengan: $x_t = \beta_1 + \beta_2 z_2[t] + \beta_3 z_3[t] + \varepsilon_t$ dimana $z_2[t] = t$ dan $z_3[t] = t^2$

Contoh 5:

Pandang model runtuk waktu berikut : $x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin \omega t + \beta_4 \cos \omega t + \varepsilon_t$ di mana ω diketahui. Model ini ekivalen dengan $x_t = \beta_1 + \beta_2 z_2[t] + \beta_3 z_3[t] + \beta_4 z_4(t) + \varepsilon_t$ dimana $z_2[t] = t$, $z_3[t] = \sin \omega t$ dan $z_4[t] = \cos \omega t$. Model seperti ini akan Anda jumpai pada Modul 5.

A. PENAKSIRAN TITIK

Misalkan $b_1[T]$, $b_2[T]$, …., $b_k[T]$ penaksir kuadrat terkecil pada periode T untuk β_1, β_2, …., β_k. Penaksir itu kita peroleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat random

$$JKGR = \sum_{t-1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \beta_1 - \sum_{i=2}^{k}\beta_i z_i[t]\right)^2$$

Dengan menurunkan JKGR secara parsial terhadap β_i; i = 1, 2, …, k dan mengganti β_j oleh $b_j[T]$ kemudian menyamakannya dengan 0, atau;

$$\left.\frac{\partial JKGR}{\partial \beta_i}\right|_{\substack{\beta_j = b_j[T] \\ j=1,2,\ldots,k}} = 0$$

maka kita peroleh persamaan normal berikut.

$$Tb_1[T] + \left(\sum_{t=1}^{T} z_2[T]\right)b_2[T] + ... + \left(\sum_{t=1}^{T} z_k[t]\right)b_k[T] = \sum_{t=1}^{T} x_t$$

$$\left(\sum_{t=1}^{T} z_2[t]\right)b_1[T] + \left(\sum_{t=1}^{T} z_2[t]^2\right)b_2[T] + ... + \left(\sum_{t=1}^{T} z_2[t]z_k[t]\right)b_k[T] = \sum_{t=1}^{T} z_2[t]x_t$$

....

$$\left(\sum_{t=1}^{T} z_k[t]\right)b_1[T] + \left(\sum_{t=1}^{T} z_2[t]z_k[t]\right)b_2[T] + ... + \left(\sum_{t=1}^{T}(z_k[t])^2\right)b_k[T] = \sum_{t=1}^{T} z_k[T]x_t$$

Persamaan normal ini dapat dituliskan sebagai berikut

$G[T]\,\vec{b}[T] = \vec{g}[T]$ di mana;

$$G[T]=\begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} z_2[t] & \ldots\ldots & \sum_{t=1}^{T} z_k[t] \\ \sum_{t=1}^{T} z_2[t] & \sum_{t=1}^{T} (z_2[t])^2 & \ldots\ldots & \sum_{t=1}^{T} z_2[t]\, z_k[t] \\ \sum_{t=1}^{T} z_3[t] & \sum_{t=1}^{T} z_3[t]\, z_2[t] & \ldots\ldots & \sum_{t=1}^{T} z_3[t]\, z_k[t] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \sum_{t=1}^{T} z_k[t] & \sum_{t=1}^{T} z_k[t]\, z_2[t] & \ldots\ldots & \sum_{t=1}^{T} (z_k[t])^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}[T] = \begin{pmatrix} b_1[T] \\ b_2[T] \\ b_3[T] \\ \vdots \\ b_k[T] \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \vec{g}[T] = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} x_t \\ \sum_{t=1}^{T} z_2[t] x_t \\ \sum_{t=1}^{T} z_3[t] x_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} z_k[t] x_t \end{pmatrix}$$

Matriks G[T] disebut matriks koefisien persamaan normal di akhir periode T. Dari persamaan di atas, kita peroleh:

$$\vec{b}[T]=G^{-1}[T]\ \vec{g}[T]$$

Jadi, persamaan regresi yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$\hat{x}_{T+\tau}[T]=b_1[T]+b_2[T]z_2[t]+....+b_k[T]z_k[t] \qquad \text{dimana } t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Selanjutnya, ramalan harga x pada periode (T + τ) yang dibuat di akhir periode T adalah:

$\vec{x}_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T]\, z_2[T+\tau] + ... + b_k[T]\, z_k[T+\tau]$ untuk setiap τ = 1, 2, 3, …

Selain menaksir β_1, β_2, …., β_k, di sini pun kita perlu menaksir σ_ε^2. Dalam Metode Statistika II telah Anda pelajari bahwa taksiran dari σ_ε^2 di akhir periode T adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \hat{x}_t\right)^2 \qquad \text{atau} \qquad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-k}\left\{\vec{x}'\,\vec{x} - \vec{b}'[T]\vec{g}[T]\right\}$$

di mana, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix}$ dan tanda aksen ‘ menyatakan transpose dari suatu vektor atau matriks.

Contoh 6:

Data berikut adalah jumlah penjualan/bulan sebuah minuman dingin (x) selama bulan Januari s/d bulan Oktober tahun 1970.

Bulan	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Jun	Jul	Agu	Sep	Okt
Periode t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	175	389	454	618	770	564	327	235	289	552

Jumlah penjualan bulan-bulan berikutnya menggunakan model regresi linier ganda berikut.

$$x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin\frac{2\pi t}{12} + \varepsilon_t$$

Hitunglah:

1. Taksiran β_1, β_2, β_3, dan σ_ε^2 di akhir periode 8
2. Taksiran β_1, β_2, β_3, dan σ_ε^2 di akhir periode 10

3. Ramalan jumlah penjualan bulan Desember 1970 yang dibuat di akhir bulan Agustus 1970
4. Ramalan jumlah penjualan bulan November 1970 yang dibuat di akhir bulan Oktober 1970

Penyelesaian:

1. Di akhir periode 8 kita peroleh:

$$\sum_{t=1}^{8} t = 36; \sum_{t=1}^{8} t^2 = 204; \sum_{t=1}^{8} \sin\frac{2\pi t}{12} = 2,366; \sum_{t=1}^{8}\left(\frac{\sin 2\pi t}{12}\right)^2 = 4;$$

$$\sum_{t=1}^{8} t\sin\frac{2\pi t}{12} = 0,7699$$

Jadi,

$$G[8] = \begin{pmatrix} 8 & 36 & 2,366 \\ 36 & 204 & 0,7679 \\ 2,366 & 0,7679 & 4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita peroleh pula:

$$\sum_{t=1}^{8} x_t = 3532; \quad \sum_{t=1}^{8} tx_t = 16190; \quad \sum_{t=1}^{8} x_t \sin\frac{2\pi t}{12} = 1431,5716 \quad \text{dan}$$

$$\sum_{t=1}^{8} x_t^2 = 1843136$$

Jadi,

$$\vec{g}[T] = \begin{pmatrix} 3532 \\ 16190 \\ 1431,5716 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer, atau matriks adjoint, kita peroleh matriks invers dari G[8] sebagai berikut

$$G^{-1}[8] = \begin{pmatrix} 2,4883 & -0,4339 & -1,3885 \\ -0,4339 & 0,0806 & 0,2412 \\ -1,3885 & 0,2412 & 1,0253 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan $\vec{b}[8]=G^{-1}[8]\,\vec{g}[8]$, kita peroleh

$$\begin{pmatrix} b_1[8] \\ b_2[8] \\ b_3[8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4883 & -0,4339 & -1,3885 \\ -0,4339 & 0,0806 & 0,2412 \\ -1,3885 & 0,2412 & 1,0253 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3532 \\ 16190 \\ 1431,5716 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -223,9026 \\ 117,6743 \\ 468,6364 \end{pmatrix}$$

Jadi, $b_1[8]$ = -223,9026; $b_2[8]$ = 117,6743; $b_3[8]$ = 468,6364

Di akhir periode 8, kita peroleh pula:

$$\vec{x}'\vec{x}=\sum_{t=1}^{8} x_t^2 = 1843136$$

$$\vec{b}'[8]\vec{g}[8]=\begin{pmatrix} -223,9026 & 117,6743 & 468,6364 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3532 \\ 16190 \\ 1431,5716 \end{pmatrix}$$

$$=1785209,494$$

dan

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{1}{8-3}\left\{\bar{x}'\bar{x}-\bar{b}'[8]\,\vec{g}(8)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{1843136-1785209,494\right\}=11585,3012$$

2. Di akhir periode 10 kita peroleh:

$$\sum_{t=1}^{10} t = 55; \quad \sum_{t=1}^{10} t^2 = 385; \quad \sum_{t=1}^{10} \sin\frac{2\pi t}{12} = 0,5; \quad \sum_{t=1}^{10}\left(\sin\frac{2\pi t}{12}\right)^2 = 5,75 \quad \text{dan}$$

$$\sum_{t=1}^{10} t\sin\frac{2\pi t}{12} = -16,8923$$

$$G[10]=\begin{pmatrix} 10 & 55 & 0,5 \\ 55 & 385 & -16,8923 \\ 0,5 & -16,8923 & 5,75 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita peroleh pula:

$$\sum_{t=1}^{10} x_t = 4373;\ \sum_{t=1}^{10} t x_t = 24311; \sum_{t=1}^{10} x_t \sin\frac{2\pi t}{12} = 664{,}5256$$ dan
$$\sum_{t=1}^{10} t_t^2 = 2231361$$

Jadi

$$\vec{g}[10] = \begin{pmatrix} 4373 \\ 24311 \\ 664{,}5256 \end{pmatrix}$$

Dari matriks G[10] kita hitung $G^{-1}[10]$, dan diperoleh:

$$G^{-1}[10] = \begin{pmatrix} 2{,}2296 & -0{,}3754 & -1{,}2967 \\ -0{,}3754 & 0{,}0662 & 0{,}2271 \\ -1{,}2967 & 0{,}2271 & 0{,}9538 \end{pmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{pmatrix} b_1[10] \\ b_2[10] \\ b_3[10] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2296 & -0{,}3754 & -1{,}2967 \\ -0{,}3754 & 0{,}0662 & 0{,}2271 \\ -1{,}2967 & 0{,}2271 & 0{,}9538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4373 \\ 24311 \\ 664{,}5256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -237{,}9989 \\ 118{,}6778 \\ 484{,}3835 \end{pmatrix}$$

Jadi,

$b_1[10] = -237{,}9989$; $b_2[10] = 118{,}6778$; $b_3[10] = 484{,}3825$

Di akhir periode 10 kita peroleh pula:

$$\vec{x}'\vec{x} = \sum_{t=1}^{10} x_t^2 = 2231361$$

$$\vec{b}'[10]\vec{g}[10] = \begin{pmatrix} -237{,}9989 & 118{,}6778 & 484{,}3825 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4373 \\ 24311 \\ 664{,}5256 \end{pmatrix}$$

$$= 2166291{,}377$$

dan

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{10-3}\left\{\vec{x}'\vec{x} - \vec{b}'[10]\vec{g}[10]\right\}$$
$$= \frac{1}{7}\left\{2231361 - 2166291,377\right\} = 9295,6604$$

3. Ramalan jumlah penjualan bulan Desember 1970 yang dibuat di akhir bulan Agustus 1970 adalah:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{12}[8] &= b_1[8] + b_2[8](12) + b_3[8]\sin\frac{2\pi(12)}{12}\\ &= -223,9026 + (117,6743)(12) + (468,6364)(\sin 2\pi)\\ &= 1188,189\\ &= 1188\,(\text{dibulatkan})\end{aligned}$$

4. Ramalan jumlah penjualan bulan November 1970 dibuat di akhir bulan Oktober 1970 adalah:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{12}[10] &= b_1[10] + b_2[10](11) + b_3[10]\sin\frac{2\pi(11)}{12}\\ &= -237,9989 + (118,6778)(11) + (484,3825)\left(\sin\frac{22\pi}{12}\right)\\ &= 825,2657\\ &= 825\,(\text{dibulatkan})\end{aligned}$$

B. INTERVAL KONFIDENSI UNTUK β_I

Kita tuliskan matriks C = G^{-1}[T], dan C_{ij} = elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari C. Dalam Metode Statistika II, telah Anda pelajari bahwa variansi dari b_i[T] adalah:

$$\mathrm{Var}\left(b_i[T]\right) = c_{ii}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \,; i = 1, 2, \ldots, k$$

Jadi taksiran untuk variansi tersebut, adalah: $\mathrm{Var}\left(b_i[T]\right) = c_{ii}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \;; i = 1, 2, \ldots, k$

Akibatnya, interval konfidensi 100 (1 - γ) % untuk β_i yang dibuat di akhir periode T adalah:

$b_i[T]-\delta_i \le \beta_i \le b_i[T]+\delta_i$ di mana $\delta_i = t_{\gamma/2,(T-k)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar(b_i[T])}$ untuk setiap i = 1, 2, …, k

C. PENGUJIAN SIGNIFIKANSI β_I

Untuk menguji signifikansi parameter β_i di akhir periode T ; i = 1, 2, …, k maka hipotesisnya adalah:

$H_0 : \beta_i = 0$ lawan $H_1 : \beta_i \neq 0$

Statistik pengujinya adalah $t_0 = \dfrac{b_i[T]}{\sqrt{\hat{V}(b_i[T])}}$

Hipotesis H_0 ditolak pada saat T (artinya β_i signifikan tidak nol) untuk tingkat signifikansi γ, jika

$t_0 > t_{\gamma/2,(T-k)}$ atau $t_0 < t_{\gamma/2,(T-k)}$

Contoh 7:

Lihat kembali Contoh 6. Pada contoh itu

1. Hitung $\hat{V}ar(b_i[8])$ untuk setiap i = 1, 2, 3
2. Hitung $\hat{V}ar(b_i[10])$ untuk setiap i = 1, 2, 3
3. Carilah interval konfidensi 95% untuk β_2 di akhir periode 8
4. Carilah interval konfidensi 90% untuk β_3 di akhir periode 10
5. Apakah di akhir periode 10, β_2 signifikan tidak nol untuk tingkat signifikansi γ = 5 %?

Penyelesaian:

1. Pada contoh 6 di akhir periode 8 telah diperoleh:

$$G^{-1}[8] = \begin{pmatrix} 2,4883 & -0,4339 & -1,3885 \\ -0,4339 & 0,0806 & 0,2412 \\ -1,3885 & 0,2412 & 1,0253 \end{pmatrix} \text{dan } \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 11585,3012$$

Jadi,

$$\hat{V}ar(b_i[8]) = (2,4883)(11585,3012) = 28827,705$$

$$\hat{V}ar(b_2[8]) = (0,0806)(11585,3012) = 933,7753$$

$$\hat{V}ar(b_3[8]) = (1,0253)(11585,3012) = 11878,4093$$

2. Pada contoh 6, di akhir periode 10 telah diperoleh:

$$G^{-1}[10] = \begin{pmatrix} 2,2296 & -0,3754 & -1,2967 \\ -0,3754 & 0,0662 & 0,2271 \\ -1,2967 & 0,2271 & 0,9538 \end{pmatrix} \text{dan } \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 9295,6604$$

Jadi,

$$\hat{V}ar(b_i[10]) = (2,2296)(9295,6604) = 20725,6044$$

$$\hat{V}ar(b_2[10]) = (0,0662)(9295,6604) = 615,3727$$

$$\hat{V}ar(b_3[10]) = (0,9538)(9295,6604) = 8866,2009$$

3. Interval konfidensi 95% untuk β_2 di akhir periode 8 adalah:

$$b_2[8] - \delta_2 \le \beta_2 \le b_2[8] + \delta_2 \qquad \text{dimana } \delta_2 = t_{0,025;5} \cdot \sqrt{\hat{V}ar(b_2[8])}$$

Dalam contoh 6 telah dihitung $b_2[8]$ = 117,6743. Kemudian di atas telah kita peroleh $\hat{V}ar(b_2[8])$ = 933,7753. Dari tabel t kita peroleh pula $t_{0,025:5}$ = 2,571. Jadi, δ_2 = $(2,571)\sqrt{933,7753} = 78,5639$ dan 39,1104 ≤ β_2 ≤ 196,2382.

4. Interval konfidensi 90% untuk β_3 di akhir periode 10 adalah:

$$b_3[10] - \delta_3 \le \beta_3 \le b_3[10] + \delta_3 \quad \text{dimana } \delta_3 = t_{0,05;7} \cdot \sqrt{\hat{V}ar(b_3[10])}$$

Dalam contoh 6 telah dihitung $b_3[10]$ = 484,3825. Kemudian di atas telah kita peroleh $\hat{V}ar(b_3[10])$ = 8866,2009. Dari tabel t kita peroleh pula

$t_{0,05;7}$ = 1,895. Jadi, $\delta_3 = (1{,}895)\sqrt{8866{,}2009} = 178{,}4342$ dan 305,9483 ≤ β_3 ≤ 662,8167.

5. $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_1 : \beta_2 \neq 0$. Di akhir periode 10, statistik pengujinya,

$t_0 = \dfrac{b_2[10]}{\sqrt{\hat{V}ar(b_2[10])}} = \dfrac{118{,}6778}{\sqrt{615{,}3727}} = 4{,}784$. Untuk γ = 5%, titik kritisnya adalah $t_{0,025;7}$ = 2,365.

Ternyata t_0 > 2,365. Jadi, di akhir periode 10, β_2 signifikan tidak nol untuk tingkat signifikansi γ = 5%.

D. INTERVAL PREDIKSI UNTUK $X_{T+\tau}$

Dapat ditunjukkan bahwa $\hat{x}_{T+\tau}[T]$ adalah penaksir tak bias di akhir periode T untuk $x_{T+\tau}$. Bagaimanakah interval prediksinya? Di dalam Modul 7 akan Anda pelajari secara mendalam bahwa variansi dari $\hat{x}_{T+\tau}[T]$ adalah:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right) = \left\{1 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} z_i[T+\tau]\, z_j[T+\tau] c_{ij}\right\}\sigma_\varepsilon^2$$

dimana $z_1[t] = 1$ untuk setiap t = 1, 2, …

Jika kita tuliskan vektor

$$\vec{Z}[t] = \begin{pmatrix} z_1[t] \\ z_2[t] \\ \vdots \\ z_k[t] \end{pmatrix}; \; t = 1, 2, \ldots.$$

Maka: $$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} z_1[T+\tau] z_j[T+\tau] c_{ij} = \vec{Z}'[T+\tau] C \vec{Z}[T+\tau]$$

ingat bahwa C = $G^{-1}[T]$. Akibatnya, $\mathrm{Var}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right) = \left\{1 + \vec{Z}'[T+\tau] C \vec{Z}[T+\tau]\right\}\sigma_\varepsilon^2$

Jadi taksiran variansi itu adalah:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)=\left\{1+\vec{Z}'[T+\tau]C\,\vec{Z}[T+\tau]\right\}\sigma_\varepsilon^2$$

Berdasarkan hal ini, maka interval konfindensi 100 (1 - γ)% untuk $x_{T+\tau}$ yang dibuat di akhir periode T, adalah

$$\hat{x}_{T+\tau}[T]-\delta \le x_{T+\tau} \le \hat{x}_{T+\tau}[T]+\delta \text{ dimana } \delta=t_{\gamma/2,(T-k)}\cdot\sqrt{\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)}$$

Contoh 8:

Lihat kembali Contoh 6. Pada contoh itu, carilah:

1. Interval prediksi 95% untuk jumlah penjualan bulan November 1970 yang dibuat di akhir Oktober 1970.
2. Interval prediksi 90% untuk jumlah penjualan bulan Desember 1970 yang dibuat di akhir Agustus 1970.

Penyelesaian:

1. Yang kita cari adalah interval prediksi 95% untuk x_{11} yang dibuat di akhir periode 10, yakni:

$$\hat{x}_{11}[10]-\delta \le x_{11} \le \hat{x}_{11}[10]+\delta \quad \text{dimana} \quad \delta=t_{0,025;7}\sqrt{\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}\left(\hat{x}_{11}[10]\right)},$$

$$\hat{\mathrm{V}}\mathrm{ar}\left(\hat{x}_{11}[10]\right)=\left\{1+\vec{Z}[11]\;G^{-1}[10]\;\vec{Z}[11]\right\}\hat{\sigma}_\varepsilon^2, \text{ dan}$$

$$\vec{Z}[11]=\begin{pmatrix}1\\11\\\sin\dfrac{2\pi(11)}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\\-0,5\end{pmatrix}$$

Pada contoh 6, kita peroleh di akhir periode 10:

$$G^{-1}[10]=\begin{pmatrix}2,2296 & -0,3754 & -1,2967\\-0,3754 & 0,0662 & 0,2271\\-1,2967 & 0,2271 & 0,9538\end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\sigma}_\varepsilon^2=9295,6604$$

Jadi,

$$\vec{Z}[11]G^{-1}[10]\vec{Z}[11] =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 11 & - & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2,2296 & -0,3754 & -1,2967\\ -0,3754 & 0,0662 & 0,2271\\ -1,2967 & 0,2271 & 0,9538\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 11\\ -0,5\end{pmatrix} = 1,0181$$

dan $\hat{V}ar\left(\hat{x}_{11}[10]\right) = (1+1,0181)(9295,6604) = 18759,5723$

Pada contoh 6 telah dihitung pula $\hat{x}_{11}[10] = 825,2657$. Dari tabel t kita baca $t_{0,025;7}$ = 2,365. Jadi, δ = $(2,365)\sqrt{18759,5723} = 323,9236$ dan $501,3421 \le x_{11} \le 1149,1893$ atau jika dibulatkan $501 \le x_{11} \le 1149$.

2. Yang kita cari adalah interval prediksi 90% untuk x_{12} yang dibuat di akhir periode 8, yakni:

$$\hat{x}_{12}[8] - \delta \le x_{12} \le \hat{x}_{12}[8] + \delta \quad \text{dimana } \delta = t_{0,05;5}\sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{x}_{12}[8]\right)},$$

$$Var\left(\hat{x}_{12}[8]\right) = \left\{1 + \vec{Z}[12]\, G^{-1}[8]\, \vec{Z}[12]\right\} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2, \text{ dan}$$

$$\vec{Z}[12] = \begin{pmatrix}1\\ 12\\ \sin\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 12\\ 0\end{pmatrix}$$

Pada contoh 6, kita peroleh di akhir periode 8:

$$G^{-1}[8] = \begin{pmatrix}2,4883 & -0,4339 & -1,3885\\ -0,4339 & 0,0806 & 0,2412\\ -1,3885 & 0,2412 & 1,0253\end{pmatrix} \text{ dan } \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = 11585,3012$$

Jadi,

$$\vec{Z}[12]\, G^{-1}[8]\, \vec{Z}[12] =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 12 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2,4883 & -0,4339 & -1,3885\\ -0,4339 & 0,0806 & 0,2412\\ -1,3885 & 0,2412 & 1,0253\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 12\\ 0\end{pmatrix} = 3,6811$$

dan $\hat{V}ar\left(\hat{x}_{12}[10]\right) = (1+3,6811)(11585,3012) = 54231,9534$

Pada contoh 6 telah dihitung pula $\hat{x}_{12}[8] = 1188,189$. Dari tabel t kita baca $t_{0,05;5}$ = 2,015. Jadi, $\delta = (2,015)\sqrt{54231,9534} = 469,2483$ dan $718,9407 \leq x_{12} \leq 1657,4373$ atau jika dibulatkan maka $719 \leq x_{12} \leq 1657$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Dengan menggunakan model $x_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \varepsilon_t$, ingin dilakukan peramalan berdasarkan data berikut.

Periode t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	179	162	225	203	216	198	211	106	133	110	141	110

Hitunglah:

1) Taksiran β_1, β_2, β_3 dan σ_ε^2 di akhir periode 10.
2) Taksiran β_1, β_2, β_3 dan σ_ε^2 di akhir periode 12.
3) Ramalan harga x pada periode 13 yang dibuat di akhir periode 10.
4) Ramalan harga x pada periode 13 yang dibuat di akhir periode 12.
5) $\hat{V}ar\left(b_1[10]\right)$ untuk setiap i = 1, 2, 3
6) $\hat{V}ar\left(b_1[10]\right)$ untuk setiap i = 1, 2, 3
7) Interval konfidensi 90% untuk β_2 di akhir periode 10.
8) Interval konfidensi 95% untuk β di akhir periode 12.

9) Statistik penguji t_0 untuk menguji $H_0 : \beta_2 = 0$ lawan $H_1 : \beta_2 \neq 0$ di akhir periode 12.
10) Statistik penguji t_0 untuk menguji $H_0 : \beta_3 = 0$ lawan $H_1 : \beta_3 \neq 0$ di akhir periode 10.
11) $\hat{V}ar\left(\hat{x}_{13}[10]\right)$
12) $\hat{V}ar\left(\hat{x}_{13}[12]\right)$
13) Interval prediksi 90% untuk x_{13} yang dibuat di akhir periode 10.
14) Interval prediksi 95% untuk x_{13} yang dibuat di akhir periode 12.

Petunjuk gunakanlah:
1. Kalkulator yang memiliki MODE : SD
2. Tabel distribusi t
3. Hasil hitungan sampai 4 angka di belakang koma

Petunjuk Jawaban Latihan

1) 145,983 ; 29,145 ; -3,428 dan 780,103

2) 179,045 ; 9,590 ; -1,389 dan 1044,278

3) –54,464

4) 68,974
5) 1079,142 ; 188,229 ; 1,477

6) 1115,479 ; 139,533 ; 0,782

7) $3,146 \leq \beta_2 \leq 55,144$

8) $103,497 \leq \beta_1 \leq 254,593$

9) 0,812

10) –2,281

11) 4794,088

12) 2159,757

13) $-185{,}673 \le x_{13} \le 76{,}745$

14) $-36{,}148 \le x_{13} \le 174{,}096$

RANGKUMAN

1. Model regresi linier ganda untuk data runtun waktu;
   $X_t = \beta_1 + \beta_2 z_2[t] + \ldots + \beta_k z_k[t] + \varepsilon_t$; $\quad t = 1, 2, \ldots, T$
   dengan; $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, $\quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ independen
   $z_2[t], z_3[t], \ldots, z_k[t]$ merupakan fungsi dari t.

2. Penaksir kuadrat terkecil diakhir periode T untuk $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_3$ adalah $b_1[T], b_2[T], \ldots, b_k[T]$;

$$\vec{b}[T] = \begin{pmatrix} b_1[T] \\ b_2[T] \\ \vdots \\ b_k[T] \end{pmatrix} = G^{-1}[T] \; \vec{g}[T], \text{ di mana}$$

$$G[T]=\begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} z_2[t] & ..... & \sum_{t=1}^{T} z_k[t] \\ \sum_{t=1}^{T} z_2[t] & \sum_{t=1}^{T} (z_2[t])^2 & ..... & \sum_{t=1}^{T} z_2[t] z_k[t] \\ \sum_{t=1}^{T} z_3[t] & \sum_{t=1}^{T} z_3[t] z_2[t] & ..... & \sum_{t=1}^{T} z_3[t] z_k[t] \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ \sum_{t=1}^{T} z_k[t] & \sum_{t=1}^{T} z_k[t] z_2[t] & ..... & \sum_{t=1}^{T} (z_k[t])^2 \end{pmatrix}$$ dan

$$\vec{g}[T]=\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} x_t \\ \sum_{t=1}^{T} z_2[t] x_t \\ \sum_{t=1}^{T} z_3[t] x_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} z_k[t] x_t \end{pmatrix}$$

3. Persamaan regresi yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$\hat{x}_t = b_1[T] + b_2[T] z_2[t] + ... + b_k[T] z_k[t]$$

4. Taksiran σ_ε^2 yang dibuat diakhir periode T adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{x}_t)^2 = \frac{1}{T-k} \left\{ \vec{x}' \vec{x} - \vec{b}'[T]\ \vec{g}[T] \right\}$$

di mana $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix}$

5. Ramalan harga x pada periode (T + τ) yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$\hat{x}_{T+\tau}[T] = b_1[T] + b_2[T]z_2[T+\tau] + ... + b_k[T]z_k[T+\tau]$$

6. $\hat{V}ar(b_i[T]) = c_{ii}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ di mana c_{ii} elemen diagonal ke-i dari matriks C = $G^{-1}[T]$; i = 1, 2,.. ,k.

7. Interval konfidensi 100(1 - γ)% untuk yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$b_i[T] - \delta_i \le \beta_i \le b_i[T] + \delta_i \quad \text{di mana} \quad \delta_i = t_{\gamma/2,(T-k)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar(b_i[T])}$$

8. Statistik penguji untuk menguji $H_0 : \beta_i = 0$ lawan $H_1 : \beta_i \neq 0$ adalah:

$$t_0 = \frac{b_i[T]}{\sqrt{\hat{V}ar(b_i[T])}} \text{ ; } i = 1, 2, \ldots, k$$

H_0 ditolak di akhir periode T dengan tingkat signifikansi γ,
jika $t_0 > t_{\gamma/2,(T-k)}$ atau $t_0 < t_{\gamma/2,(T-k)}$

9. $\hat{V}ar(\hat{x}_{T+\tau}[T]) = \left\{1 + \vec{z}'[T+\tau]G^{-1}[T]\vec{z}[T+\tau]\right\}\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

di mana $\vec{z}[T+\tau] = \begin{pmatrix} 1 \\ z_2[T+\tau] \\ z_3[T+\tau] \\ \vdots \\ z_k[T+\tau] \end{pmatrix}$

10. Interval prediksi 100 (1 - γ)% untuk $x_{T+\tau}$ yang dibuat di akhir periode T adalah:

$$\hat{x}_{T+\tau}[T]-\delta \le x_{T+\tau} \le \hat{x}_{T+\tau}[T]+\delta \text{ dimana}$$

$$\delta = t_{\gamma/2,(T-k)} \cdot \sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{x}_{T+\tau}[T]\right)}$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Jumlah penjualan karpet bulanan (x) selama 1980 adalah sebagai berikut:

Bulan	Periode t	x	Bulan	Periode t	x
Jan	1	31	Jul	7	58
Feb	2	30	Agu	8	60
Mar	3	35	Sep	9	57
Apr	4	42	Okt	10	52
Mei	5	45	Nov	11	47
Jun	6	52	De	12	40

Berdasarkan data ini dilakukan peramalan jumlah penjualan bulan-bulan berikutnya, dengan menggunakan model:

$x_t = \beta_1 + \beta_2 \sin\frac{2\pi t}{12} + \beta_3 \cos\frac{2\pi t}{12} + \varepsilon_t$ dan dengan metode regresi linier ganda. Maka,

1) $b_1[10]$ = ….
   A. 23,4495
   B. 33,4993
   C. 44,8882
   D. 46,9488

2) $b_2[12]$ = ….
   A. -15,9214
   B. -11,4671
   C. -7,4543
   D. -5,4605

3) Di akhir periode 10, maka $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ = ….
   A. 8,5391
   B. 34,1565
   C. 53,5367
   D. 72,9168

4) Di akhir periode 12, maka $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ = ….
   A. 59,6987
   B. 41,4391
   C. 23,1795
   D. 7,7265

5) Ramalan jumlah penjualan bulan Januari tahun 1981 yang dibuat di akhir Oktober 1980 adalah …. (dibulatkan)
   A. 34
   B. 42
   C. 38
   D. 40

6) Ramalan jumlah penjualan bulan Januari 1981 yang dibuat di akhir bulan Desember tahun 1980 adalah …. (dibulatkan)
   A. 39
   B. 36
   C. 41
   D. 42

7) $\hat{V}\mathrm{ar}\left(b_2[10]\right) = ...$
   A. 3,5901
   B. 10,4114
   C. 12,8990
   D. 14,0015

8) $\hat{V}\mathrm{ar}\left(b_1[10]\right) = ...$
   A. 24,7496]
   B. 2,2304
   C. 11,0963
   D. 4,9749

9) Interval konfidensi 95% untuk β_2 yang dibuat di akhir periode 10 adalah:
A. $-3,9266 \le \beta_2 \le 1,5632$
B. $-15,4180 \le \beta_2 \le 1,5632$
C. $-3,9266 \le \beta_2 \le 6,2528$
D. $-15,4180 \le \beta_2 \le 6,2528$

10) Interval konfidensi 90% untuk β_1 yang dibuat di akhir periode 12 adalah ….
A. $32,2729 \le \beta_1 \le 49,8384$
B. $32,2749 \le \beta_1 \le 42,3578$
C. $41,6616 \le \beta_1 \le 49,8384$
D. $41,6616 \le \beta_1 \le 42,3578$

11) Dalam menguji $H_0 : \beta_1 = 0$ lawan $H_1 : \beta_1 \neq 0$ di akhir periode 10, kita peroleh statistik penguji $t_0 =$ ….
A. 17,9686
B. 15,8569
C. 1,9955
D. 3,9821

12) $\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{13}[10]\right) = ...$
A. 10,1094
B. 70,7659
C. 8,4122
D. 102,2002

13) $\hat{\text{V}}\text{ar}\left(\hat{x}_{13}[12]\right) = ...$
A. 74,6229
B. 7,1994
C. 51,8307
D. 8,6385

14) Interval prediksi 95% untuk jumlah penjualan bulan Januari tahun 1981 yang dibuat di akhir bulan Desember tahun 1980 adalah …. (dibulatkan)
A. $16 \le x_{13} \le 55$
B. $16 \le x_{13} \le 48$
C. $21 \le x_{13} \le 55$
D. $21 \le x_{13} \le 48$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) B
2) D
3) A
4) A
5) C
6) A
7) D
8) D
9) C
10) B
11) B
12) C
13) D
14) A
15) A
16) B

Tes Formatif 2
1) C
2) C
3) D
4) A
5) A
6) B
7) C
8) D
9) B
10) C
11) B
12) D
13) A
14) A

Daftar Pustaka

Bowker, A.H dan Lieberman G.J. (1972). *Engineering Statistics*. Edisi ke-2, Prentice-Hall, Inc.

Draper N dan Smith H. (1981). *Applied Regression Analysis*. Edisi ke-2. John Wiley and Son.

Makridakis, S. dan Wheel Wright, S. (1978). *Forecasting, Methods and Applications*. John Wiley and Son.

Montgomery D.C dan Johnson L.A. (1976). *Forecasting and Time Series Analysis*, Mc. Graw-Hill Book Company.