MODUL 1

Matriks

Dra. Sri Haryatmi Kartiko, M.Sc.

PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan dewasa ini menjadi semakin kuantitatif. Data numerik dengan skala besar, hasil pengukuran berupa angka sering dijumpai oleh para ilmuwan sewaktu melakukan survai, penyelidikan atau percobaan. Korelasi data tidak memberikan arti yang besar tanpa disertai dengan menganalisa dan memberikan interpretasi padanya. Cabang matematika yang mendukung hal ini adalah aljabar matriks yang telah berusia lebih dari satu abad. Penggunaan aljabar matriks sangat luas, termasuk dalam statistika.

Matriks adalah array (daftar) bilangan yang terdiri dari baris-baris dan kolom-kolom. Aljabar matriks adalah aljabar khusus untuk array tersebut. Setiap array diperlakukan sebagai satu entitas yang membuatnya sangat berguna dalam menganalisa data, terutama data yang multi variabel. Dengan demikian materi dalam modul ini, yaitu matrik merupakan hal utama yang harus diketahui dalam mata kuliah Metode Statistika Multivariat.

Secara umum setelah selesai mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mengenal dan menggunakan operasi-operasi vektor dan matriks.

Secara khusus setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menggambar dan menghitung panjang vektor;
2. menghitung hasil kali dalam (*inner product*) dua vektor;
3. menghitung penjumlahan dan perkalian matriks;
4. mengenal hukum aljabar matriks;
5. mengenal matriks khusus;
6. menghitung invers suatu matriks;
7. menghitung eigen value dan eigen vektor suatu matriks.

KEGIATAN BELAJAR 1

Matriks

Sebagai ilustrasi diberikan hasil pengamatan berupa persentase jaringan steril pada 4 generasi dari 3 populasi organisme sebagai berikut.

Tabel 1.1.
Persentase Jaringan Steril

Generasi	Populasi		
	1	2	3
1	18	17	11
2	19	13	6
3	6	14	9
4	9	11	4

Angka-angka dalam tabel di atas dapat ditulis dengan array bilangan

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 11 \\ 19 & 13 & 6 \\ 6 & 14 & 9 \\ 9 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

di mana posisi/letak bilangan memberikan arti, misalnya elemen pada baris dua kolom tiga, yaitu 6 adalah persentase jaringan steril pada generasi 2, populasi 3.

Dalam hal ini baris menunjuk pada persentase jaringan steril pada generasi yang sama. Untuk semua populasi, kolom memberikan representasi persentase jaringan steril untuk populasi yang sama pada semua generasi. Sebagai contoh, baris pertama merupakan persentase jaringan steril untuk generasi pertama semua populasi, dan kolom pertama menunjukkan hasil pengamatan untuk semua generasi pada populasi 1.

Array bilangan ini disebut *matriks*.

Definisi 1.1

Matriks $\underset{\sim}{A}$ bertipe $r \times c$ adalah array (daftar) bilangan yang terdiri dari r baris dan c kolom, ditulis

$$\underset{\sim}{A} = \left(a_{ij}\right) \text{ untuk i} = 1, 2, \ldots, r, \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, c.$$

$$\text{atau } \underset{\sim}{A}_{r\times c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1c} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ic} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rj} & \ldots & a_{rc} \end{bmatrix}$$

Contoh

$$\underset{\sim}{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -7 & 2,73 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}, r = c = 4$$

$\underset{\sim}{B}$ disebut matriks bujur sangkar.

Matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen "*off diagonal*" sama dengan nol, disebut matriks diagonal, misalnya

$$\underset{\sim}{C}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 99 \end{bmatrix}$$

Dengan perkataan lain, matriks diagonal adalah matriks yang elemen-elemen bukan diagonalnya bernilai nol.

Matriks diagonal dengan elemen diagonal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sering ditulis sebagai $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = diag\{a_1, \ldots, a_n\}$ atau $diag(a_i)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n.$

Matriks bujur sangkar dengan elemen di atas atau di bawah diagonal bernilai nol disebut *matriks segitiga,* misal

$$\underset{\sim}{B}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&5&13\\0&-2&9\\0&0&7\end{bmatrix}\text{ disebut }\textit{matriks segitiga atas}.$$

$$\underset{\sim}{E}_{3\times3}=\begin{bmatrix}3&0&0\\4&2&0\\5&4&1\end{bmatrix}\text{ disebut }\textit{matriks segitiga bawah}.$$

NOTASI JUMLAHAN

$$a_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

$$a_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

$$a_{\bullet\bullet}=\sum_{i=1}^{m}a_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{n}a_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

Definisi 1.2
Dimensi matriks $r \times c$ adalah pasangan bilangan (r,c); r adalah dimensi baris dan c adalah dimensi kolom.

Definisi 1.3
Dua matriks $\underset{\sim}{A}_{m\times k}=\{a_{ij}\}$ dan $\underset{\sim}{B}_{m\times k}=\{b_{ij}\}$ disebut sama, ditulis $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$ bila dan hanya bila $a_{ij}=b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

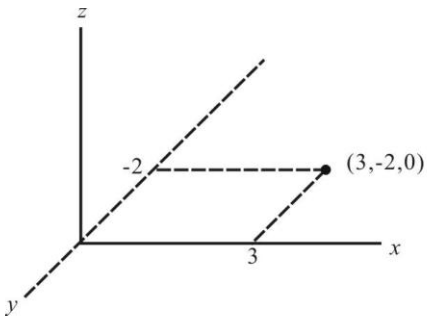
Jadi, ada 2 matriks disebut sama bila
1. Dimensinya sama
2. Setiap elemen-elemen yang berkorespondensi sama

VEKTOR DAN SKALAR

Matriks yang terdiri atas 1 kolom disebut vektor kolom dan matriks yang terdiri dari 1 baris disebut vektor baris.

Contoh vektor kolom berdimensi 3

$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang bila digambar dalam ruang berdimensi 3 adalah sebagai berikut



Gambar 1.1.

Definisi 1.4

M tupel bilangan riil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dituliskan dalam 1 kolom disebut vektor kolom diberi notasi huruf tebal atau tanda ~ di bawahnya.

Contoh $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ atau $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ atau $\underset{\sim}{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan vektor $\underset{\sim}{x}'$ adalah transpose dari vektor $\underset{\sim}{x}$.

Definisi 1.5

Kesamaan vektor

$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ disebut sama dengan $\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

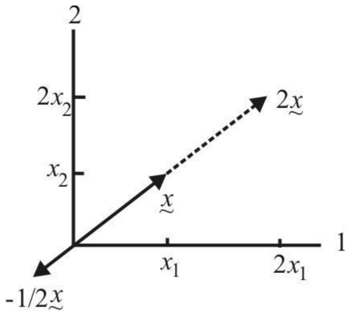
bila dan hanya bila $x_i = y_i$ untuk $i = 1, \ldots, m$.

Definisi 1.6

Perkalian dengan skalar

c skalar sembarang

$c\underset{\sim}{x}$ adalah vektor yang diperoleh dari perkalian setiap elemen $\underset{\sim}{x}$ dengan skalar c.



Gambar 1.2.

Definisi 1.7

Jumlah 2 vektor $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ ditulis dengan $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}$ adalah vektor dengan elemen-elemennya $x_i + y_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Definisi 1.8

Ruang (*space*) dari semua *m* tupel dengan perkalian skalar dan penjumlahan vektor disebut *ruang vektor* berdimensi *m*.

Definisi 1.9

$\underset{\sim}{Y} = a_1\underset{\sim}{x} + a_2\underset{\sim}{x} + \ldots + a_k\underset{\sim}{x}_k$ adalah kombinasi linear dari vektor-vektor $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$.

Himpunan semua kombinasi linear dari $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$ disebut perluasan linear dari $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$

Definisi 1.10

Himpunan vektor $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_k$ disebut dependen linear bila terdapat k skalar $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ yang tidak semuanya nol demikian sehingga $a_1\underset{\sim}{x}_1 + a_2\underset{\sim}{x}_2 + \ldots + a_k\underset{\sim}{x}_k = 0$.

Apabila tidak demikian, himpunan vektor tersebut dikatakan independen linear.

Definisi 1.11

Panjang vektor kolom $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ adalah $L_{\underset{\sim}{x}} = \|\underset{\sim}{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$

Hal di atas juga berlaku untuk vektor baris, misalnya $\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

$$L_{\underset{\sim}{Y}} = \|\underset{\sim}{Y}\| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-7)^2}$$

Definisi 1.12

Sudut θ antara 2 vektor $\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ yang masing-masing berdimensi m memenuhi $\cos\theta = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m}{L\underset{\sim}{x}\ L\underset{\sim}{y}}$

Definisi 1.13

Inner product (*dot product*) 2 vektor berdimensi $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$ adalah

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m$$

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{x}$$

$$L_{\underset{\sim}{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2} = \sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}}$$

$$Cos\theta = \frac{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y}}{\sqrt{\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}}\sqrt{\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y}}}$$

$\underset{\sim}{x}$ dan $\underset{\sim}{y}$ saling tegak lurus ($\underset{\sim}{x} \perp \underset{\sim}{y}$) bila dan hanya bila $\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{y} = 0$

OPERASI MATRIKS

Definisi 1.14

$\underset{\sim}{A}_{m \times k} = \{a_{ij}\}$

Transpose dari matriks $\underset{\sim}{A}$, diberi notasi $\underset{\sim}{A}'$ adalah matriks berdimensi $k \times m$ dengan elemen-elemennya adalah a_{ji}

$\underset{\sim}{A}'_{k \times m} = \{a_{ij}\}$

Catatan:

$\underset{\sim}{A}'$ didapat dari $\underset{\sim}{A}$ dengan menukar baris dengan kolom.

Sifat-sifat Transpose

1. $(\underset{\sim}{A}')' = \underset{\sim}{A}$
2. Transpose vektor kolom adalah vektor baris dan sebaliknya

Definisi 1.15

Penjumlahan matriks

$\underset{\sim}{A} = \{a_{ij}\}, \underset{\sim}{B}\{b_{ij}\}, i = 1, \ldots, r$

$j = 1, \ldots, c$

$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C} = \{c_{ij}\}$

dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Definisi 1.16

Pengurangan matriks

$\underset{\sim}{A}_{r \times c} = \{a_{ij}\}, \underset{\sim}{B}_{r \times c} = \{b_{ij}\}$

$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} + (-1)\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C} = (c_{ij})$ dengan

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Definisi 1.17

Trace suatu matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A} = \{a_{ij}\}$, $i,j = 1, 2, \ldots, m$ adalah

$$tr(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sifat-sifat

1. $tr\left(\underset{\sim}{A}'\right) = tr\left(\underset{\sim}{A}\right)$
2. $tr\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\right) = tr\left(\underset{\sim}{A}\right)+tr\left(\underset{\sim}{B}\right)$

MATRIKS PARTISI

$$\underset{\sim}{B} = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 8 & 4 & & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & & 3 & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 2 & 1 & 7 & 8 & & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_{11} & \underset{\sim}{B}_{12} \\ \underset{\sim}{B}_{21} & \underset{\sim}{B}_{22} \end{bmatrix} \text{disebut partisi dari matriks } \underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}_{22} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{B}_{11}, \underset{\sim}{B}_{12}, \underset{\sim}{B}_{21}$, dan $\underset{\sim}{B}_{22}$ disebut submatriks dari $\underset{\sim}{B}$

TRANSPOSE MATRIKS PARTISI

$$\left[X\ Y\right]' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A' & D' \\ B' & E' \\ C' & F' \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1

Untuk sebarang matriks $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$ dengan dimensi sama dengan skalar sebarang *c* dan *d* berlaku :

a. $\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\right)+\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}+\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right)$

b. $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}$

c. $c\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\right)=c\underset{\sim}{A}+c\underset{\sim}{B}$

d. $\left(c+d\right)\underset{\sim}{A}=c\underset{\sim}{A}+d\underset{\sim}{A}$

e. $\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\right)'=\underset{\sim}{A}'+\underset{\sim}{B}'$

f. $\left(cd\right)\underset{\sim}{A}=c\left(d\underset{\sim}{A}\right)$

g. $\left(c\underset{\sim}{A}\right)'=c\underset{\sim}{A}'$

Definisi 1.18

Matriks $\underset{\sim}{A}$ dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya disebut dengan matriks bujur sangkar.

Definisi 1.19

Matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A}$ disebut simetris bila $\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{A}$ atau $\{a_{ij}\}=\{a_{ji}\}$ untuk setiap i dan j.

Contoh matriks simetris

$$\underset{\sim}{A}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\underset{\sim}{A}'$$

$$\underset{\sim}{B}_{4\times 4}=\begin{bmatrix}a & c & e & f\\ c & b & g & d\\ e & g & c & a\\ f & d & a & d\end{bmatrix}=\underset{\sim}{B}'$$

Definisi 1.20

Matriks identitas bertipe $k\times k$ adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal sama dengan 1 dan elemen-elemen bukan diagonalnya sama dengan 0, diberi notasi $\underset{\sim}{I}_{k\times k}$.

Contoh

$$\underset{\sim}{I}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Definisi 1.21

Perkalian matriks

Hasil kali matriks $\underset{\sim}{A}_{m\times n} = \{a_{il}\}$ dan $\underset{\sim}{B}_{n\times k} = \{b_{lj}\}$ adalah $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \{c_{ij}\}$ dengan

$$c_{ij} = \sum_{e=1}^{n} a_{il}b_{lj} \text{ dengan}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots, k$

$l = 1, 2, \ldots,$ n

Catatan:

Hasil kali $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ ada atau $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ disebut konformabel bila jumlah kolom matriks $\underset{\sim}{A} =$ jumlah baris matriks $\underset{\sim}{B}$.

Jadi, banyaknya baris matriks $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ = banyaknya baris $\underset{\sim}{A}$ dan banyaknya kolom matriks $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ = banyaknya kolom matriks $\underset{\sim}{B}$.

Teorema 1.2

Untuk setiap matriks $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B},$ dan $\underset{\sim}{C}$ sedemikian hingga hasil kali matriks tersebut di bawah ini ada dan berlaku:

a. $c\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right) = \left(c\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{B}$

b. $\underset{\sim}{A}\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{C}\right) = \left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)\underset{\sim}{C}$

c. $\underset{\sim}{A}\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right) = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{C}$

d. $\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right)\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}$

e. $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)' = \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}'$

f. $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ tidak selalu sama dengan $\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}$

g. $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$ tidak berarti $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{0}$ atau $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$

Contoh untuk bagian *g* adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.1

Gross income beberapa negara tahun 1981 dan 1982 adalah sebagai berikut.

Tahun	United States	Canada	Australia	United Kingdom
1981	27	15	18	21
1982	32	14	21	30

Gross income dalam bentuk matriks

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 27 & 15 & 18 & 21 \\ 32 & 14 & 21 & 30 \end{bmatrix}$$

Misal matriks pengeluaran adalah sebagai berikut

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 19 & 9 & 11 & 17 \\ 22 & 10 & 13 & 24 \end{bmatrix}$$

Gross profit tahun 1981 untuk US adalah 27 – 19 = 8, untuk Canada adalah 15 – 9 = 6

Matrik $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \{a_{ij} - b_{ij}\} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 4 \\ 10 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ adalah keuntungan dalam tahun 1981 dan 1982 untuk keempat negara

Contoh 1.2

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{O}_{2\times 3}$ disebut matriks null

Contoh 1.3

Dalam masalah pembelian tikus, tikus putih, dan kelinci untuk percobaan di departemen A, dapat digunakan perkalian matriks.

Harga hewan berturut-turut 3, 1, dan 10 ribu rupiah. Banyak hewan yang diperlukan berturut-turut 50, 100, dan 30 ekor.

$$\underset{\sim}{a}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Jumlah uang yang diperlukan = $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{x}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 30 \end{bmatrix} = 3.50 + 1.100 + 10.30$$

$$= 550$$

Contoh 1.4

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitung $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}, 2\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$

Penyelesaian:

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{A}$ tidak bisa dikalikan dengan $\underset{\sim}{B}$ karena banyak baris pada matriks $\underset{\sim}{A}$ tidak sama dengan banyak kolom pada matriks $\underset{\sim}{B}$.

Contoh 1.5

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{B}, 5\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$

Penyelesaian:

$\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ tidak mempunyai dimensi sama maka $\underset{\sim}{A}$ tidak dapat dijumlahkan dengan $\underset{\sim}{B}$.

$$\underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

c_{11} = 3.3 + (-1)6 + 2.4 = 11
c_{12} = 3.4 + (-1).(-2) + 2.3 = 20
c_{21} = 4.3 + 0.6 + 5.4 = 32
c_{22} = 4.4 + 0.(-2) + 5.3 = 31

Jadi, $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 32 & 31 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -3 & 26 \\ 10 & -6 & 2 \\ 24 & -4 & 25 \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{B}$ tidak konformable karena $\underset{\sim}{A}_{3\times 2}$ dan $\underset{\sim}{B}_{3\times 2}$

$$5\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 55 & 100 \\ 160 & 155 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.6

$$\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A} = \left(\underset{\sim}{A}' - I\right)\underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}'\left(\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{I}\right)\underset{\sim}{A}$$

$$\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}\right)' = \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}' - \underset{\sim}{A}' = \left(\underset{\sim}{B}' - \underset{\sim}{I}\right)\underset{\sim}{A}'$$

$$\left(c\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}c\right)' = c\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}\right)' = c\left(\underset{\sim}{B}' - \underset{\sim}{I}'\right)\underset{\sim}{A}'$$

$$\begin{aligned} \left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}\right)' &= \underset{\sim}{C}'\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}' - \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}' - \underset{\sim}{A}' \\ &= \left(\underset{\sim}{C}'\underset{\sim}{B}' - \underset{\sim}{B}' - \underset{\sim}{I}\right)\underset{\sim}{A}' \end{aligned}$$

Contoh 1.7

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung $tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right), tr\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}\right)$

Penyelesaian:

$$tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right) = tr\begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 32 & 31 \end{bmatrix} = 11 + 31 = 42$$

$$tr\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}\right) = \begin{bmatrix} 25 & -3 & 26 \\ 10 & -6 & 2 \\ 24 & -4 & 23 \end{bmatrix} = 23 - 6 + 23 = 42$$

Contoh 1.8

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitung $tr\left(\underset{\sim}{A}\right)$ dan $tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'\right)$

Penyelesaian:

$tr\left(\underset{\sim}{A}\right) = 2 + 7 + 4 = 13$

$$tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\begin{bmatrix} 21 & 35 & 18 \\ 35 & 89 & 38 \\ 18 & 38 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= 21 + 89 + 20 = 130$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Untuk elemen matrik

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 & 3 \\ 3 & 13 & 10 & 2 & 6 \\ 11 & -9 & 0 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \left\{ a_{ij} \right\}$$

$i = 1, 2, 3, 4$

$j = 1, 2, 3, 4, 5$ tunjukkan bahwa

a. $a_{\bullet 3} = 20$

b. $a_{1\bullet} = 26$

c. $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{4} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 4}}^{5} a_{ij} = 20$

d. $\prod_{i=1}^{3} a_{i4} = 12$

2) Dari soal 1 tulis matriks berikut

$\underset{\sim}{B} = \left\{ a_{i+1,\, j+2} \right\}$ untuk $i = 1, 2, 3,$ dan $j = 1, 2, 3$

$\underset{\sim}{C} = \left\{ a_{2i,\, 2j-1} \right\}$ $\quad i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, 3$

$\underset{\sim}{D} = \left\{ a_{i,j} + i - j \right\}$ $\quad i = 2, 3$ dan $j = 1, \ldots, 4$

3) Buktikan rumus di bawah ini dan tunjukkan kebenarannya dengan matriks dalam soal 1

a. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} 4a_{ij} = 4a_{..}$

b. $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i.}^2$

4) Tulis matriks

$\underset{\sim}{D}_1 = \underset{\sim}{D}\{1,2,3,4\}$

$\underset{\sim}{D}_2 = \underset{\sim}{D}\left\{3^{i-2}\right\}, i = 1,2,3,4$

$\underset{\sim}{D}_3 = \underset{\sim}{D}\left\{i + 3^{i-2}\right\}, i = 1,2,3,4$

5) Untuk matriks $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{B}, \left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}'\right)\underset{\sim}{B}, tr\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{B}'\right), tr\left(\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{B}\right)$

6) Apakah traspose dari

$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

Hitung $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}'$ dan $\underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}$

Terangkan hubungan antara keduanya.

7) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Buat partisi $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ sebagai

$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}$ dan $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_{11} & \underset{\sim}{B}_{12} \\ \underset{\sim}{B}_{21} & \underset{\sim}{B}_{22} \end{bmatrix}$

Dengan $\underset{\sim}{A}_{21}$ dan $\underset{\sim}{B}_{21}$ mempunyai order 1×2.

Hitung $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ dengan partisi dan tanpa partisi.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. $a_{\bullet 3} = \sum_{i=1}^{4} a_{i3} \rightarrow$ jumlah dari kolom 3

$= 20$

d. $\sum_{i=1}^{3} a_{i4} = (-2)(2)(-3) = 12$

2) $\underset{\sim}{B} = \left\{ a_{i+1,\, j+2} \right\} \;\; i = 1, 2, 3, \qquad j = 1, 2, 3$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3) a. $\sum\sum 4a_{ij} = 4\sum\sum a_{ij} = 4a..$

b. $\sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}_{a_{i\cdot}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i\cdot}^{\ 2}$

Cocokkan dengan hitungan untuk A dalam soal 1.

4) $\underset{\sim}{D}_1 = D\{1, 2, 3, 4\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5) $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

6) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & -7 \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}' = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 12 & 17 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 10 & 17 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} \right)' = \underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}$

7) Hitung $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ tanpa partisi.

Dengan partisi

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11}\underset{\sim}{B}_{11} + \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{B}_{21} & \underset{\sim}{A}_{11}\underset{\sim}{B}_{12} + \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{B}_{22} \\ \underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{B}_{11} + \underset{\sim}{A}_{22}\underset{\sim}{B}_{21} & \underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{B}_{12} + \underset{\sim}{A}_{22}\underset{\sim}{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Hasilnya perhitungan $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}$ dengan atau tanpa partisi haruslah sama.

RANGKUMAN

$$\underset{\sim}{A}_{r\times c} = \{a_{ij}\},\ i = 1,\ldots,r$$
$$j = 1,\ldots,c$$

$$\underset{\sim}{B}_{r+c} = \{b_{ij}\}$$

1. $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$

   $\underset{\sim}{C} = \{c_{ij}\}$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2. $\underset{\sim}{A}_{r\times c}\underset{\sim}{B}_{c\times s} = \underset{\sim}{C}$

   $$\underset{\sim}{C} = \{c_{ij}\}\, dengan\, c_{ij} = \sum_{e=1}^{e} a_{il}b_{lj}$$
   $$i = 1\ldots r$$
   $$j = 1,\ldots,s$$
   $$l = 1,\ldots,c$$

3. $(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B})' = \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}',\quad (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B})' = \underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}'$

4. $tr(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ untuk $\underset{\sim}{A} = \{a_{ij}\}, i, j = 1,\ldots,n$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{b}$ = ….
   A. 4
   B. 6
   C. 8
   D. 10

2) $\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{a}'$ = ….
   A. 8
   B. $\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
   D. A, B, dan C tidak benar

3) $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{b}$ = ….
   A. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

4) $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{B}$ = ….
   A. $\begin{bmatrix} 1 & 13 & 26 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 1 & 18 & 2 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 16 & 35 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$
   D. A, B, dan C tidak benar

5) Tulis matriks $\underset{\sim}{B} = \{b_{kt}\}$

$b_{kt} = k^{t-1} \quad k = 1, 2, 3, 4$ dan $t = 1, 2, 3$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 27 \\ 1 & 16 & 64 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$

II. $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6) $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}' = \ldots.$

A. $\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}'\right)'$

B. $\left(\underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}\right)'$

C. $\underset{\sim}{A}' + \underset{\sim}{B}$

D. A, B, dan C tidak benar

7) $tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right) = \ldots.$

A. -2
B. 8
C. 2
D. 3

8) $tr\left(\underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}'\right) = \ldots.$

A. -2
B. 8
C. 2
D. 3

III. $\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{bmatrix}$

Dengan $p + q = 1$

$\underset{\sim}{1}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9) $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\mathbf{1}} = \ldots.$

A. $\underset{\sim}{p}$
B. $\underset{\sim}{1}$
C. $\underset{\sim}{O}$
D. A, B, dan C tidak benar

10) $\underset{\sim}{P}^2 = \ldots.$

A. p
B. $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{1}$
C. $\underset{\sim}{p}^3$
D. A, B, dan C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Matriks Invers

Operasi aritmatik, yaitu jumlahan, pengurangan, dan perkalian dalam aljabar matriks telah Anda pelajari, tetapi pembagian belum. Sebagaimana Anda simak, perkalian matriks lebih kompleks dibanding perkalian skalar, demikian pula dengan operasi kebalikannya, yaitu pembagian.

Sebenarnya pembagian tidak ada dalam aljabar matriks. Konsep "membagi" dengan $\underset{\sim}{A}$ diganti dengan mengalikan dengan matriks yang disebut $\underset{\sim}{A}$ invers.

Invers dari matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A}$ adalah matriks yang hasil kalinya dengan $\underset{\sim}{A}$ adalah matriks identitas. Matriks invers dari $\underset{\sim}{A}$ diberi simbol $\underset{\sim}{A}^{-1}$ dibaca invers dari $\underset{\sim}{A}$ atau $\underset{\sim}{A}$ invers.

Ide tentang invers akan diperlihatkan dengan memperhatikan penggunaannya dalam menyelesaikan persamaan linear.

Ilustrasi

Diketahui persamaan linear nonhomogen.

$$m + a = 14$$
$$m + d = 12$$
$$m - a = 6$$

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Bila kedua ruas digandakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

akan didapat hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dengan kata lain $m = 10$, a = 4 dan $d = 2$

Terlihat bahwa persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian

$$\begin{bmatrix} m \\ a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{I}_{3\times 3}$$

atau $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Untuk perhitungan matriks invers diperlukan *detreminan* yang akan dibicarakan di bawah ini.

Definisi 1.21

Determinan matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A}_{k\times k} = \{a_{ij}\}$ yang diberi notasi $|\underset{\sim}{A}|$ adalah bilangan skalar dengan $|\underset{\sim}{A}| = \begin{cases} a_{11} & \text{bila } k = 1 \\ \sum a_{1j}\,|\underset{\sim}{A}_{1j}|\,(-1)^{1+j} & \text{bila } k > 1 \end{cases}$.

Catatan:

$\underset{\sim}{A}_{ij}$ adalah matriks bertipe (*k* – *1*) × (*k* – *1*) yang didapat dari matriks $\underset{\sim}{A}$ dengan menghilangkan baris ke-1 kolom ke-*j* yang disebut ekspansi menggunakan baris 1.

Secara umum:

$|\underset{\sim}{A}| = \sum a_{ij}\,|\underset{\sim}{A}_{ij}|\,(-1)^{i+j}$ yang merupakan baris ke-*i*. $\underset{\sim}{A}_{ij}$ didapat dari matriks $\underset{\sim}{A}$ dengan menghilangkan baris ke-*i* kolom ke-*j* (minor berisi kolom *j*).

Contoh 1.9

1. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^2 + a_{12}a_{21}(-1)^3$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dengan ekspasi baris 1 determinan matriks ini akan menjadi

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}(-1)^2 + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}(-1)^3 + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}(-1)^4$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Khusus untuk matriks bertipe 3 × 3 determinannya dapat dihitung dengan cara:

Menjumlah elemen-elemen matrik sepanjang garis lurus (—) kemudian mengurangi dengan hasil kali elemen-elemen matriks sepanjang garis putus-putus (---)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

yang dapat Anda lihat sama dengan hasil sebelumnya.

3) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}_{2\times 2}$$

Definisi 1.22

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{A} \, adj \, \underset{\sim}{A}$$

$$adj \, \underset{\sim}{A} = \left[A \, \text{dengan setiap elemen diganti dengan kofaktornya} \right]$$

$$= \left[(-1)^{i+j} \underset{\sim}{A}_{ij} \right]'$$

$\underset{\sim}{A}_{ij}$ matriks bagian dari A tanpa baris ke-i dan tanpa kolom ke-j

Catatan:
Minor dan kofaktor dapat Anda baca lebih jelas pada modul tentang aljabar linear.

Teorema 1.3

$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ matriks bujur sangkar $k \times k$

1. $\left|\underset{\sim}{A}\right| = \left|\underset{\sim}{A}'\right|$
2. Bila tiap-tiap elemen dalam suatu baris atau kolom sama dengan nol maka $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$
3. Bila sembarang 2 baris/kolom identik maka $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$
4. Bila $\underset{\sim}{A}$ nonsingular maka $\left|\underset{\sim}{A}\right| = \dfrac{1}{\left|\underset{\sim}{A}^{-1}\right|}$ atau $\left|\underset{\sim}{A}\right|\left|\underset{\sim}{A}^{-1}\right| = \underset{\sim}{1}$
5. $\left|\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right| = \left|\underset{\sim}{A}\right|\left|\underset{\sim}{B}\right|$
6. $\left|c\underset{\sim}{A}\right| = c^k \left|\underset{\sim}{A}\right|, \quad c\ skalar$

Definisi 1.23
1. Rank baris suatu matriks adalah banyaknya maksimum baris yang independen linear.
2. Rank kolom suatu matriks adalah banyaknya maksimum kolom yang independen linear.

Catatan:
Rank baris suatu matriks = rank kolomnya

Definisi 1.24
Matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A}_{k\times k}$ disebut nonsingular bila $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$ mengakibatkan $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{0}$
Catatan:
1. Suatu matriks bujur sangkar yang tidak non singular disebut singular.
2. Matriks bujur sangkar disebut nonsingular bila rank matriks = banyaknya baris atau banyaknya kolom.

Teorema 1.4
Bila $\underset{\sim}{A}$ matriks nonsingular bertipe $k \times k$ maka terdapat dengan tunggal matriks $\underset{\sim}{B}$ sedemikian hingga

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}_{k\times k}$$

Definisi 1.25
Matriks $\underset{\sim}{B}$ sedemikian hingga $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$ disebut invers dari matriks $\underset{\sim}{A}$, dan diberi notasi $\underset{\sim}{A}^{-1}$.

Teorema 1.5
$\underset{\sim}{M}$ dapat ditulis sebagai

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} \end{bmatrix}$$

dimensi $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D}$ lebih kecil daripada dimensi $\underset{\sim}{M}$ dan disebut partisi dari $\underset{\sim}{M}$.

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}$$

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}^{-1} & \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{Q}^{-1} \\ -\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{P}^{-1} & \underset{\sim}{Q}^{-1} \end{bmatrix}$$

semua matriks yang diambil inversnya adalah nonsingular.

Teorema 1.6
$\underset{\sim}{A} \,\&\, \underset{\sim}{B}$ matriks bertipe $k \times k$, c suatu skalar

1. $tr\left(c\underset{\sim}{A}\right) = c\ tr\left(\underset{\sim}{A}\right)$
2. $tr\left(\underset{\sim}{A} \pm \underset{\sim}{B}\right) = tr\left(\underset{\sim}{A}\right) \pm tr\left(\underset{\sim}{B}\right)$
3. $tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right) = tr\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}\right)$
4. $tr\left(\underset{\sim}{B}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right) = tr\left(\underset{\sim}{A}\right)$
5. $tr\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$

Definisi 1.26
Matriks bujur sangkar $\underset{\sim}{A}$ disebut dengan ortogonal bila baris-barisnya (yang dipandang sebagai vektor) saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1, yaitu $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{I}$.

Teorema 1.7
Matriks $\underset{\sim}{A}$ ortogonal bila dan hanya bila $\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}'$

Catatan:
$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{A} = I$ sehingga kolom-kolom matriks saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1.

Definisi 1.27

$\underset{\sim}{A}$ matriks bujur sangkar bertipe $k \times k$

I matriks identitas bertipe $k \times k$

Skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ yang memenuhi persamaan $\left|\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = 0$ disebut eigen value (akar-akar karakteristik) dari matriks $\underset{\sim}{A}$.

Persamaan $\left|\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = 0$ adalah fungsi λ yang disebut sebagai persamaan karakteristik.

Definisi 1.28

$\underset{\sim}{A}$ matriks berdimensi $k \times k$

λ salah satu eigen value dari $\underset{\sim}{A}$

Bila $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ sedemikian sehingga $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$ maka $\underset{\sim}{x}$ disebut eigen vektor (vektor karakteristik) dari matriks $\underset{\sim}{A}$ yang bersesuaian dengan eigen value λ .

Definisi 1.29

Bentuk karakterisktik $Q\left(\underset{\sim}{x}\right)$ dari k variabel $\underset{\sim}{x}' = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ adalah

$Q\left(\underset{\sim}{x}\right) = \underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$

dengan $\underset{\sim}{A}$ matriks simetris .

Kondisi untuk $\underset{\sim}{A}$ supaya mempunyai invers adalah

1. $\underset{\sim}{A}$ bujur sangkar dan
2. $\left|\underset{\sim}{A}\right| \neq 0$

$\underset{\sim}{A}$ dengan $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$ adalah matriks singular, sedangkan

$\underset{\sim}{A}$ dengan $\left|\underset{\sim}{A}\right| \neq 0$ adalah matriks nonsingular .

Teorema 1.8

1. $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^{-1} = I$.
2. Invers dari matriks $\underset{\sim}{A}$ adalah tunggal.
3. $\left|\underset{\sim}{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|\underset{\sim}{A}\right|}$.
4. Invers dari matriks A adalah nonsingular.

5. $\left(\underset{\sim}{A}^{-1}\right)^{-1} = \underset{\sim}{A}$.

6. $\left(\underset{\sim}{A}'\right)^{-1} = \left(\underset{\sim}{A}^{-1}\right)'$.

7. Jika $\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A}$ ($\underset{\sim}{A}$ matriks simetris) maka $\left(\underset{\sim}{A}^{-1}\right)' = \underset{\sim}{A}^{-1}$.

8. $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)^{-1} = \underset{\sim}{B}^{-1}\underset{\sim}{A}^{-1}$ asal $\underset{\sim}{B}^{-1}\underset{\sim}{A}^{-1}$ ada.

Beberapa kasus khusus

1. Invers matriks bertipe 2 × 2

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{ab - xy}\begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}, \text{asal } ab - xy \neq 0$$

2. Matriks diagonal

$$\left(D\{x_i\}\right)^{-1} = D\left\{\frac{1}{x_i}\right\} \text{asal } x_i \neq 0$$

$$\text{Contoh: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3. $\underset{\sim}{I}$ matriks identitas, $\underset{\sim}{I}^{-1} = \underset{\sim}{I}$

$\underset{\sim}{J}$ matriks dengan $\left|\underset{\sim}{J}\right| = 0$

Untuk a ≠ 0 dan a + nb ≠ 0

$$\left(a\underset{\sim}{I}_n + b\underset{\sim}{J}_n\right)^{-1} = \frac{1}{a}\left(\underset{\sim}{I}_n - \frac{b}{a + nb}\underset{\sim}{J}_n\right)$$

$$\underset{\sim}{I}_n = \underset{\sim}{I}_{n \times n}$$

4. Matriks ortogonal

$\underset{\sim}{P}$ matriks ortogonal $\rightarrow$ $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{P}' = \underset{\sim}{I}; \left|\underset{\sim}{P}\right| \neq 0$ atau $\underset{\sim}{P}^{-1} = \underset{\sim}{P}'$

Definisi 1.30

$\underset{\sim}{A}$ matriks simetris, $\underset{\sim}{A}$ atau $\underset{\sim}{A}'$ disebut matriks definit positif bila dan hanya bila $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} > 0$

Contoh 1.10

Hitung $\underset{\sim}{A}^{-1}$ bila $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)-(-1)\left(-\frac{3}{2}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Contoh 1.11

Apakah matriks $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ definit positif?

Penyelesaian:

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 & 5x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 4x_1^2 + x_1x_2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{x} \geq 0$ *untuk* $x_1x_2 \geq 0$

Jadi, $\underset{\sim}{B}$ definit positif untuk $x_1x_2 \geq 0$

Contoh 1.12

Hitung $\underset{\sim}{R}^{-1}$ bila $\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left|\underset{\sim}{R}\right| = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 12 - 2 - 0 = -9$$

$$\underset{\sim}{R}^{-1} = \frac{1}{\left|\underset{\sim}{R}\right|}\, adj\, \underset{\sim}{R}$$

$$= \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 1 & -(-1) & -3 \\ -(-6) & -3 & 0 \\ -10 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Contoh 1.13

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung eigen value dari matriks $\underset{\sim}{A}$

Penyelesaian:

$$\left|\underset{\sim}{A}-\lambda I\right|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-a & 0\\1 & 3-a\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=1$$

$$\lambda_2=3$$

Contoh 1.14

Untuk matriks dalam contoh 1.13 hitung eigen vektornya

Penyelesaian:

$$\lambda_1=1:\ \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x}=\lambda_1\underset{\sim}{x}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_1\\x_1+3x_2&=x_2\end{aligned}\right\}x_1=-2x_2$$

$$x_1=1\rightarrow x_2=-2$$

$\underset{\sim}{x}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ adalah eigen vektor yang bersesusain dengan λ_1

$\underset{\sim}{x}_1=\dfrac{\underset{\sim}{x}}{L\underset{\sim}{x}}=\dfrac{\underset{\sim}{x}}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$ adalah eigen vektor satuan yang bersesuaian dengan λ_1. Dengan cara yang sama didapat $\underset{\sim}{x}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ adalah eigen vektor satuan yang bersesuai dengan λ_2.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   Perlihatkan dengan hitungan bahwa hal-hal di bawah ini benar.

   a. $\left(\underset{\sim}{A}'\right)' = \underset{\sim}{A}$

   b. $\left(\underset{\sim}{C}'\right)^{-1} = \left(\underset{\sim}{C}^{-1}\right)'$

   c. $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)' = \underset{\sim}{B}'\underset{\sim}{A}'$

2) Dari latihan 1 hitunglah

   $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)^{-1}, \left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{C}\right)^{-1}, \underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{A}^{-1}$

   Perlihatkan bahwa $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{C}\right)^{-1}, \underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{A}^{-1}$

3) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ Hitung eigen value matriks $\underset{\sim}{A}$.

4) $\underset{\sim}{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_{11} & \underset{\sim}{B}_{12} \\ \underset{\sim}{B}_{21} & \underset{\sim}{B}_{22} \end{bmatrix}$

   dengan $\underset{\sim}{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

   $\underset{\sim}{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{B}_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

   Hitung $\underset{\sim}{B}^{-1}$ dengan dan tanpa partisi.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan rumus invers khusus untuk matriks 2 × 2. Hitung ruas kiri, apakah sama dengan ruas kanan.
2) Gunakan rumus invers dan hasil kali matriks.
3) $\left|\underset{\sim}{A} - \lambda I\right| = 0 \rightarrow$ cari penyelesaian ke λ.

4) a. Hitung invers cara biasa
   b. Hitung invers pakai partisi.

RANGKUMAN

1. $\underset{\sim}{A}$ matriks bujur sangkat

   jika $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$ maka $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^{-1}$

2. $\underset{\sim}{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\underset{\sim}{A}|} adj\ \underset{\sim}{A}$

3. $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ matriks bujur sangkar

   $\left(\underset{\sim}{A}^{-1}\right)' = \left(\underset{\sim}{A}'\right)^{-1}$

   $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^{-1}\right) = \underset{\sim}{B}^{-1}\underset{\sim}{A}^{-1}$

4. Invers dari matriks partisi

   $$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} \end{bmatrix}$$

   $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}$

   $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{C}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}$

   $$\underset{\sim}{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}^{-1} & -\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{Q}^{-1} \\ -\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{P}^{-1} & \underset{\sim}{Q}^{-1} \end{bmatrix}$$

5. $\left|\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = 0, \underset{\sim}{A}_{k\times k}$

   $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ yang memenuhi persamaan di atas disebut eigen value matriks $\underset{\sim}{A}$

   $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$

   $\underset{\sim}{x}$ disebut dengan eigen vektor yang bersesuaian dengan eigen value λ .

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{A}^{-1} =$

A. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{-1} =$

A. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{10}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

D. $\underset{\sim}{R}$ tidak punya invers

3) Invers dari matriks partisi

$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{P} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{R} \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{O} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{O} & \cdots & \underset{\sim}{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{\sim}{O} & \cdots & \underset{\sim}{O} \end{bmatrix}$ adalah

A. $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}^{-1} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{R}^{-1} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} R^{-1} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{P}^{-1} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{R} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{P} \end{bmatrix}$

D. Tidak punya invers

4) Matriks di bawah ini yang tidak ortogonal adalah

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$

5) $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ matriks bujur sangkar yang non singular,

A. $\left|\underset{\sim}{A}^{-1}\right| = \left|\underset{\sim}{A}\right|^{-1}$

B. $\left(\underset{\sim}{A}'\right)^{-1} = \left(\underset{\sim}{A}^{-1}\right)'$

C. $\left(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}\right)^{-1} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}^{-1}$

D. $\left|\underset{\sim}{A}\right|\left|\underset{\sim}{A}^{-1}\right| = \underset{\sim}{I}$

6) Dari soal nomor 5, pernyataan dibawah ini adalah benar, *kecuali* ….

A. $\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{I}$

B. Invers matriks $\underset{\sim}{A}$ tunggal

C. $\left(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}\right)^{-1} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}^{-1}$

D. $\left(\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{B}'\right)^{-1} = \left(\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{B}^{-1}\right)'$

7) Bila $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ maka $\underset{\sim}{A}^{-1} =$

A. $\frac{1}{ab - xy}\begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$

B. $\frac{1}{xy - ab}\begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{ab - xy}\begin{bmatrix} a & -x \\ -y & b \end{bmatrix}$

D. $\frac{1}{xy - ab}\begin{bmatrix} -a & x \\ y & -b \end{bmatrix}$

8) $\underset{\sim}{M}$ bertipe $k \times k$

$\underset{\sim}{I}$ matriks identitas berupa $k \times k$

$\underset{\sim}{M}\left(\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{I}\right)^{-1} =$

A. $\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^{-1}+\underset{\sim}{M}$

B. $\left(\underset{\sim}{I}+\underset{\sim}{M}^{-1}\right)^{-1}$

C. $\left(\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{M}\right)^{-1}$

D. A, B, dan C tidak benar

9) Eigen value dari matriks $\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ adalah

A. 0 dan 1
B. 0 dan 2
C. 1 dan 1
D. 1 dan 2

10) Eigen vektor satuan dari matriks $\underset{\sim}{D}$ dalam soal 9 adalah ….

A. $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

D. A, B, dan C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1	*Tes Formatif 2*
1) C	1) B
2) B	2) C
3) B	3) A
4) A	4) B
5) D	5) B
6) B	6) D
7) C	7) A
8) C	8) B
9) B	9) B
10) A	10) C

Daftar Pustaka

Johnson, Richard A., Wichern, Dean W. (1982). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall Inc.