MODUL 1

Pengantar Analisis Real

Dr. Endang Cahya, M.A., M.Si.

PENDAHULUAN

Pada Modul 1 ini disajikan beberapa topik pengantar mata kuliah Analisis Real, yang terbagi dalam beberapa kegiatan belajar yang harus dipelajari sebagai bekal untuk mempelajari topik-topik dalam mata kuliah Analisis Real baik yang sekarang Saudara hadapi ataupun sebagai bekal untuk mempelajari analisis real lanjutan.

Kegiatan Belajar 1, memuat permasalahan tentang himpunan, mulai dari definisi yang paling sederhana sampai ke yang agak rumit. Pada Kegiatan Belajar 1 ini juga dilengkapi beberapa contoh soal latihan yang diselesaikan dan soal latihan yang harus Saudara selesaikan sendiri.

Kegiatan Belajar 2, memuat permasalahan tentang relasi dan fungsi, serta pengembangannya. Di awal dijelaskan mengenai definisi relasi dan fungsi antar anggota himpunan dan berikutnya dibahas fungsi antar himpunan. Seperti pada Kegiatan Belajar 1, pada Kegiatan Belajar 2 juga dilengkapi beberapa contoh soal latihan yang diselesaikan dan soal latihan yang harus Saudara selesaikan sendiri.

Kegiatan Belajar 3, memuat topik induksi matematik dan konsep himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga. Dua konsep ini sengaja disatukan dengan tujuan, agar dalam pembuktian masalah yang berkaitan dengan himpunan berhingga bisa terbantu walaupun tidak seluruhnya dapat dibantu oleh induksi matematik.

Seperti pada kegiatan belajar sebelumnya, pada Kegiatan Belajar 3 juga dilengkapi beberapa contoh soal latihan yang diselesaikan dan soal latihan yang harus Saudara selesaikan sendiri.

Pada bagian akhir dari Modul 1, diberikan Kegiatan Belajar 4 yang struktur penyajiannya berbeda dengan struktur penyajian Kegiatan Belajar 1, Kegiatan Belajar 2, dan Kegiatan Belajar 3. Kegiatan Belajar 4 ini tidak dilengkapi dengan latihan dan tes formatif karena topik ini dibutuhkan ketika Saudara akan membuktikan suatu teorema atau sifat-sifat sejenisnya.

Secara keseluruhan, setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda dapat:

1. membuktikan sifat-sifat operasi yang berlaku diantara himpunan-himpunan;
2. mengenal/menjelaskan macam-macam relasi, fungsi, dan sifatnya;
3. membuktikan sifat-sifat operasi yang berlaku pada fungsi;
4. mengerti sifat terurut sempurna dalam bilangan asli $\mathbb{N}$;
5. mengerti dan dapat menggunakan prinsip induksi matematik;
6. mengerti himpunan berhingga dan tak berhingga beserta sifat-sifatnya;
7. mengerti konsep logika pembuktian dalam matematika serta dapat mempraktekkannya dalam membuktikan sifat-sifat yang muncul pada topik-topik dalam mata kuliah Analisis Real maupun lainnya.

Sebagai bahan/bekal utama dan pertama dalam belajar analisis real, pelajari modul ini seteliti mungkin karena Modul 1 merupakan modal dasar untuk itu. Ikuti petunjuk, baik pada contoh, latihan maupun petunjuk jawaban soal latihan. Sengaja modul ini tidak dilengkapi dengan bukti yang detail, karena Saudara adalah mahasiswa program pasca sarjana yang sudah seharusnya belajar mandiri. Apabila dalam satu topik masih belum dipahami, coba ulang kembali dan begitu seterusnya.

Selamat belajar dan sukses selalu!

KEGIATAN BELAJAR 1

Sekilas tentang Teori Himpunan

1.1.1 ARTI HIMPUNAN

Dalam membicarakan cabang matematika, seperti analisis, aljabar, dan geometri, sering kali kita menggunakan notasi dan pengertian himpunan. Topik ini dikembangkan oleh Boole dan Cantor pada Abad XIX dan kemudian berkembang pesat di Abad XX. Membicarakan teori himpunan secara lengkap, dibutuhkan waktu yang tidak sedikit. Akan tetapi, di sini hanya akan bicarakan teori himpunan sebagai pengantar untuk mempelajari analisis real.

Kata himpunan dalam matematika merupakan istilah yang tidak didefinisikan. Himpunan dicirikan oleh sifat objek atau benda (baik abstrak maupun konkret) yang ada di dalamnya yang didefinisikan secara jelas. Dengan demikian, suatu objek dapat ditentukan apakah ia berada di dalam himpunan ataukah ia berada di luar himpunan. Setiap objek yang terletak di dalam himpunan atau mempunyai sifat yang telah ditentukan terlebih dahulu disebut *elemen* atau *unsur* atau *anggota* himpunan tersebut. Himpunan bilangan prima, himpunan kendaraan beroda dua, himpunan segitiga sama sisi adalah contoh-contoh himpunan dengan sifat-sifat keanggotaannya yang dinyatakan dengan jelas.

Unsur-unsur suatu himpunan biasa dilambangkan dengan menggunakan huruf kecil: a, b, c, d, ..., x, y, z, sedangkan himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf besar: A, B, C, D, ..., X, Y, Z. Selanjutnya akan digunakan simbol atau lambang $\in$, menyatakan keanggotaan suatu objek dalam suatu himpunan atau objek itu merupakan anggota himpunan tersebut sehingga untuk menyatakan bahwa x merupakan unsur di A, ditulis $x \in A$. Simbol atau lambang $\notin$ menyatakan bahwa suatu objek terletak di luar himpunan atau bukan merupakan anggota atau unsur himpunan tersebut sehingga untuk menyatakan x bukan anggota himpunan B, ditulis $x \notin B$.

1.1.2 MENULISKAN ATAU MENYATAKAN SUATU HIMPUNAN

Himpunan dapat dituliskan dalam berbagai cara. Himpunan yang banyak anggotanya sedikit atau hingga, biasanya dinyatakan dengan cara *tabulasi* yaitu unsur-unsurnya dituliskan dengan cara didaftar satu-satu, diawali dan diakhiri dengan tanda kurung kurawal, seperti $A=\{a,e,i,o,u\}$ atau $B=\{1,3,5,7,9,11,13\}$. Urutan dalam penulisan unsur-unsur suatu himpunan tidak diperhatikan. Jadi, himpunan $S=\{1,2,3,4\}$ dan $T=\{4,3,2,1\}$ menyatakan dua himpunan yang sama.

Suatu himpunan *S* disebut *himpunan semesta* (*universal set*) jika dan hanya jika himpunan *S* memuat setiap himpunan yang dibicarakan, atau $S \supseteq A$ untuk setiap himpunan *A*. Sebagai gambaran, ketika kita berbicara bilangan real sebagai semesta pembicaraan dalam menggambarkan sebuah grafik fungsi kuadrat maka gambarnya berupa parabola. Akan tetapi, bila semestanya bilangan bulat gambarnya berupa titik-titik pada koordinat Kartesius.

Cara yang lebih umum dalam menuliskan suatu himpunan adalah dengan menyatakan sifat-sifat atau ciri keanggotaan himpunan tersebut. Kadang-kadang himpunan semestanya dilibatkan, seperti $C=\{x\in S \mid x \text{ memiliki sifat } P\}$ atau $C=\{x \mid x\in S \text{ dan } x \text{ memiliki sifat } P\}$ atau $C=\{x \mid x \text{ memiliki sifat } P\}$ artinya "himpunan *C* adalah himpunan semua objek *x* yang memiliki sifat *P*". Jadi, untuk himpunan *A* dalam contoh di atas dapat dituliskan juga sebagai berikut: $A=\{x \mid x \text{ huruf vokal dalam abjad}\}$, sedangkan himpunan *B* pada contoh di atas dapat dinyatakan oleh $B=\{x \mid x \text{ bilangan asli ganjil, dan } x<15\}$ dan $S=T=\{x \mid x \text{ adalah empat bilangan asli pertama}\}$.

1.1.3 HUBUNGAN ANTARHIMPUNAN

Definisi 1.1.1

Himpunan *A* disebut *himpunan bagian* dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap unsur/elemen himpunan *A* juga merupakan unsur/elemen himpunan *B*.

Definisi ini mengatakan *A* disebut himpunan bagian dari *B*, jika himpunan *A* termuat di *B* atau himpunan *B* memuat himpunan *A*, dan biasa ditulis $A\subseteq B$ atau $B\supseteq A$. Dengan demikian, $A\subseteq B \Leftrightarrow$ untuk setiap

$x \in A,\ x \in B$. A disebut *himpunan bagian murni* dari B ditulis $A \subseteq B$ jika dan hanya jika A merupakan himpunan bagian dari B dan terdapat $x \in B$, tetapi $x \notin A$.

Definisi 1.1.2

Himpunan A disebut *sama* dengan himpunan B, ditulis $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Dengan definisi ini, dua buah himpunan dikatakan sama jika kedua himpunan tersebut memiliki anggota yang sama. Variabel yang terdapat dalam himpunan boleh berbeda, dan biasa disebut variabel boneka (*dummy*). Sebagai contoh, $\{x | x > 0\} = \{t | t > 0\} = \{y | y > 0\} = \{s | s > 0\}$, dan seterusnya.

Sebelum membicarakan kemungkinan yang terjadi dari dua himpunan yang diberikan, sebaiknya kita cermati dulu pengertian dari suatu himpunan yang sering kali dibicarakan dalam semesta pembicaraan.

Definisi 1.1.3

Suatu himpunan S disebut *himpunan semesta* (*universal set*) jika dan hanya jika himpunan S memuat setiap himpunan yang dibicarakan, atau $S \supseteq A$ untuk setiap himpunan A.

Sering kali semesta pembicaraannya dalam menyelesaikan persamaan aljabar tidak disebutkan, ini berarti himpunan semesta adalah bilangan real. Demikian pula ketika kita menggambar sebuah fungsi yang tidak disebutkan himpunan semestanya, berarti semestanya adalah bilangan real. Misalnya, gambarlah sebuah fungsi $f(x) = 2x + 1$, ini berarti bahwa semesta pembicaraannya adalah bilangan real.

Definisi 1.1.4

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut *himpunan kosong* dan dilambangkan oleh $\varnothing$.

Kita akan memandang himpunan kosong sebagai himpunan bagian dari setiap himpunan, atau $\varnothing \subseteq A$ untuk setiap himpunan A. Untuk membantu dalam pemahaman, kita pikirkan himpunan kosong sebagai sesuatu wadah atau bok atau container yang tidak ada isinya. Secara logika, harus bisa dibedakan antara unsur x dengan himpunan yang anggotanya hanya x, yaitu $\{x\}$. Ini artinya, membedakan antara pensil dengan sebuah wadah yang hanya memuat pensil. Secara khusus, $\varnothing$ berbeda dengan $\{\varnothing\}$. Kenapa? Jelaskan!

Jika diberikan dua buah himpunan maka kita dapat membentuk himpunan baru sebagai hasil dari irisan, gabungan, pengurangan, dan lain-lain. Berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan dua himpunan yang diketahui.

Definisi 1.1.5

Dua himpunan A dan B disebut *saling lepas* (*disjoint*) jika dan hanya jika tidak ada unsur himpunan A yang juga merupakan unsur himpunan B atau sebaliknya.

Definisi 1.1.6

Himpunan A dan B disebut *berpotongan* (*intersect/meet*) jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu unsur di A yang juga merupakan unsur di B atau sebaliknya.

Definisi 1.1.7

(i) Suatu himpunan disebut *himpunan hingga* (*finite*) jika dan hanya jika himpunan tersebut mempunyai banyak unsur yang hingga.

(ii) Suatu himpunan disebut *himpunan tak hingga* (*infinite*) jika dan hanya jika himpunan tersebut mempunyai banyak unsur yang tak hingga.

1.1.4 OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN

Definisi 1.1.8

Gabungan dua himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur himpunan A atau unsur himpunan B.

Jadi, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

Kata *atau* pada definisi di atas mengandung arti inklusif (dan/atau).

Definisi 1.1.9

Irisan dua himpunan A dan B ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur himpunan A dan unsur himpunan B.

Jadi, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Definisi 1.1.10

Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ masing-masing himpunan.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk suatu } i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk suatu } i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Dengan cara yang sama untuk suatu koleksi tak hingga $\{A_\alpha\}$ didefinisikan:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ untuk suatu } \alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ untuk suatu } \alpha\}$$

Sebagai contoh jika:

$\Gamma = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ koleksi hingga dari himpunan-himpunan maka gabungan hingga koleksi himpunan-himpunan di Γ, kita tulis:

$$\bigcup_{A \in \Gamma} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n .$$

Serupa dengan itu, irisan dari semua himpunan-himpunan di $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ koleksi hingga dari himpunan-himpunan maka kita tulis:

$$\bigcap_{A \in \Gamma} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n .$$

Definisi 1.1.11

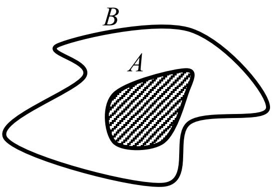
Himpunan $A-B$ disebut komplemen *B* terhadap *A*, didefinisikan sebagai himpunan yang unsur-unsurnya adalah unsur himpunan *A* dan bukan unsur himpunan *B*.

Jadi, $A-B=\{x \mid x\in A \text{ dan } x\notin B\}$.

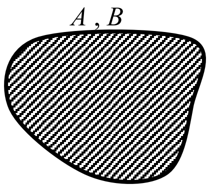
$A-B$ sering dituliskan juga dengan $A\setminus B$. Jika $A=S$, maka $A\setminus B=S\setminus B$.

$S-B$ atau $S\setminus B$ dapat juga ditulis dengan B' (dibaca komplemen *B*).

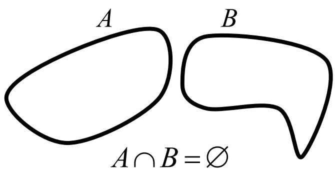
Hubungan-hubungan dan operasi-operasi yang diuraikan di atas dapat digambarkan dengan menggunakan diagram yang disebut dengan diagram Venn, seperti dapat dilihat berikut ini:



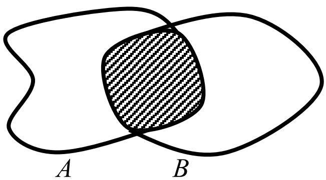
$A\subset B$



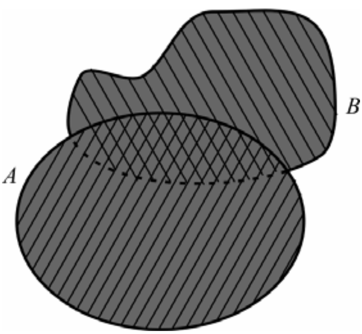
$A=B$



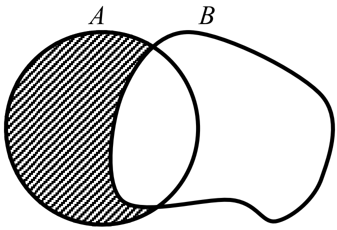
$A\cap B=\varnothing$



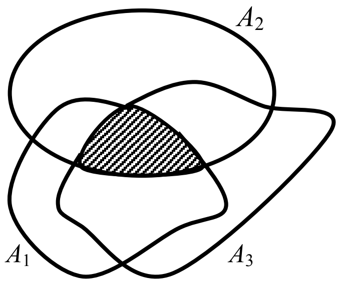
Daerah yang diarsir menyatakan $A\cap B$



Daerah yang diarsir menyatakan $A\cup B$



Daerah yang diarsir menyatakan $A-B$



Daerah yang diarsir menyatakan $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$

Gambar 1.1. Operasi Antar Himpunan

Contoh 1.1.1:

(a) Buktikan $A \cup B = B \cup A$.

Bukti:

Untuk membuktikan kesamaan di atas, akan ditunjukkan $A \cup B \subseteq B \cup A$ dan $B \cup A \subseteq A \cup B$. Misalkan $x \in A \cup B$ maka x paling sedikit termuat di salah satu dari A atau B. Ini berarti x termuat di B atau di A.

Karena itu, $x \in B \cup A$. Jadi, $A \cup B \subseteq B \cup A$. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan $B \cup A \subseteq A \cup B$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $A \cup B = B \cup A$.

(b) Buktikan $A \cap B \subseteq A$.

Bukti:

Misalkan $x \in A \cap B$ maka x anggota A dan juga anggota B. Secara khusus x anggota A. Dengan demikian, setiap unsur dari $A \cap B$ juga merupakan unsur di A. Karena itu, $A \cap B \subseteq A$.

(c) Misalkan A, B, dan C masing-masing himpunan.

Buktikan bahwa $A \cap (B - C) \subset A - (B \cap C)$.

Bukti:
Akan diperlihatkan bahwa $\forall x \in A \cap (B-C)$ maka $x \in A-(B\cap C)$.
Misalkan $x \in A \cap (B-C)$. Berdasarkan Definisi 1.9 berarti $x \in A$ dan $x \in (B-C)$. Karena $x \in (B-C)$ maka $x \notin B \cap C$.
Jadi, $x \in A$ dan $x \notin B \cap C$. Ini mengatakan $x \in A-(B\cap C)$.
Dapat disimpulkan: $A\cap(B-C) \subset A-(B\cap C)$.

(d) Buktikan bahwa $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Bukti:
Akan diperlihatkan bahwa: (1) $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$
(2) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$
Bukti (1): Misalkan $x\in A\cap(B\cup C)$. Berdasarkan Definisi 1.9 maka $x\in A$ dan $x\in B\cup C$ ....(*). Berdasarkan Definisi 1.8, $x\in B\cup C$ menyatakan $x\in B$ atau $x\in C$ sehingga (*) dapat dinyatakan oleh $x\in A\cap B$ atau $x\in A\cap C$.
Jadi, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Uraian di atas menghasilkan: $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Bukti (2): Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.
Dari bukti (1) dan (2) disimpulkan $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(e) Tunjukan bahwa $B-\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$.
Bukti:
Akan ditunjukkan: (1) $B-\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subset\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$
(2) $\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)\subset B-\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

Bukti (1) (i) Misalkan $x\in B-\bigcup_{i=1}^{n}A_i$
(ii) $x\in B$ dan $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}A_i$
(iii) $x\in B$ dan $x\notin A_i$ untuk setiap A_i
(iv) $x\in B-A_i$

(v) $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \left(B - A_i\right)$

Dari (i) – (v) diperoleh: $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \left(B - A_i\right)$.

Bukti (2) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jelaskan arti dari ungkapan-ungkapan di bawah ini:
   $x \notin A \cup B$, $x \notin A \cap B$, $x \notin A - B$,
   $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, dan $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
2) Buktikan bahwa $(A - B) \cap C \subset A - (B \cap C)$ dan berikan suatu contoh yang menunjukkan bahwa $(A - B) \cap C \neq A - (B \cap C)$.
3) Buktikan:
   a) $(A - B) \cap (A - C) \subset A - (B \cap C)$
   b) $(A \cup B) - C \subset A \cup (B - C)$
   c) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$
4) Buktikan kesamaan himpunan yang diberikan.
   $B - \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} \left(B - A_\alpha\right)$
5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7) Diberikan himpunan-himpunan berikut, $A = \{1,2\}$, $B = \{\{1\},\{2\}\}$, $C = \{\{1\},\{1,2\}\}$, $D = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. Tetapkan benar atau salah, berikan alasan:

a) $A = B$	d) $A \in E$	g) $B \subset C$
b) $A \subseteq B$	e) $A \subset D$	h) $B \subset D$
c) $A \subset C$	f) $B \in D$	i) $A \in D$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) x bukan anggota A juga bukan anggota B
   x bukan anggota A dan B
   x bukan anggota A di luar B
   x bukan anggota gabungan hingga koleksi himpunan A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
   x bukan anggota irisan hingga koleksi himpunan A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
2) Ambil x unsur di $(A - B) \cap C$, harus ditunjukkan x berada di $A - (B \cap C)$. Contoh $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{3,6\}$.
3) Akan ditunjukkan $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$. Ambil x di $A \cap (B \cup C)$ maka x anggota A dan x anggota $B \cup C$. Ini berarti x anggota A dan B atau x anggota A dan C. x anggota A dan C maka x anggota C. Jadi x anggota A dan B atau x anggota C.
4) Harus ditunjukkan:
   $B - \bigcup_{\alpha} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha} \left(B - A_\alpha\right)$ dan
   $\bigcap_{\alpha} \left(B - A_\alpha\right) \subseteq B - \bigcup_{\alpha} A_\alpha$.
   Untuk bagian pertama, ambil $x \in B - \bigcup_{\alpha} A_\alpha$ sebarang, maka $x \in B$, tetapi $x \notin \bigcup_{\alpha} A_\alpha$. Ini berarti $x \notin A_\alpha$ untuk setiap α. Karena itu, $x \notin B - A_\alpha$ untuk setiap α.
   Jadi, $x \in \bigcap_{\alpha} \left(B - A_\alpha\right)$. Untuk bagian yang kedua, coba sendiri.

RANGKUMAN

Anda telah mengingat kembali teori himpunan, mulai dari definisi himpunan dan operasi dasar pada himpunan sampai kepada operasi yang lebih luas yang masih berlaku pada sebarang himpunan. Di akhir bagian ini, diingatkan kembali mengenai gabungan sebarang koleksi himpunan-himpunan maupun irisan koleksi himpunan-himpunan. Materi ini menjadi dasar/pengetahuan bagi materi berikutnya, pada kegiatan belajar berikutnya maupun modul berikutnya.

TES FORMATIF 1

Jawablah dengan singkat dan jelas!

1) Buktikan Hukum Distributif:
   Misalkan A himpunan dan $\{A_\alpha\}$ kelas dari himpunan-himpunan dengan $\alpha \in S$ dan S himpunan indeks. Buktikan:
   $$A \cap \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) = \bigcup_\alpha (A \cap A_\alpha).$$
2) Jelaskan apa bedanya $\{\ \}$ dengan $\{\varnothing\}$?
3) Diketahui $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$. Pastikan benar atau salah dan berikan penjelasan!
   a) $A \subset B$
   b) $A \subseteq B$
   c) $A \in B$
   d) $1 \in A$
   e) $1 \subseteq B$
   f) $1 \subset B$
4) Buktikan kesamaan dua himpunan berikut:
   a) $\{a, a\} = \{a\}$
   b) $\{a, b\} = \{b, a\}$
   c) $\{a\} = \{b, c\}$. Jika dan hanya jika $a = b = c$.
5) Diberikan himpunan-himpunan berikut: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$, $A_3 = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $A_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Tentukan:
   a) $\bigcup_\alpha A_\alpha$
   b) $\bigcap_\alpha A_\alpha$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Relasi dan Fungsi

1.2.1 RELASI DAN FUNGSI

Definisi 1.2.1 (Hasilkali Cartesius)

Misalkan A dan B masing-masing himpunan yang tidak kosong. *Hasilkali Cartesius* dari A dan B, ditulis $A \times B$ adalah himpunan pasangan terurut (a,b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Dengan menggunakan notasi himpunan, ditulis:

$$A \times B = \left\{(a,b) \middle| a \in A \text{ dan } b \in B\right\}.$$

Contoh 1.2.1

Jika $A = \{a,b,c,d\}$ dan $B = \{1,2,3\}$ maka:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}.$$

Di sini $(a,1) \in A \times B$, tetapi $(1,a) \notin A \times B$.

Relasi

Definisi 1.2.2

Himpunan bagian tidak kosong ρ dari $A \times B$ disebut relasi dari A ke B. Jika $(x,y) \in \rho$, ditulis $x\rho y$ artinya "x berelasi dengan y".

Suatu relasi dari A ke A adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari $A \times A$, relasi ini biasa disebut relasi dalam A.

Contoh 1.2.2:

(a) Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1,2,3,4\}$.

Definisikan $\rho = \left\{(x,y) \middle| x < y\right\}$.

Jika ρ suatu relasi dari A ke B maka ρ dapat pula dituliskan oleh:

$\rho = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

(b) Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$.

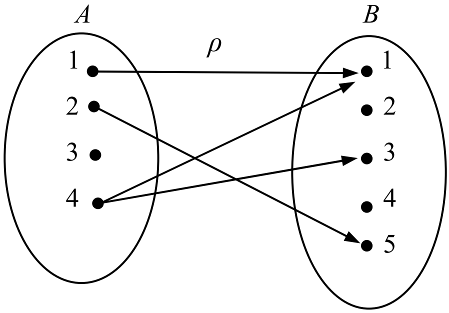
Definisikan $\rho = \left\{ (x,y) \middle| \dfrac{5x}{2y+1} \text{ adalah suatu bilangan bulat} \right\}$.

Jika ρ suatu relasi dari *A* ke *B* maka $\rho = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,2),(4,2)\}$.

(c) Misalkan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
Definisikan $\rho = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 36,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
Dalam kasus ini, ρ menyatakan suatu relasi dalam *A*.

Ada beberapa cara untuk mengilustrasikan/menggambarkan suatu relasi, yaitu sebagai berikut.

Cara I: Jika himpunan-himpunan *A* dan *B* mempunyai jumlah unsur sedikit atau hingga maka suatu relasi dari *A* ke *B* dapat diilustrasikan seperti Gambar 1.2 di bawah ini.



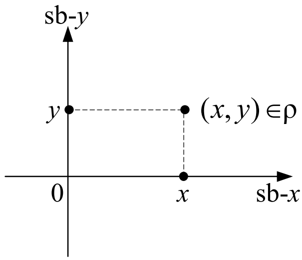
Gambar 1.2. Suatu Relasi dari *A* ke *B*

Cara II: Jika ρ suatu relasi dari *A* ke *B*, dengan *A* dan *B* masing-masing menyatakan himpunan bagian dari himpunan bilangan real, maka tiap unsur (x, y) di ρ dicirikan dengan suatu titik pada bidang datar (Gambar 1.3). Grafik dari ρ adalah himpunan semua titik (x, y) di ρ. Gambar 1.4 adalah sebuah contoh grafik relasi ρ yang merupakan daerah lingkaran yang berpusat di titik (0,0).

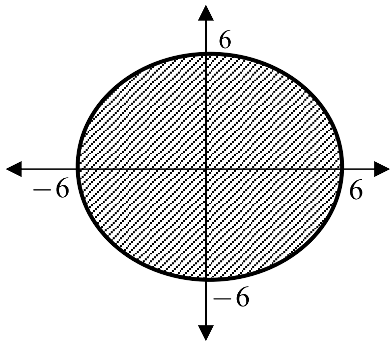
Domain suatu relasi ρ adalah himpunan semua unsur pertama dari pasangan terurut (x, y) yang terletak di ρ. Range suatu relasi ρ adalah himpunan semua unsur kedua dari pasangan terurut (x, y) di ρ. Secara formal:

Domain $\rho = \{x \mid \text{untuk suatu } y,\ (x, y) \in \rho\}$ dan
range $\rho = \{y \mid \text{untuk suatu } x,\ (x, y) \in \rho\}$.

Pada contoh 1.2.2(a), domain $\rho = \{1,2,3\}$ dan range $\rho = \{1,2,3,4\}$; pada contoh 1.2.2(b), domain $\rho = \{1,2,3,4\}$ dan range $\rho = \{1,2,3,4,5\}$; sedangkan dalam contoh 1.2.2(c), domain $\rho = \{x \mid -6 \le x \le 6\}$ dan range $\rho = \{y \mid -6 \le y \le 6\}$.



Gambar 1.3. Unsur suatu Relasi



Gambar 1.4. Grafik suatu Relasi

Fungsi

Definisi 1.2.3

Suatu relasi dari A ke B disebut fungsi jika dan hanya jika memenuhi kondisi:

(1) Domain $\rho = A$.

(2) Jika $(x, y) \in \rho$ dan $(x, z) \in \rho$, maka $y = z$.

Dengan ungkapan lain: Suatu fungsi dari A ke B adalah suatu relasi dari A ke B yang memasangkan/mengaitkan setiap unsur di A dengan tepat satu unsur di B.

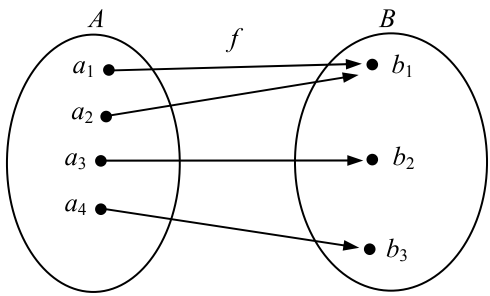
Huruf-huruf f, g, h, F, G, dan H biasa dipakai untuk menyatakan suatu fungsi.
Notasi $f : A \to B$ menyatakan f adalah suatu fungsi dari A ke B.

Contoh 1.2.3:

(a) Diberikan himpunan-himpunan $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Misalkan $A = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$.

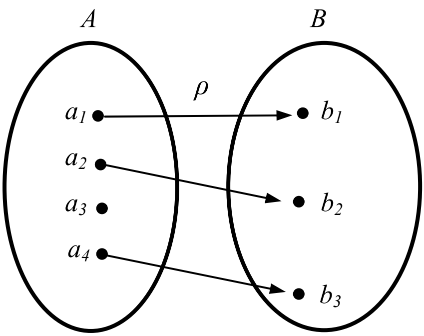
Relasi *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*, karena setiap unsur di *A* berelasi dengan tepat satu unsur di *B* (Gambar 1.5).



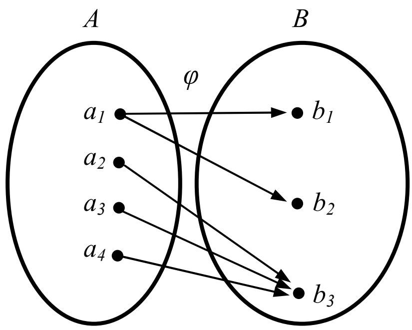
Gambar 1.5. Suatu Fungsi dari *A* ke *B*

(b) Dengan himpunan-himpunan yang sama seperti pada Contoh (a), relasi ρ yang ditunjukkan oleh Gambar 1.6 di bawah bukan suatu fungsi dari *A* ke *B* karena unsur a_3 di *A* tidak berelasi/dipasangkan dengan suatu unsur di *B* sehingga domain $\rho \neq A$.

(c) Sama halnya dengan (b), relasi φ dari Gambar 1.7 bukan fungsi dari *A* ke *B*, karena unsur a_1 di *A* berelasi dengan lebih satu unsur di *B*, $(a_1, b_1) \in \varphi$ dan $(a_1, b_2) \in \varphi$ tetapi $b_1 \neq b_2$.



Gambar 1.6. ρ bukan Fungsi



Gambar 1.7. φ bukan Fungsi

(d) Relasi $\rho = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 = 4\right\}$ bukan fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, sebab pertama: setiap unsur pada interval $(-2,2) \subset \mathbb{R}$ berelasi dengan dua unsur di $\mathbb{R}$, dan kedua: unsur $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x| > 2$ tidak berelasi dengan setiap *y* di $\mathbb{R}$.

(e) Misalkan $A = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ dan } -1 \le x \le 1\right\}$. Relasi *f* dari *A* ke $\mathbb{R}$ yang dinyatakan oleh $f = \left\{(x,y) \middle| y = \sqrt{1-x^2}\right\}$ adalah suatu fungsi dari *A* ke $\mathbb{R}$ (setiap unsur di $\mathbb{R}$ tidak perlu merupakan unsur di range *f*).

(f) Relasi $f = \left\{(x,y) \middle| y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right\}$ adalah fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Fungsi ini disebut fungsi polinom.

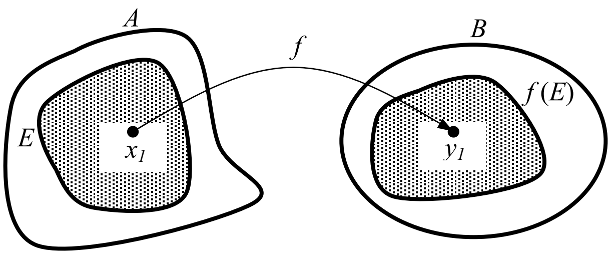
1.2.2 PETA LANGSUNG DAN PETA INVERS

Diberikan fungsi $f : A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$.
Notasi $b = f(a)$, menyatakan bahwa $(a,b) \in f$, *b* disebut nilai *f* di *a* atau *b* adalah peta/bayangan *a* oleh *f*.

Definisi 1.2.4

Misalkan $f : A \to B$ suatu fungsi dan $E \subseteq A$. Peta langsung (*direct image*) dari *E* oleh *f* adalah himpunan bagian $f(E)$ dari *B*, dan ditulis $f(E) = \left\{f(x) \middle| x \in E\right\}$.

Jadi, apabila diberikan $E \subseteq A$, titik $y_1 \in B$ terletak di $f(E)$ jika dan hanya jika terdapat $x_1 \in E$ sehingga $y_1 = f\left(x_1\right)$ (lihat Gambar 1.8).

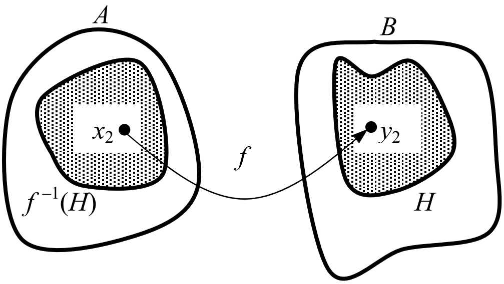


Gambar 1.8. Peta Langsung $f(E)$ dari *E* oleh *f*

Definisi 1.2.5

Misalkan $f : A \to B$ suatu fungsi dan $H \subseteq B$. Peta invers (*invers image*) H oleh f adalah himpunan bagian $f^{-1}(H)$ dari A, dan ditulis $f^{-1}(H) = \{x \in A \mid f(x) \in H\}$.

Jika diberikan $H \subseteq B$, titik $x_2 \in A$ terletak di $f^{-1}(H)$ dan hanya jika $y_2 = f(x_2) \in H$ (lihat Gambar 1.9).



Gambar 1.9. Peta Invers $f^{-1}(H)$ dari H oleh f

Contoh 1.2.4:

(a) Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3\}$.
Definisikan $f : A \to B$ oleh $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$, dan $f(4) = 3$.
Jika $E = \{1,2\}$, maka $f(E) = \{1\}$ dan jika $F = \{3,4\}$, maka $f(F) = \{1,3\}$. Jika $G = \{1,2\}$, maka $f^{-1}(G) = \{1,2,3\}$ dan jika $H = \{1\}$, maka $f^{-1}(H) = \{1,2,3\}$.
Jika $K = B$, maka $f^{-1}(K) = A$, dan jika $L = \{2\}$, maka $f^{-1}(L) = \varnothing$.

(b) Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suatu fungsi dengan aturan $f(x) = 2x - x^2$.
Jika $E = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, maka $f(E) = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$.
Jika $F = \{x \mid -1 < x < 1\}$, maka $f(F) = \{x \mid -3 < x \le 1\}$.
Jika $G = \{x \mid -8 \le x \le 1\}$, maka $f^{-1}(G) = \{x \mid -2 \le x \le 4\}$.

Jika $H = \{x | -8 < x \leq 0\}$, maka

$$f^{-1}(H) = \{x | -2 < x \leq 0\} \cup \{x | -2 \leq x \leq 4\} \cup \{x | -2 \leq x \leq 4\}.$$

(c) Misalkan E dan F masing-masing merupakan himpunan bagian dari A, sedangkan G dan H masing-masing himpunan bagian dari B.
Misalkan pula $f : A \to B$ adalah suatu fungsi.

Akan ditunjukkan bahwa:
(i) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$
(ii) $f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cup H)$
(iii) $E = f^{-1}\left(f(E)\right)$.

Bukti (i):

Misalkan $y \in f(E \cap F)$ sebarang, maka berdasarkan definisi peta langsung, terdapat $x \in E \cap F$ sehingga $(x, y) \in f$. Karena $x \in E \cap F$, maka $x \in E$ dan $x \in F$. Untuk $x \in E$ dan $(x, y) \in f$ mengakibatkan $y \in f(E)$, dan untuk $x \in F$ dan $(x, y) \in f$ mengakibatkan $y \in f(F)$ sehingga $y \in f(E) \cap f(F)$.

Dari uraian di atas disimpulkan: $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.

Bukti (ii):

Harus ditunjukkan: (1) $f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \subset f^{-1}(G \cup H)$

(2) $f^{-1}(G \cup H) \subset f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$.

Untuk (1):

Misalkan $x \in f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ sebarang, maka $x \in f^{-1}(G)$ atau $x \in f^{-1}(H)$. Berdasarkan definisi peta invers, terdapat $y \in G$ sehingga $(x, y) \in f$ atau terdapat $y \in H$ sehingga $(x, y) \in f$. Ini berarti terdapat $y \in G \cup H$ sehingga $(x, y) \in f$. Dengan demikian, $x \in f^{-1}(G \cup H)$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan

$$f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \subset f^{-1}(G \cup H).$$

Untuk (2):

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Bukti (iii):

Misalkan $x \in E$. Berdasarkan definisi fungsi, maka terdapat $y \in B$ sehingga $(x, y) \in f$. Selanjutnya, jika $x \in E$ dan $(x, y) \in f$, maka $y \in f(E)$ (definisi peta langsung), kemudian jika $y \in f(E)$ dan $(x, y) \in f$, maka $x \in f^{-1}\left(f(E)\right)$. Disimpulkan: $E = f^{-1}\left(f(E)\right)$.

Secara umum $E \neq f^{-1}\left(f(E)\right)$. Sebagai contoh, misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{1,2,3\}$. Definisikan $f : A \to B$ oleh: $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$, dan $f(4) = 3$. Jika $E = \{1,2\}$, maka $f(E) = \{1\}$; sedangkan $f^{-1}\left(f(E)\right) = f^{-1}\left(\{1\}\right) = \{1,2,3\} \neq E$.

1.2.3 MACAM-MACAM FUNGSI

Definisi 1.2.6

Suatu fungsi $f : A \to B$ disebut *injektif* atau *satu-satu* jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \neq x_2$ maka $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$.

Definisi di atas ekuivalen dengan pernyataan: suatu fungsi $f : A \to B$ *injektif* jika $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$.

Contoh 1.2.5

Misalkan $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq 1\right\}$ dan $f : A \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$f\left(x\right) = \frac{x}{x-1}.$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi *f* satu-satu.

Misalkan $x_1, x_2 \in A$ dan $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$.

Diperoleh: $\dfrac{x_1}{x_1 - 1} = \dfrac{x_2}{x_2 - 1}$.

Karena $x_1 \neq 1$ dan $x_2 \neq 1$, maka $x_1\left(x_2 - 1\right) = x_2\left(x_1 - 1\right)$ sehingga $x_1 = x_2$. Akibatnya, berdasarkan definisi di atas maka fungsi *f* adalah fungsi satu-satu.

Definisi 1.2.7

Fungsi $f: A \to B$ disebut *surjektif* atau *onto* dari A ke B jika dan hanya jika $f(A) = B$.

Definisi di atas ekuivalen dengan pernyataan: fungsi $f: A \to B$ *surjektif* jika dan hanya jika untuk setiap $y \in B$, terdapat $x \in A$ *sehingga* $f(x) = y$.

Definisi 1.2.8

Fungsi $f: A \to B$ disebut *bijektif* jika dan hanya jika f injektif dan surjektif.

Fungsi Invers

Jika f suatu fungsi dari A ke B (himpunan bagian khusus dari $A \times B$), maka himpunan pasangan terurut dalam $B \times A$ yang ditentukan dengan mengubah/menukar urutan pertama dan kedua dari pasangan terurut di f, secara umum bukan merupakan fungsi. Jika f injektif, maka penukaran seperti tersebut di atas merupakan suatu fungsi yang disebut dengan fungsi invers dan merupakan invers dari f.

Definisi 1.2.9

Misalkan $f: A \to B$ suatu fungsi injektif dengan domain A dan range $R(f)$ di B. Jika $g = \left\{(b,a) \in B \times A \middle| (b,a) \in f\right\}$ maka g suatu fungsi injektif dengan domain $D(g) = R(f)$ dan range $R(g) = A$. Fungsi g disebut *fungsi invers* dari f dan dinyatakan oleh f^{-1}.

Hubungan antara f^{-1} dan f adalah sebagai berikut:

$$x = f^{-1}(y) \text{ jika dan hanya jika } y = f(x).$$

Sebagai contoh, fungsi f dengan aturan $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ didefinisikan untuk $x \in A = \left\{x \middle| x \neq 1\right\}$, merupakan suatu fungsi injektif. Dalam hal ini, range f

atau $R(f)$ masih belum jelas, apakah $\mathbb{R}$ atau bagian dari $\mathbb{R}$. Selanjutnya, dari persamaan $y = \dfrac{x}{1-x}$, tuliskan x dinyatakan dalam y, diperoleh $x = \dfrac{y}{1+y}$. Dari bentuk ini, diperoleh range $R(f) = \{y \mid y \neq -1\}$ dan fungsi invers dari f mempunyai domain $\{y \mid y \neq -1\}$ dan fungsinya ditulis $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+y}$ atau dapat juga ditulis $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

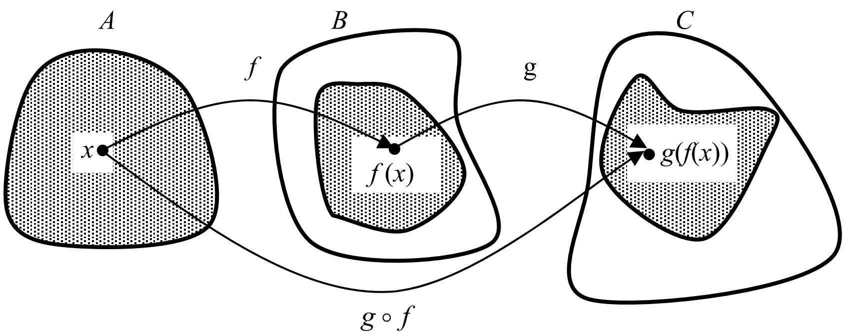
Penting untuk digarisbawahi bahwa jika fungsi f adalah injektif, maka fungsi invers dari f juga injektif. Selanjutnya, fungsi invers dari f^{-1} adalah f atau $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Fungsi Komposisi

Untuk mendapatkan komposisi dari dua fungsi f dan g, diasumsikan bahwa range f atau $R(f)$ termuat dalam domain g atau $D(g)$.

Definisi 1.2.10

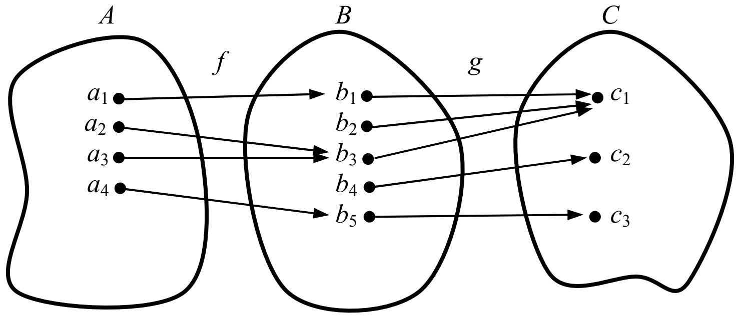
Misalkan diberikan fungsi-fungsi $f: A \to B$ dan $g: B \to C$. Fungsi komposisi $g \circ f$ adalah suatu fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ untuk $x \in A$ (lihat Gambar 1.10).



Gambar 1.10

Contoh 1.2.6:

(a) Misalkan fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ ditunjukkan seperti pada Gambar 1.11 di bawah ini.



Gambar 1.11

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1) = c_1$$
$$(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_3) = c_1$$
$$(g \circ f)(a_3) = g(f(a_3)) = g(b_3) = c_1$$
$$(g \circ f)(a_4) = g(f(a_4)) = g(b_5) = c_3$$
$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(b_1, b_3, b_5) = \{c_1, c_2\}$$
$$(g \circ f)(\{a_1, a_2\}) = g(\{b_1, b_3\}) = \{c_1\}$$

(b) Misalkan *f* dan *g* dua fungsi dimana nilai-nilainya untuk $x \in \mathbb{R}$ diberikan oleh $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x^2 + 1$.

Karena $D(g) = \mathbb{R}$ dan $R(f) \subseteq \mathbb{R}$, maka $D(g \circ f)$ juga $\mathbb{R}$, dan fungsi komposisi $g \circ f$ diberikan oleh: $(g \circ f)(x) = 3(2x)^2 + 1 = 12x^2 + 1$.

Di sisi lain, domain fungsi komposisi $f \circ g$ juga $\mathbb{R}$, tetapi dalam kasus ini didapat $(f \circ g)(x) = 2(3x^2 + 1) = 6x^2 + 2$. Jadi $g \circ f \neq f \circ g$.

(c) Misalkan fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$. Jika $D \subseteq C$, tunjukkan bahwa: $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$.

Bukti: (1) Akan ditunjukkan $\left(g \circ f\right)^{-1}(D) \subset f^{-1}\left(g^{-1}(D)\right)$.

Misalkan $x \in \left(g \circ f\right)^{-1}(D)$, maka $\exists z \in D$, $\ni (x,z) \in \left(g \circ f\right)$. Kemudian berdasarkan definisi fungsi komposisi, maka $\exists y \in B$, $\ni (x,y) \in f$ dan $(y,z) \in g$. Jika $z \in D$ dan $(y,z) \in g$, maka berdasarkan peta invers $y \in g^{-1}(D)$. Dengan cara yang serupa, dari $y \in g^{-1}(D)$ dan $(x,y) \in f$, maka $x \in f^{-1}\left(g^{-1}(D)\right)$. Disimpulkan: $\left(g \circ f\right)^{-1}(D) \subset f^{-1}\left(g^{-1}(D)\right)$.

Bukti lainnya, $f^{-1}\left(g^{-1}(D)\right) \subset \left(g \circ f\right)^{-1}(D)$, diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 1.2.1

Jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ masing-masing injektif, maka komposisi $g \circ f: A \to C$ juga injektif.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buatlah tabulasi unsur-unsur dari relasi $\Re$ di bawah ini yang merupakan relasi dari *A* ke *B*.
   a) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, dan $\Re = \left\{(x,y) \middle| y = x^2 - 3x + 3\right\}$.
   b) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, dan
   $\Re = \left\{(x,y) \middle| 5x + 2y \text{ adalah bilangan prima}, x \in A, y \in B\right\}$.
2) Apakah relasi-relasi dalam soal Nomor 1) merupakan fungsi dari *A* ke *B*? Berikan penjelasan secukupnya atas jawaban yang diberikan!
3) Tiap persamaan di bawah ini mendefinisikan suatu relasi pada bilangan real. Yang mana di antara relasi tersebut yang merupakan suatu fungsi dari sumbu-*x* ke sumbu-*y*?
   a) $y^2 + x = 0$
   b) $y + x^2 = 0$

c) $|x| + y = 0$

d) $x + |y| = 0$.

Dalam soal Nomor 4 s.d. 8, dimisalkan $f : S \to T$ adalah suatu fungsi, misalkan *A* dan *B* himpunan bagian dari *S*, dan *D* dan *E* himpunan bagian dari *T*.

Buktikan pernyataan-pernyataan berikut:

4) Jika $A \subset B$, maka $f(A) \subset f(B)$.
5) Jika $D \subset E$, maka $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$.
6) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
7) $f^{-1}(D \cup E) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$.
8) $f\left(f^{-1}(D)\right) \subset D$ dan berikan suatu contoh yang menunjukkan $f\left(f^{-1}(D)\right) \neq D$.
9) Misalkan *A* himpunan bilangan real negatif, B, C menyatakan himpunan bilangan real positif. Didefinisikan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ oleh $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$. Tentukan formula untuk $g \circ f$ dan range dari $g \circ f$ atau $R\left(g \circ f\right)$.
10) Misalkan f didefinisikan oleh $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa *f* suatu pemetaan bijektif dari $\mathbb{R}$ ke $\{y | -1 < y < 1\}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

2) Ya.
3) b) dan c).
4) Misalkan $x \in A$, maka $f(x) \in f(A)$. Karena $x \in B$ juga, maka $f(x) \in f(B)$. Jadi $f(A) \subseteq f(B)$.
6) Karena $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$, maka berdasarkan soal 4), $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Sebaliknya, jika $y \in f(A \cup B)$, maka ada unsur $x \in A \cup B$ sehingga $y = f(x)$. Dari sini, $x \in A$ atau $x \in B$

sehingga salah satunya $y = f(x) \in f(A)$ atau $y \in f(B)$. Karena itu, kita simpulkan $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

RANGKUMAN

Sampai di sini saudara telah mengingat kembali pengertian relasi, fungsi, jenis fungsi, komposisi fungsi, dan fungsi invers. Selain itu, fungsi antar himpunan juga dibahas, bahkan sifat-sifat fungsi antar himpunan juga telah dikemukakan. Dengan bekal ini, diharapkan topik-topik berikutnya yang memanfaatkan pengertian fungsi dan sifat-sifatnya dapat teratasi dengan baik.

TES FORMATIF 2

Jawablah dengan singkat dan jelas!

1) Misalkan f fungsi dengan domain A dan range di B dan G dan H subhimpunan dari B. Buktikan $f^{-1}(D \cap E) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E)$!
2) Pandang subhimpunan dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\}$. Gambarkan D dalam koordinat kartesius. Simpulkan, apakah D merupakan fungsi?
3) Misalkan $f(x) = x^2 + 1$, dan $g(x) = \sqrt{x-1}$. Tentukan daerah hasil $g \circ f$ pada $[-2, 2]$ dan rumus $g \circ f$!
4) Misalkan X himpunan, $P(X)$ kelas dari semua subhimpunan dari X. Misalkan $f : P(X) \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ sehingga $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) + f(A_2)$ untuk sebarang subhimpunan A_1 dan A_2 dari X yang saling lepas. Buktikan jika $A \supset B$, maka $f(A) \geq f(B)$!
5) Misalkan S himpunan dan $A \subset S$. Definisikan $X_A : S \to \{0,1\}$, dengan $X_A(x) = 1$ jika $x \in A$ dan $X_A(x) = 0$ jika $x \notin A$. Selanjutnya, X_A disebut fungsi karakteristik dari A. Jika A, B subhimpunan dari S, buktikan bahwa $X_{A \cup B}(x) = X_A(x) X_B(x)$ untuk setiap $x \in S$!

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Induksi Matematik, Himpunan Berhingga, dan Himpunan Tak Berhingga

1.3.1 INDUKSI MATEMATIK

Induksi Matematik adalah salah satu metode pembuktian dalam matematika yang sangat penting, digunakan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan yang berkaitan dengan bilangan asli.

Dalam uraian di bawah ini, akan diperlihatkan Prinsip Induksi Matematik dan beberapa contoh pemakaian untuk menggambarkan proses pembuktiannya.

Sifat Terurut Sempurna dari Himpunan Bilangan Asli $\mathbb{N}$

Setiap himpunan bagian yang tak kosong dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ mempunyai unsur terkecil.

Ungkapan lain dari pernyataan di atas adalah sebagai berikut: Jika S himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ dan jika $S \neq \varnothing$, maka terdapat suatu unsur $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk semua $k \in S$.

Prinsip Induksi Matematik

Misalkan S himpunan bagian dari $\mathbb{N}$. Jika S mempunyai sifat:
(1) $1 \in S$;
(2) jika $k \in S$, maka $k+1 \in S$;
maka $S = \mathbb{N}$.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan cara tidak langsung. Andaikan $S \neq \mathbb{N}$. Berarti himpunan $\mathbb{N} - S$ dalah himpunan yang tidak kosong. Berdasarkan sifat terurut sempurna dari $\mathbb{N}$, maka $\mathbb{N} - S$ mempunyai unsur terkecil. Misalkan unsur terkecil dari $\mathbb{N} - S$ adalah *m*. Menurut hipotesis $1 \in S$ sehingga $m \neq 1$, oleh karena itu $m > 1$. Karena $m > 1$, dan

$m \in \mathbb{N}$ ($S \subseteq \mathbb{N}$), maka $m-1$ juga merupakan bilangan asli dan $m-1 < m$. Selanjutnya, m adalah unsur terkecil dari $\mathbb{N} - S$ sehingga $m \notin S$. Dalam hal ini haruslah $m-1 \in S$. Jika digunakan hipotesis yang kedua, dengan $k = m-1$ maka $k+1 = (m-1)+1 = m$ terletak di S. Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $m \notin S$. Dengan demikian berarti pengandaian yang diambil adalah salah, yaitu $S \neq \mathbb{N}$, yang benar adalah $S = \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematik sering dinyatakan juga dengan pengungkapan yang berbeda dengan yang ditulis seperti di atas. Misalkan $P(n)$ suatu pernyataan (*statement*) tentang bilangan asli $n \in \mathbb{N}$. $P(n)$ mungkin benar untuk suatu n dan mungkin salah untuk yang lainnya. Sebagai contoh, jika $P(n): n^2 = n$ maka $P(1)$ benar, sedangkan $P(n)$ salah untuk $n \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Dalam kaitan ini, Prinsip Induksi Matematik dapat diformulasikan sebagai berikut:

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan tentang bilangan asli n dan:

(1) $P(1)$ benar;

(2) jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar;

maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 1.3.1:

(a) Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, jumlah dari n bilangan asli pertama diberikan oleh

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Bukti:

Misalkan $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \right\}$.

(i) Untuk $n = 1$, maka $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1+1)$ sehingga $1 \in S$. Jadi kondisi (1) dalam prinsip Induksi Matematik dipenuhi.

(ii) Misalkan $k \in S$, artinya

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Jika tiap ruas dalam persamaan di atas ditambah dengan $k+1$, maka:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\ &= \frac{1}{2}(k+1)+(k+2)\end{aligned}$$

Ini menyatakan bahwa $(k+1)\in S$.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan $S=\mathbb{N}$.

(b) Buktikan bahwa untuk setiap $n\in\mathbb{N}$, jumlah kuadrat dari n bilangan asli pertama diberikan oleh

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Misalkan $S=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$.

(i) Untuk $n=1$, maka $1^2=\frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)$ sehingga $1\in S$.

Jadi kondisi (1) dalam prinsip Induksi Matematik dipenuhi.

(ii) Misalkan $k\in S$, artinya

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Jika tiap ruas dalam persamaan di atas ditambah dengan $(k+1)^2$, maka:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

Persamaan terakhir menyatakan bahwa $(k+1)\in S$.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $S=\mathbb{N}$.

(c) Diberikan bilangan-bilangan $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $a-b$ adalah faktor dari $a^n - b^n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: "$(a-b)$ adalah faktor dari $a^n - b^n$".

(i) $P(1)$ benar, sebab $(a-b)$ adalah faktor dari $(a-b)$.

(ii) Misalkan $P(k)$ benar, artinya $(a-b)$ adalah faktor dari $a^k - b^k$,

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \\ &= a\left(a^k - b^k\right) + b^k\left(a-b\right) \end{aligned}$$

Karena $a-b$ faktor dari $a^k - b^k$, maka $a-b$ juga faktor dari $a\left(a^k - b^k\right) + b^k\left(a-b\right)$, sehingga $a-b$ faktor dari $a^{k+1} - b^{k+1}$.

Hal ini menyatakan bahwa $P(k+1)$ benar.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, atau dengan kata lain $a-b$ adalah faktor dari $a^n - b^n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ketidaksamaan $2^n \leq (n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dapat dibuktikan dengan menggunakan Induksi Matematik.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: "$2^n \leq (n+1)!$"

(i) $P(1)$ benar, sebab $2 \leq (1+1)!$

(ii) Misalkan $P(k)$ benar, artinya $2^k \leq (k+1)!$

Berdasarkan fakta bahwa $2 \leq k+2$, maka

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2(k+1)! \leq (k+2)(k+1)! = (k+2)!$$

Ini menyatakan bahwa $P(k+1)$ benar.

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, atau dengan kata lain, $2^n \leq (n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3.2 HIMPUNAN BERHINGGA DAN HIMPUNAN TAK BERHINGGA

Ketika seseorang menghitung banyaknya unsur suatu himpunan sampai habis dengan mengatakan, “satu, dua, tiga, … “, dan seterusnya sampai berhenti maka secara matematik, proses melakukan perhitungan seperti di atas, dapat dipandang bahwa orang itu sedang membuat suatu pemetaan bijektif antara himpunan itu dengan suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Selanjutnya, himpunan seperti itu disebut himpunan berhingga. Jika perhitungan tadi, dilakukan tanpa berakhir, secara matematik, orang tersebut membuat suatu pemetaan bijektif antara himpunan itu dengan himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$. Selanjutnya, himpunan seperti itu disebut himpunan tak berhingga.

Di bawah ini, akan didefinisikan secara lebih tepat dan formal mengenai istilah himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga. Selanjutnya, dari pendefinisian ini didapat suatu hasil yang sangat penting, yang merupakan beberapa teorema yang pembuktiannya cukup sulit

Definisi 1.3.1:

(a) Misalkan $n \in \mathbb{N}$. Himpunan *S* mempunyai *n* unsur jika dan hanya jika terdapat pemetaan *bijektif* dari $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ ke himpunan *S*.

(b) Himpunan *S berhingga* jika dan hanya jika salah satu kondisi berikut dipenuhi: himpunan *S* himpunan kosong atau mempunyai *n* unsur untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.

(c) Suatu himpunan *S tak berhingga* jika dan hanya jika himpunan *S* bukan merupakan himpunan berhingga.

Karena invers dari pemetaan bijektif adalah pemetaan bijektif, maka dapat dikatakan dengan ungkapan lain bahwa himpunan *S* mempunyai *n* unsur jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari himpunan *S* ke himpunan $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demikian pula, karena komposisi dari dua pemetaan bijektif adalah pemetaan bijektif, maka suatu himpunan S_1 mempunyai *n* unsur jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan bijektif dari S_1 ke himpunan S_2 yang mempunyai *n* unsur. Selanjutnya, suatu himpunan T_1 berhingga jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari T_1 ke himpunan lain T_2 yang berhingga.

Dari pendefinisian di atas, diperoleh beberapa hasil yang merupakan sifat dasar dari himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga. Hasil itu diungkapkan dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 1.3.1 (Ketunggalan)

Jika *S* himpunan berhingga, maka banyaknya unsur dalam *S* merupakan bilangan unik (tunggal) di $\mathbb{N}$.

Bukti: Sebagai bahan diskusi.

Teorema 1.3.2

Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan himpunan tak berhingga.

Bukti: Sebagai bahan diskusi.

Teorema 1.3.3

Misalkan *A*, *B* masing-masing himpunan dengan *m* dan *n* unsur.

(a) Jika $A \cap B = \varnothing$, maka $A \cup B$ memiliki $(m+n)$ unsur.

(b) Jika $C \subseteq A$ memiliki satu unsur, maka $A \setminus C$ memiliki $(m-1)$ unsur.

(c) Jika *D* himpunan tak berhinggga, maka $D \setminus B$ himpunan tak berhingga.

Bukti:

(a) Misalkan *f* suatu pemetaan bijektif dari N_m ke *A*, dan *g* suatu pemetaan bijektif dari N_n ke *B*.

Definisikan pemetaan *h* pada N_{m+n} oleh aturan:

$$h_i = \begin{cases} f(i) & \text{jika } i = 1, 2, \ldots, m \\ g(i-m) & \text{jika } i = m+1, \ldots, m+n \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan *h* pemetaan bijektif dari N_{m+n} ke $A \cup B$.

(Silakan dilanjutkan sendiri bukti lengkapnya).

Bukti (b) dan (c) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan).

Teorema 1.3.4

Misalkan S dan T himpunan, dan $T \subseteq S$.

Jika S himpunan berhingga, maka T juga himpunan berhingga.

Bukti:

Jika $T = \varnothing$, maka T himpunan berhingga (definisi 1.3.1(b)).

Sekarang, misalkan $T \neq \varnothing$. Gunakan induksi matematik sebagai berikut:

(i) Jika S mempunyai satu unsur, maka himpunan bagian tak kosong T dari S adalah S sendiri, sehingga T merupakan himpunan berhingga.

(ii) Misalkan setiap himpunan bagian tak kosong dari suatu himpunan dengan k unsur adalah himpunan berhingga.

Selanjutnya, misalkan S suatu himpunan yang mempunyai $(k+1)$ unsur. Ini berarti terdapat suatu pemetaan bijektif f dari N_{k+1} ke S.

Jika $f(k+1) \notin T$, maka T dapat dinyatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan $S_1 = S \setminus \{f(k+1)\}$ yang mempunyai k unsur (teorema 1.3.3(b)). Berdasarkan hipotesis (ii), maka T adalah himpunan berhingga.

Jika $f(k+1) \in T$, maka $T_1 = T \setminus \{f(k+1)\}$ adalah himpunan bagian dari S_1. Karena S_1 mempunyai k unsur, maka menurut hipotesis (ii), T_1 merupakan himpunan berhingga. Ini mengakibatkan $T = T_1 \cup \{f(k+1)\}$ juga himpunan berhingga.

Catatan: Teorema 1.3.4 dapat pula dinyatakan dengan kontrapositifnya, yaitu jika $T \subseteq S$ dan T himpunan tak berhingga, maka S merupakan himpunan tak berhingga.

Himpunan Terhitung

Di bawah ini dijelaskan mengenai jenis-jenis dari himpunan tak berhingga.

Definisi 1.3.2:

(a) Himpunan S terbilang (terhitung dan tak berhingga) jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari $\mathbb{N}$ ke S.

(b) Himpunan S terhitung jika dan hanya jika salah satu dari yang berikut dipenuhi: himpunan S berhingga atau himpunan S terbilang.

(c) Himpunan S tak terhitung jika dan hanya jika S bukan merupakan himpunan terhitung.

Berdasarkan sifat pemetaan bijektif, dapat dikatakan S terbilang jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari S ke $\mathbb{N}$, atau dapat pula diungkapkan bahwa suatu himpunan S_1 disebut terbilang jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari S_1 ke suatu himpunan S_2 yang terbilang. Selanjutnya, himpunan T_1 disebut terhitung jika dan hanya jika terdapat pemetan bijektif dari T_1 ke suatu himpunan T_2 yang terhitung.

Contoh 1.3.2:

(a) Himpunan bilangan asli genap $G = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ adalah terbilang, karena pemetaan $f : \mathbb{N} \to G$ yang didefinisikan oleh $f(n) = 2n$ adalah pemetaan bijektif (coba periksa).

Dengan cara yang serupa, himpunan bilangan asli ganjil $J = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ adalah terbilang.

(b) Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah terbilang.

Untuk menunjukkannya, dapat dibuat suatu pemetaan bijektif dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{Z}$, dengan cara sebagai berikut: 1 dipetakan ke 0, kemudian himpunan bilangan asli genap ke himpunan bilangan bulat positif, dan himpunan bilangan asli ganjil ke himpunan bilangan bulat negatif. Pemetaan ini dapat ditunjukkan secara enumerasi (satu persatu) sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \end{array}$$

Jadi, himpunan semua bilangan bulat bisa dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

(c) Gabungan dua himpunan terbilang adalah himpunan terbilang.
Jika $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, maka dapat ditunjukkan secara enumerasi unsur-unsur dari $A \cup B$ sebagai berikut:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}.$$

Teorema 1.3.5

Himpunan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ adalah terbilang.

Bukti: Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 1.3.6

Misalkan *S* dan *T* masing-masing himpunan dan $T \subseteq S$.
Jika *S* himpunan terhitung, maka *T* juga himpunan terhitung.

Pernyataan di atas ekuivalen dengan pernyataan: jika *T* himpunan tak terhitung, maka *S* juga merupakan himpunan tak terhitung.

Bukti: Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 1.3.7

Pernyataan berikut ekuivalen:
(a) *S* himpunan terhitung
(b) Terdapat suatu pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ onto S.
(c) Terdapat suatu pemetaan injektif dari *S* into $\mathbb{N}$.

Bukti:

Akan ditunjukkan kebenaran dari implikasi-implikasi: $(\text{a}) \Rightarrow (\text{b})$, $(\text{b}) \Rightarrow (\text{c})$, dan $(\text{c}) \Rightarrow (\text{a})$.

(i) Untuk implikasi (a) $\Rightarrow$ (b).
Jika *S* himpunan berhingga, maka terdapat pemetaan bijektif *h* dari N_n ke *S* (untuk suatu $n \in \mathbb{N}$). Selanjutnya, definisikan pemetaan *H* pada $\mathbb{N}$ sebagai berikut:

$$H(i) = \begin{cases} h(i), \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \\ h(n), \text{ untuk } i > n \end{cases}$$

Dari pendefinisian *H* maka *H* adalah pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ ke *S*.

(ii) Untuk implikasi $(\text{b}) \Rightarrow (\text{c})$.

Misalkan H suatu pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ ke S. Definisikan pemetaan H_1 dari S ke $\mathbb{N}$ dengan aturan: untuk setiap $s \in S$, $H_1(s)$ adalah unsur terkecil dalam himpunan $H^{-1}(s) = \{n \in \mathbb{N} \mid H(n) = s\}$. Jika $s, t \in S$ dan $H_1(s) = H_1(t) = n_{st}$, maka $s = H(n_{st}) = t$. Jadi, H_1 adalah pemetaan injektif dari S ke (into) $\mathbb{N}$.

(iii) Untuk implikasi $(\text{c}) \Rightarrow (\text{a})$.

Jika H_1 suatu pemetaan injektif dari S ke (into) $\mathbb{N}$, maka H_1 merupakan pemetaan bijektif dari S ke $H_1(S) \subseteq \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema 1.3.6, maka $H_1(S)$ terhitung sehingga himpunan S terhitung.

Teorema 1.3.8

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terbilang.

Bukti:

Ide untuk pembuktian teorema di atas, memanfaatkan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dapat ditulis: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$; dengan $\mathbb{Q}^+$ himpunan bilangan rasional positif dan $\mathbb{Q}^-$ himpunan bilangan rasional negatif. Himpunan bilangan rasional positif termuat dalam himpunan F yang ditulis secara enumerasi:

$$F = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \ldots\right\},$$

atau dengan "pemetaan diagonal" sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\[6pt]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\[6pt]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\[6pt]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Bukti secara formal adalah sebagai berikut:

Karena $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ adalah himpunan terhitung (teorema 1.3.5), maka terdapat suatu pemetaan surjektif f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (teorema 1.3.7). Jika $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^{+}$ pemetaan yang mengaitkan pasangan terurut (m,n) dengan bilangan rasional $\frac{m}{n}$, maka g adalah pemetaan surjektif.

Oleh karena itu, komposisi $g\circ f$ adalah pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{Q}^{+}$. Berdasarkan teorema 1.3.7, maka $\mathbb{Q}^{+}$ adalah himpunan terhitung.

Dengan cara yang serupa, himpunan $\mathbb{Q}^{-}$ juga terhitung, sehingga himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^{-}$ adalah himpunan terhitung. Karena $\mathbb{Q}$ memuat $\mathbb{N}$, maka $\mathbb{Q}$ adalah himpunan terbilang.

Teorema 1.3.9

Jika A_m himpunan terhitung untuk setiap $m\in\mathbb{N}$, maka $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ himpunan terhitung.

Bukti:

Untuk setiap $m\in\mathbb{N}$, misalkan φ_m adalah pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ ke A_m.

Definisikan $\psi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A$ dengan aturan sebagai berikut:

$$\psi(m,n)=\varphi_m(n).$$

Selanjutnya, harus ditunjukkan bahwa ψ merupakan pemetaan surjektif. Untuk itu, misalkan $a\in A$ sebarang maka ada m terkecil, $m\in\mathbb{N}$ sehingga $a\in A_m$. Selanjutnya, karena φ_m surjektif, maka terdapat $n\in\mathbb{N}$ sehingga $a=\varphi_m(n)$. Karena itu, $a=\psi(m,n)$ sehingga disimpulkan ψ pemetaan surjektif.

Karena $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ terhitung, berdasarkan teorema 1.3.7, maka terdapat pemetaan surjektif $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sehingga $\psi\circ f$ pemetaan surjektif dari $\mathbb{N}$ ke A. Akhirnya, gunakan Teorema 1.3.7 sehingga diperoleh bahwa A terhitung.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan bahwa: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
2) Buktikan bahwa: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
3) Buktikan bahwa:
$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$
4) Buktikan bahwa: n^3+5n habis dibagi oleh 6, $\forall n\in\mathbb{N}$.
5) Buktikan bahwa: $5^{2n}-1$ habis dibagi oleh 8 , $\forall n\in\mathbb{N}$.
6) Buktikan bahwa: 5^n-4n-1 habis dibagi oleh 16 , $\forall n\in\mathbb{N}$.
7) Buktikan bahwa: $n<2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
8) Buatlah konjektur dari formula: $1+3+\cdots+(2n-1)$, dan periksa kebenarannya dengan menggunakan Induksi Matematik.
9) Buktikan bahwa: $2^n<n!$ untuk semua $n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}$.
10) Buktikan bahwa: $2n-3<2^{n-2}$, untuk semua $n\geq 5,\ n\in\mathbb{N}$.
11) Buktikan bahwa himpunan tak kosong T_1 adalah berhingga jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari T_1 ke suatu himpunan berhingga T_2.
12) Misalkan $S=\{1,2\}$ dan $T=\{a,b,c\}$.

    a) Tentukan banyaknya pemetaan injektif yang berbeda dari *S* ke (into) *T*.
    b) Tentukan banyaknya pemetaan surjektif yang berbeda dari *T* ke *S*.
13) Berikan suatu contoh dari koleksi terhitung dari himpunan-himpunan berhingga dimana gabungannya tidak berhingga.
14) Susun suatu pembuktian lengkap bahwa jika *S* dan *T* masing-masing himpunan terbilang, maka $S\cup T$ merupakan himpunan terbilang.

15) Gunakan Induksi Matematik, untuk membuktikan jika himpunan *S* mempunyai *n* unsur, maka $P(S)$ (koleksi dari semua himpunan bagian dari *S*) mempunyai 2^n unsur.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Misalkan $P(n): \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Untuk $n=1$, $P(1)$ benar, karena $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$.

   Misalkan $P(k)$ benar, akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar.

$$P(k+1): \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

4) Misalkan $P(n): n^3 + 5n$ habis dibagi oleh 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Untuk $n=1$, maka $1^3 + 5\cdot 1$ habis dibagi 6.

   Misalkan P(k) benar maka:

$$P(k+1): (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$$

$$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6$$

$$= \left(k^3 + 5k\right) + 6\left(\frac{k^2+k}{2} + 1\right)$$

   habis dibagi 6, karena $\left(k^3 + 5k\right)$ habis dibagi 6 dan $\frac{k^2+k}{2}$ bukan pecahan untuk sebarang *k* bilangan asli.

RANGKUMAN

Sampai di sini saudara telah mempelajari Prinsip Induksi Matematik dan konsep himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga. Prinsip induksi matematik merupakan suatu alat yang digunakan dalam matematika untuk membuktikan suatu sifat yang keberlakuannya dapat diperumum untuk semua bilangan asli. Biasanya, digunakan untuk membuktikan sesuatu yang melibatkan indeks.

Konsep himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga dapat diterapkan pada himpunan-himpunan bilangan yang sudah kita kenal selama ini. Pengenalan dan pembuktian konsep ini tidak bias lepas dari konsep fungsi.

TES FORMATIF 3

Jawablah dengan singkat dan jelas!

1) Gunakan induksi matematik untuk membuktikan

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

2) Misalkan $S=\{1,2,3\}$ dan $T=\{a,b,c\}$.

   a) Tentukan banyaknya pemetaan injektif yang berbeda dari *S* ke (into) *T*.
   b) Tentukan banyaknya pemetaan surjektif yang berbeda dari *T* ke *S*.

3) Perhatikan pola yang terbentuk dari bilangan berikut:

$$1+\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2-\frac{1}{8}$$

   Buat formula umumnya, lalu buktikan dengan induksi.

4) Perhatikan pola yang terbentuk dari bilangan berikut:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

Buat formula umumnya, lalu buktikan dengan induksi

5) Buktikan formula berikut:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ n\geq 2\,.$$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 4. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 4

Logika dan Pembuktian Matematika

1.4.1 LOGIKA MATEMATIKA

Pada bagian ini akan dikemukakan hal-hal penting berkaitan dengan pembuktian suatu sifat yang muncul dalam mempelajari matematika. Pembuktian sebuah teorema, lemma maupun akibat, memerlukan pemahaman materi sebelumnya, baik itu definisi maupun teorema lainnya yang masih berkaitan, dan teknik pembuktian yang cocok dan mudah untuk digunakan dalam pembuktian. Selain itu, agar pembuktian dapat diakui kebenarannya maka dalam tiap langkah pembuktian diperlukan logika argumentasi.

Matematika dibangun dan disusun berdasarkan pembuktian-pembuktian yang bersifat koheren (saling terkait) dan konsisten. Kebenaran dalam matematika atau proses pembuktian dalam matematika umumnya dicapai melalui penalaran yang berdasarkan kepada logika deduktif dan analitis. Meskipun beberapa hal, misalnya dalam membuat konjektur yang diperoleh melalui langkah-langkah induktif, tetapi pada akhirnya harus dibuktikan secara deduktif.

Pengalaman dan banyak latihan sangat menentukan keberhasilan seseorang dalam mempelajari Analisis Real. Hal ini dikarenakan analisis real syarat dengan konsep-konsep, mulai dari definisi sampai ke akibat, yang tentu saja dalam perjalanannya banyak membutuhkan pembuktian-pembuktian yang formal. Bukti formal dari suatu pernyataan matematik yang banyak melibatkan prinsip-prinsip logika, umumnya dipandang sangat sulit, bila pengalaman atau latihan dirasakan belum cukup.

Uraian di bawah ini, diharapkan dapat membantu pembaca (khususnya yang masih pemula dalam belajar Analisis Real) untuk memperoleh atau menambah pengalaman dalam mempelajari dan menggunakan berbagai jenis dan teknik pembuktian.

1. Pernyataan Matematik

Pembuktian matematik yang argumentatif selalu didasarkan kepada pernyataan-pernyataan (*statements*) yang merupakan kalimat deklaratif atau rangkaian simbol-simbol yang bermakna yang dapat dinilai benar atau salahnya. Di dalam matematika, suatu pernyataan biasanya dituliskan dengan huruf kecil, misalnya: $p, q, r, \ldots$.

Contoh: 1. p: $6+3=9$

2. q: $2 \times 2 = 6$

3. r : Setiap bilangan ganjil tidak habis dibagi dua.

4. s : Jika $x^2 = 4$, maka $x = 2$.

Setiap kalimat pada contoh di atas adalah pernyataan dan mempunyai nilai kebenaran B (benar) atau S (salah). Pernyataan p dan r mempunyai nilai kebenaran B, sedangkan pernyataan q dan s mempunyai nilai kebenaran S.

Dua buah pernyataan p dan q disebut ekuivalen logis apabila pernyataan p benar jika pernyataan q benar (pernyataan p salah jika pernyataan q salah). Notasi pernyataan p ekuivalen logis dengan pernyataan q biasa ditulis $p \equiv q$.

Beberapa pernyataan dapat dirangkaikan menjadi suatu pernyataan baru dengan cara merangkaikan kata sambung "atau", "dan", atau dengan cara mengingkar (membuat negasi) dari pernyataan yang diberikan. Pernyataan yang dibentuk dengan cara demikian disebut pernyataan majemuk.

2. Ingkaran atau Negasi

Jika p suatu pernyataan, maka pernyataan baru yang menyangkal p dapat diperoleh dengan menambahkan kata "tidak benar" sebelum pernyataan p, atau menyisipkan istilah "tidak" atau "bukan". Pernyataan baru ini disebut ingkaran atau negasi dari pernyataan p dan dinyatakan oleh $\sim p$ (atau not p). Pernyataan $\sim p$ benar jika p salah, dan $\sim p$ salah jika p benar. Ini berarti bahwa setiap pernyataan p ekuivalen dengan $\sim(\sim p)$ atau $p \equiv \sim(\sim p)$. Ini disebut prinsip negasi ganda.

3. Konjungsi

Jika p dan q masing-masing adalah pernyataan, konjungsi dari pernyataan p dan q dinyatakan oleh "p dan q" dan dilambangkan oleh $p \wedge q$.

Pernyataan $p \wedge q$ benar jika p benar dan q benar, sedangkan dalam hal lainnya $p \wedge q$ salah. Dengan mudah dapat dipahami bahwa

$$p \wedge q \equiv q \wedge p .$$

4. Disjungsi

Disjungsi dari p dan q ditulis "p atau q" dan biasa dilambangkan oleh $p \vee q$. Pernyataan $p \vee q$ benar jika paling sedikit satu pernyataan dari p dan q benar, dan $p \vee q$ salah jika keduanya p dan q salah.

Istilah "atau" mempunyai makna ganda, pertama berarti salah satu dan mungkin keduanya (disebut *atau inklusif*), dan kedua berarti hanya salah satu yang mungkin (*atau eksklusif*).

Contoh berikut diharapkan dapat meningkatkan pemahaman mengenai negasi, konjungsi, dan disjungsi.

a. Pernyataan "$2 < \sqrt{3}$ dan $\sqrt{3} < 3$" adalah pernyataan salah, sedangkan "$2 < \sqrt{3}$ atau $\sqrt{3} < 3$" adalah pernyataan benar.
b. Pernyataan negasi, konjungsi dan disjungsi dapat dikaitkan dengan menggunakan hukum De Morgan seperti berikut:

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$
$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Ilustrasi dari yang pertama, misalnya diberikan pernyataan

$$p : x = 2,\ p : x \in A.$$

Pernyataan $p \wedge q$ adalah benar jika $(x = 2)$ dan $(x \in A)$ keduanya benar, dan pernyataan $p \wedge q$ salah jika paling sedikit satu dari $(x = 2)$ dan $(x \in A)$ adalah salah atau ekuivalen dengan pernyataan $\sim (p \wedge q)$ benar jika paling sedikit satu dari pernyataan $(x \neq 2)$ dan $(x \notin A)$ benar.

5. Implikasi

Implikasi p dan q adalah pernyataan bersyarat, dinyatakan oleh

$$p \Rightarrow q.$$

dibaca sebagai berikut:

(i) jika p maka q
(ii) p hanya jika q
(iii) q jika p
(iv) p mengakibatkan q
(v) p syarat cukup untuk q
(vi) q syarat perlu untuk p

Sebagai contoh, diberikan implikasi

$$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9.$$

Implikasi ini dapat dibaca:

(i) jika $x = 3$, maka $x^2 = 9$.

(ii) $x = 3$ mengakibatkan $x^2 = 9$.

(iii) $x^2 = 9$, jika $x = 3$ (menarik kesimpulan $x^2 = 9$, jika $x = 3$).

(iv) $x = 3$ hanya jika $x^2 = 9$ (untuk menarik kesimpulan $x = 3$ harus dipenuhi dahulu $x^2 = 9$).

(v) Syarat $x = 3$ cukup untuk menarik kesimpulan bahwa $x^2 = 9$.

(vi) Untuk menarik kesimpulan $x = 3$ diperlukan syarat $x^2 = 9$, tetapi syarat ini belum cukup karena x bisa saja mempunyai nilai -3 sehingga harus diberi syarat tambahan, misalnya x positif.

Perhatikan implikasi $p \Rightarrow q$. Pernyataan p disebut hipotesis atau pengandaian, sedangkan pernyataan q disebut konklusi atau kesimpulan. Pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ salah hanya jika p benar dan q salah, dalam hal lainnya bernilai benar. Akibatnya, jika p salah, maka $p \Rightarrow q$ selalu benar tidak tergantung pada kebenaran q.

Implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen logis dengan $\sim\left(p \wedge (\sim q)\right)$ (buktikan). Dengan menggunakan hukum De Morgan dan prinsip negasi ganda pada $\sim\left(p \wedge (\sim q)\right)$, berarti implikasi $p \Rightarrow q$ ini juga ekuivalen logis dengan pernyataan $(\sim p) \vee q$.

Perlu dicatat bahwa ingkaran atau negasi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah pernyataan $p \wedge (\sim q)$ yang bukan merupakan pernyataan implikasi. Sebagai ilustrasi, ingkaran dari pernyataan: "jika $x = y$, maka $\cos x = \cos y$" adalah pernyataan "$x = y$ dan/tetapi $\cos x \neq \cos y$ dan bukan implikasi "jika $x = y$, maka $\cos x \neq \cos y$".

6. Kontrapositif, Konvers, dan Invers

Pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ memiliki nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$. Pernyataan $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ ini disebut kontrapositif atau kontraposisi dari pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$.

Sebagai contoh, misalkan kita punya implikasi : "Jika x^2 ganjil, maka x ganjil"; maka kontrapositif dari pernyataan di atas : "jika x tidak ganjil, maka x^2 tidak ganjil". Karena pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen logis dengan $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ maka untuk menunjukkan kebenaran dari implikasi $p \Rightarrow q$, dapat pula ditempuh dengan menunjukkan kebenaran kontrapositifnya (kadang-kadang langkah ini lebih mudah). Pernyataan $q \Rightarrow p$ atau $(\sim p) \Rightarrow (\sim q)$ berturut-turut disebut dengan konvers dan invers dari implikasi $p \Rightarrow q$.

Pada contoh di atas (jika $x = y$, maka $\cos x = \cos y$), konversnya adalah "jika $\cos x = \cos y$, maka $x = y$", sedangkan inversnya adalah: "jika $x \neq y$, maka $\cos x \neq \cos y$". Dari contoh ini, ternyata bahwa baik konvers maupun invers dari suatu implikasi, tidak ekuivalen logis dengan implikasi tersebut (mengapa?).

7. Implikasi Dua Arah

Dari dua pernyataan *p* dan *q*, dapat dibentuk pernyataan baru yang disebut dengan implikasi dua arah (*double implication*). Implikasi dua arah berbentuk: "jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*" atau disingkat "*p* jika dan hanya jika *q*".

Implikasi dua arah dilambangkan oleh $p \Leftrightarrow q$. Jadi, $p \Leftrightarrow q$ artinya $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Pernyataan $p \Leftrightarrow q$ benar jika *p* dan *q* keduanya benar atau keduanya salah.

Di bawah ini diperlihatkan beberapa contoh dari pernyataan implikasi dua arah:

(1) $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$

(2) *n* bilangan bulat habis dibagi 3 $\Leftrightarrow$ $n = 3k$, *k* bilangan bulat.

8. Pernyataan Berkuantor

Sering kali dalam pernyataan matematik ditemukan istilah-istilah seperti "untuk semua", "untuk setiap", "untuk suatu", "terdapat suatu", dan yang lainnya. Sebagai contoh, misalnya:

(1) Untuk setiap bilangan real x, $x^2 \geq 0$.

(2) Terdapat suatu bilangan bulat *x* sehingga $x^2 = 1$.

Pernyataan matematik yang menggunakan istilah-istilah seperti di atas disebut pernyataan berkuantor. Jadi dalam hal ini kuantor adalah istilah yang digunakan untuk menyatakan "seberapa banyak" objek di dalam suatu sistem.

Terdapat dua jenis kuantor, yaitu sebagai berikut:

1. Kuantor universal, dilambangkan oleh "$\forall$" dan dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua".
2. Kuantor eksistensial, dilambangkan oleh "$\exists$" dan dibaca "terdapat suatu" atau "ada suatu".

Pada kalimat matematika, sering kali digunakan kata sambung "sehingga" atau "sedemikian rupa sehingga" yang dilambangkan oleh $\ni$. Pernyataan pada contoh (1) dan (2) di atas dapat ditulis dengan menggunakan lambang sebagai berikut:

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{Z} \ni x^2 = 1$.

Kadang-kadang, kedua jenis kuantor muncul pada satu pernyataan. Perhatikan contoh berikut:

(1) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni x + y = 0$.

(2) $\exists y \in \mathbb{Z} \ni \forall x \in \mathbb{Z}, x + y = 0$.

Kedua pernyataan di atas sangat berbeda, pernyataan pertama adalah pernyataan benar, tetapi pernyataan kedua adalah pernyataan salah. Contoh di atas menunjukkan bahwa urutan penempatan dua jenis kuantor yang berbeda dapat mempunyai arti yang berbeda pula. Perlu dicatat, bahwa jika beberapa peubah muncul dalam suatu pernyataan berkuantor, maka nilai peubah yang terakhir tergantung dari nilai peubah yang muncul lebih awal. Jadi pada pernyataan Contoh 1 nilai y tergantung dari nilai x. Sebagai contoh, jika $x = 4$ maka nilai $y = -4$, dan jika $x = 6$ maka $y = -6$.

Ingkaran dari suatu pernyataan berkuantor, secara mendasar sangat sederhana, sebagai contoh:

a. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan "Setiap unsur x dalam suatu himpunan memenuhi sifat tertentu P" adalah salah, cukup menunjukkan satu contoh penyangkal, yaitu suatu unsur dalam himpunan itu tidak memenuhi sifat P tersebut.

   Jika menggunakan lambang maka $\sim(\forall x)P$ menjadi $(\exists x) \sim P$.

b. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan "terdapat suatu unsur *y* dalam suatu himpunan yang memenuhi sifat tertentu *P*" adalah salah, harus ditunjukkan bahwa setiap unsur *y* dalam himpunan itu tidak memenuhi sifat *P* tersebut.

   Jika menggunakan lambang maka $\sim(\exists y)P$ menjadi $(\forall y)\sim P$.

Sebagai ilustrasi, pernyataan (benar) pada Contoh (1) di atas, yaitu $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni x + y = 0$ (untuk setiap bilangan bulat *x* terdapat suatu bilangan bulat *y* sehingga $x + y = 0$), ingkarannya diperoleh sebagai berikut:

$$\sim\left(\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \ni x + y = 0\right)$$

$$\left(\exists x \in \mathbb{Z}\right) \ni \left(\forall y \in \mathbb{Z}\right)\left(x + y \neq 0\right)$$

atau dapat pula ditulis $\exists x \in \mathbb{Z} \ni \forall y \in \mathbb{Z},\, x + y \neq 0$

dan dibaca: "terdapat suatu bilangan bulat *x* sehingga untuk setiap bilangan bulat *y* memenuhi $x + y \neq 0$". Pernyataan (salah) pada Contoh (2) di atas, yaitu $\exists y \in \mathbb{Z} \ni \forall x \in \mathbb{Z}, x + y = 0$ (terdapat suatu bilangan bulat *y* sehingga untuk setiap bilangan bulat *x* memenuhi $x + y = 0$), ingkarannya adalah:

$$\sim\left(\exists y \in \mathbb{Z} \ni \forall x \in \mathbb{Z},\, x + y = 0\right)$$

$$\left(\forall y \in \mathbb{Z}\right)\left(\exists x \in \mathbb{Z}\right) \ni \left(x + y \neq 0\right)$$

atau dapat pula ditulis $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} \ni x + y \neq 0$

dan dibaca: "untuk setiap bilangan bulat *y*, terdapat suatu bilangan bulat *x* sehingga $x + y \neq 0$". Pernyataan ini benar, dan nilai *x* sehingga $x + y \neq 0$ tergantung dari nilai *y* yang diberikan.

Dengan cara seperti di atas, maka pernyataan seperti "untuk setiap $\delta > 0$, interval $(-\delta,\delta)$ memuat suatu titik yang terletak pada suatu himpunan *A*" mempunyai negasi "terdapat $\delta > 0$ sehingga interval $(-\delta,\delta)$ tidak memuat titik-titik yang terletak pada himpunan *A*". Pernyataan yang pertama dapat ditulis dengan lambang-lambang sebagai berikut:

$$\forall \delta > 0, \left(\exists y \in A\right) \wedge \left(y \in (-\delta,\delta)\right)$$

atau $\forall \delta > 0,\, \exists y \in A \cap (-\delta,\delta)$

atau dapat pula ditulis $\forall \delta > 0,\, A \cap (-\delta,\delta) \neq \varnothing$.

Pernyataan kedua yang merupakan ingkaran dari pernyataan pertama dapat ditulis dengan lambang-lambang sebagai berikut:

$$\exists \delta > 0 \ni \forall y \in A,\ y \notin (-\delta, \delta)$$

atau

$$\exists \delta > 0 \ni A \cap (-\delta, \delta) = \varnothing .$$

Dari uraian di atas, terdapat suatu hal yang perlu dicatat bahwa ketika membuat ingkaran dari suatu pernyataan yang ditulis dengan menggunakan lambang, selain perubahan lambang (misalnya lambang kuantor, dan yang lainnya) yang harus diperhatikan adalah bahwa rangkaian lambang-lambang itu harus bermakna sebagai kalimat yang utuh.

1.4.2 METODE PEMBUKTIAN

Secara umum ada dua metode atau cara pembuktian, yaitu metode pembuktian langsung (bukti langsung) atau metode pembuktian tidak langsung (bukti tidak langsung).

Bukti langsung di konstruksi dari hipotesisnya sedangkan bukti tidak langsung didasarkan pada suatu pernyataan lain yang kebenarannya sama dengan pernyataan yang akan dibuktikan (ekuivalen logis) misalnya kontrapositif dari pernyataan yang akan dibuktikan atau di luar konklusi dari pernyataan yang akan dibuktikan dan menghasilkan suatu pertentangan (kontradiksi) dengan sesuatu yang sudah dianggap benar.

1. Bukti Langsung

Misalkan p dan q masing-masing adalah pernyataan. Hipotesis p dari implikasi $p \Rightarrow q$ mengakibatkan konklusi/kesimpulan q. Jika hipotesis p benar, untuk menghasilkan implikasi yang benar haruslah konklusi q benar.

Konstruksi dari suatu bukti langsung dari $p \Rightarrow q$ melibatkan konstruksi dari rangkaian pernyataan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sehingga $p \Rightarrow r_1$, $r_1 \Rightarrow r_2$, …, $r_n \Rightarrow q$ (prinsip silogisme menyatakan bahwa, jika $r_1 \Rightarrow r_2$ dan $r_2 \Rightarrow r_3$ masing-masing benar, maka $r_1 \Rightarrow r_3$ adalah benar).

Membuat konstruksi ini, biasanya tidak mudah, mungkin memerlukan suatu pengalaman yang cukup, intuisi, dan usaha yang ulet dan sungguh-sungguh.

Berikut ini, salah satu contoh pembuktian suatu teorema dengan menggunakan bukti langsung.

Teorema 1.4.1

Jika x bilangan ganjil, maka x^2 juga bilangan ganjil.

Dengan bukti langsung, langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

Hipotesisnya adalah p : x bilangan ganjil

dan konklusinya q : x^2 bilangan ganjil.

Selanjutnya, $r_1 :\ x = 2k - 1$, untuk suatu bilangan bulat k (ingat definisi). Yang diinginkan adalah konklusi bahwa $x^2 = 2m + 1$, untuk suatu bilangan bulat m, dan ini mengakibatkan q.

$$r_2 :\ x^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$$

$$r_3 :\ x^2 = (2k-1)^2 = \left(4k^2 - 4k + 2\right) - 1$$

$$r_4 :\ x^2 = (2k-1)^2 = 2\left(2k^2 - 2k + 1\right) - 1 .$$

Jika dimisalkan $m = 2k^2 - 2k + 1$ maka m adalah bilangan bulat dan diperoleh

$$r_5 :\ x^2 = 2m - 1 .$$

Jadi, diperoleh: $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow r_3 \Rightarrow r_4 \Rightarrow r_5 \Rightarrow q$ sehingga teorema tersebut terbukti.

Bukti seperti di atas lebih banyak menekankan pada langkah-langkah yang ditempuh yang sesuai dengan teori sebelumnya yang sudah jelas kebenarannya. Secara lebih formal bukti di atas dapat ditulis kembali seperti berikut ini.

Bukti:

Misalkan x bilangan ganjil, maka x dapat ditulis $x = 2k - 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena $x = 2k - 1$, maka

$$x^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2\left(2k^2 - 2k + 1\right) - 1 = 2m - 1 \text{ ganjil,}$$

untuk suatu $m = 2k^2 - 2k + 1$ bilangan bulat.

2. Bukti Tidak Langsung

Bukti tidak langsung secara mendasar dibagi dua jenis, yaitu (1) bukti dengan kontrapositif, dan (2) bukti dengan kontradiksi.

Kedua jenis pembuktian ini dimulai dengan suatu asumsi, bahwa konklusi q pada implikasi $p \Rightarrow q$ yang akan dibuktikan adalah salah, dengan perkataan lain, bahwa pernyataan $\sim q$ adalah benar.

(1) *Bukti dengan kontrapositif*

Bukti kontrapositif memanfaatkan pengertian ekuivalen logis antara implikasi $p \Rightarrow q$ dengan kontrapositifnya $\sim q \Rightarrow \sim p$, selanjutnya biasa ditulis:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p .$$

Jadi, langkah pembuktian dengan menggunakan kontrapositif dimulai dengan asumsi bahwa pernyataan q salah. Dengan kata lain, $\sim q$ benar diarahkan sehingga diperoleh pernyataan $\sim p$.

Di bawah ini diberikan suatu contoh bukti tidak langsung dengan menggunakan kontrapositif.

Teorema 1.4.2

ika z^2 bilangan genap maka, z juga bilangan genap.

Bukti:

Kontrapositif dari teorema di atas adalah: Jika z bilangan ganjil, maka z^2 juga bilangan ganjil. Ini adalah Teorema 1.4.1 yang telah dibuktikan pada uraian terdahulu.

Teorema 1.4.3

Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $a \geq 0$. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq a < \varepsilon$, maka $a = 0$.

Bukti:

Bukti dengan kontrapositif. Misalkan $a \neq 0$ maka $a > 0$ (kenapa?). Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}a$, maka $0 < \varepsilon = \frac{1}{2}a < a$ sehingga kondisi $0 \leq a < \varepsilon$ tidak berlaku untuk suatu $\varepsilon > 0$. Jadi, Teorema 1.4.3 terbukti (dipelajari lebih lanjut di Modul 2).

(2) *Bukti dengan kontradiksi*

Metode pembuktian ini menggunakan fakta bahwa jika c suatu kontradiksi (suatu pernyataan yang selalu salah, seperti $1=0$) maka dua pernyataan:

$$\left(p \wedge (\sim q)\right) \Rightarrow c, \text{ dan } \left(p \Rightarrow q\right)$$

adalah ekuivalen logis. Jadi, untuk menunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$, dilakukan dengan menunjukkan pernyataan $p \wedge (\sim q)$ mengakibatkan kontradiksi.

Penggunaan metode pembuktian ini dapat dilihat pada contoh di bawah ini.

Teorema 1.4.4

Jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\dfrac{1}{a} > 0$.

Bukti:

Misalkan pernyataan $a > 0$ benar dan pernyataan $\dfrac{1}{a} > 0$ salah. Akibatnya $\dfrac{1}{a} \leq 0$. Berdasarkan sifat urutan bilangan real, maka $1 = a\left(\dfrac{1}{a}\right) \leq 0$. Ini kontradiksi dengan teorema yang sudah diketahui bahwa $1 > 0$ (dipelajari lebih lanjut di Modul 2).

Teorema 1.4.5

Terdapat tak berhingga banyaknya bilangan prima.

Bukti:

Jika menggunakan metode pembuktian dengan kontradiksi, maka langkah awal adalah dengan memisalkan bahwa banyaknya bilangan prima adalah berhingga, dan misalkan $S = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ adalah himpunan semua prima. Selanjutnya, misalkan $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ menyatakan hasil kali dari semua bilangan prima dan misalkan pula $q = m + 1$. Karena $q > p_i$ untuk setiap *i*, ini berarti bahwa $q \notin S$, akibatnya q bukan bilangan prima. Oleh karena itu, maka terdapat bilangan prima p sehingga p merupakan pembagi (faktor) dari q. Karena p bilangan prima, maka $p = p_j$ untuk suatu j, sehingga p juga pembagi (faktor) dari m. Tetapi, jika p pembagi dari m dan $q = m + 1$, maka p pembagi dari $q - m = 1$ (mengapa?). Hal ini tak mungkin sehingga terdapat kontradiksi, berarti pemisalan bahwa banyaknya bilangan prima berhingga adalah salah dan yang benar adalah banyaknya bilangan prima tak berhingga.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Silakan coba buktikan teorema-teorema yang sudah dipelajari dan belum dibuktikan.

RANGKUMAN

Sampai di sini Saudara telah mempelajari logika pembuktian matematika beserta contoh-contohnya. Secara umum, cara pembuktian matematika terbagi ke dalam dua kelompok, yaitu pembuktian langsung dan pembuktian tidak langsung. Pembuktian langsung dimulai dari yang diketahui dan dengan menggunakan sifat-sifat sebelumnya yang telah diketahui dan logis maka akan sampai kepada kesimpulan yang benar. Pembuktian tidak langsung dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu pembuktian kontrapositif dan pembuktian kontradiksi. Pembuktian kontrapositif menggunakan sifat silogisme dari logika matematika, yaitu dengan menggunakan implikasi yang setara nilainya dengan kontrapositifnya. Pembuktian kontradiksi memanfaatkan ekuivalensi logis $\left(p \wedge (\sim q)\right) \Rightarrow c$, dan $\left(p \Rightarrow q\right)$, yaitu mulai dari yang diketahui dan andaikan kesimpulannya salah, sehingga di akhir akan ditemukan suatu kejanggalan yang bertentangan dengan yang sudah diketahui secara umum.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Harus ditunjukkan:

(i) $A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)\subseteq\bigcup_{\alpha}\left(A\bigcap A_{\alpha}\right)$

dan

(ii) $A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)\supseteq\bigcup_{\alpha}\left(A\bigcap A_{\alpha}\right)$

Perhatikan pembuktian kedua kasus tersebut.

(i) Ambil sebarang $x\in A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)$, maka $x\in A$ dan $x\in\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)$.

Dari sini, $x\in A$ dan $x\in A_{\beta}$ untuk suatu $\beta\in S$,

atau $x\in A\bigcap A_{\beta}\subseteq\left(\bigcup_{\alpha}A\bigcap A_{\alpha}\right), \alpha\in S$.

Jadi $A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)\subseteq\left(\bigcup_{\alpha}A\bigcap A_{\alpha}\right)$.

(ii) Ambil sebarang $x\in\left(\bigcup_{\alpha}A\bigcap A_{\alpha}\right)$.

Maka $x\in A\bigcap A_{\beta}$ untuk suatu $\beta\in S$.

Dari sini, $x\in A$ dan $x\in A_{\beta}$ untuk suatu $\beta\in S$.

Karena itu, $x\in A$ dan $x\in\bigcup A_{\alpha}$,

atau $x\in A\bigcap\left(\bigcup A_{\alpha}\right)$.

Jadi $\left(\bigcup_{\alpha}\left(A\bigcap A_{\alpha}\right)\right)\subseteq\left(A\bigcap\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)\right)$.

2) $\{\ \}$ himpunan yang tidak memiliki anggota himpunan.

$\{\varnothing\}$ himpunan yang hanya memiliki anggota $\varnothing$.

3) a), b), c), dan d) benar, sedangkan e) dan f) salah.

4) a) Ambil $x \in \{a, a\}$, maka $x = a$ atau $x \in \{a\}$.

Jadi $\{a, a\} \subseteq \{a\}$.

Sebaliknya, ambil $x \in \{a\}$, maka $x = a$ atau $x \in \{a, a\}$.

Jadi $\{a\} \subseteq \{a, a\}$.

b) Ambil $x \in \{a, b\}$, maka $x = a$ atau $x = b$.

Akibatnya $x \in \{b, a\}$. Jadi $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$.

Sebaliknya, ambil $x \in \{b, a\}$, maka $x = b$ atau $x = a$.

Akibatnya $x \in \{a, b\}$.

Jadi $\{b, a\} \subseteq \{a, b\}$.

c) $\{a\} = \{b, c\}$, maka $a = b = c$.

Jika $a = b = c$, maka $\{a\} = \{b\} = \{c\} = \{b, c\}$.

5) a) $\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{1}^{4} A_k = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

b) $\bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{1}^{4} A_k = \varnothing$.

Tes Formatif 2

1) Ambil $x \in f^{-1}(D \cup E)$ sebarang. Maka $f(x) \in D \cup E$, atau $f(x) \in D$ dan $f(x) \in E$. Ini mengatakan $x \in f^{-1}(D)$ dan $x \in f^{-1}(E)$. Jadi, $x \in f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$.

Dengan demikian $f^{-1}(D \cup E) \subseteq f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$.

Bukti sebaliknya,

Ambil $x \in f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$ sebarang. Maka $x \in f^{-1}(D)$ dan $x \in f^{-1}(E)$, ini sama saja dengan $f(x) \in D$ dan $f(x) \in E$, atau $f(x) \in D \cup E$. Jadi, $x \in f^{-1}(D \cup E)$.

Dengan demikian, $f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(D \cup E)$.

2) Kwadran I, $|x| + |y| = 1 \cong x + y = 1$

Kwadran II, $|x| + |y| = 1 \cong -x + y = 1$

Kwadran III, $|x| + |y| = 1 \cong -x - y = 1$

Kwadran IV, $|x| + |y| = 1 \cong x - y = 1$.

Gambar

3) $F\left([-2,2]\right) = [1,5] \cup D_g = [1,5] \neq \varnothing$.

Jadi $g \circ f$ ada.

$R_{g \circ f} = g\left([1,5]\right) = [0,2]$.

$\left(g \circ f\right)(x) = \sqrt{x^2}$.

4) Misal $B \subset A$, maka $f(A) = f(B) + f(A \setminus B) \geq f(B)$, karena $f(A \setminus B) \geq 0$ (ini sebagai akibat dari $R_f \geq 0$).

5) Jika $x \in A \cup B$, maka $x \in A$ dan $x \in B$.

$X_{A \cup B}(x) = X_A(x) = X_B(x) = 1$.

Jika $x \notin A \cup B$, dimana $X_{A \cup B}(x) = 0$, maka $x \in A' \cap B'$ sehingga $x \in A'$ atau $x \in B'$. Dengan demikian $X_A(x) = 0$ atau $X_B(x) = 0$.

$$X_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \cap B \\ 0, & x \notin A \cap B \end{cases}.$$

Kasus 1, bila $x \in A \cup B$ atau $x \in A$ atau $x \in B$, maka

$X_A(x) = X_B(x) = 1$.

Jadi $X_{A \cup B}(x) = X_A(x) \cdot X_B(x)$.

Kasus 2, bila $x \notin A \cup B$ atau $x \in A' \cap B'$ sehingga $x \in A'$ atau $x \in B'$. Dengan demikian $X_A(x) = 0$ atau $X_B(x) = 0$.

Jadi $X_A(x) = X_B(x) = 0$.

Jadi $X_{A \cup B}(x) = X_A(x) \cdot X_B(x)$.

Tes Formatif 3

1) $P(n):\ 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2<\dfrac{n^3}{3}<1^2+2^2+\cdots+n^2$.

$P(1):\ 0<\dfrac{1}{3}<1$ benar.

Misal benar untuk $n=k$,

$$P(k):\ 1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2<\frac{k^3}{3}<1^2+2^2+\cdots+k^2.$$

Harus ditunjukkan benar untuk $n=k+1$.

Sebelah kiri, $P(k+1)$:

$$1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2+k^2<\frac{k^3}{3}+k^2<\frac{k^3}{3}+k^2+k+\frac{1}{3}<\frac{(k+1)^3}{3}.$$

Sebelah kanan, $P(k+1)$:

$$\frac{(k+1)^3}{3}=\frac{k^3}{3}+\left(k^2+k+\frac{1}{3}\right)<1^2+2^2+\cdots+k^2+\left(k^2+k+\frac{1}{3}\right)$$

$$<1^2+2^2+\cdots+k^2+\left(k^2+2k+1\right)=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2.$$

Jadi $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar.

Jadi $P(n)$ berlaku untuk setiap *n* asli.

2) Banyaknya pemetaan injektif:

$\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, $\{(1,a),(2,c),(3,b)\}$, $\{(1,b),(2,a),(3,c)\}$,

$\{(1,b),(2,c),(3,a)\}$, $\{(1,c),(2,a),(3,b)\}$, $\{(1,c),(2,b),(3,a)\}$.

Banyaknya pemetaan surjektif:

$\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, $\{(1,a),(2,c),(3,b)\}$, $\{(1,b),(2,a),(3,c)\}$,

$\{(1,b),(2,c),(3,a)\}$, $\{(1,c),(2,a),(3,b)\}$, $\{(1,c),(2,b),(3,a)\}$.

3) Polanya adalah $P(n):\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^n}$

$P(1):\ 1+\dfrac{1}{2}=2-\dfrac{1}{2}$ benar.

Misal $P(k):\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}=2-\dfrac{1}{2^k}$ benar.

Maka $P(k+1)$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$ benar.

Jadi $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar

Jadi $P(n)$ benar untuk setiap n asli.

4) $P(n): \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}, \quad n \geq 2$.

$P(2):\ 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ benar.

Misal $P(k): \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}$, benar.

Maka $P(k+1)$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}$$

benar.

Jadi $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar.

Jadi $P(n)$ benar untuk semua n asli.

5) $P(n): \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \quad n \geq 2$.

$P(2):\ 1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$ benar.

Misal $P(k): \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$ benar.

Maka $P(k+1)$:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)&=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)\\&=\frac{k^2+2k}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}\\&=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}\end{aligned}$$

benar.
Jadi $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar.
Jadi $P(n)$ benar untuk semua n asli.

Daftar Pustaka

Apostol, Tom M. (1974). *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Bartle, R.G. and Sherbert, D.R. (2000). *Introducction to Real Analysis, Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Bartle, Robert G. (1976). *The Element of Real Analysis*, 2nd *Edition*. New York: John Wiley International.

DePree, J.D and Swartz, C.W. (1988). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Goldberg, Richard R. (1976). *Methods of Real Analysis*, 2nd *Edition*. New York: John Wiley International.

Kirk Wood, J.R. and Albrecht, W.A. JR. (1989). *An Introduction to Analysis*. Boston: PWS. KENT Publishing Company.

Rudin, Walter. (1976). *Principles Of Mathematical Analysis*, 3rd *Edition*. Tokyo: Mc. Graw-Hill, Inc.

Smith, A.H. (1981). *Fundamental Concepts of Analysis*. New Delhi: Prentice Hall of India.