MODUL 1

Estimasi Parameter

Dr. Sutawanir Darwis

PENDAHULUAN

Proses stokastik $\left(\{S_t, t \in \Psi\}, \Psi, S_t \in \Omega\right)$ adalah koleksi peubah acak S_t dengan t menyatakan indeks waktu, $t \in \Psi$. Kumpulan semua nilai S_t yang mungkin Ω, dinamakan *state space*. Suatu proses stokastik dinamakan proses Markov atau rantai Markov (*Markov chain*) jika proses tersebut memenuhi sifat Markov (*Markov property*). Sifat Markov menyatakan bahwa prediksi sistem saat $t+1$ hanya ditentukan oleh state proses pada saat *t*. Suatu rantai Markov ditentukan oleh distribusi awal, $P\left(S_0 = i\right)$, dan peluang transisi p_{ij} atau $p\left(i,j\right)$. Peluang transisi p_{ij} merupakan parameter proses Markov.

Jika parameter suatu proses tidak diketahui, parameter tersebut harus diestimasi berdasarkan data empirik. Metode kuadrat terkecil (*least squares*) merupakan salah satu metode untuk mengatasi masalah estimasi parameter. Dalam modul ini akan dibahas penerapan metode kuadrat terkecil dalam estimasi parameter peluang transisi suatu rantai Markov. Pembahasan dibatasi pada kasus rantai Markov two-state (*two-state Markov chain*).

Dalam sampling sekuensial, *primary sampling unit* (psu) dilakukan berturutan dan informasi dari psu digunakan untuk memodifikasi desain sampling. Misalkan suatu daerah *D* dipartisi dalam $N \times N$ *grid* dan masing-masing titik bernilai $+1$ atau -1. Sampling pada daerah *D* tidak mungkin dilakukan karena kombinasi partisi sebanyak $2^{N \times N}$. Suatu metode berdasarkan rantai Markov dikembangkan untuk mengatasi sampling pada suatu *grid spatial* (*plane sampling*).

Setelah mempelajari modul ini, secara umum diharapkan Anda dapat memodelkan suatu fenomena stokastik melalui pendekatan rantai Markov.

Secara khusus Anda diharapkan dapat:

1. Memahami dan memberikan contoh realisasi (melalui simulasi) rantai Markov.
2. Menghitung peluang transisi p_{ij} atau $p(i,j)$ dan matriks peluang transisi (matrik stokastik) **P**.
3. Membuat graf berarah suatu rantai Markov.
4. Memahami representasi vektor suatu rantai Markov.
5. Menuliskan rantai Markov dalam bentuk model linear.
6. Menaksir parameter peluang transisi melalui metode kuadrat terkecil.
7. Menaksir peluang transisi suatu rantai Markov melalui tabel kontingensi **O**.
8. Menentukan distribusi stasioner.

Kegiatan Belajar 1

Estimasi Peluang Transisi Rantai Markov

Proses stokastik $\left(S=\left\{S_t\right\}_{t=0}^{\infty},\Omega\right)$, dengan $S_t, t=0,\ldots,\infty$, dan barisan peubah acak (*correlated random variables*) dengan sate space diskrit Ω. Andaikan $\Omega=\left\{1,2,\ldots\right\}$. Proses merupakan rantai Markov (Markov chain) jika proses memenuhi sifat Markov.

$$P\left(S_{t+m+1}=j\,|\,S_{t+m}=i\right)=P\left(S_{t+1}=j\,|\,S_t=i\right)=p_{ij} \qquad ,m=0,1,2,\ldots$$

$$\sum_{j\in\Omega} p_{ij}=1, \quad i\in\Omega$$

Contoh 1.1

Peluang transisi p_{ij}. Dua kotak *A* dan *B* berisi *m* bola. Pada saat t, S_t menyatakan banyaknya bola di kotak *A*. Kotak *B* berisi $m-S_t$ bola. Pada $t+1$, diambil satu bola dari *m* bola secara acak dan dipindahkan ke kotak lain. Tentukan peluang transisi $p_{ij}=P\left(S_{t+1}=j\,|\,S_t=i\right)$. Misalkan pada saat *t*, kotak *A* berisi *i* bola, $S_t=i$, dan pada saat $t+1$ kotak *A* berisi *j* bola, $S_{t+1}=j$. Pada saat $t+1, S_{t+1}=j=i-1$ (bola terambil dari kotak *A*) atau $S_{t+1}=j=i+1$ (bola terambil dari kotak B). Karena proses pengambilan dilakukan secara acak, maka

$$p_{ij}=\begin{cases} i/m & ,\ j=i-1 \qquad \text{(bola terambil dari kotak } A\text{)} \\ \dfrac{(m-i)}{m} & ,\ j=i+1 \qquad \text{(bola terambil dari kotak } B\text{)} \\ 0 & ,\ \text{lainnya} \end{cases}$$

Contoh 1.2

Two-state Markov chain. Misal S_t menyatakan state suatu pesawat telepon pada saat $t, S_t=0$ jika pesawat telepon bebas dan $S_t=1$ jika sedang digunakan; state space $\Omega=\left\{0,1\right\}$. Andaikan dalam suatu selang waktu, peluang terjadi sambungan adalah *p*. Jika pesawat telepon sedang aktif, permintaan sambungan berikutnya akan ditolak. Jika pesawat sedang aktif, peluang pesawat telepon bebas pada selang berikutnya adalah *q*. Deskripsi di atas memberikan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Contoh 1.3

Random Walk. Misal S_t menyatakan posisi suatu bola sepanjang titik diskrit $(0,1,\ldots,N)$. Pada $t+1$ bola berpindah satu langkah, ke kanan dengan peluang p dan ke kiri dengan peluang $1-p$. Jika bola berada di boundary $\{0,N\}$, bola bergerak ke arah dalam dengan peluang 1. Peluang transisi diberikan oleh,

$p(i,i+1) = p$ (bola berpindah satu langkah ke kanan)

$p(i,i-1) = 1-p,\ i = 1,\ldots,N-1$ (bola berpindah satu langkah ke kiri)

$p(0,1) = p(N,N-1) = 1$ (bola bergerak ke arah dalam)

Contoh 1.4

Curah hujan (*rainfall*). Misal S_t menyatakan keadaan cuaca (*hujan* atau *tidak hujan*) pada hari *t*. Sate space dari rantai Markov S_t, $t = 0, 1, \ldots$ adalah Ω = {Hujan, Tidak hujan). Data pengamatan selama 2.437 hari memberikan matriks frekuensi transisi berikut:

Keadaan cuaca		**T**		
		Tidak hujan	**Hujan**	**Jumlah**
$t-1$	Tidak hujan	1.049	350	1.399
	Hujan	351	687	1.038
Jumlah				2.437

Taksiran peluang transisi

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1.049/1.399 & 350/1.399 \\ 351/1.038 & 687/1.038 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.5

Proses Bernoulli. Misal $S_1, S_2, \ldots$ barisan peubah acak Bernoulli dengan $P(S_t = 1) = p$ dan $P(S_t = 0) = 1 - p = q$. Koleksi peubah acak $\{S_t\}_{t=1}^{\infty}$ dinamakan proses Bernoulli.

1. Tuliskan deskripsi proses
2. Konstruksi suatu barisan proses Bernoulli

Jawab.

1. Sate space $\Omega = \{0, 1\}$, index waktu set $\Psi = \{1, 2, \ldots\}$
2. Sampel barisan proses Bernoulli diperoleh melalui lantunan mata uang dengan hasil H = head, T = tail. Jika H = 1 dan T = 0, diperoleh suatu realisasi barisan Bernoulli.

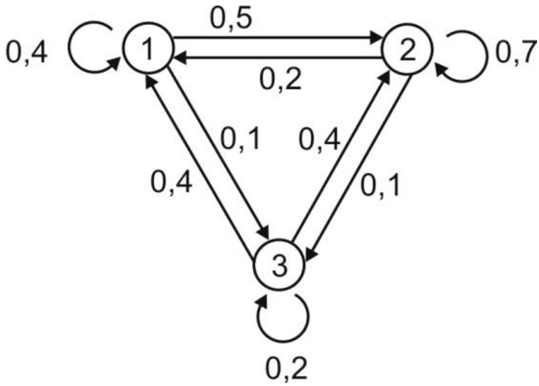
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mata uang	H	T	T	H	H	H	T	H	H	T
S_t	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0

Matriks $\mathrm{P} = (p_{ij})$ dinamakan matriks peluang transisi (matriks transisi atau matriks stokastik). Matriks P memenuhi syarat normalisasi $\mathbf{P1 = 1}$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)'$. Matriks transisi rantai Markov direpresentasikan melalui graf dengan *vertex* menyatakan *state* dan *directed edge* (i, j) menyatakan peluang transisi dari state i ke state j.

Contoh 1.6

State space $\Omega = \{1, 2, 3\}$, dan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 4/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 7/10 & 1/10 \\ 4/10 & 4/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$



Gambar 1.1.
Graf Berarah untuk Matriks Transisi *P*

Simulasi rantai Markov. Misal $\Omega = \{1, 2, 3\}$ dan $P(S_t = 1) = a$, $P(S_t = 2) = b$, dan $P(S_t = 3) = c$, $a + b + c = 1$. Generate suatu rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan distribusi awal $P(S_0 = i) = (1/3, 1/3, 1/3)$. Proses simulasi dilakukan sebagai berikut: Generate bilangan acak uniform $p \sim U(0, 1)$. Jika $p < a$, $S_t = 1$, jika $a < p < a + b$, $S_t = 2$, jika $a + b < p < a + b + c$, $S_t = 3$. Misal diketahui bilangan acak $u_1 = 0.429$, $u_2 = 0.156$, $u_3 = 0.146$, $u_4 = 0.951$, $u_5 = 0.644$ dan matriks transisi,

$$P = \begin{pmatrix} 4/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 7/10 & 1/10 \\ 4/10 & 4/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$

Proses simulasi dilakukan sebagai berikut:

1. Dengan distribusi awal $P=(S_0=i)=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, diperoleh $a=b=c=1/3$. karena $u_1=0,429$, maka $S_0=2$.
2. Proses berada pada state 2. Karena $p_{2j}=(2/10,\ 7/10,\ 1/10)$, diperoleh $a=2/10$, $b=7/10$, $c=1/10$. Karena $u_2=0{,}156<a$, maka proses berpindah dari state 2 ke state 1; $S_1=1$.
3. Proses berada pada state 1. Karena $p_{1j}=(4/10=a,\ 5/10=b,\ 1/10=c)$, dan $u_3=0.146<a$, maka proses berada pada state 1; $S_2=1$.

Jika proses iterasi dilanjutkan, diperoleh barisan realisasi rantai Markov: $S_0=2$,
$S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=3,\ S_4=3,\ S_5=2,\ \ldots$ atau disingkat : 2, 1, 1, 3, 3, 2, …

t	u_t	a, b, c	$u_t<a$	$a<u_t<a+b$	$a+b<u_t<a+b+c$	S_t
0	.429	1/3, 1/3, 1/3		Ya		2
1	.156	2/10, 7/10, 1/10	Ya			1
2	.146	4/10, 5/10, 1/10	Ya			1
3	.951	4/10, 5/10, 1/10			Ya	3
4	.921	4/10, 4/10, 2/10			Ya	3
5	.644	4/10, 4/10, 2/10		Ya		2

Contoh 1.7.

Simulasi rantai Markov. Diketahui suatu rantai Markov dengan state $\Omega=\{1,2,3\}$, distribusi awal $P(S_0=i)=(1/3,1/3,1/3)$ dan matriks transisi.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .50 & .25 & .25 \\ .50 & .25 & .25 \end{pmatrix}$$

Simulasi suatu rantai Markov jika sampling dari distribusi uniform $U(0,1)$ memberikan barisan bilangan: .59 .29 .97 .68 .48 .55 .90 .65 .72.

Simulasi dilakukan melalui tabel berikut

Tabel 1.1.

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.59	1/3, 1/3, 1/3		Ya		2
1	.29	.50 .25 .25	Ya			1
2	.97	1 0 0	Ya			1
3	.68	1 0 0	Ya			1
4	.48	1 0 0	Ya			1
5	.55	1 0 0	Ya			1
6	.90	1 0 0	Ya			1
7	.65	1 0 0	Ya			1
8	.72	1 0 0	Ya			1

Diperoleh realisasi proses berupa barisan bilangan: 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,1. Terlihat proses terperangkap di state 1.

Misalkan $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ rantai Markov dengan state space $\Omega=\{1, 2, \dots, N\}$ dan matriks perluang transisi

$$P=\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \cdots & p_{2N} \\ \cdots & & \ddots & & \vdots \\ \cdots & & & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}, \sum_{j\in\Omega} p_{ij}=1,\ i\in\Omega$$

Suatu rantai Markov direpresentasikan melalui ξ_t :

$$\xi_t = \begin{cases} (1,0,0,\ldots,0)' & , \text{ jika } S_t = 1 \\ (0,1,0,\ldots,0)' & , \text{ jika } S_t = 2 \\ \ldots & \\ (0,0,0,\ldots,1)' & , \text{ jika } S_t = N \end{cases}$$

dan model linear

$$\xi_{t+1} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\xi}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1};\ t = 0, 1, \ldots\ E\varepsilon_t = 0$$

Contoh 1.8

Representasi rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ dengan vektor biner $\{\xi_t\}_{t=0}^{T}$. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{1, 2\}$. Realisasi proses $S_0 = 2,\ S_1 = 1,\ S_2 = 2$ memiliki representasi,

$$\xi_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.9

Representasi rantai Markov. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Realisasi proses $S_0 = 3,\ S_1 = 1,\ S_2 = 2$ memiliki representasi,

$$\xi_0 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.10

Representasi rantai Markov. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Realisasi proses $S_0 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1$ memiliki representasi,

$$\xi_0 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \xi_1 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Contoh 1.11

Komponen vektor representasi. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0,1,2\}$ dan vektor representasi $\xi_t = \begin{pmatrix}\xi_{1t}\\ \xi_{2t}\\ \xi_{3t}\end{pmatrix}$. Realisasi proses $S_0 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1$ memiliki representasi $\xi_0 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}0=\xi_{10}\\0\\1\end{pmatrix},\ \xi_1 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}1=\xi_{11}\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}0=\xi_{12}\\1\\0\end{pmatrix}$ dan barisan komponen pertama $\xi_t : \xi_{10} = 0,\ \xi_{11} = 1,\ \xi_{12} = 0.$ Proses penentuan komponen vektor representasi realisasi rantai Markov diringkas dengan tabel:

	t	0	1	2
Realisasi	S_t	2	0	1
Vektor representasi $\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}$	$\xi_t = \begin{pmatrix}\xi_{1t}\\ \xi_{2t}\\ \xi_{3t}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0=\xi_{10}\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1=\xi_{11}\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0=\xi_{12}\\1\\0\end{pmatrix}$
Komponen pertama vektor representasi	ξ_{1t}	0	1	0
Komponen kedua vektor representasi	ξ_{2t}	0	0	1
Komponen ketiga vektor representasi	ξ_{3t}	1	0	0

Contoh 1.12

Komponen vektor representasi. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0, 1\}$ dan vektor representasi $\xi_t = \begin{pmatrix}\xi_{1t}\\ \xi_{2t}\end{pmatrix}$. Komponen vektor representasi dapat diperoleh melalui proses tabulasi:

t	0	1	2	3
S_t	1	1	0	1
$\xi_t \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
ξ_{1t}	0	0	1	0
ξ_{2t}	1	1	0	1

Terlihat bahwa $\xi_{2t} = 1 - \xi_{1t}$

Contoh 1.13

Perkalian matriks peluang transisi dengan vektor representasi. Misal $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0, 1\}$ dan matriks peluang transisi

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{11} & P_{12} \end{pmatrix}$$

Realisasi $S_0 = 1, S_1 = 1, S_2 = 0$ memiliki representasi $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Perkalian P' dengan ξ_t memberikan:

$$P'\xi_0 = P'\xi_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \text{ dan } P'\xi_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Untuk rantai Markov dengan dua state $\Omega = \{0,1\}, \xi_t' = (\xi_{1t} \;\; \xi_{2t}), \xi_{2t} = 1 - \xi_{1t}$ (lihat contoh di atas), dan matriks transisi,

$$P' = \begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Persamaan $\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\xi}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ menjadi $\begin{pmatrix} \xi_{1,t+1} \\ \xi_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{1,t} \\ \xi_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{1,t+1} \\ \xi_{2,t+1} \end{pmatrix}$.

Barisan pertama memberikan persamaan

$$\xi_{1,\,t+1} = (1 - p_{22}) + (-1 + p_{11} + p_{22})\xi_{1t} + \varepsilon_{1,t+1}$$

Untuk menyederhanakan, tulis $\xi_{1,t+1} = \xi_{t+1}$, $\xi_{1t} = \xi_t$, $1 - p_{22} = c$, dan $(-1 + p_{11} + p_{22}) = \phi$, persamaan menjadi;

$$\xi_{t+1} = c + \phi\xi_t + \varepsilon_{t+1},\; t = 0,1,\ldots T$$

Substitusi $t = 0,1,2,\ldots,T$ menghasilkan

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c + \phi\xi_0 + \varepsilon_1 \\
\xi_2 &= c + \phi\xi_1 + \varepsilon_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{T+1} &= c + \phi\xi_T + \varepsilon_{T+1}
\end{aligned}$$

Dengan notasi matriks dan vektor, diperoleh

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_{T+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 \\ 1 & \xi_1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_{T+1} \end{pmatrix}$$

Tulisan persamaan di atas sebagai;

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Taksiran kuadrat terkecil $\widehat{\beta}$ dan β diberikan oleh

$$\widehat{\beta} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}$$

Contoh 1.14

Regresi sederhana $Y = \beta_0 + \beta_1 X$. Vektor $\boldsymbol{Y}$ dan matriks $\boldsymbol{X}$ diberikan oleh

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

dan

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\left(X'X\right)^{-1} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

atau

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad , \; \widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \, \overline{x}$$

Kemudian dengan

$$Y = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_{T+1} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 \\ 1 & \xi_1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_T \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} c \\ \phi \end{pmatrix}$$

diperoleh

$$X'X = \begin{pmatrix} T+1 & \sum_{t=0}^{T}\xi_t \\ \sum_{t=0}^{T}\xi_t & \sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1} \\ \sum_{t=0}^{T}\xi_t\,\xi_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$\left(X'X\right)^{-1} = \frac{1}{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 & -\sum_{t=0}^{T}\xi_t \\ -\sum_{t=0}^{T}\xi_t & T+1 \end{pmatrix}$$

dan

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \frac{1}{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 & -\sum_{t=0}^{T}\xi_t \\ -\sum_{t=0}^{T}\xi_t & T+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1} \\ \sum_{t=0}^{T}\xi_t\xi_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi} = \frac{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t\,\xi_{t+1} - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)\left(\sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1}\right)}{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)^2}, \quad \hat{c} = \tfrac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1} - \hat{\phi}\,\tfrac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\xi_t$$

Tabel berikut memperlihatkan proses komputasi penaksiran parameter ϕ dan c.

t	ξ_t	ξ_{t+1}	$\xi_t\,\xi_{t+1}$	ξ_t^2
0	ξ_0	ξ_1	$\xi_0\,\xi_1$	ξ_0^2
1	ξ_1	ξ_2	$\xi_1\,\xi_2$	ξ_1^2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
T	ξ_T	ξ_{T+1}	$\xi_T\,\xi_{T+1}$	ξ_T^2
	$\sum_{t=0}^{T}\xi_t$	$\sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1}$	$\sum_{t=0}^{T}\xi_t\xi_{t+1}$	$\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2$

Contoh 1.15:
Estimasi Parameter

Diketahui komponen vektor representasi rantai Markov $\left(\left\{S_t\right\}_{t=0}^{T}, \Omega=\left\{0, 1\right\}\right)$ $\xi_t = \xi_{1t}$, $t = 0, \ldots 9$ adalah 1000000111. Proses tabulasi memberikan:

t	ξ_t	ξ_{t+1}	$\xi_t\ \xi_{t+1}$	ξ_t^2
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	1	0	0
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
T = 9	1	.	.	1
	$\sum_{t=0}^{9}\xi_t = 4$	$\sum_{t=0}^{9}\xi_{t+1} = 3$	$\sum_{t=0}^{T}\xi_t\xi_{t+1} = 2$	$\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 = 4$

$$\hat{\phi} = \frac{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t\xi_{t+1} - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)\left(\sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1}\right)}{(T+1)\sum_{t=0}^{T}\xi_t^2 - \left(\sum_{t=0}^{T}\xi_t\right)^2} = \frac{10\sum_{t=0}^{9}\xi_t\xi_{t+1} - \left(\sum_{t=0}^{9}\xi_t\right)\left(\sum_{t=0}^{9}\xi_{t+1}\right)}{10\sum_{t=0}^{9}\xi_t^2 - \left(\sum_{t=0}^{9}\xi_t\right)}$$

$$= \frac{10\times 2 - 4\times 3}{10\times 4 - 4^2} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

dan

$$\hat{c} = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\xi_{t+1} - \hat{\phi}\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\xi_t = \frac{1}{10}\sum_{t=0}^{9}\xi_{t+1} - \hat{\phi}\frac{1}{10}\sum_{t=0}^{9}\xi_t$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{3}\times\frac{4}{10} = \frac{3}{10} - \frac{4}{30} = \frac{1}{6}$$

Contoh 1.16

Tabel kontingensi. Diketahui komponen vektor representasi rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{T}, \Omega=\{0, 1\}\right)$ $\xi_t = \xi_{1t}$, $t = 0, \ldots 9$ adalah 1000000111.

Proses tabulasi memberikan

t	ξ_t	ξ_{t+1}	Transisi (0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
0	1	0			x	
1	0	0	x			
2	0	0	x			
3	0	0	x			
4	0	0	x			
5	0	0	x			
6	0	1		x		
7	1	1				x
8	1	1				x
T = 9	1					.
	$\sum_{t=0}^{9} \xi_t = 4$	$\sum_{t=0}^{9} \xi_{t+1} = 3$	$\sum = 5$	$\sum = 1$	$\sum = 1$	$\sum = 2$

Matriks frekuensi transisi **O**

$$\boldsymbol{O} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} \\ o_{21} & o_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.17

Estimasi peluang transisi. Misalkan two-state rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{T}$, dengan $\Omega = \{1, 2\}$

$$\xi_t = \begin{cases} 1 \ , \ S_t = 1 \\ 0 \ , \ S_t = 2 \end{cases}$$

dan matriks peluang transisi

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Misal $O = \left(o_{ij}, i, j = 1, 2\right)$, dengan $o_{ij} =$ frekuensi transisi dari state i ke state j. Matriks ***O*** dinamakan matriks transition count (matriks frekuensi transisi) dari barisan $S_0, S_1, \ldots, S_T$. Dengan menuliskan elemen matriks transisi ***O.***

$$O = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} \\ o_{21} & o_{22} \end{pmatrix}$$

Taksiran peluang transisi

$$\hat{p}_{11} = \frac{o_{11}}{o_{11} + o_{12}}, \ \hat{p}_{22} = \frac{o_{22}}{o_{21} + o_{22}}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0, 1\}$ dan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Tentukan peluang transisi $p_{00}, \ p_{11}, \ p_{01}, \ p_{10}$!

2) Diketahui rantai Markov dengan state space $\Omega = \{1, 2, 3\}$ dan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .6 & 0 & .4 \\ .2 & .5 & .3 \end{pmatrix}$$

Tentukan peluang transisi $p(i, j), \ i, j = 1, 2, 3$!

3) Banyaknya peserta pada hari $t, S_t,$ suatu mata kuliah diklasifikasikan dalam tiga kategori: 1 = kurang dari 20 peserta, 2 = antara 20 sampai 40,3 = lebih dari 40 peserta. Data harian peserta memberikan matriks transisi.

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .50 & .25 & .25 \\ .50 & .25 & .25 \end{pmatrix}$$

Visualisasikan matriks transisi P dengan graf berarah!

4) Pemirsa televisi diklasifikasikan dalam enam kategori: 0 = tidak pernah, 1 = hanya TVRI, 2 = 2 jam/hari, 3 = 3 jam/hari, 4 = 4 jam/hari dan 5 = lima jam/hari atau lebih. Transisi dari suatu state ke state lain dimodelkan melalui matriks transisi.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .5 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ .1 & 0 & .5 & .3 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & .7 & .1 & .2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambarkan matriks transisi melalui diagram graf berarah!

5) Misalkan untuk suatu produk detergen terdapat empat merek A, B, C, D. Misalkan pola pilihan produk pada minggu t, S_t, $t = 0, 1, \ldots,$ mengikuti rantai Markov dengan peluang transisi

$$P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} .4 & .2 & .1 & .3 \\ .4 & .3 & .2 & .1 \\ .6 & .1 & .1 & .2 \\ .2 & .4 & .3 & .1 \end{pmatrix}$$

Tentukan diagram transisi garf berarah dari matriks detergen!

6) Tentukan diagram transisi graf berarah dari matriks transisi!

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} .1 & .2 & .7 & 0 \\ .2 & .3 & .3 & .2 \\ .3 & .1 & .1 & .5 \\ .4 & .3 & .2 & .1 \end{pmatrix}$$

7) Misalkan suatu tangki air memiliki kapasitas 3 m^2. Misal S_t menyatakan isi tangki pada hari t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, dengan state space $\Omega = \{0,1,2,3\}$. Setiap hari dikeluarkan 1 m^2. Berikan interpretasi dan diagram transisi fluktuasi isi tangki berdasarkan matriks peluang transisi.

$$P = \begin{pmatrix} .6 & .2 & .1 & .1 \\ .4 & .4 & .1 & .1 \\ .3 & .3 & .2 & .2 \\ .4 & .5 & .1 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Suatu rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state $\Omega = \{0,1,2\}$ memiliki matriks peluang transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} .1 & .2 & .7 \\ .9 & .1 & 0 \\ .1 & .8 & .1 \end{pmatrix}$$

dan distribusi awal

i	0	1	2
$P(S_0 = i)$	.3	.4	.3

Tentukan realisasi rantai Markov jika sampling dari distribusi uniform $U(0,1)$ menghasilkan bilangan acak: .22 .78 .26 .04 .33 .46 .09 .52 .91 .38 .67 .56 .13

9) Suatu rantai Markov $S_0, S_1, S_2, \ldots$ memiliki matriks peluang transisi.

$$P=\begin{pmatrix} .7 & .2 & .1 \\ 0 & .6 & .4 \\ .5 & 0 & .5 \end{pmatrix}$$

dan distribusi awal

i	0	1	2
$P(S_0=i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Tentukan realisasi proses berdasarkan bilangan acak: .57 .69 .36 .10 .96 .46 .92 .42 .45 .84 .57 .03 .29 .30 .45 .65 .94 .26

10) Diketahui suatu rantai Markov dengan matriks transisi

$$P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .3 & .3 & .4 \\ .4 & .1 & .5 \end{pmatrix}$$

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.59					
1	.29					
2	.97					
3	.68					
4	.48					
5	.55					
6	.90					
7	.65					
8	.72					

11) Diketahui suatu rantai Markov dengan matriks transisi.

$$P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} .1 & .1 & .8 \\ .2 & .2 & .6 \\ .3 & .3 & .4 \end{pmatrix}$$

Lengkapilah tabel realisasi proses berikut:

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.75					
1	.91					
2	.93					
3	.30					
4	.48					
5	.55					
6	.90					
7	.65					
8	.72					

12) Diketahui suatu rantai Markov dengan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} .1 & .1 & .8 \\ .2 & .2 & .6 \\ .3 & .3 & .4 \end{pmatrix}$$

Lengkapilah tabel realisasi proses berikut:

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.75					
1	.91					
2	.93					
3	.30					
4	.48					
5	.55					
6	.76					
7	.45					
8	.26					

13) Suatu rantai Markov memiliki state space $\Omega = \{0, 1\}$. Tentukan vektor representasi ξ_t dan komponen pertama ξ_{1t}. Realisasi proses: 1, 1, 1, 0, 0, 1.

14) Suatu rantai Markov memiliki state space $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Tentukan vektor representasi ξ_t dan komponen pertama ξ_{1t}. Realisasi proses: 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0.
15) Suatu rantai Markov memiliki state space $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Tentukan vektor representasi ξ_t dan komponen pertama ξ_{1t}. Realisasi proses: 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 3, 3, 2, 1.
16) Diketahui rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{0, 1, 2,\}$. Jika $S_t = i$, maka elemen ke-j dari vektor ξ_{t+1}, $\xi_{j,\,t+1}$,

$$\xi_{j,\,t+1} \big| S_t = i = \begin{cases} 1 \text{ , dengan peluang } p_{ij} \\ 0 \text{ , dengan peluang } 1 - p_{ij} \end{cases}$$

Tunjukkan nilai ekspektasi $E\left(\xi_{j,\,t+1} \big| S_t = i\right) = p_{ij}$ dan $E\left(\xi_{t+1} \big| S_t = i\right) = \begin{pmatrix} p_{i0} \\ p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix}$

17) Diketahui rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ dan matriks peluang transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

Misalkan $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$ suatu realisasi Markov dengan vektor representasi ξ_t, $t = 1, \ldots, 10$. Tentukan $\boldsymbol{P}'\xi_t, t = 1, \ldots, 10$ untuk realisasi 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3 dan

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} .66 & .23 & .11 \\ .46 & .31 & .23 \\ .20 & .31 & .49 \end{pmatrix}$$

18) Sama dengan soal 17, untuk realisasi 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1 dan matriks peluang transisi.

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .6 & 0 & .4 \\ .2 & .5 & .3 \end{pmatrix}$$

RANGKUMAN

Rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Psi, \Omega\right)$ merupakan kuantifikasi evolusi proses terhadap waktu. State space Ω merupakan karakteristik utama rantai Markov. State berkaitan dengan berbagai besaran; tingkat energi, magnitude gempa, banyaknya pemirsa, dan lain-lain. Peluang transisi p_{ij} atau $p(i, j)$ merupakan parameter rantai Markov. Estimasi parameter berdasarkan frekuensi transisi berkaitan dengan tabel kontingensi $O = (o_{ij})$. Melalui reprentasi model linear, parameter peluang transisi ditaksir melalui metode kuadrat terkecil. Diagram transisi melalui graf berarah merupakan alat utama dalam analisis rantai Markov. Melalui diagram transisi, karakteristik suatu rantai Markov dapat dipelajari secara sistematis. Simulasi rantai Markov memberikan suatu realisasi proses berupa barisan bilangan real.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Kotak A dan B berisi m bola. Misal S_t menyatakan banyaknya bola di kotak A pada saat *t*. Kotak B berisi $m - S_t$ bola. Pada $t+1$, diambil satu bola dari *m* bola secara acak dan dipindahkan ke kotak lain. Tentukan peluang transisi $p_{ij} = P\left(S_{t+1} = j \middle| S_t = i\right)$. Misalkan pada saat *t*, kotak A berisi *i* bola; $S_t = i$. Pada saat $t+1$, $S_{t+1} = i-1$ (bola terambil dari kotak A) atau $S_{t+1} = i+1$ (bola terambil dari kotak B). Peluang transisi $P\left(S_{t+1} = i-1 \middle| S_t = i\right) = p_{i,j-1} = ...$

   A. $1/m$

   B. i/m

C. $(m-i)/m$

D. $1/i$

2) Kotak A dan B berisi m bola. Misal pada saat t, kotak A berisi i bola; $S_t = i.$ Pada $t+1$, satu bola dipilih secara acak dan dipindahkan ke kotak lain; atau $S_{t+1} = i+1.$ $P(S_{t+1} = i+1 | S_t = i) = p_{i,i+1} =$ ....

A. $1/m$

B. i/m

C. $(m-i)/m$

D. $1/i$

3) Misalkan $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0,1\}$ dan matriks peluang transisi $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$. Peluang transisi $P(S_{t+1} = 1 | S_t = 0) = p_{01} =$ ....

A. $1/6$

B. $1/4$

C. $3/4$

D. $5/6$

4) Misal $S_t = i,\ t = 0,1,2,\ldots,\ i = 0,1,\ldots,N$ menyatakan posisi suatu bola sepanjang titik diskrit $\{0,1,\ldots,N\}$. Pada $t+1$ bola berpindah satu langkah, ke arah kanan dengan peluang p dan ke arah kiri dengan peluang $1-p$. Jika berada di titik 0 atau N, bola bergerak ke arah dalam dengan peluang 1. Peluang transisi diberikan oleh ....

A. $p(i,i+1) = p,\ p(i,i-1) = 1-p,\ i = 1,\ldots,N-1 \quad p(0,1) = p(N,N-1) = 1$

B. $p(i,i+1) = p, \quad p(i,i-1) = 1-p, \quad i = 1,\ldots,N-1$

C. $p(i,i+1) = p, \quad i = 1,\ldots,N-1 \quad p(0,1) = p(N,N-1) = 1$

D. $p(i,i-1) = 1-p, \quad i = 1,\ldots,N-1 \quad p(0,1) = p(N,N-1) = 1$

5) Misal $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Pengamatan selama 1.571 periode memberikan tabel frekuensi transisi

$$O = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 185 & 74 & 86 & 171 \\ 101 & 41 & 6 & 115 \\ 69 & 45 & 34 & 78 \\ 161 & 103 & 100 & 202 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 516 \\ 263 \\ 226 \\ 566 \end{array}$$

1.571

A. $101/263$
B. $41/263$
C. $6/263$
D. $115/263$

6) Suatu rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{1, 2, 3\}$, memiliki distribusi awal $P(S_0 = i) = (1/3,\ 1/3,\ 1/3),\ i = 1, 2, 3$ dan matriks peluang transisi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .50 & .25 & .25 \\ .50 & .25 & .25 \end{pmatrix}$$

Barisan bilangan acak: .55 .90 .65 .72 dan iterasi proses sebagai berikut.

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.55	1/3, 1/3, 1/3		Ya		2
1	.90	.50 .25 .25			Ya	3
2	.65	.50 .25 .25		Ya		2
3	.72	.50 .25 .25		Ya		2

memberikan realisasi ....

A. 2322
B. 2311
C. 2223
D. 3121

7) Suatu rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ $\Omega = \{1, 2, 3\}$, memiliki distribusi awal $P(S_0 = i) = (1/3, 1/3, 1/3)$, $i = 1, 2, 3$ dan matriks peluang transisi.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilangan acak: .55 .90 .65 .72 dan iterasi proses sebagai berikut.

t	u_t	a, b, c	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.55	1/3, 1/3, 1/3		Ya		2
1	.90	0 1 0		Ya		2
2	.65	0 1 0		Ya		2
3	.72	0 1 0		Ya		2

memberikan realisasi ....
A. 1111
B. 2222
C. 3333
D. 1231

8) Rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, memiliki distribusi awal $P(S_0 = s) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, $s = 0, 1, 2, 3$ dan matriks peluang transisi.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 & 0 \\ .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & .2 & .8 \end{pmatrix}$$

Bilangan acak: .55 .90 .65 .72 dengan iterasi proses sebagai berikut.

t	u_t	a, b, c, d	$u_t < a$	$a < u_t < a+b$	$a+b < u_t < a+b+c$	S_t
0	.55	1/4, 1/4, 1/4			Ya	2
1	.90	.2 .8 0 0		Ya		1
2	.65	.4 .6 0 0		Ya		1
3	.72	.4 .6 0 0		Ya		1

memberikan realisasi ....
A. 0123
B. 0011
C. 1122
D. 2111

9) Diketahui $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\ \Omega = \{0, 1,\}\right)$ suatu two-state rantai Markov, $\xi_t = \begin{pmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{1t} \end{pmatrix}$ vektor representasi rantai Markov dan model linear $\xi_{1,t+1} = (1 - p_{22}) + (-1 + p_{11} + p_{22})\xi_{1t} + \varepsilon_{t+1}$. Realisasi $\xi_{10} = 0, \xi_{11} = 1,\ \xi_{12} = 1,\ \xi_{13} = 0,\ \xi_{14} = 0,$ memberikan $\sum_{t=0}^{T} \xi_{1t}$ dan $\sum_{t=0}^{T} \xi_{1,t+1}$ masing-masing ....

A. 2; 2
B. 2; 3
C. 3; 4
D. 4; 4

t	ξ_t	ξ_{t+1}	$\xi_t\ \xi_{t+1}$	ξ_t^2
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	.	.	0
$T = 5$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t = 2$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_{t+1} = 2$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t \xi_{t+1} = 1$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t^2 = 2$

10) Diketahui $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0, 1,\}\right)$ suatu two-state rantai Markov, $\xi_t = \begin{pmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{1t} \end{pmatrix}$ vektor representasi rantai Markov dan model linear $\xi_{1,t+1} = (1 - p_{22}) + (-1 + p_{11} + p_{22})\xi_{1t} + \varepsilon_{t+1}$. Realisasi $\xi_{10} = 0, \xi_{11} = 1, \xi_{12} = 1, \xi_{13} = 0, \xi_{14} = 0,$ memberikan $\sum_{t=0}^{T} \xi_{1t}\ \xi_{1,r+1}$ dan $\sum_{t=0}^{T} \xi_{1t}^2$ masing-masing ....

A. 2; 2
B. 0; 3
C. 3; 0
D. 1; 2

t	ξ_t	ξ_{t+1}	$\xi_t\ \xi_{t+1}$	ξ_t^2
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	.	.	0
$T = 5$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t = 2$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_{t+1} = 2$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t \xi_{t+1} = 1$	$\sum_{t=0}^{4} \xi_t^2 = 2$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Distribusi Stasioner

Suatu rantai Markov dikarakterisasikan oleh matriks peluang transisi ***P*** dan distribusi stasioner π. Permasalahan penentuan distribusi stasioner π jika diketahui matriks transisi ***P*** diselesaikan dengan analisis nilai dan vektor eigen. Penentuan matriks transisi P jika diketahui distribusi stasioner π diselesaikan dengan pendekatan simulasi Monte Carlo.

Contoh 1.18

Tentukan suatu rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{1,2,3,4\}$ dan distribusi stasioner $\pi_i = P(S_t = i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Matriks transisi memenuhi (Syarat reversibility).

$$\pi_i \, p_{ij} = \pi_j \, p_{ji}$$

Karena $\pi_i = \pi_j$, maka $p_{ij} = p_{ji}$

Jadi, agar $\pi_i = 1/4$, $i = 1,2,3,4$, P matriks simetri.

Misal $\pi^{(n)}$, $n = 0,1,2,\ldots$, suatu vektor baris dengan elemen $\pi_j^{(n)} = P(S_n = j)$, $j \in \Omega$, peluang setelah dalam n langkah proses berada pada state j. Untuk $n = 1$,

$$\pi_j^{(1)} = P(S_1 = j) = \sum_{i\in\Omega} P(S_1 = j,\, S_0 = i) = \sum_{i\in\Omega} P(S_1 = j \,|\, S_0 = i)\, P(S_0 = i)$$

Dalam bentuk matriks, $\pi_j^{(1)} = \sum_{i\in\Omega} \pi_i^{(0)} \, p_{ij}$, $j \in \Omega$ atau $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \boldsymbol{P}$

Dengan cara yang sama, $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)} \boldsymbol{P}$.

Contoh 1.19

Diketahui rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega=\{0,1\}\right)$ dengan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

dan distribusi awal $\pi^{(0)} = (1,\ 0)$ dengan rumus $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\ \boldsymbol{P}$ diperoleh

$$\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\ \boldsymbol{P} = (1,\ 0)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (1/3\ \ 2/3)$$

$$\boldsymbol{\pi}^{(2)} = \boldsymbol{\pi}^{(1)}\ \boldsymbol{P} = (1/3\ \ 1/3)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (1/9+6/12\ \ 2/9+2/12)$$
$$= \left(\frac{2+9}{18}\ \frac{4+3}{18}\right) = \left(\frac{11}{18}\ \frac{7}{18}\right)$$

Vektor $\boldsymbol{\pi}$ merupakan distribusi **stasioner** rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ **jika** $\boldsymbol{\pi}$ vektor eigen kiri dari ***P*.**

$$\pi = \pi\boldsymbol{P}$$

dan rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dinamakan rantai Markov **ergodik.**

Contoh 1.20

Misal $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan sate space $\Omega = \{1,2,3,4\}$ dan matriks transisi

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 7/10 & 1/10 \\ 4/10 & 4/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$

$\pi = (5/18\ \ 11/18\ \ 2/18)$ merupakan vektor eigen kiri untuk ***P***, karena

$$\left(5/18\ \ 11/18\ \ 2/18\right) = \left(5/18\ \ 11/18\ \ 2/18\right)\begin{pmatrix} 4/10 & 5/10 & 1/10 \\ 2/10 & 7/10 & 1/10 \\ 4/10 & 4/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$

Jadi $\boldsymbol{\pi} = \left(5/18\ \ 11/18\ \ 2/18\right)$ merupakan distribusi stasioner rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\ \Omega,\ \boldsymbol{P}\right)$.

Jika rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\ \Omega,\ \boldsymbol{P}\right)$ ergodik dengan distribusi stasioner $\boldsymbol{\pi}$, maka

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^m = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \cdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

Contoh 1.21

Diketahui rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\ \Omega,\ \boldsymbol{P}\right)$ dengan matriks peluang transisi

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

diperoleh

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} .625 & .3125 & .0625 & .0 \\ .3125 & .375 & .25 & .0625 \\ .0625 & .25 & .375 & .3125 \\ 0 & .0625 & .3125 & .625 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}^4 \begin{pmatrix} .49219 & .32813 & .14063 & .03906 \\ .32813 & .30469 & .22656 & .14063 \\ .14063 & .22656 & .30469 & .32813 \\ .03906 & .14063 & .32813 & .49219 \end{pmatrix}$$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} .2500 & .2500 & .2499 & .2499 \\ .2500 & .2500 & .2499 & .2499 \\ .2499 & .2499 & .2500 & .2500 \\ .2499 & .2499 & .2500 & .2500 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Jadi, rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega, \boldsymbol{P}\right)$ ergodik dengan distribusi stasioner $\pi = (1/4\ \ 1/4\ \ 1/4\ \ 1/4)$.

Contoh 1.22

Distribusi stasioner rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0, 1, 2\}\right)$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diperoleh dari sistem persamaan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{xP}$, dengan $\boldsymbol{x} = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)$.

$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3) = (x_1\ \ x_2\ \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 + x_3 & (1) \\ x_2 = x_1/3 & (2) \\ x_3 = 2x_1/3 + 2x_2/3 & (3) \end{cases}$$

$$x_2 = x_1/3,\ x_3 = 2x_1/3 + 2x_2/3 = 8x_1/9.$$

Distribusi stasioner $\pi = (\pi_1\ \ \pi_2\ \ \pi_3)$

$$\pi_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} = .45,\quad \pi_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} = .15,\quad \pi_3 = \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = .40$$

Contoh 1.23

Diketahui matriks transisi $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

Perkalian matriks memberikan $P^6 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} .424 & .576 \\ .384 & .616 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} .4 & .6 \\ .4 & .6 \end{pmatrix}$

Distribusi stasioner rantai Markov dengan matriks transisi $\boldsymbol{P}$ adalah : $\pi = (.4\ .6)$.

Contoh 1.24

Distribusi stasioner rantai Markov dua-state. Misal $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0,1\}\right)$ rantai Markov dengan matriks peluang transisi. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, 0 < a, b < 1$.

Dapat ditunjukkan

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} b/(a+b) & a/(a+b) \\ b/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Jadi $\pi = \left(b/(a+b)\ \ a/(a+b)\right) = \dfrac{1}{a+b}(b\ a)$ adalah distribusi rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0, 1\}, \boldsymbol{P}\right)$.

Contoh 1.25

Diketahui matriks transisi $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 5/6 \end{pmatrix}$

$a = 1/4, b = 1/6, a+b = 5/12, a/(a+b) = 12/20 = 3/5,\ b/(a+b) = 12/30 = 2/5$

Jadi distribusi stasioner rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0, 1\}, \boldsymbol{P}\right)$ adalah $\pi = (2/5\ \ 3/5)$.

Contoh 1.26

Diketahui rantai Markov $\left(\left\{S_t\right\}_{t=0}^{\infty}, \Omega=\left\{0, 1, 2\right\}\right)$ dengan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} .40 & .50 & .10 \\ .05 & .70 & .25 \\ .05 & .50 & .45 \end{pmatrix}$$

Distribusi stasioner $x = \left(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2\right)$ diperoleh dari persamaan

$$\begin{cases} xP = x \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2\right)\begin{pmatrix} .40 & .50 & .10 \\ .05 & .70 & .25 \\ .05 & .50 & .45 \end{pmatrix} = \left(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2\right) \\ x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 = 1 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} .40x_0 + .05x_1 + .05x_2 = x_0 \\ .50x_0 + .70x_1 + .50x_2 = x_1 \\ .10x_0 + .25x_1 + .45x_2 = x_2 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Karena kendala $x_0 + x_1 + x_2 = 1$, satu persamaan dapat dihapus (misalnya persamaan 3) penyederhanaan memberikan:

$$\begin{cases} -60x_0 + 5x_1 + 5x_2 = 0 & (1) \\ 5x_0 - 3x_1 + 5x_2 = 0 & (2) \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \text{ dan } (1)-5(3) \text{ memberikan } \begin{cases} 65x_0 - 8x_1 & = 0 \\ 65x_0 & = 5 \end{cases}$$

$x_0 = 5/65$, $x_1 = 5/8$, $x_2 = 31/104$. Jadi distribusi stasioner proses $\pi = (5/65 \;\; 5/8 \;\; 31/104)$.

Eksistensi distribusi stasioner. Dua keadaan (state) i dan j dikatakan **accessible**, ditulis $i \mapsto j$ jika terdapat barisan $i \rightarrow k_1 \rightarrow \ldots \rightarrow k_n \mapsto j$ sehingga $p_{1k_1} \neq 0,\ p_{km,\, k_{m+1}} \neq 0, p_{k_n, j} \neq 0.$ Jika j dan i juga accessible, i dan j dikatakan **communicate.** Kumpulan keadaan communicate membentuk kelas ekuivalen. Jika semua keadaan di state space Ω communicate, maka state space Ω dikatakan **irreducible**; state space hanya terdiri dari satu kelas, $i \leftrightarrow j$. Selain itu, Ω merupakan state space **reducible**. Jika terdapat **lebih** dari satu kelas ekivalen rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ reducible dan distribusi stasioner tidak (harus) unik. State space Ω dapat di partisi dalam kelas-kelas ekivalen melalui relasi $\leftrightarrow$.

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing,\ i \neq j$$

Contoh 1.27

Partisi state space. Misal $\Omega = \{0,1,2,3\}$ dan $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

State space $\Omega = \{0,1,2,3\}$ dapat di partisi menjadi $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_3$ dengan $\Omega_0 = \{0\}$, $\Omega_1 = \{1,2\}$, $\Omega_3 = \{3\}$. Rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega\right)$ reducible.

Contoh 1.28

Partisi state space. State $\Omega = \{0,1,2,3\}$ dengan matriks.

$$P=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

dapat di partisi menjadi $\Omega=\{1,2\}\cup\{3,4\}$. Rantai markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\Omega\right)$ reducible.

State space $\Omega=\{1,2,\ldots,N\}$ dengan matriks transisi $\boldsymbol{P}$ dapat di partisi menjadi $\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\ldots,\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing,\ i\neq j$ **jika** matriks $\boldsymbol{P}$ matriks blok segitiga atas (upper block triangular).

$$\boldsymbol{P}(N\times N)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},\ 1\le K\le N$$

Sekali proses berada di state $j,\ j\le K,$ proses tidak mungkin kembali ke state $K+1,\ K+2,\ \ldots,N.$ Jika state space Ω dapat di partisi $\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\ldots,\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing,\quad i\neq j$, rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\Omega\right)$ **reducible.** Rantai Markov yang tidak reducible (not reducible) dinamakan **irreducible.**

Contoh 1.29

Distribusi stasioner tidak unik

Diketahui rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}\right)$ dengan state space $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ dan matriks transisi.

$$P=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 & 0 \\ .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & .2 & .8 \end{pmatrix}$$

$\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$ merupakan kelas ekivalen, State space $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ di partisi menjadi $\Omega=\{1,2\}\cup\{3,4\}$. Vektor $\alpha=(1/4\ 3/4\ 0\ 0)$ dan $\beta=(0\ \ 0\ 1/4\ 3/4)$ merupakan vektor eigen kiri dengan nilai eigen 1. Jika keadaan awal $S_0 \in \{1, 2\}$, distribusi stasioner adalah α dan jika $S_0 \in \{3, 4\}$, distribusi stasioner adalah β.

Konsep **reversibility** berkaitan dengan arah realisasi suatu rantai Markov. Matriks transisi

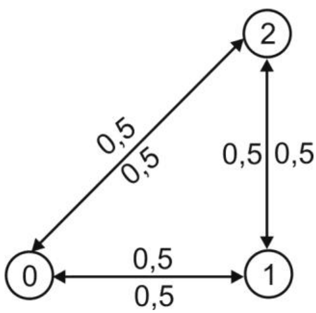
$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mendefinisikan suatu rantai **irreducible.** Barisan $1 \to 3 \to 2 \to 1$ mungkin terjadi, tetapi balikannya $1 \to 2 \to 3 \to 1$ tidak mungkin terjadi karena $p_{23} = 0$. Dengan demikian arah simulasi dapat diketahui. Dalam hal ini, rantai **tidak reversible**.

Contoh 1.30

Diagram transisi. Misal $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi (simetri).

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



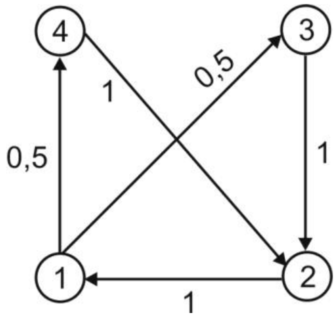
Gambar 1.2
Diagram transisi

Diagram transisi menunjukkan rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, P\right)$ irreducible dan aperiodic. Dari state 0 proses selalu dapat kembali ke state 0, misalnya $0 \to 1 \to 0$. Tetapi dapat juga dalam urutan langkah $0 \to 1 \to 2 \to 0$. State 0 aperiodik Dapat ditunjukkan, state 1 dan 2 juga aperiodik.

Contoh 1.31

Diagram transisi. Misal $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi.

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Gambar 1.3.
Diagram transisi

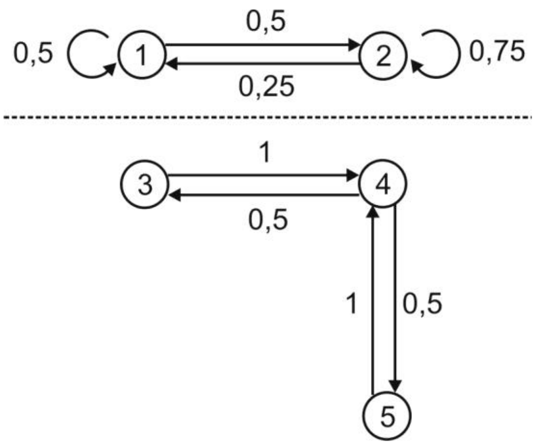
Diagram transisi menunjukkan rantai Markov irreducible dan periodik dengan periode 3.

Contoh 1.32

Irreducible rantai Markov. State space j dikatakan accessible dari state $i, i \to j$, jika $p_{ij}^{(n)} > 0$, untuk suatu integer $n \geq 0$. Dua state *i, j* communicate, notasi $i \leftrightarrow j$, jika $i \to j$ dan $j \to i$. Suatu proses irreducible jika semua state communicate. Relasi communicate merupakan relasi ekivalen, dan melalui relasi communicate state space Ω di partisi dalam kelas-kelas ekivalen.

Suatu rantai Markov irreducible jika hanya terdapat satu kelas ekivalen. Misalkan $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi.

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}$$



Gambar 1.4.

State space Ω di partisi dalam dua kelas ekivalen: $\Omega = \{1,2\} \cup \{3,4,5\}$.

Rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega, P\right)$ reducible

Contoh 1.33
Partisi Matriks transisi:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

memberikan limit P^n

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_0^{(1)} & \pi_1^{(1)} & 0 & 0 \\ \pi_0^{(1)} & \pi_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_0^{(2)} & \pi_1^{(2)} \\ 0 & 0 & \pi_0^{(2)} & \pi_1^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\pi^{(1)} = \left(\pi_0^{(1)} \ \ \pi_1^{(1)}\right)$ diperoleh melalui sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0^{(1)} + \frac{1}{4}\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(0)} \\ \frac{1}{2}\pi_0^{(1)} + \frac{3}{4}\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(0)} \\ \pi_0^{(1)} + \pi_1^{(1)} = 1 \end{cases}$$

atau

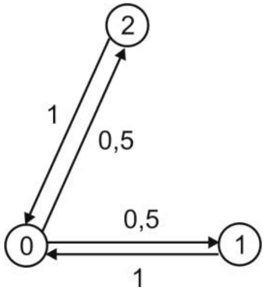
$$\pi_0^{(1)} = \tfrac{1}{3}; \quad \pi_1^{(1)} = \tfrac{2}{3}$$

Dengan cara sama, diperoleh $\pi_0^{(2)} = 1/2$, $\pi_1^{(2)} = 1/2$

Contoh 1.34

State periodik. Misal $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov dengan state space $\Omega = \{0,1,2\}$ dan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Gambar 1.5.

Perhatikan matriks memberikan $P^{2n} = P^2$, $P^{2n+1} = P$

Diagram transisi memperlihatkan state 0 merupakan state periodik. Periode state 0 dihitung melalui rumus

$$d(0) = \gcd\left\{n \geq 1,\ p_{00}^{n} > 0\right\} = \gcd\left\{2, 4, 6, \ldots\right\} = 2$$

Misal $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi P. Barisan $\left(\left\{S_{-t}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$, reversed dari rantai $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ juga suatu rantai Markov. Rantai Markov $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ **reversible** jika matriks transisi rantai $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ sama dengan matriks transisi $\left(\left\{S_{-t}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$; $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j \in \Omega$. Rantai Markov $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ dengan distribusi stasioner π reversible jika dan hanya jika π dan matriks transisi $\boldsymbol{P}$ memenuhi **balanced condition.**

$$\pi_i\, p_{ij} = \pi_j\, p_{ji},\ i, j \in \Omega$$

Himpunan $T = \left\{k, \left(P^k\right)_{ii} > 0,\ k > 0\right\}$ menyatakan himpunan banyaknya langkah untuk revisite state *i*. Pembagian persekutuan terbesar dari himpunan *T* dinamakan **periode** dari state *i*. Suatu rantai Markov di mana setiap state mempunyai periode 1 dikatakan aperiodik. Rantai Markov $\left(\left\{S_t\right\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ periodik jika periode setiap state lebih besar dari 1.

Contoh 1.35

Menghitung periode suatu state. Diketahi matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhitungan memberikan: $p_{00}^{(1)} = 0,\ p_{00}^{(2)} = 0,\ p_{00}^{(3)} = 0,\ p_{00}^{(4)} = 1/2,$ $p_{00}^{(5)} = 0,\ p_{00}^{(6)} = 1/4$ periode state 0 adalah

$$d(0) = \text{gcd}\ \{4, 6, 8, \ldots\} = 2$$

Jadi state 0 periodik dengan periode $d(0) = 2$

Misal $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov irreducible, periodik dengan state space terhitung P, jika terdapat $\pi = (\pi_i)$ sehingga $\pi_i\, p_{ij} = \pi_j\, p_{ji},\ i, j \in \Omega$ maka rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ reversible dan ergodik dengan distribusi stasioner **unik** $\boldsymbol{\pi}$.

Contoh 1.36

Misal $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ suatu rantai Markov irreducible dengan state space $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ dan matriks transisi simeteri $p_{ij} = p_{ji}$. Maka rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}\right)$ reversible dengan distribusi stasioner (**unik**) seragam; $\pi_i = 1/N$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty},\ \Omega = \{0,1\}\right)$ dengan matriks peluang transisi

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Tentukan distribusi stasioner, π, rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0,1\}, \boldsymbol{P}\right)$.

Jawab. $\pi = \left(\frac{b}{a+b} \; \frac{a}{a+b}\right)$, $0 < a + b < 2$. Jika $a = b = 0$, maka $\pi^n \to (1 \;\; 0)$ atau $\pi^{(n)} \to (0 \;\; 1)$, dan $\pi = c(1\;0) + d(0\;1)$, $c + d = 1$. Jika $a = b = 1$, rantai Markov periodik.

2) Tentukan distribusi stasioner rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega = \{0,1,2\}\right)$ dengan matriks transisi.

a. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} .7 & .2 & .1 \\ 0 & .6 & .4 \\ .5 & 0 & .5 \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} .6 & .3 & .1 \\ .3 & .3 & .4 \\ .4 & .1 & .5 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} .1 & .1 & .8 \\ .2 & .2 & .6 \\ .3 & .3 & .5 \end{pmatrix}$

d. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$

3) Suatu bus beroperasi pada suatu lintasan (route) kontinu dengan beberapa pemberhentian. Kedatangan pada suatu pemberhentian diklasifikasikan dalam 3 keadaan: 1. lebih awal dari jadwal; 2. sesuai jadwal; 3. terlambat. Misalkan keadaan kedatangan di pemberhentian merupakan suatu rantai Markov dengan matriks peluang transisi.

$$P = \begin{pmatrix} .5 & .4 & .1 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .2 & .7 \end{pmatrix} \text{ dan state space } \Omega = \{1,2,3\}$$

Tentukan a. Distribusi stasioner π; b. Persentase terlambat dari jadwal, π_2.

4) Tentukan partisi state space $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots, \Omega_i \cap \Omega_j = \phi,\ i \neq j$ rantai Markov $\left(\{S_t\}_{t=0}^{\infty}, \Omega\right)$ dengan matriks transisi

a. $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

d. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 2/10 & 0 & 8/10 \\ 0 & 6/10 & 0 & 4/10 \end{pmatrix}$

e. $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

f. $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

5) Diketahui suatu rantai Markov dengan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan diagram transisi
b. Apakah state 0 periodik (Jawab, tidak periodik)

6) Diketahui rantai Markov pada $\Omega = (1, 2, 3)$ dan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tunjukkan

$P_{11}^{(1)} = 0,\ P_{11}^{(2)} = p_{12}\, p_{21} > 0,\ P_{11}^{(3)} = p_{12}\, p_{23}\, p_{31} > 0;\ \{2, 3\} \subset \{n, p_{11}^{(n)} > 0\}$

gcd $\{2,3\} = 1$. $d(1) = 1$, state 1 aperiodic.

7) Tentukan periode state rantai Markov $d(i),\ i = 0, 1, 2, 3$ dengan matriks transisi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGKUMAN

1. Suatu rantai Markov dengan matriks transisi ***P*** **reducible** jika ***P*** dapat ditulis dalam bentuk.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

2. State j dikatakan **accessible** dari state $i,\ i \to j,$ jika terdapat barisan (state) $i \to k_1 \to k_2 \to \ldots \to k_n \to j$ sehingga $p_{ik_1} \neq 0,\ p_{km}, k_{m+1} \neq 0, p_{k_n j} \neq 0.$ State i dan j communicate, $i \leftrightarrow j,$ jika $i \to j.$ State space Ω **irreducible** jika semua state communicate.

3. Misal $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}, \Omega, \boldsymbol{P}, \pi\right)$ rantai Markov dengan matriks transisi $\boldsymbol{P}$ dan distribusi stasioner (tunggal) π. Rantai reversible jika dan hanya jika $\pi_i\ p_{ij} = \pi_j\ p_{ji},\ i, j \in \Omega$. Misal $\left(\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}, \Omega, \boldsymbol{P}, \pi\right)$ rantai Markov irreducible dengan state space $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$. Jika P simetri maka rantai reversible dan $\pi_i = 1/N$.
4. Periode state $i, d(i) = \text{gcd}\left\{n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$, gcd = pembagian persekutuan terbesar. Jika $\left\{n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\right\} = \varnothing$, maka $d(i) = 1$ dan state i aperiodic.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Distribusi stasioner rantai Markov dengan matriks transisi $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah $\pi = ...$
   A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$
   C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$
   D. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2) Vektor π merupakan distribusi stasioner rantai Markov dengan matriks transisi P jika ....
   A. $\pi P = \pi$
   B. $P\pi = \pi$
   C. $P\pi = 1$
   D. $P = \pi$

3) Distribusi stasioner, π, rantai Markov dengan matriks transisi $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ ....
   A. $\begin{pmatrix} 10/19 & 9/19 \end{pmatrix}$
   B. $\begin{pmatrix} 9/19 & 10/19 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

4) Misal $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

State space $\Omega = \{1, 2, 3\}$ di partisi menjadi ....

A. $\{1\} \cup \{2, 3\}$

B. $\{1, 2\} \cup \{3\}$

C. $\{1, 3\} \cup \{2\}$

D. $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

5) Misal $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ suatu rantai Markov dengan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

State space $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ di partisi menjadi ....

A. $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}$

B. $\{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5\}$

C. $\{1\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{5\}$

D. $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$

6) Diketahui rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ dan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

State 0 priodik dengan periode ....

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

7) Diketahui rantai Markov $\{S_t\}_{t=0}^{\infty}$ dengan state space $\Omega = \{1, 2, 3\}$ dan matriks transisi

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d(1) = ...$

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B
2) C
3) B
4) A
5) C
6) A
7) B
8) D
9) A
10) D

Tes Formatif 2

1) D
2) A
3) A
4) B
5) B
6) B
7) A

Daftar Pustaka

Taylor, H.M., Karlin S. (1984). *An Introduction to Stochastic Modeling.* Academic Press.