Modul 1

Kinematika Partikel

Drs. Yosaphat Sumardi, M.Pd., M.Si.

PENDAHULUAN

Dalam modul ini Anda akan mempelajari berbagai konsep dalam kinematika yang berhubungan dengan penggambaran geometris tentang gerak (atau lintasan) benda, tanpa memperhatikan gaya-gaya yang menghasilkan perubahan gerak atau perubahan sifat lain seperti bentuk dan ukuran benda. Secara lebih khusus kinematika berhubungan dengan konsep-konsep dan hubungan antara posisi, kecepatan, percepatan, dan waktu.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat menganalisis konsep-konsep kinematika partikel dalam sistem-sistem koordinat Cartesian, polar bidang, silinder, dan bola. Untuk mewujudkan tujuan itu Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan beberapa asas analisis vektor yang banyak dipakai dalam mekanika;
2. menjelaskan sistem koordinat Cartesian;
3. menjelaskan sistem koordinat polar bidang;
4. menjelaskan sistem koordinat silinder;
5. menjelaskan sistem koordinat bola;
6. menganalisis gerak partikel dalam koordinat Cartesian;
7. menganalisis gerak partikel dalam koordinat polar bidang;
8. menganalisis gerak partikel dalam koordinat silinder;
9. menganalisis gerak partikel dalam koordinat bola;
10. menjelaskan gerak melingkar pada bidang datar;
11. menghitung besaran-besaran yang terkait dengan gerak melingkar pada bidang datar.

Modul ini mencakup dua kegiatan belajar, yaitu:

1. Kegiatan Belajar : Asas-asas Analisis Vektor dan Sistem Koordinat

Kegiatan belajar ini membahas beberapa asas analisis vektor: sifat dan penjumlahan vektor, perkalian skalar dan perkalian vektor, vektor satuan dan cosinus arahan, operator differensial vektor (*gradient, divergence,* dan *curl*), dan sistem-sistem koordinat: Cartesian, polar bidang, silinder, dan bola.

2. Kegiatan Belajar 2: Kinematika dalam Sistem Koordinat
   Kegiatan belajar ini membahas gerak partikel dalam sistem-sistem koordinat: Cartesian, polar bidang, silinder, bola, dan gerak melingkar.
   Agar Anda berhasil mempelajari modul ini secara baik dan mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakan strategi belajar berikut.
   a. Bacalah glosarium pada akhir modul ini, yang berisi istilah-istilah penting yang digunakan dalam modul ini.
   b. Bacalah secara cepat keseluruhan isi modul untuk mengenal lebih jauh istilah-istilah penting yang telah Anda baca dalam glosarium.
   c. Pelajari secara cermat bahan ajar dalam masing-masing kegiatan belajar, tambahkan catatan-catatan yang penting bagi Anda. Pelajari baik-baik contoh yang diberikan sebagai pengayaan terhadap konsep-konsep yang sedang Anda pelajari.
   d. Jawablah pertanyaan dan kerjakan soal-soal latihan yang diberikan. Jika Anda mengalami kesulitan, bacalah rambu-rambu yang diberikan dan contoh-contoh yang berkaitan.
   e. Kerjakan sendiri tes formatif semaksimal mungkin, kemudian cocokkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang tersedia pada bagian akhir modul ini, untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda.
   f. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial yang diselenggarakan untuk mempersiapkan tugas-tugas dan ujian akhir mata kuliah.

Kegiatan Belajar 1

Asas-asas Analisis Vektor dan Sistem Koordinat

Untuk menggambarkan posisi atau gerak suatu benda atau partikel kita perlu memiliki sistem koordinat. Beberapa sistem koordinat yang biasa digunakan adalah koordinat Cartesian, koordinat polar bidang, koordinat silinder, dan koordinat bola. Marilah kita bicarakan beberapa sistem ini satu per satu. Namun demikian, sebelum kita berbicara tentang sistem koordinat, marilah kita mengkaji ulang beberapa konsep tentang analisis vektor yang banyak digunakan dalam pembicaraan berikutnya.

A. BEBERAPA ASAS ANALISIS VEKTOR

1. Sifat dan Penjumlahan Vektor

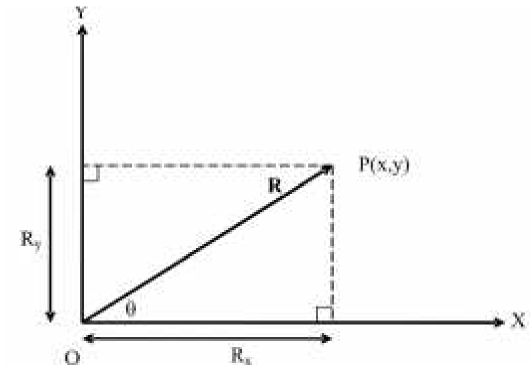
Kebanyakan besaran yang kita jumpai dalam fisika dapat dikelompokkan sebagai besaran skalar atau besaran vektor. Besaran skalar adalah besaran yang dapat dinyatakan dalam besarnya. Contoh besaran skalar antara lain massa, volume, waktu, dan energi. Besaran vektor adalah besaran yang dinyatakan dalam besar dan arahnya. Contoh besaran vektor antara lain pergeseran, kecepatan, percepatan, gaya, dan kuat medan. Lambang besaran vektor biasanya dicetak tebal, misalnya **v** untuk kecepatan; lambang besaran skalar biasanya dicetak normal (tidak tebal), misalnya T untuk temperatur.

Komponen vektor bisa disajikan dengan menggunakan pendekatan analitis. Gambar 1.1 melukiskan komponen vektor **R** dalam dua dimensi. Dua besaran R_x dan R_y secara berturut-turut adalah komponen dari vektor **R** dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y, yang besarnya dapat dituliskan sebagai,

$$R_x = R\cos\theta \quad \text{dan} \quad R_y = R\cos\theta \qquad (1.1)$$

Jika **R** dan θ diketahui, kita dapat mencari R_x dan R_y. Sebaliknya, jika R_x dan R_y diketahui, kita dapat menghitung **R** dan θ melalui hubungan,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \text{dan} \qquad \tan^{-} = \frac{R_y}{R_x} \tag{1.2}$$



Gambar 1.1.
Komponen R_x dan R_y dari vektor **R**.

Contoh 1.1

Marilah kita sekarang menggunakan metode komponen untuk menjumlahkan beberapa vektor seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.2. Tiga buah vektor $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, dan $\mathbf{R}_3$ bekerja pada sebuah titik O, yang secara berturut-turut membentuk sudut $\theta_1 = 45^o$, $\theta_2 = 120^o$, dan $\theta_3 = 210^o$ terhadap sumbu-X positif. Panjang masing-masing vektor tersebut adalah $R_1 = |\mathbf{R_1}| = 4$ satuan, $R_2 = |\mathbf{R}_2| = 5$ satuan, $R_3 = |\mathbf{R}_3| = 6$ satuan. Hitunglah vektor resultan dan arahnya.

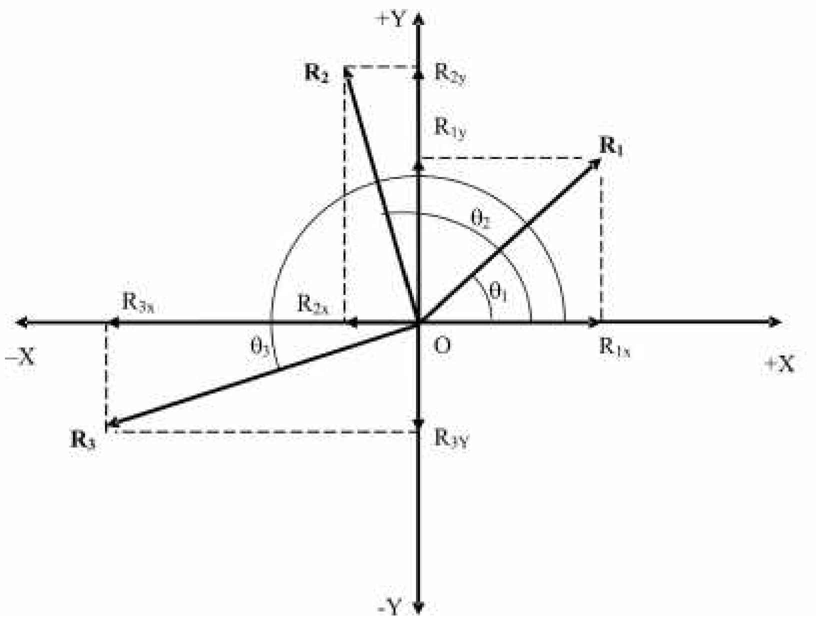
Penyelesaian

Pertama-tama kita menggambarkan koordinat XY dengan titik asal pada titik asal O dan vektor-vektor gaya $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, dan $\mathbf{R_3}$. Kemudian masing-masing vektor diuraikan menjadi komponen-komponennya. Meskipun komponen-komponennya digambarkan dalam bentuk vektor, namun lambangnya dicetak **tidak** tebal untuk menunjukkan panjang komponen saja. Jika R_X dan R_Y menunjukkan jumlah komponen-komponen (atau komponen dari resultan) dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y, maka kita peroleh,

$$R_X = R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} = \sum_{i=1}^{3} R_{ix}$$
$$R_Y = R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} = \sum_{i=1}^{3} R_{iy} \tag{1.3}$$

dengan $R_{1x} = R_1 \cos \theta_1$, $R_{1y} = R_1 \sin \theta_1$, ... dan sebagainya, dan tanda jumlahan Σ menunjukkan jumlah semua komponen i, dari i = 1 sampai i = 3. Memperlakukan R_X dan R_Y sebagai komponen tunggal dan mengacu Persamaan (1.2), kita mendapatkan resultan vektor sebagai berikut:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} \qquad \text{dan} \qquad \tan^{-} = \frac{R_Y}{R_X} \tag{1.4}$$

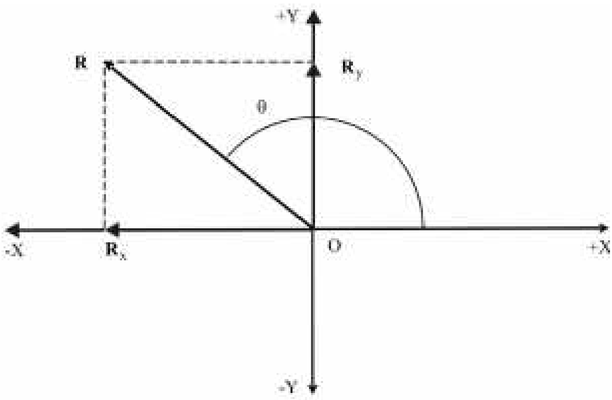


Gambar 1.2.
Komponen vektor **R₁**, **R₂**, dan **R₃**.

Dengan memasukkan nilai besaran-besaran yang telah diketahui ke dalam Persamaan (1.3) dan Persamaan (1.4) kita memperoleh,

$$R_X = R_1 \cos 45^o + R_2 \cos 120^o + R_3 \cos 210^o$$
$$R_X = 4\cos 45^o + 5\cos 120^o + 6\cos 210^o$$
$$R_x = 2,8284 - 2,5000 - 5,1962 = -4,8678 \text{ satuan.}$$
$$R_y = R_1 \sin 45^o + R_2 \sin 120^o + R_3 \sin 210^o$$
$$R_y = 4\sin 45^o + 5\sin 120^o + 6\sin 210^o$$
$$R_y = 2,8284 + 4,3301 - 3,000 = -4,1585 \text{ satuan.}$$
$$R = \sqrt{(-4,8678)^2 + (4,1585)^2}$$
$$R = \sqrt{23,6955 + 17,2931}$$
$$R = \sqrt{40,9886} = 6,4022 \text{ satuan.}$$
$$\tan^{-} = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4,1585}{-4,8678} = -0,8543$$
$$^{-} = (180^o - 40,5068^o) = 139,4932^o \text{ terhadap sumbu-X positif.}$$

Vektor resultan R dan arahnya ditunjukkan dalam Gambar 1.3.



Gambar 1.3.
Vektor resultan dan arahnya

Kita dapat memperluas prosedur ini pada n vektor dalam tiga-dimensi. Dalam Gambar 1.1 vektor **R** dapat diuraikan menjadi dua komponen R_x dan

R_y. Dalam Gambar 1.4 ditunjukkan bahwa vektor **R** bisa diuraikan menjadi tiga komponen, yaitu R_x, R_y, dan R_z secara berturut-turut dalam arah sumbu +X, +Y, dan +Z. Oleh karena itu resultan **R** dari vektor-vektor $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, dan $\mathbf{R_3}$, bisa dituliskan sebagai,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \ldots + \mathbf{R}_n = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{R_i} \tag{1.5}$$

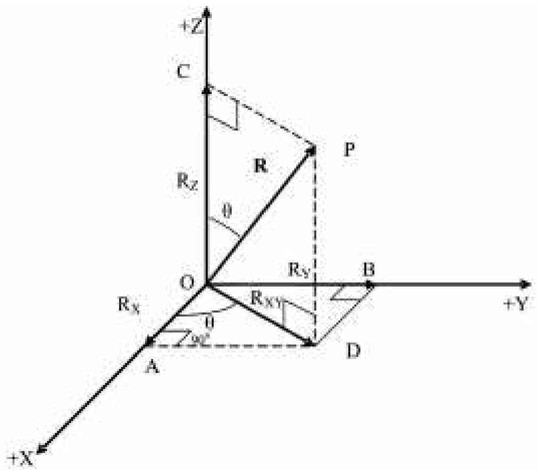
$$\text{Dengan } R_X = R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + \ldots + R_{nx} = \sum_{i=1}^{n} R_{ix} \tag{1.6}$$

pernyataan serupa berlaku untuk R_Y dan R_Z. Kita memperoleh vektor resultan sebagai,

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$$

$$\tan^{-} = \frac{R_{XY}}{R_Z} = \frac{\sqrt{R_X^2 + R_Y^2}}{R_Z}$$

$$\tan \text{¤} = \frac{R_Y}{R_X} \tag{1.9}$$



Gambar 1.4.
Komponen-komponen R_X, R_Y, dan R_Z dari vektor **R** dalam tiga dimensi.

Hubungan antara vektor dan komponen-komponennya bisa juga dituliskan sebagai,

$$\mathbf{A} = [A_x, A_y] \quad \text{dalam dua dimensi} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z] \quad \text{dalam tiga dimensi} \tag{1.11}$$

Beberapa sifat vektor dalam bentuk komponen-komponennya bisa dituliskan sebagai berikut:

a. Kesamaan vektor:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{atau} \quad [A_x, A_y, A_z] = [B_x, B_y, B_z]$$

yang berarti (1.12)

$$A_x = B_x, \quad A_y = B_y, \quad A_z = B_z$$

b. Perkalian skalar

$$s\mathbf{A} = s[A_x, A_y, A_z] = [sA_x, sA_y, sA_z] \tag{1.13}$$

c. Vektor null:
Vektor null mempunyai besar nol dan arah tak terdefinisikan

$$\mathbf{0} = [0, 0, 0] \tag{1.14}$$

d. Penjumlahan vektor:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [R_x, R_y, R_z]$$

dengan (1.15)

$$R_x = A_x + B_x, \quad R_y = A_y + B_y, \quad R_z = A_z + B_z$$

e. Hukum komutatif:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{1.16}$$

f. Hukum asosiatif:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

dan (1.17)

$$(ns)\mathbf{A} = (ns)[A_x, A_y, A_z] = (n)[sA_x, sA_y, sA_z] = n(s\mathbf{A})$$

g. Hukum distributif:

$$(n+s)\mathbf{A} = n\mathbf{A} + s\mathbf{A}$$
$$s(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = s\mathbf{A} + s\mathbf{B} \qquad (1.18)$$

2. Perkalian Skalar dan Perkalian Vektor

Kini kita akan membicarakan secara singkat tentang perkalian vektor, yang mencakup perkalian skalar dan perkalian vektor. Perkalian skalar atau perkalian titik dua vektor **A** dan **B** didefinisikan sebagai besaran skalar S yang diperoleh dengan mengalikan besar vektor **A** dan besar vektor **B**, kemudian mengalikannya dengan cosinus sudut antara dua vektor itu, yaitu:

$$S = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = AB\cos\theta \qquad \text{untuk} \qquad 0 < \theta < \pi \qquad (1.19)$$

Perkalian titik dua titik sama dengan nol, yaitu **A.B = 0,** jika salah satu dari tiga syarat dipenuhi: A = 0, B = 0, atau **A** tegak lurus pada **B** (yaitu $\theta = 90^o$). Jika **A** tegak lurus pada **B**, vektor **A** dikatakan ortogonal terhadap vektor **B**.

Perkalian skalar bersifat komutatif, sehingga dapat dituliskan,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (1.20)$$

Jadi urutan dalam perkalian vektor tidak penting.

Jika dua vektor sama, yaitu **A** = **B**, maka cos (**A**,**B**) = cos θ = cos 0^o = 1, sehingga dapat dituliskan,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \left|A^2\right| = A^2 \qquad (1.21)$$

Perkalian vektor atau perkalian silang dua vektor **A** dan **B** didefinisikan sebagai vektor **C**. Besar vektor **C** ini sama dengan besar vektor **A** dikalikan besar vektor **B**, kemudian dikalikan dengan sinus sudut antara vektor **A** dan vektor **B**, sedangkan arah vektor **C** tegak lurus pada vektor **A** dan vektor **B**, atau tegak lurus pada bidang yang mengandung **A** maupun **B**. Kita menuliskan perkalian vektor itu sebagai:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} \qquad (1.22)$$

Besar vektor **C** adalah

$$C = |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = AB\sin\text{¯} \qquad \text{untuk} \qquad 0 < \text{¯} < \text{®} \quad (1.23)$$

Oleh karena itu C akan menjadi nol jika A = 0, B = 0, atau sudut ¯ adalah nol. Arah **C** mengikuti aturan sekerup putar kanan; dalam hal ini, jika diputar dari vektor **A** ke arah vektor **B** melalui sudut terkecil, maka arah vektor **C** searah maju atau mundurnya sekerup putar kanan: jika putaran itu searah jarum jam, maka arah **C** akan maju, jika berlawanan arah putaran jam arah vektor **C** akan mundur.

Pekalian vektor bersifat tidak komutatif atau antikomutatif, yang dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad (1.24)$$

Perkalian vektor dari suatu vektor terhadap dirinya sendiri adalah nol dan dituliskan sebagai,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (1.25)$$

Suku ruas kanan persamaan (1.25) ini adalah vektor null, yang mengikuti aturan,

$$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (1.26)$$

Perkalian vektor mengikuti hukum distributif, yang dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$
$$\text{dan} \qquad (1.27)$$
$$\text{s}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (s\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(s\mathbf{B})$$

3. Vektor Satuan dan Cosinus Arahan

Sekarang kita akan membicarakan vektor satuan atau vektor basis. Sesuai dengan namanya, vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu dan mempunyai arah. Untuk sistem koordinat Cartesian, vektor-vektor satuannya merupakan himpunan tiga vektor satuan yang saling tegak lurus (atau ortogonal), satu vektor satuan untuk setiap dimensi. Vektor-vektor satuan ini ditunjukkan dengan lambang $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$, dengan $\hat{\mathbf{i}}$ berada pada sepanjang sumbu-X, $\hat{\mathbf{j}}$ sepanjang sumbu-Y, dan $\hat{\mathbf{k}}$ sepanjang sumbu-Z, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.5. (Beberapa notasi lain kadang-kadang digunakan, misalnya $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, atau $\mathbf{x}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{u}_i$ dengan i = 1, 2, 3.). Menurut definisi, panjang vektor satuan dapat dituliskan sebagai,

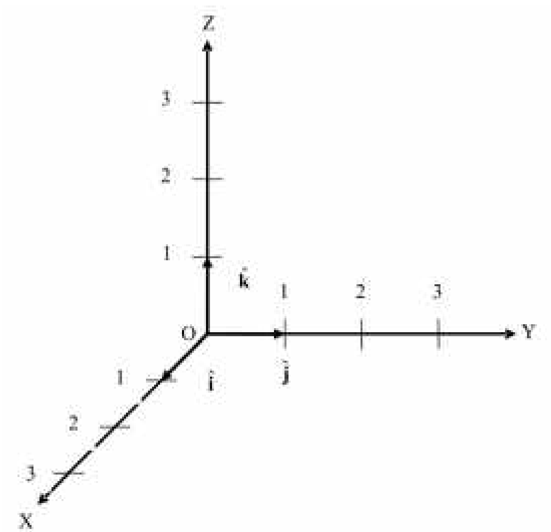
$$\left|\hat{\mathbf{i}}\right| = \left|\hat{\mathbf{j}}\right| = \left|\hat{\mathbf{k}}\right| = 1 \qquad \text{atau} \qquad i = j = k = 1 \tag{1.28a}$$

atau dalam bentuk komponen-komponennya,

$$\hat{\mathbf{i}} = [1, 0, 0], \quad \hat{\mathbf{j}} = [0, 1, 0], \quad \hat{\mathbf{k}} = [0, 0, 1] \tag{1-28b}$$

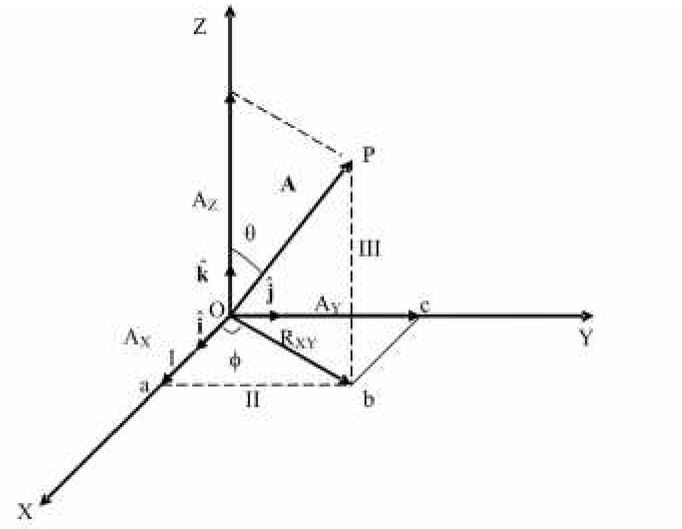
Dengan menggunakan definisi vektor satuan tersebut, kita dapat menuliskan vektor **A** dalam bentuk komponen sebagai,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{1.29}$$



Gambar 1.5.
Vektor satuan dalam sistem koordinat Cartesian.

dengan A_x, A_y, dan A_z adalah komponen-komponen vektor **A** sepanjang tiga sumbu, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.6. Terlihat bahwa perkalian besaran skalar (misalnya A_x) dengan vektor satuan (misalnya $\hat{\mathbf{i}}$) memberikan arah pada besaran skalar itu sesuai dengan arah vektor satuan tanpa mengubah besarnya.



Gambar 1.6.
Komponen-komponen vektor $\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$.

Dengan menggunakan definisi vektor satuan, perkalian titik, dan perkalian silang, kita dapat memperoleh hubungan vektor-vektor satuan sebagai berikut

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \tag{1.30a}$$

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{1.30b}$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{1.30c}$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} = -\mathbf{j}\times\hat{\mathbf{i}} \tag{1.30d}$$

$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}} \tag{1.30e}$$

$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} \tag{1.30f}$$

Penjumlahan, selisih, perkalian titik, dan perkalian silang vektor bisa dituliskan ulang dalam bentuk yang lebih ringkas dengan menggunakan notasi vektor satuan dan sifat-sifatnya. Misalkan vektor **A** dan vektor **B** dituliskan sebagai.=,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{1.30g}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \tag{1.30h}$$

Penjumlahan dan selisih dua vektor **A** dan **B** bisa dituliskan sebagai,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{1.31a}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{1.31b}$$

Perkalian titik (atau perkalian skalar) dua vektor **A** dan **B** bisa dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}})\\ &= A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}) + A_zB_z(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}) + A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}) + A_xB_z(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}}) +\\ &\quad A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_z(\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}}) + A_zB_x(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}}) + A_zB_y(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

Menggunakan hubungan vektor satuan dalam persamaan (1.30a) dan (1.30d) kita memperoleh,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.32}$$

Marilah kita sekarang menghitung perkalian silang (atau perkalian vektor)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}})\times(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}})\\ &= A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}) + A_zB_z(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}) + A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}) + A_xB_z(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}})\\ &\quad + A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_z(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}) + A_zB_x(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}) + A_zB_y(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

Menggunakan hubungan vektor satuan dalam persamaan (1.30c) dan (1.30e) kita peroleh,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(A_xB_y - A_yB_x\right) \qquad (1.33a)$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk determinan sebagai,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{j}}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \qquad (1.33b)$$

atau dalam bentuk yang lebih singkat,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1.33c)$$

Kita perhatikan lagi vektor **A.** Komponen vektor ini sepanjang sumbu-X adalah:

$$A_x = A\cos^{-} \qquad (1.33d)$$

Cara lain untuk menuliskan komponen ini adalah mengalikan **A** dengan $\hat{\mathbf{i}}$; sehingga,

$$\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}} = |\mathbf{A}||\hat{\mathbf{i}}|\cos^{-} = A\cos^{-} \qquad (1.33e)$$

yang sama seperti persamaan sebelumnya. Jadi,

$$A_x = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}} \qquad (1.33f)$$

Persamaan ini bisa dituliskan dalam bentuk umum. Misalkan kita akan mencari komponen A_n sepanjang sumbu N sebarang yang mempunyai vektor satuan $\mathbf{e}_n$ sepanjang sumbu ini. Kita dapat menuliskan,

$$A_n = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n \qquad (1.34)$$

Kita dapat menuliskan vektor **A** dalam bentuk komponen-komponennya, kemudian diubah dalam bentuk sedikit berbeda sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} = A\left(\frac{A_x}{A}\hat{\mathbf{i}} + \frac{A_y}{A}\hat{\mathbf{j}} + \frac{A_z}{A}\hat{\mathbf{k}}\right) = A\hat{\mathbf{e}}_A \tag{1.35}$$

dengan $\mathbf{e}_A$ adalah vektor satuan dalam arah **A**. Sedangkan A/A_x sama dengan cosinus sudut antara A dan sumbu-X, A/A_y sama dengan cosinus sudut antara A dan sumbu-Y, dan A/A_z sama dengan cosinus sudut antara A dan sumbu-Z. Jadi,

$$\frac{A_x}{A} = \cos(\mathbf{A},\mathbf{X}) = \cos(\mathbf{A},\hat{\mathbf{i}}) = \sim \tag{1.36a}$$

$$\frac{A_y}{A} = \cos(\mathbf{A},\mathbf{Y}) = \cos(\mathbf{A},\hat{\mathbf{j}}) = \tag{1.36b}$$

$$\frac{A_z}{A} = \cos(\mathbf{A},\mathbf{Z}) = \cos(\mathbf{A},\hat{\mathbf{k}}) = ¥ \tag{1.36c}$$

dengan $\sim$, , dan $¥$ disebut cosinus arahan garis yang menggambarkan **A**. Jadi kita dapat juga menuliskan,

$$\mathbf{A} = A\left(\sim\hat{\mathbf{i}} + \quad \hat{\mathbf{j}} + ¥\,\hat{\mathbf{k}}\right) = A\hat{\mathbf{e}}_A \tag{1.36d}$$

dengan $\hat{\mathbf{e}}_A = \sim\hat{\mathbf{i}} + \quad \hat{\mathbf{j}} + ¥\,\hat{\mathbf{k}}$

Kita dapat mencari perkalian titik antara **A** dengan dirinya sendiri, sehingga diperoleh,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2\left[\left(\frac{A_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A}\right)^2\right] \tag{1.36e}$$

Menurut definisi, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$, sehingga,

$$\left[\left(\frac{A_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A}\right)^2\right] = 1 \tag{1.37a}$$

$$\sim^2 + \quad ^2 + ¥^2 = 1 \tag{1.37b}$$

Jadi, jumlah kuadrat cosinus arahan suatu garis sama dengan 1.

4. Operator Diferensial Vektor: Gradient, Divergence, dan Curl

Operator diferensial vektor ditunjukkan dengan **grad** atau ∇ (del). Dalam koordinat Cartesian operator vektor ini digambarkan dengan,

$$\mathbf{grad} = \nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.38}$$

Jika operator ini dioperasikan pada fungsi skalar, maka operator del membentuk vektor. Jika operator ini dioperasikan pada perkalian fungsi operator del harus diperlakukan sebagai operator diferensial.

Kita dapat melakukan tiga operasi yang berbeda dengan operator ini, yaitu:

a. Operator del yang dioperasikan pada fungsi skalar u akan membentuk **grad** u atau ∇u .
b. Bilamana operator del melakukan perkalian skalar dengan fungsi vektor lain **A** dengan membentuk $\nabla \cdot \mathbf{A}$ atau $\mathbf{div}\,\mathbf{A}$, hasilnya disebut divergence **A**, yaitu besaran skalar.
c. Bilamana operator del melakukan perkalian vektor dengan fungsi vektor lain **A** dengan membentuk $\nabla \times \mathbf{A}$ atau $\mathbf{curl}\,\mathbf{A}$, hasilnya disebut curl **A** atau rot (berarti rotasi) **A**, yang merupakan besaran vektor

Kita perhatikan fungsi skalar u yang merupakan fungsi eksplisit dari koordinat *x*, *y*, dan *z*, yaitu $u = u(x, y, z)$, dan fungsi ini adalah kontinu serta bernilai tunggal. Fungsi skalar ini mempunyai tiga komponen, yang bisa dipandang menjadi komponen-komponen dari suatu vektor yang disebut **grad** *u* atau ∇u (**del** *u*). Dengan demikian, meskipun *u* adalah skalar, **grad** *u* adalah vektor dengan tiga komponen yang diberikan oleh,

$$\mathbf{grad}\; u = \nabla u = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.39}$$

Sifat-sifat **grad** *u* dapat dirangkum sebagai berikut:

a. **Grad** *u* pada suatu titik tegak lurus pada garis (dalam dua dimensi) atau permukaan (dalam tiga dimensi) yang merupakan tempat *u* konstan.
b. **Grad** *u* mempunyai arah dimana *u* berubah paling cepat, dan besarnya merupakan derivatif berarah dari *u*, yaitu laju kenaikan *u* per satuan jarak dalam arah itu.

Mengingat bahwa $u(x, y, z)$ adalah fungsi skalar, maka fungsi itu menggambarkan medan skalar. Contohnya adalah perubahan temperatur dan tekanan dalam volume tertentu dari zat. Daerah ruang ini bisa didefinisikan dengan gradien temperatur $\nabla T(x, y, z)$ atau gradien tekanan $\nabla P(x, y, z)$.

Seperti dinyatakan sebelumnya, bilamana operator del melakukan perkalian skalar dengan suatu fungsi titik vektor **A**, operator itu menghasilkan divergence **A.** Dalam koordinat Cartesian, divergence **A** dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned} \text{div}\,\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{1.40}$$

Contoh fungsi titik vektor antara lain medan vektor listrik $\mathbf{E}(x,y,z)$ dan vektor kecepatan $\mathbf{v}(x,y,z)$. Divergence fungsi vektor semacam itu menggambarkan medan vektornya.

Teorema Gauss atau teorema divergence menyatakan bahwa divergence suatu medan vektor dikalikan dengan volume sama dengan aliran neto medan vektor itu melewati permukaan yang membatasi volume tersebut. Persamaan matematis teorema ini adalah:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\,dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}\,dS \tag{1.41}$$

dengan $\hat{\mathbf{n}}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus pada permukaan dan menunjuk ke arah luar.

Marilah kita sekarang mengambil perkalian silang operator del dengan suatu vektor, menghasilkan vektor yang disebut **curl A** atau **rot A** (berarti rotasi medan vektor).

$$\mathbf{curl\ A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} \right) \tag{1.42a}$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{1.42b}$$

yang bisa juga dituliskan dalam bentuk pendek sebagai,

$$\mathbf{curl\ A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

Makna geometris **curl A** bisa juga ditentukan dengan teorema Stokes, yang dapat dituliskan sebagai,

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.44}$$

Teorema Stokes menyatakan bahwa integral garis medan vektor sepanjang suatu lintasan tertutup sama dengan integral permukaan pada suatu luasan yang dibatasi oleh lintasan itu.

Sekarang kita melakukan perkalian silang dua operator del sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \nabla = \mathrm{div}\ \mathbf{grad} = \nabla^{\mathbf{2}}$$

$$= \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1.45}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

yang merupakan skalar dan disebut operator Laplace. Sebaliknya, perkalian silang dengan dirinya sendiri adalah nol, karena dua vektor itu sejajar satu sama lain, yaitu:

$$\nabla \times \nabla = 0 \tag{1.46}$$

Contoh 1.2

Hitunglah: a. grad *f* untuk fungsi $f = xy^2 + yx^2 + xyz$.

b. div **r** untuk medan vektor $\mathbf{r} = 4x\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 4y\,\hat{\mathbf{k}}$.

c. **curl r** untuk medan vektor $\mathbf{r} = y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$

Penyelesaian

$$\textbf{grad}\ f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

a. $$\textbf{grad}\ f = \left(y^2 + 2yx + yz\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2xy + x^2 + xz\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(0 + 0 + xy\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\textbf{grad}\ f = \left(y^2 + 2yx + yz\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2xy + x^2 + xz\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(xy\right)\hat{\mathbf{k}}$$

b. $$\text{div}\ \mathbf{r} \equiv \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial(4x)}{\partial x} + \frac{\partial(2)}{\partial y} + \frac{\partial(4y)}{\partial z} = 4 + 0 + 0 = 4\ .$$

c. $$\textbf{curl}\ \mathbf{r} \equiv \nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{y} & \mathrm{x} & \mathrm{z} \end{vmatrix}$$

$$\textbf{curl}\ \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(z)}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right)$$

$$\textbf{curl}\ \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\left(0 - 0\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(0 - 0\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(1 - 1\right)$$

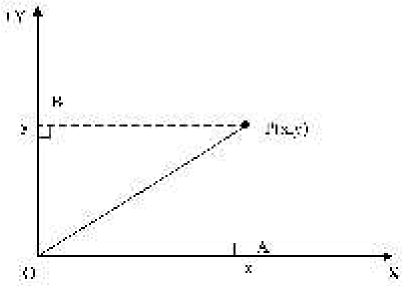
$$\textbf{curl}\ \mathbf{r} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}\ .$$

B. SISTEM KOORDINAT CARTESIAN

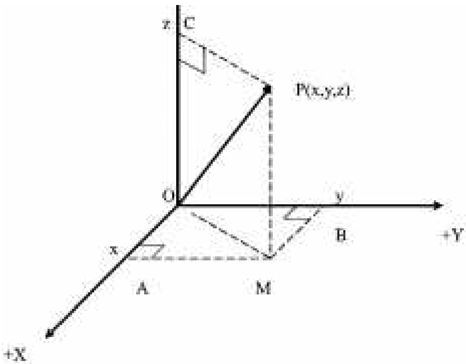
Sekarang kita akan berbicara tentang sistem koordinat Cartesian dua-dimensi, yang terdiri dari dua sumbu koordinat yang saling tegak lurus dan bersilangan pada titik asal O, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.7. Sumbu-X dan sumbu-Y terletak pada bidang kertas dan membentuk sudut 90^{o} satu sama lain. Posisi titik *P* digambarkan dengan koordinat (*x*,*y*), yang dapat Anda peroleh dengan menggambarkan proyeksi dari P ke sumbu-X dan sumbu-Y, sehingga *OA* = *x* dan *OB* = *y*. Oleh karena itu, kita bisa menuliskan

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + y^2 \tag{1.47}$$

Gambar 1.8 menunjukkan suatu himpunan sumbu koordinat Cartesian tiga-dimensi. Sumbu-X dan sumbu-Y berada pada bidang yang sama dan saling tegak lurus, sedangkan sumbu-Z tegak lurus pada bidang itu. Posisi titik *P* digambarkan dengan koordinat (*x*,*y*,*z*) dan kita dapat menuliskan



Gambar 1.7.
Koordinat Cartesian (*x*, *y*) titik P dalam dua dimensi



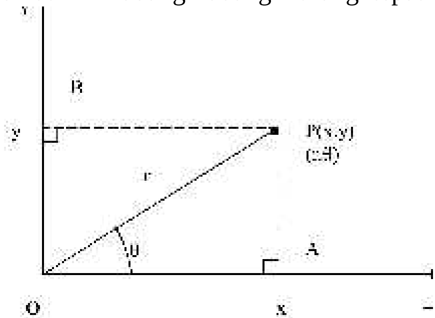
Gambar 1.8.
Koordinat Cartesian (x,y) titik P dalam tiga dimensi.

$$\begin{aligned} OP^2 &= OM^2 + OC^2 = (OA^2 + OB^2) + OC^2 \\ OP^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Tiga sumbu yang saling tegak lurus dalam Gambar 1.8 membentuk sistem sekerup putar kanan. Jika diputar dari sumbu-X ke arah sumbu-Y, maka arah sumbu-Z sesuai dengan gerak maju-mundurnya sekerup.

C. SISTEM KOORDINAT POLAR BIDANG

Sistem koordinat Cartesian sangat berguna untuk menggambarkan gerak benda dalam arah garis lurus. Koordinat ini kadang-kadang kurang tepat digunakan untuk gerak lengkung, misalnya gerak melingkar. Pemilihan sistem koordinat yang tepat dapat membuat penyelesaian masalah lebih sederhana. Sebagai contoh, gerak melingkar pada suatu bidang lebih tepat digambarkan dengan koordinat polar bidang.



Gambar 1.9.
Koordinat polar bidang (r, θ) titik P dalam dua dimensi.

Dalam Gambar 1.9 ditunjukkan koordinat Cartesian titik *P* dalam bidang XY adalah (*x*,*y*). Titik *P* berada pada jarak *r* dari titik asal *O* dan garis *OP* membentuk sudut terhadap sumbu-X. Titik *P* juga dapat digambarkan mempunyai koordinat (r,θ) dalam sistem koordinat polar bidang. Hubungan antara (x,y) dan (r,θ) adalah:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta \tag{1.49}$$

Kita dapat menyatakan r dan θ dalam x dan y secara sederhana. Dengan mengkuadratkan dan menjumlahkan persamaan (1.49) kita memperoleh,

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

Dari persamaan (1.49) kita dapat membagi y dengan x, sehingga diperoleh,

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

Dengan demikian kita memperoleh,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos^{-1}\frac{x}{r} = \sin^{-1}\frac{y}{r} \tag{1.50}$$

Jadi, suatu sistem koordinat, (x,y) atau (r, θ) menentukan secara lengkap posisi suatu titik dalam suatu bidang, *r* dapat mempunyai sebarang nilai antara 0 dan ∞, sedangkan θ dapat mempunyai nilai antara 0 dan 2π radian, dengan θ bertambah dalam arah berlawanan putaran jarum jam.

D. SISTEM KOORDINAT SILINDER

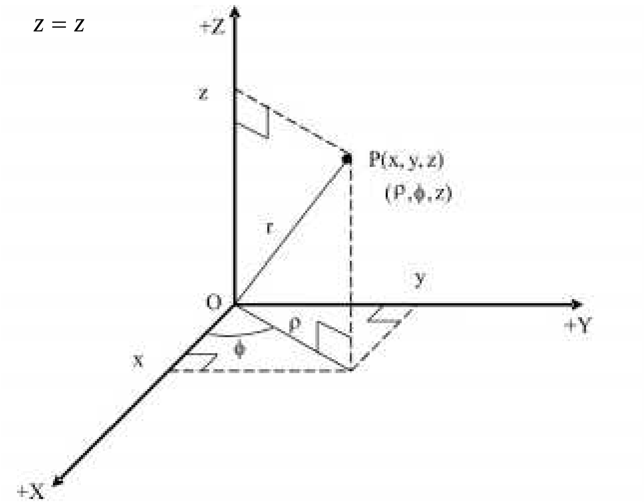
Marilah kita perhatikan sebuah titik P yang berada pada jarak r dari titik asal O. Titik P dapat diletakkan dengan menggunakan himpunan koordinat Cartesian (x,y,z) atau koordinat silinder $\left(°,¤,z\right)$ seperti ditunjukkan dalam Gambar (1.10).

Dalam Gambar 1.10 hubungan antara koordinat silinder $(°,¤,z)$ dihubungkan dengan koordinat Cartesian (x,y,z) melalui persamaan

$$x = ° \cos ¤ \tag{1.51a}$$

$$y = ° \sin ¤ \tag{1.51b}$$

$$z = z \tag{1.51c}$$



Gambar 1.10.
Koordinat silinder $(°,¤,z)$ untuk titik P dalam ruang.

Hubungan sebaliknya dapat dicari dari persamaan (1.51) melalui prosedur yang digunakan dalam koordinat polar bidang, sehingga kita memperoleh,

$$° = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.52a}$$

$$¤ = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.52b}$$

$$z = z \tag{1.52c}$$

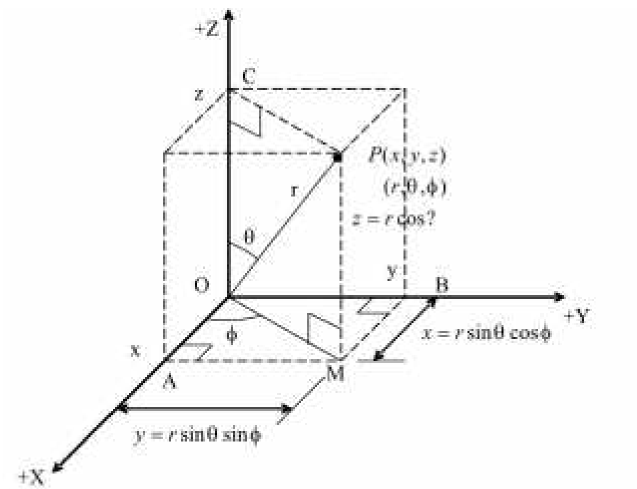
E. SISTEM KOORDINAT BOLA

Kita perhatikan kembali titik *P* dalam ruang yang berada pada jarak r dari titik asal *O*, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.11. Koordinat Cartesian titik *P* adalah (*x*,*y*,*z*), sedangkan koordinat bola titik itu adalah $(r, ¯, ¤)$. Untuk mencari hubungan antara dua himpunan koordinat ini, kita menguraikan *OP* = *r* menjadi dua komponen *PM* dan *OM*, dengan

$$PM = OC = OP \cos ¯ \quad \text{atau} \quad z = r\cos ¯$$
$$OM = PC = OP \sin ¯ \quad \text{atau} \quad OM = r\sin ¯$$

Selanjutnya kita menguraikan *OM* menjadi dua komponen, *OA* dan *OB*, sehingga

$$OA = OM \cos ¤ \quad \text{atau} \quad x = r\sin ¯ \cos ¤$$
$$OB = OM \sin ¤ \quad \text{atau} \quad y = r\sin ¯ \sin ¤$$



Gambar 1.11.
Koordinat bola $(r, ¯, ¤)$ untuk titik *P* dalam ruang.

Oleh karena itu, kita mempunyai hubungan,

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad (1.53a)$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \qquad (1.53b)$$

$$z = r \cos\theta \qquad (1.53c)$$

Seperti dibicarakan sebelumnya, hubungan sebaliknya bisa dicari dari persamaan (1.53) sebagai berikut.

$$r = OP = \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{(OA^2 + OB^2) + OC^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{PC}{OC} = \frac{OM}{OC} = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2}}{OC} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\tan\phi = \frac{OB}{OA} = \frac{y}{x}$$

Oleh karena itu, kita memperoleh hubungan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.54a)$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (1.54b)$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \qquad (1.54c)$$

Koordinat bola ini akan sangat berguna dalam membahas gerak dalam tiga dimensi.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dalam koordinat Cartesian dua dimensi vektor posisi **A** dan **B** secara berturut-turut dinyatakan sebagai,

   $$\mathbf{A} = (2{,}0\ \text{m})\,\hat{\mathbf{i}} + (6{,}0\ \text{m})\,\hat{\mathbf{j}} \ \text{ dan } \ \mathbf{B} = (5{,}0\ \text{m})\,\hat{\mathbf{i}} + (10{,}0\ \text{m})\,\hat{\mathbf{j}}$$

   Carilah vektor pergeseran **D = B – A** dan gambarkan tiga vektor tersebut!
2) Vektor kecepatan sebuah partikel dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{v} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}} + (8{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{j}} + (10{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{k}}$$

Hitunglah laju (atau besar kecepatan) partikel tersebut!

3) Carilah vektor momentum sudut **L** dan vektor satuannya, yang tegak lurus pada vektor posisi **r** dan vektor momentum linear **p** yang secara berturut-turut dinyatakan sebagai,

$\mathbf{r} = (1\text{ m})\hat{\mathbf{i}} + (2\text{ m})\hat{\mathbf{j}} + (3\text{ m})\hat{\mathbf{k}}$ dan

$$\mathbf{p} = (2\text{ kg m/s})\hat{\mathbf{i}} - (1\text{ kg m/s})\hat{\mathbf{j}} + (2\text{ kg m/s})\hat{\mathbf{k}}$$

4) Hitunglah div **r** untuk medan vektor $\mathbf{r} = xy\hat{\mathbf{i}} - yz\hat{\mathbf{j}} - zx\hat{\mathbf{k}}$.

5) Hitunglah **curl F** untuk medan gaya

$$\mathbf{F} = \left(4abyz^2 - 10bx^2y^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(9abxz^2 - 6bx^3y\right)\hat{\mathbf{j}} + (8axbyz)\hat{\mathbf{k}}$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Pergeseran **D** dapat dicari dengan rumus penjumlahan/pengurangan vektor, yaitu

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (5{,}0\text{ m} - 2{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{i}} + (10{,}0\text{ m} - 6{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{j}} = (3{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\mathbf{j}}$$

Panjang vektor pergeseran adalah:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(3{,}0\text{ m})^2 + (4{,}0\text{ m})^2} = 5{,}0\text{ m}.$$

Arah vektor pergeseran **D** dicari sebagai berikut:

$\tan \overline{\ } = Dy / Dx = 4{,}0/3{,}0 = 1{,}33$, sehingga $\overline{\ } = 53^\circ$.

Gambarkan tiga vektor tersebut dalam koordinat Cartesian dua dimensi.

2) Pertama-tama kita cari perkalian titik vektor kecepatan **v** terhadap dirinya sendiri

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left[(6{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}} + (8{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{j}} + (10{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[(6{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}} + (8{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{j}} + (10{,}0\text{ m/s})\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (6{,}0\text{ m/s})^2 + (8{,}0\text{ m/s})^2 + (10{,}0\text{ m/s})^2 = 200{,}0\ (\text{m/s})^2$$

$$v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

Jadi laju partikel tersebut adalah:

$$v = \sqrt{200{,}0(m/2)^2} = 14{,}14\ \text{ m/s}$$

3) Untuk menyederhanakan penulisan, satuan besaran-besaran **r**, **p**, dan **L** tidak dimasukkan dalam perhitungan, melainkan langsung pada hasil akhir perhitungan.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{i}}\left(r_y p_z - r_z p_y\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(r_z p_x - r_x p_z\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(r_x p_y - r_y p_x\right)$$

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{i}}(4+3)) + \hat{\mathbf{j}}(6-2) + \hat{\mathbf{k}}(-1-4)$$

$$\mathbf{L} = 7\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

Besar momentum sudut

$$L = |\mathbf{L}| = \sqrt{49+16+25} = \sqrt{90} = 9,49 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Misalkan vektor satuan dalam arah **L** itu adalah $\hat{\mathbf{l}}$, maka $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$.

Teruskan!

4) Lihatlah Contoh 1.2.
5) Lihatlah Contoh 1.2.

RANGKUMAN

Besaran skalar adalah besaran yang hanya dinyatakan dengan besar satuannya. Besaran vektor adalah besaran yang dinyatakan dalam besar dan arahnya.

Vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponen dalam masing-masing sumbu koordinat. Penjumlahan vektor-vektor dapat dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponennya sepanjang sumbu yang dipilih dengan bantuan fungsi trigonometri, kemudian memadukan komponen hasil menjadi vektor resultan.

Dalam koordinat Cartesian dua-dimensi sebuah vektor **R** yang membentuk sudut θ dengan sumbu-X dapat diuraikan menjadi dua komponen R_x dan R_y dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y, yang besarnya dapat dituliskan sebagai,

$$R_x = R\cos\theta \qquad \text{dan} \qquad R_y = R\sin\theta$$

Sebaliknya, jika R_x dan R_y diketahui, kita dapat menghitung **R** dan θ melalui hubungan,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \text{dan} \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

Dalam koordinat Cartesian tiga-dimensi hubungan vektor dan komponen-komponennya dapat dinyatakan sebagai,

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$$

$$\tan ¯ = \frac{R_{XY}}{R_Z} = \frac{\sqrt{R_X^2 + R_Y^2}}{R_Z}$$

$$\tan ¤ = \frac{R_Y}{R_X}$$

Perkalian skalar atau perkalian titik dua vektor **A** dan **B** menghasilkan besaran skalar S yang diperoleh dengan besar vektor **A** dan besar vektor **B**, kemudian mengalikannya dengan cosinus sudut antara dua vektor itu, yaitu

$$S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = AB\cos ¯ \qquad \text{untuk} \qquad 0 < ¯ < ®$$

Perkalian vektor atau perkalian silang dua vektor **A** dan **B** menghasilkan vektor **C**, yang besarnya sama dengan besar vektor **A** dikalikan besar vektor **B**, kemudian dikalikan dengan sinus sudut antara vektor **A** dan vektor **B**, sehingga,

$$C = |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = AB\sin ¯ \qquad \text{untuk} \qquad 0 < ¯ < ®$$

Sedangkan arah vektor **C** tegak lurus pada vektor **A** dan vektor **B**, atau tegak lurus pada bidang yang mengandung **A** maupun **B**.

Vektor **A** dan **B** bisa dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$, dalam arah sumbu-X, sumbu-Y, dan sumbu-Z, sebagai

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \text{ dan } \mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

Perkalian titik dua vektor **A** dan **B** bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Perkalian silang dua vektor **A** dan **B** bisa dituliskan dalam beberapa bentuk sebagai,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{j}}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{\mathbf{k}}$$

Dalam koordinat Cartesian operator diferensial vektor ditunjukkan dengan **grad** atau ∇ (del) sebagai

$$\mathbf{grad} = \nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Operator ini bisa dioperasikan dalam tiga bentuk, yaitu **grad**, div, dan **curl**, yang dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{grad}\ u = \nabla u = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\mathbf{curl}\ \mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Hubungan antara koordinat (x,y) dalam sistem koordinat Cartesian dua-dimensi dan (r,θ) dalam sistem koordinat polar bidang dinyatakan sebagai

$$x = r\cos\text{¯} \qquad \mathrm{y = rsin}\text{¯}$$

Hubungan antara koordinat silinder $(\text{°}, \text{¤}, z)$ dengan koordinat Cartesian (x,y,z) dapat dinyatakan sebagai

$$x = \text{°}\cos\text{¤}$$
$$y = \text{°}\sin\text{¤}$$
$$z = z$$

Hubungan antara koordinat bola $(r, \text{¯}, \text{¤})$ dengan koordinat Cartesian (x,y,z) dapat dinyatakan sebagai

$$x = r\sin\text{¯}\cos\text{¤}$$
$$y = r\sin\text{¯}\sin\text{¤}$$
$$z = r\cos\text{¯}$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Sudut yang dibentuk oleh vektor $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ dan vektor $\mathbf{B} = 6\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 10\hat{\mathbf{k}}$ adalah ….
   A. 0^o
   B. 45^o
   B. 60^o
   C. 90^o.

2) Vektor kecepatan sebuah partikel dinyatakan sebagai $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$ Vektor satuan dalam arah kecepatan itu adalah ….
   A. $\hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$
   B. $\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{4}\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$
   C. $\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{8}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$
   D. $\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{9}\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{9}\hat{\mathbf{j}} + \frac{8}{9}\hat{\mathbf{k}}$

3) Sebuah partikel bergerak melingkar mengelilingi sumbu-Z dengan kecepatan sudut $\mu = 8\hat{\mathbf{k}}$. Kecepatan tangensial pada posisi $\mathbf{r}$ dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{v} = \mu \times \mathbf{r}$. Besar kecepatan tangensial pada saat partikel pada posisi $\mathbf{r} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ adalah ….
   A. 5 rad m/s
   B. 8 rad m/s
   C. 24 rad m/s
   D. 32 rad m/s

4) Pada saat tertentu dua buah partikel secara berturut-turut berada pada posisi $\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ dan $\mathbf{r}_2 = 8\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}$. Sudut antara dua vektor posisi ini adalah ....
   A. 0^o
   B. 45^o
   C. 60^o
   D. 90^o

5) Gaya $\mathbf{F} = 20\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}}$ bekerja pada partikel yang berada posisi $\mathbf{r} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$. Komponen gaya dalam arah **r** adalah ....
A. 5
B. 24
C. 25
D. 120

6) Jika fungsi skalar $\text{¤} = x^2 - y^2 z$, maka $\nabla\text{¤}$ pada titik (1,1,1) dapat dinyatakan sebagai ….
A. $\nabla\text{¤} = 2\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}} - 0\hat{\mathbf{k}}$
B. $\nabla\text{¤} = 2\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$
C. $\nabla\text{¤} = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 0\hat{\mathbf{k}}$
D. $\nabla\text{¤} = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

7) Fungsi potensial yang menggambarkan sebuah gaya dapat dinyatakan sebagai $V(r) = k/r$ dengan k adalah konstanta dan $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$. Gaya yang didefinisikan menurut $\mathbf{F} = -\nabla V$ dapat dinyatakan sebagai ….
A. $\mathbf{F} = (kx/r)\,\hat{\mathbf{i}} + (ky/r)\,\hat{\mathbf{j}} + (kz/r)\,\hat{\mathbf{k}}$
B. $\mathbf{F} = \left(kx/r^2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(ky/r^2\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(kz/r^2\right)\hat{\mathbf{k}}$
C. $\mathbf{F} = \left(kx/r^3\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(ky/r^3\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(kz/r^3\right)\hat{\mathbf{k}}$
D. $\mathbf{F} = \left(kx/r^4\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(ky/r^4\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(kz/r^4\right)\hat{\mathbf{k}}$

8) Jika vektor $\mathbf{r} = xyz\,\hat{\mathbf{i}} + x^2y^2z^2\,\hat{\mathbf{j}} + x^3y^3z^3\,\hat{\mathbf{k}}$ maka ....
A. $\nabla\cdot\mathbf{r} = xz + 4xyz^2 + 9x^3y^2z^2$
B. $\nabla\cdot\mathbf{r} = xz + 8xyz + 27x^2y^2z^2$
C. $\nabla\cdot\mathbf{r} = xz + 2x^2y^2z + 3x^2y^3z^3$
D. $\nabla\cdot\mathbf{r} = xz + 2x^2yz^2 + 3x^3y^3z^2$

9) Jika vektor $\mathbf{r} = x^2\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + z^2\hat{\mathbf{k}}$, maka ....

A. $\nabla \times \mathbf{r} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$

B. $\nabla \times \mathbf{r} = 2\times\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}$

C. $\nabla \times \mathbf{r} = (2x - 2y)\hat{\mathbf{i}} + (2y - 2z)\hat{\mathbf{j}} + (2z - 2x)\hat{\mathbf{k}}$

D. $\nabla \times \mathbf{r} = (2y - 2z)\hat{\mathbf{i}} + (2x - 2z)\hat{\mathbf{j}} + (2y - 2x)\hat{\mathbf{k}}$

10) Cosinus arahan untuk vektor $\mathbf{B} = 6\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}}$ adalah ....

A. $\sim = \frac{1}{6}, \quad = \frac{1}{8}$

B. $\sim = \frac{3}{5}, \quad = \frac{4}{5}$

C. $\sim = 6, \quad = 8$

D. $\sim = 36, \quad = 64$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Kinematika dalam Sistem Koordinat

Sekarang kita akan membahas kinematika, yang menggambarkan gerak benda atau partikel tanpa memperhatikan gaya yang menghasilkan gerak itu. Kinematika berkaitan dengan konsep-konsep dan hubungan antara posisi, kecepatan, percepatan, dan waktu. Oleh karena itu, kita akan membicarakan posisi, kecepatan, dan percepatan partikel dalam dua dimensi dan tiga dimensi. Sistem koordinat yang kita gunakan untuk menggambarkan gerak partikel itu adalah koordinat Cartesian, koordinat polar bidang, koordinat silinder, dan koordinat bola.

A. GERAK PARTIKEL DALAM KOORDINAT CARTESIAN

Jika sebuah partikel bergerak dalam bidang XY, gerak partikel itu biasanya digambarkan dengan:

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

atau (1.55)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

dengan waktu t merupakan parameter. Kita bisa menuliskan vektor posisi **r**, yang dinyatakan dalam vektor satuan, sebagai:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y \tag{1.56}$$

Kecepatan partikel dan komponennya dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} = \hat{\mathbf{i}}v_x + \hat{\mathbf{j}}v_y \tag{1.57}$$

Percepatan partikel dan komponennya dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2y}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y \tag{1.58}$$

Gerak partikel dalam dua dimensi tersebut dapat diperluas untuk menggambarkan gerak partikel dalam tiga dimensi, sehingga kita memperoleh.

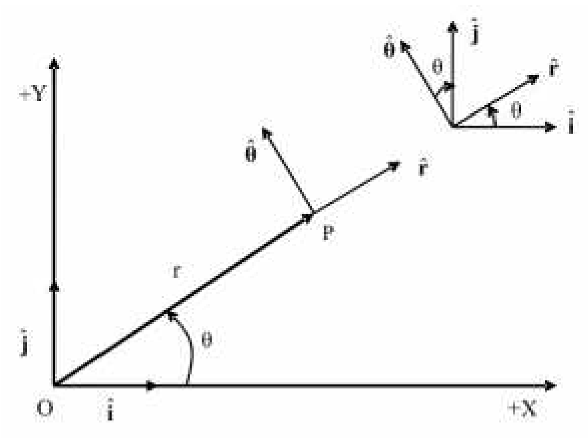
$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y + \hat{\mathbf{k}}\,z \tag{1.59}$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} + \hat{\mathbf{k}}\frac{dz}{dt} = \hat{\mathbf{i}}v_x + \hat{\mathbf{j}}v_y + \hat{\mathbf{k}}v_z \tag{1.60}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{\mathbf{k}}\frac{d^2z}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y + \hat{\mathbf{k}}a_z \tag{1.61}$$

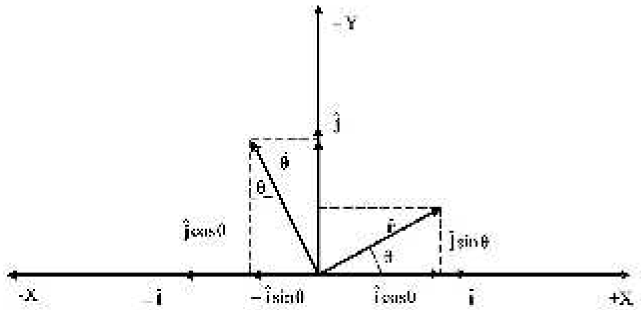
B. GERAK PARTIKEL DALAM KOORDINAT POLAR BIDANG

Dalam banyak situasi koordinat polar bidang (r,¯) sering kali lebih cocok untuk menggambarkan gerak partikel daripada koordinat Cartesian (x,y). Jarak r diukur dari titik asal O, sedangkan sudut θ diukur dari sumbu-X positif berlawanan arah dengan putaran jarum jam, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.12. Vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}$ dan $\hat{\mathbf{j}}$ juga ditunjukkan.



Gambar 1.12.
Vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, dalam koordinat polar bidang

Vektor satuan dalam koordinat polar bidang diberi notasi $\hat{\mathbf{r}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, yang mempunyai arah sesuai dengan arah pertambahan r dan ¯. Jadi $\hat{\mathbf{r}}$ menunjuk dalam arah P sepanjang pertambahan jarak radial r, sedangkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ menunjuk dalam arah gerak P ketika sudut θ bertambah. Dua vektor satuan ini merupakan fungsi sudut θ. Vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tersebut membentuk sistem koordinat yang disebut koordinat polar bidang atau hanya dikatakan sebagai koordinat polar.



Gambar 1.13.
Hubungan antara vektor satuan $(\hat{\mathbf{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dan $(\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}})$.

Hubungan antara vektor-vektor satuan ditunjukkan dalam Gambar 1.13 sebagai

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \qquad (1.62)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta \qquad (1.63)$$

Marilah kita mendiferensialkan vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ terhadap θ, sehingga,

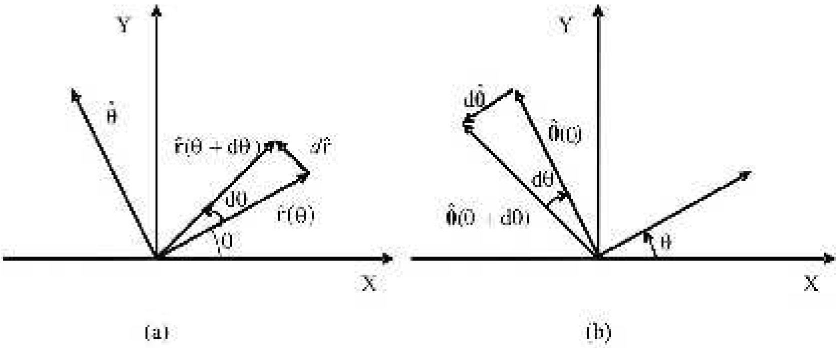
$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\cos\theta - \hat{\mathbf{j}}\sin\theta = -\hat{\mathbf{r}}$$

Oleh karena itu, kita memperoleh,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{dan} \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}} \tag{1.64}$$

Hasil-hasil ini dapat diperoleh secara langsung dengan mengacu Gambar 1.14(a) dan (b). Gambar ini menunjukkan posisi $\hat{\mathbf{r}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ untuk sudut tertentu θ dan $\theta + d\theta$. Selama sudut θ bertambah dengan $d\theta$, vektor satuan radial berubah dari $\hat{\mathbf{r}}(\theta)$ menjadi $\hat{\mathbf{r}}(\theta + d\theta)$ sebesar $d\hat{\mathbf{r}}$. Demikian pula, vektor satuan sudut berubah dari $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta)$ menjadi $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta + d\theta)$ sebesar $d\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Perhatikan bahwa $d\hat{\mathbf{r}}$ menunjuk arah $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, sedangkan $d\hat{\boldsymbol{\theta}}$ menunjuk arah berlawanan dengan arah $\hat{\mathbf{r}}$ yaitu arah $-\hat{\mathbf{r}}$.



Gambar 1.14.
(a) Perhitungan perubahan $\hat{\mathbf{r}}$ terhadap θ dan (b) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ terhadap θ.

Vektor posisi **r** dalam koordinat polar dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} + r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) \tag{1.65}$$

Perhatikan bahwa $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta)$; oleh karena itu ungkapan dalam persamaan (1.65) tidak berisi θ secara eksplisit. Gerak partikel ditentukan oleh $r(t)$ dan $\theta(t)$ dalam koordinat polar. Oleh karena itu kecepatan **v** adalah:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

Karena $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta)$, menggunakan persamaan (1.65) kita dapat menuliskan:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\,\overline{\ }}\frac{d\,\overline{\ }}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\text{–}$$

Perhatikan bahwa turunan — terhadap t, $\frac{d\,\overline{\ }}{dt}$, dapat dituliskan sebagai —. Dengan demikian kita dapat menuliskan kecepatan **v** dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{v} = r\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\overline{\ }\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.66}$$

Kita dapat menuliskan:

$$v_r = r \quad \text{dan} \quad v\text{–} = r\,\overline{\ } \tag{1.67}$$

dengan v_r adalah komponen kecepatan sepanjang $\hat{\mathbf{r}}$ dan disebut kecepatan radial, sedangkan v– adalah komponen kecepatan sepanjang $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dan disebut kecepatan sudut. Oleh karena itu, persamaan (1.66) dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v\text{–}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.68}$$

Percepatan sistem tersebut ditentukan oleh,

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\overline{\hat{\ }}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{d\hat{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \hat{r}\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\,\overline{\ }}\frac{d\,\overline{\ }}{dt} + \frac{dr}{dt}\overline{\hat{\ }}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\,\overline{\hat{\ }}}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\overline{\hat{\ }}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\,\overline{\ }}\frac{d\,\overline{\ }}{dt}$$
$$= \hat{r}\hat{\mathbf{r}} + r(\hat{\boldsymbol{\theta}})\overline{\hat{\ }} + r\,\overline{\hat{\ }}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\overline{\ }\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\overline{\hat{\ }}(-\hat{\mathbf{r}})\overline{\hat{\ }}$$

Dengan demikian kita memperoleh,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\,\overline{\ }^{\,2})\hat{\mathbf{r}} + (r\,\overline{\ } + 2\dot{r}\,\overline{\ })\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.69a}$$

$$\mathbf{a} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a\text{–}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.69b}$$

dengan komponen percepatan radial a_r dan komponen percepatan sudut a– dapat dinyatakan sebagai,

$$a_r = \ddot{r} - r\,\overline{\ }^{\,2} \quad a\text{–} = r\,\overline{\ } + 2\dot{r}\,\overline{\ } \tag{1.70}$$

Suku

$$r\dot{\ }^{2} = r\left(\frac{v}{r}\right)^{2} = \frac{v^{2}}{r} \qquad (1.71)$$

adalah percepatan sentripetal yang muncul dari gerak dalam arah θ. Selanjutnya, jika r dipertahankan konstan terhadap waktu, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, lintasan partikel adalah lingkaran dengan percepatan sentripetal. Suku $2\dot{r}\dot{\ }$ adalah percepatan Coriolis.

C. GERAK PARTIKEL DALAM KOORDINAT SILINDER

Dengan menambahkan komponen Z pada koordinat polar bidang kita memperoleh koordinat silinder untuk menggambarkan gerak dalam tiga dimensi. Tiga vektor satuan $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, dan $\hat{\mathbf{z}}$ secara berturut-turut dalam arah kenaikan °, ¤, dan z ditunjukkan dalam Gambar 1.14. Perlu diperhatikan bahwa $\hat{\mathbf{z}}$ adalah konstan, sedangkan $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ merupakan fungsi ¤ .

Berdasarkan Gambar 1.15 hubungan antara koordinat Cartesian (x, y, z) dan koordinat silinder (°, ¤, z) dapat dituliskan sebagai,

$x =$ ° cos ¤ (1.71a)

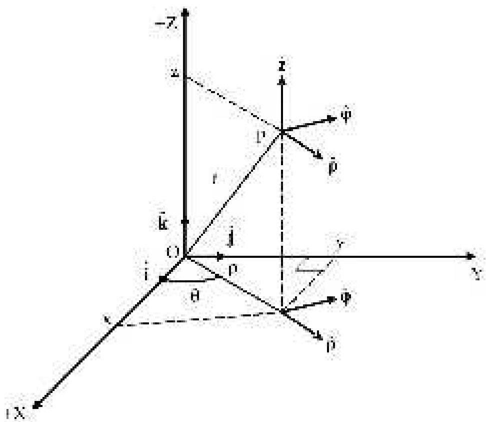
$y =$ ° sin ¤ (1.71b)

$z = z$ (1.71c)

Hubungan sebaliknya adalah

° $= \sqrt{x^{2} + y^{2}}$ (1.72a)

¤ $= \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$ (1.72b)



Gambar 1.15.
Koordinat silinder $(°, ¤, z)$ dan vektor satuan $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}})$ yang bersesuaian.

Menggantikan $(r, ¯)$ dengan $(°, ¤)$ dan dengan komponen Z tambahan, kita bisa menuliskan hubungan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{i}} \cos ¤ + \hat{\mathbf{j}} \sin ¤ \tag{1.73a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\mathbf{i}} \sin ¤ + \hat{\mathbf{j}} \cos ¤ \tag{1.73b}$$

dan, seperti sebelumnya

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d¤} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.74a}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{d¤} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1.74b}$$

Vektor posisi **r** untuk partikel yang berada pada titik P dalam koordinat silinder, yang ditunjukkan dalam Gambar 1.15, adalah:

$$\mathbf{r} = ° \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \, \hat{\mathbf{z}} \tag{1.75}$$

dengan ° menunjukkan jarak titik *P* dari sumbu-Z dan menunjukkan rotasi sudutnya dari sumbu-X, sedangkan *z* menunjukkan elevasinya di atas bidang XY. Dengan mengingat bahwa $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}(¤)$ kita bisa menuliskan vektor kecepatan sebagai,

$$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(° \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{d\,°}{dt}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{d\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d¤}\frac{d¤}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} + z\frac{d\,\hat{\mathbf{z}}}{dt} = \dot{°}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + °\,(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\dot{¤} + \dot{z}\,\hat{\mathbf{z}} + z(0)$$

dengan $d\hat{\mathbf{z}}/dt = 0$; oleh karena itu,

$$\mathbf{v} = \dot{°}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + °\,\dot{¤}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}} \tag{1.76}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{°}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + °\,\dot{¤}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\,\hat{\mathbf{z}})$$

dan dapat ditunjukkan dengan menggunakan persamaan (1.74) bahwa:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (1.77)$$

Kita sekarang dapat menyatakan vektor $\mathbf{A}$ dalam tiga komponen A_ρ, A_φ, dan A_z dalam tiga arah vektor satuan yang saling tegak lurus $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, dan $\hat{\mathbf{z}}$, yaitu,

$$\mathbf{A} = A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \qquad (1.78)$$

Komponen-komponen ini tidak hanya tergantung pada vektor itu sendiri tetapi juga tergantung pada tempatnya di dalam ruang, karena $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ tergantung pada φ . Jika $\mathbf{A}$ merupakan fungsi waktu t, maka:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_\rho}{dt}\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dA_\varphi}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_\varphi\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{z}} + A_z\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\varphi}$$

Karena $d\hat{\mathbf{z}}/dt = 0,\ d\hat{\boldsymbol{\rho}}/d\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}},$ dan $d\hat{\boldsymbol{\varphi}}/d\varphi = -\hat{\boldsymbol{\rho}}$, setelah penyusunan ulang kita memperoleh

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_\rho}{dt} - A_\varphi\dot{\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{dA_\varphi}{dt} + A_\rho\dot{\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{z}} \qquad (1.79)$$

D. GERAK PARTIKEL DALAM KOORDINAT BOLA

Koordinat bola merupakan koordinat yang umumnya paling banyak digunakan dalam situasi simetri bola, misalnya pada kasus gaya coulomb dalam atom dan gaya gravitasi. Titik P dalam ruang ditempatkan dengan koordinat (r, θ, φ) seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.16. Dalam hal ini r adalah jarak radial dari titik asal O, φ adalah sudut azimut yang menempatkan suatu bidang yang memiliki sudut rotasi diukur dari sumbu-X, sedangkan sudut adalah sudut polar yang diukur ke bawah dari sumbu-Z. Sudut polar θ dapat mempunyai sebarang nilai antara 0 dan $\pi/2$, sedangkan sudut azimut φ dapat mempunyai sebarang nilai antara 0 dan π .

Koordinat Cartesian (x, y, z) dihubungkan dengan koordinat bola (r, θ, φ) melalui persamaan berikut:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad (1.80a)$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad (1.80b)$$

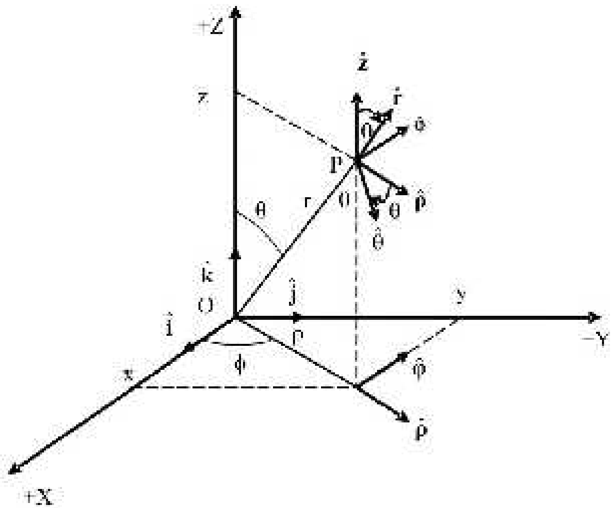
$z = r\cos$¯ (1.80c)

Perhatikan bahwa $r\sin$¯ = ° . Hubungan sebaliknya adalah.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.81a)$$

¯ $= \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ (1.81b)

¤ $= \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ (1.81c)



Gambar 1.16.
Koordinat bola $(r,$¯$,$¤$)$ dan vektor satuan $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ yang bersesuaian.

Tiga vektor satuan yang saling tegak lurus dalam koordinat bola adalah $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, dan $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.16. Ditunjukkan pula vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{z}} (= \mathbf{k})$, dan $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Vektor satuan $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ terletak pada bidang XY, sedangkan $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}$, dan $\hat{\mathbf{z}}$ terletak pada satu bidang vertikal. Untuk r dan ¯ tertentu perubahan ¤ bersesuaian dengan rotasi di sekitar sumbu-Z, sedangkan untuk r dan ¤ tertentu perubahan ¯ bersesuaian dengan rotasi pada bidang yang mengandung $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\rho}},$ dan $\hat{\mathbf{z}}$. Dari Gambar 1.16 hubungan antara vektor-vektor satuan dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin ¯ + \hat{\mathbf{z}} \cos ¯ = \hat{\mathbf{i}} \sin ¯ \cos ¤ + \hat{\mathbf{j}} \sin ¯ \sin ¤ + \hat{\mathbf{k}} \cos ¯ \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos ¯ - \hat{\mathbf{z}} \sin ¯ = \hat{\mathbf{i}} \cos ¯ \cos ¤ + \hat{\mathbf{j}} \cos ¯ \sin ¤ - \hat{\mathbf{k}} \cos ¯ \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{i}} \sin ¤ + \hat{\mathbf{j}} \cos ¤
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Mendiferensialkan persamaan ini kita bisa memperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial ¯} &= \hat{\boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial ¤} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \sin ¯ \\
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial ¯} &= -\hat{\mathbf{r}} & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial ¤} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cos ¯ \\
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial ¯} &= 0 & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial ¤} &= -\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{r}} \sin ¯ - \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos ¯
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Dalam koordinat bola posisi titik P dalam ruang ditentukan oleh vektor posisi **r**, yang dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}(¯, ¤) \tag{1.84}$$

Kita sekarang dapat mencari ungkapan untuk kecepatan dan percepatan dengan menggunakan hubungan-hubungan sebelumnya.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\hat{\mathbf{r}}(¯, ¤)] = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

Menggunakan persamaan (1.83) kita memperoleh,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}(¯, ¤)}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d¯}\frac{d¯}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d¤}\frac{d¤}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{¯} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\dot{¤} \sin ¯$$

Oleh karena itu, kita memperoleh:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{¤} \sin ¯)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.85}$$

Dengan cara yang sama,

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{¤} \sin ¯)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}]$$

yang dengan penyederhanaan menghasilkan,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+ (r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (1.86)$$

Karena $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, dan $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ membentuk suatu himpunan vektor satuan yang saling tegak lurus, kita bisa menuliskan vektor $\mathbf{A}$ dalam bentuk komponen sebagai,

$$\mathbf{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (1.87)$$

Komponen-komponen itu tidak hanya tergantung pada vektor $\mathbf{A}$, tetapi juga tergantung pada letaknya di dalam ruang. Jika merupakan fungsi waktu t, kita dapat menuliskan.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_r}{dt}\hat{\mathbf{r}} + A_r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\theta\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} + \frac{dA_\phi}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_\phi\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}$$

Dengan menggunakan persamaan (1.75) kita bisa menuliskan

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\sin\theta\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$$

$$\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \frac{d\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}\dot{\phi} = (-\hat{\mathbf{r}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta)\dot{\phi}$$

Menggunakan hasil-hasil ini kita memperoleh

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta\dot{\theta} - A_\phi\sin\theta\,\dot{\phi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{dA_\theta}{dt} - A_r\dot{\theta} - A_\phi\cos\theta\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+ \left(\frac{dA_\phi}{dt} - A_r\sin\theta\,\dot{\phi} - A_\theta\cos\theta\,\dot{\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

E. GERAK MELINGKAR

Gerak melingkar pada suatu bidang merupakan salah satu contoh gerak dengan lintasan lengkung. Gerak semacam itu secara umum telah dibicarakan dalam pokok bahasan gerak dalam koordinat polar bidang.

Menurut definisi, untuk sebuah partikel yang sedang bergerak dalam lintasan lengkung, vektor kecepatannya $\mathbf{v}$ sama dengan hasil kali laju v dan vektor satuan $\hat{\mathbf{u}}$ dalam arah garis singgung, sehingga:

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_t \tag{1.89}$$

Selama partikel itu bergerak, laju dan arahnya mungkin berubah; oleh karena itu percepatan partikel dituliskan sebagai;

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{\mathbf{u}}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_t + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt}$$

atau

$$\mathbf{a} = \dot{v}\hat{\mathbf{u}}_t + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} \tag{1.90}$$

Karena besar vektor satuan $\hat{\mathbf{u}}_t$ adalah konstan, maka derivatif $d\mathbf{u}_t / dt$ berarti arah $\hat{\mathbf{u}}_t$ yang sedang berubah terhadap waktu. Seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.17, partikel mula-mula berada pada titik P dan dalam selang waktu partikel itu menempuh jarak serta mencapai titik Q. Misalkan vektor satuan pada P dan Q secara berturut-turut adalah $\hat{\mathbf{u}}_t$ dan $\hat{\mathbf{u}}'_t$. Dalam gambar sebelah kanan ditunjukkan bahwa dua vektor satuan ini berbeda sudut Δ^{-}. Besar perbedaan dua vektor satuan tersebut adalah,

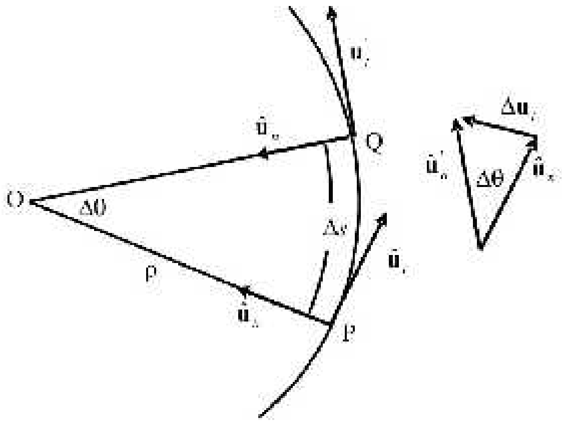
$$|\Delta\mathbf{u}_t| = |\mathbf{u}'_t - \mathbf{u}_t| = 2\sin\frac{\Delta^{-}}{2}$$

Selama Δ^{-} mendekati nol, ruas kanan mendekati Δ^{-}, sehingga,

$$\operatorname*{limit}_{\Delta^{-}\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{u}_t}{\Delta^{-}}\right| = 1$$

Dalam limit itu, $\Delta\hat{\mathbf{u}}_t$ menjadi tegak lurus pada $\hat{\mathbf{u}}_t$ dan disebut vektor normal satuan $\mathbf{u}'_n$, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.17 dengan demikian,

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{d\mathbf{u}_t}{d\theta} \tag{1.91}$$



Gambar 1.17.
Vektor satuan untuk gerak partikel sepanjang lintasan lengkung.

Dengan menggunakan aturan rantai, kita bisa menuliskan,

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\mathbf{u}}_n \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Tetapi $ds/dt = v$ dan $ds/d\theta = \rho$ = jari-jari kelengkungan lintasan; jadi,

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_t}{dt} = \hat{\mathbf{u}}_n \frac{v}{\rho} \tag{1.92}$$

Memasukkan persamaan ini dalam persamaan (1.90), kita memperoleh

$$\mathbf{a} = \dot{v}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n \tag{1.93}$$

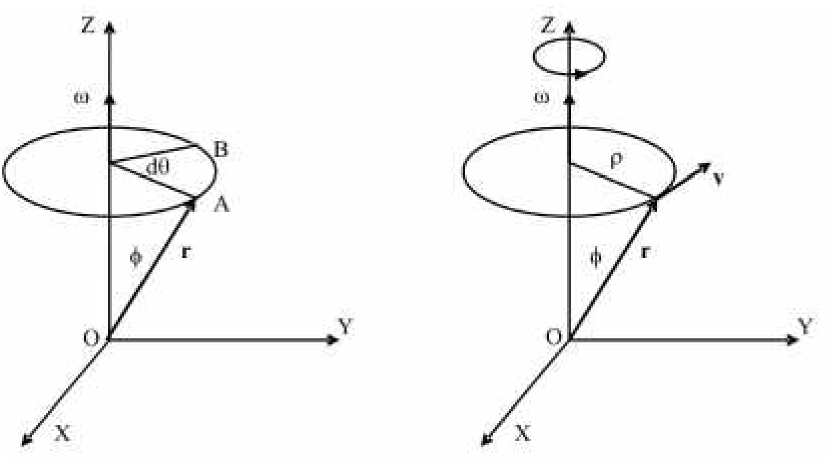
Jadi percepatan digambarkan dalam dua komponen, tangensial dan normal, yaitu

$$\mathbf{a}_t = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\circ}$$

Komponen normal kecepatan selalu mengarah ke sisi cekung lintasan dan disebut percepatan sentripetal. Besar kecepatan **a** adalah

$$a = |\mathbf{a}| = \left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\circ^2} \right)^{1/2} \tag{1.94}$$



Gambar 1.18.
(a) Gerak melingkar dan (b) hubungan vektor antara $\mathbf{v}, \mu,$ dan $\mathbf{r}$.

Sekarang, marilah kita perhatikan gerak melingkar partikel dalam koordinat Cartesian. Gambar 1.18(a) menunjukkan sebuah partikel yang bergerak melingkar pada bidang yang sejajar dengan bidang XY. Pada saat t partikel itu berada di titik A dan pada saat $t + dt$ partikel itu berpindah sampai B. Jika jari-jari lintasan ° adalah konstan, maka kecepatan sesaat partikel adalah,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\circ\, d\bar{\ }}{dt} \tag{1.95}$$

Besaran,

$$\mu = \frac{d\bar{}}{dt} \qquad (1.96)$$

disebut kecepatan sudut. Kecepatan sudut dinyatakan dalam satuan radian per sekon (= rad/s atau rad s^{-1} atau hanya s^{-1}). Oleh karena itu, persamaan (1.95) dapat dituliskan sebagai,

$$v = \mu\,° \qquad (1.97)$$

Kecepatan sudut merupakan besaran vektor yang mempunyai arah sepanjang sumbu putaran (atau rotasi) yang tegak lurus pada bidang gerak, sesuai gerak maju-mundurnya sekerup putar kanan yang diputar searah dengan gerak putaran benda. Gambar 1.17(b) menunjukkan bahwa $° = r \sin ¤$, sehingga kita dapat menuliskan,

$$v = \mu r \sin ¤ \,.$$

Hal ini menunjukkan berlakunya hubungan vektor,

$$\mathbf{v} = \mu \times \mathbf{r} \qquad (1.98)$$

Perlu diperhatikan bahwa persamaan ini hanya berlaku untuk gerak melingkar, yaitu gerak dengan r dan ¤ konstan.

Suatu keadaan khusus adalah gerak melingkar beraturan atau gerak melingkar seragam, yaitu gerak melingkar dengan kecepatan sudut konstan. Dalam hal ini partikel melalui setiap titik pada lingkaran dalam selang waktu konstan. Periode T adalah waktu yang diperlukan oleh partikel untuk menempuh satu kali putaran. Jumlah putaran tiap satuan waktu, biasanya tiap sekon, disebut frekuensi. Hubungan antara periode dan frekuensi dinyatakan sebagai,

$$f = \frac{1}{T} \qquad (1.99)$$

Dalam SI periode dinyatakan dalam *s*, frekuensi dinyatakan hertz (atau Hz), yang didefinisikan sebagai cps (*cycle per second*). Kadang-kadang frekuensi gerak melingkar dinyatakan dalam rps (*revolution per second*) atau rpm (*revolution per minute*).

Contoh 1.3
Gerak sebuah partikel digambarkan menurut persamaan

$$\mathbf{r} = at\hat{\mathbf{i}} + A\cos\mu t\hat{\mathbf{j}}$$

Carilah kecepatan dan percepatan partikel sebagai fungsi waktu.
Penyelesaian

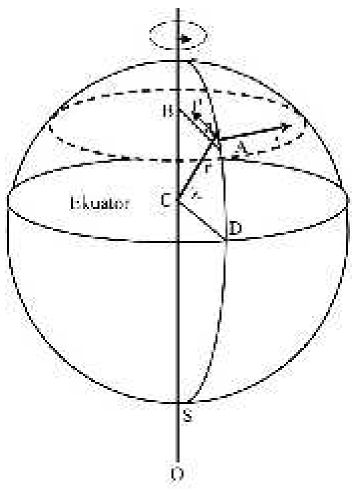
Kecepatan: $\mathbf{v} = \dfrac{d\,\mathbf{r}}{dt} = a\,\hat{\mathbf{i}} + \left(-A\sin\mu t\right)\mu\,\hat{\mathbf{j}} = a\,\hat{\mathbf{i}} - \left(A\mu\sin\mu t\right)\hat{\mathbf{j}}$

Percepatan: $\mathbf{a} = \dfrac{d\,\mathbf{v}}{dt} = 0\,\hat{\mathbf{i}} - \left(A\mu\cos\mu t\right)\mu\,\hat{\mathbf{j}} = -\left(A\mu^2\cos\mu t\right)\hat{\mathbf{j}}$

Contoh 1.4
Anggaplah bahwa bumi berotasi secara beraturan di sekeliling sumbunya dengan kecepatan sudut $\mu = 7,292\times10^{-5}$ rad/s . Carilah kecepatan dan percepatan suatu titik pada permukaan bumi dinyatakan dalam derajat lintangnya.

Penyelesaian
Gerak rotasi bumi tersebut mengakibatkan semua titik pada permukaan bumi melakukan gerak melingkar beraturan. Dalam Gambar 1.19 ditunjukkan bahwa garis lintang titik *A* ditentukan oleh sudut α, yang dibentuk vektor posisi r (r = OA) dan jari-jari ekuator *OD*. Jika bumi berotasi sekitar sumbu rotasi *US*, titik *A* melakukan gerak melingkar beraturan dengan pusat *B* dan berjari-jari,

$$\circ = r\cos\sim$$



Gambar 1.19.
Kecepatan dan percepatan suatu titik pada permukaan bumi.

Kecepatan suatu titik pada garis lintang menyinggung lingkaran tersebut dan sejajar dengan ekuator. Besar kecapatan titik yang bersangkutan adalah

$$v = \mu^{\circ} = \mu r \cos \sim$$

karena gerak tersebut adalah gerak melingkar beraturan, maka percepatannya adalah percepatan sentripetal ke arah titik B dan besarnya adalah,

$$a = v^2 / {}^{\circ} = \mu^2 r \cos \sim$$

Dengan memasukkan nilai $\mu = 7{,}192 \times 10^{-5}$ rad/s dan jari-jari bumi $r = 6{,}37 \times 10^{6}$ m , diperoleh

$$v = 644 \cos \sim \text{ m/s}$$
$$a = 3{,}39 \times 10^{-2} \cos \sim \text{ m/s}^2$$

Kecepatan dan percepatan maksimum terjadi pada ekuator ($\sim = 0^{\circ}$), yang besarnya secara berturut-turut adalah v = 644 m/s dan a = 3,39 10^{-2} m/s^2.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dua partikel dipancarkan dari satu sumber dan pada waktu tertentu posisi dua partikel itu adalah,

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}} \text{ dan } \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$$

a. Hitunglah panjang masing-masing vektor posisi itu!
b. Carilah vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ yang menunjukkan pergeseran relatif partikel kedua terhadap partikel pertama. Hitunglah panjang vektor pergeseran **r** ini!

c. Gambarkan tiga vektor tersebut dalam koordinat Cartesian!

2) Sebuah benda bergerak sepanjang sumbu-Y menurut persamaan

$$y = 2t^3 + 5t^2 + 5$$

dengan y dinyatakan dalam meter dan t dinyatakan dalam sekon. Hitunglah kecepatan benda pada saat $t = 2$ sekon!

3) Percepatan sebuah partikel ditentukan oleh

$a_x = At,\ \ a_y = Bt + ct^2$, dan $a_z = D$

dengan A, B, C, dan D adalah konstanta. Carilah pergeseran benda antara $t = 0$ dan $t = 2$, jika semua komponen kecepatan adalah nol pada saat $t = 0$.

4) Sebuah benda yang mula-mula diam mengalami percepatan $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ selama selang waktu 3 sekon. Carilah besar kecepatan pada akhir selang waktu itu!

5) Posisi sebuah partikel yang bergerak melingkar beraturan ditentukan oleh

$$\mathbf{r} = r_0 \cos \mu t\, \hat{\mathbf{i}} + r_0 \sin \mu t\, \hat{\mathbf{j}}$$

dengan r_0 dan μ adalah konstanta. Hitunglah kecepatan dan percepatan partikel tersebut setiap saat!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Misalkan dua vektor posisi tersebut dituliskan sebagai,

$\mathbf{r}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}$ dan $\mathbf{r}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}} + z_2\hat{\mathbf{k}}$

maka panjang masing-masing vektor adalah

$r_1 = |\mathbf{r}_1| == \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ dan $r_2 = |\mathbf{r}_2| == \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

Vektor pergeseran, yang merupakan selisih dua vektor tersebut, dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}$$

Panjang vektor ini dapat dihitung mirip perhitungan r_1 dan r_2. Masukkanlah komponen-komponen yang bersesuaian untuk menjawab semua pertanyaan, kemudian gambarkan dalam koordinat cartesian.

2) Kecepatan benda sebagai fungsi t dapat dituliskan,

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 10t$$

Masukkan *t = 2* sekon pada persamaan ini. Percepatan benda sebagai fungsi *t* dicari dengan menggunakan persamaan *a = dy/dt*, kemudian masukkan *t = 2* sekon.

3) Hitunglah komponen-komponen kecepatan dengan rumus integral,

$$v_x = \int_0^t a_x dt\ ,\ v_y = \int_0^t a_y dt\ , \text{ dan } v_z = \int_0^t a_z dt$$

Kemudian hitunglah komponen-komponen pergeseran dengan rumus integral,

$$x = \int_0^t v_x dt\ ,\ y = \int_0^t v_y dt\ , \text{ dan } z = \int_0^t v_z dt$$

4) Vektor kecepatan dapat dihitung sebagai berikut,

$$\mathbf{v} = \int_{\mathbf{0}}^3 \mathbf{a} dt = \int_{\mathbf{0}}^3 \left(3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}\right) dt = \left[3t\hat{\mathbf{i}} - 4t\hat{\mathbf{j}}\right]_0^3 = 9\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}}$$

Besar kecepatan dihitung dengan rumus $v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

5) Vektor kecepatan dihitung dengan menggunakan rumus $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, sedangkan vektor percepatan dihitung dengan rumus $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Besar vektor kecepatn dan percepatan dihitung dengan rumus mirip soal nomor 4.

RANGKUMAN

Kinematika menggambarkan gerak benda atau partikel tanpa memperhatikan gaya yang menghasilkan gerak itu. Kinematika berkaitan dengan konsep-konsep dan hubungan antara posisi, kecepatan, percepatan, dan waktu.

Dalam koordinat Cartesian tiga-dimensi vektor posisi partikel dapat dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ sebagai,

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\, x + \hat{\mathbf{j}}\, y + \hat{\mathbf{k}}\, z$$

sehingga kecepatan partikel dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} \frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}} \frac{dy}{dt} + \hat{\mathbf{k}} \frac{dz}{dt} = \hat{\mathbf{i}} v_x + \hat{\mathbf{j}} v_y + \hat{\mathbf{k}} v_z$$

dan percepatannya dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{\mathbf{k}}\frac{d^2z}{dt^2} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y + \hat{\mathbf{k}}a_z$$

Dalam koordinat polar bidang vektor posisi partikel dapat dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ sebagai

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} + r\hat{\boldsymbol{\theta}}(\bar{\ })$$

sehingga kecepatan partikel dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

dan percepatannya dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Dalam koordinat silinder vektor posisi partikel dapat dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\mathbf{z}}$ sebagai:

$$\mathbf{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$$

Sehingga kecepatan partikel dapat dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}$ sebagai:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}$$

dan percepatannya dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}}$$

Gerak melingkar merupakan salah satu bentuk gerak dengan lintasan lengkung. Dalam hal ini percepatan yang dialami partikel terdiri dari dua komponen, yaitu komponen tangensial dan komponen normal dan dapat dituliskan sebagai,

$$\mathbf{a} = \dot{v}\hat{\mathbf{u}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_n$$

$$\mathbf{a}_t = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\circ}$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Pada saat t posisi partikel yang bergerak dalam koordinat Cartesian ditentukan oleh

$$\mathbf{r} = (4\cos 2t)\,\hat{\mathbf{i}} + (4\sin 2t)\,\hat{\mathbf{j}} + 6t\hat{\mathbf{k}}$$

Besar kecepatan partikel tersebut adalah ….
A. 6 m/s
B. 8 m/s
C. 10 m/s
D. 22 m/s

2) Besar percepatan pada benda yang bergerak dinyatakan sebagai $a = 4t$, dengan *t* dalam sekon dan percepatan dalam m/s^2. Jika kecepatan benda pada saat t = 0 adalah 10 m/s, maka kecepatan benda pada saat t = 3 s adalah ….
A. 28 m/s
B. 18 m/s
C. 14 m/s
D. 4 m/s

3) Kecepatan benda yang sedang bergerak ditentukan oleh

$$\mathbf{v} = 16t\,\hat{\mathbf{i}} + 25t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 33\hat{\mathbf{k}}$$

dengan *t* dinyatakan dalam sekon dan posisi dalam m. Besar kecepatan partikel pada saat *t* = 2 s adalah ….
A. 100 m/s
B. 50 m/s
C. 16 m/s
D. 0 m/s

4) Sebuah partikel bergerak dengan lintasan lengkung menurut persamaan

$x = t$ dan $y = 2t - t^2$

dengan x dan y dinyatakan dalam m dan t dalam s. Jika pada saat t = 1 jari-jari kelengkungan lintasannya ¤ $= 0,5$ m, maka percepatan radial pada saat itu adalah ….

A. 0 m/s^2
B. 1 m/s^2

C. 2 m/s^2
D. 4 m/s^2

5) Sebuah partikel bergerak dengan lintasan lengkung menurut persamaan
$x = t^2$ dan $y = (t-1)^2$
dengan x dan y dinyatakan dalam m dan t dalam s. Komponen percepatan tangensial pada saat t = 1 s adalah ….
A. 2,0 m/s^2
B. 4,0 m/s^2
C. 6,0 m/s^2
D. 8,0 m/s^2

6) Gerak partikel dalam koordinat polar digambarkan oleh persamaan
$\mathbf{r} = e^{kt}\hat{\mathbf{r}}$, ¯ $= at$
dengan *k* dan *a* adalah konstanta. Kecepatan gerak partikel itu adalah ….
A. $\mathbf{v} = ke^{kt}\hat{\mathbf{r}}$
B. $\mathbf{v} = ae^{kt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$
C. $\mathbf{v} = ke^{kt}\hat{\mathbf{r}} + a\hat{\boldsymbol{\theta}}$
D. $\mathbf{v} = ke^{kt}\hat{\mathbf{r}} + ae^{kt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

7) Gerak partikel dalam koordinat bola digambarkan oleh persamaan
$\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{r}}$, ¯ $= B\sin \mu t$, ¤ $= bt$
dengan *a, B, b,* dan *ω* adalah konstanta. Kecepatan gerak partikel itu adalah ….
A. $\mathbf{v} = aB\cos \mu\, t\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$
B. $\mathbf{v} = ab\sin$ ¯ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
C. $\mathbf{v} = aB\cos \mu\, t\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + ab\sin$ ¯ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
D. $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}} + aB\cos \mu\, t\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + ab\sin$ ¯ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

8) Sebuah sungai yang lebarnya *w*, laju air pada tepi sungai adalah nol, tetapi bertambah secara linear dan mencapai nilai v_c pada tengah-tengah

sungai. Jika sebuah perahu diarahkan dari salah satu tepi sungai dengan laju konstan v_b, maka ketika perahu mencapai tepi sungai lainnya perahu itu telah hanyut ke hilir pada jarak ….

A. $3v_c w / 4v_b$

B. $v_c w / 2v_b$

C. $v_c w / 4v_b$

D. $v_c w / 8v_b$

9) Posisi partikel yang sedang bergerak dituliskan sebagai,

$$\mathbf{r} = A\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

dengan $\sim$ adalah konstanta. Percepatan partikel tersebut dapat dinyatakan sebagai ….

A. $\mathbf{a} = A\sim\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} - e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$

B. $\mathbf{a} = \dfrac{A}{\sim}\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} - e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$

C. $\mathbf{a} = A\sim^2\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$

D. $\mathbf{a} = \dfrac{A}{\sim^2}\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$

10) Sebuah partikel yang sedang bergerak mempunyai posisi,

$$\mathbf{r}(t) = a\sin kt\,\hat{\mathbf{i}} + b\cos kt\,\hat{\mathbf{j}}$$

dengan a, b, dan k adalah konstanta. Lintasan partikel tersebut berbentuk ….

A. parabola
B. hiperbola
C. elips
D. lingkaran

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100% = baik sekali
	80 - 89% = baik
	70 - 79% = cukup
	< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Kita cari panjang masing-masing vektor

$$A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$
$$B = \sqrt{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}} = \sqrt{36+64+100} = \sqrt{200}$$

Kita cari perkalian titik antara vektor **A** dan vektor **B**

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (1)(6)+(-2)(8)+(-1)(-10) = 6-16+10 = 0$$

Menurut definisi perkalian titik

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = AB\cos{}^{-}$$

$$\cos{}^{-} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$

$$\cos{}^{-} = \frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{200}} = 0 \rightarrow {}^{-} = 90^{o}$$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A salah, karena digunakan rumus $\sin{}^{-} = \dfrac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$.

Jabawan B salah, karena kesalahan mencari panjang masing-masing vektor

Jawaban C salah, karena digunakan rumus $\cos{}^{-} = A_x / A_y$

2) Vektor kecepatan:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$$

Besar vektor kecepatan:

$$v = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{\left(\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+8\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+8\hat{\mathbf{k}}\right)} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$$

Vektor satuan dalam arah **v**:

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\hat{\mathbf{i}}+4\mathbf{j}+8\hat{\mathbf{k}}}{9} = \tfrac{1}{9}\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{4}{9}\mathbf{j} + \tfrac{8}{9}\hat{\mathbf{k}}$$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A, B, dan C salah, karena besar vektor kecepatan tidak dicari lebih dahulu.

3) Vektor kecepatan sudut: $\mu = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$

Vektor posisi:

$\mathbf{r} = 0\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

Vektor kecepatan:

$$\mathbf{v} = \mu \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\ (0-24) + \hat{\mathbf{j}}(0-0) + (0-0)\hat{\mathbf{k}} = -24\hat{\mathbf{i}}$$

Besar kecepatan: $v = \sqrt{(-24)^2} = 24$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A salah, karena bilangan itu merupakan panjang **r.**

Jawaban B salah, karena bilangan itu merupakan besar kecepatan sudut μ **.**

4) Panjang masing-masing vektor posisi

$r_1 = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$ dan $r_2 = |\mathbf{r}_2| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = 10$

Perkalian vektor antara dua vektor posisi

$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|\cos\text{¯} = (5)(10)\cos\text{¯} = 50\cos\text{¯}$

$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = (4)(8) + (3)(6) = 32 + 18 = 50$

Menyamakan dua persamaan ini diperoleh

$\cos\text{¯} = 1 \rightarrow \text{¯} = 0^\circ$.

Jadi jawaban yang benar adalah A.

Jawaban B, C, dan D salah, karena kesalahan dalam mencari perkalian titik dua vektor yang bersangkutan.

5) Vektor satuan dalam arah **r:**

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{9+16}} = \tfrac{3}{5}\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{4}{5}\hat{\mathbf{j}}$$

Komponen **F** pada arah **r** adalah:

$$F_r = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \left(20\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(\tfrac{3}{5}\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{4}{5}\hat{\mathbf{j}}\right) = 12 + 12 = 24$$

Jadi jawaban yang benar adalah B.

Jawaban A salah, karena bilangan ini merupakan panjang vektor posisi.

Jawaban C salah, karena bilangan ini merupakan panjang vektor gaya.

Jawaban D salah, karena bilangan ini merupakan perkalian skalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$.

6) Fungsi skalar

$\text{¤} = x^2 - y^2 z$

Oleh karena itu,

$$\nabla \text{¤} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \text{¤}}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \text{¤}}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \text{¤}}{\partial z}$$

$$\nabla \text{¤} = \hat{\mathbf{i}}\left(2x\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(-2yz\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(-y^2\right)$$

$$\nabla \text{¤} = 2x\hat{\mathbf{i}} - 2yz\hat{\mathbf{j}} - y^2\hat{\mathbf{k}}$$

Pada titik (1,1,1): $\nabla \text{¤} = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A, B, dan C salah, karena terjadi kesalahan dalam mendiferensialkan fungsi yang bersangkutan.

7) Karena fungsi potensial

$V(r) = k/r$ dan

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2},$$

maka kita dapat menuliskan

$$V(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

dan

$$\nabla V = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\left(-\tfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2x\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(-\tfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2y\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(-\tfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2z\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\left(-kx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(-ky\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(-kz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\left(-kxr^{-3}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(-kyr^{-3}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(-kzr^{-3}\right)$$

Gaya dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \left(kx/r^3\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(ky/r^3\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(kz/r^3\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A, B, dan D salah, karena terjadi kesalahan dalam mendiferensialkan fungsi yang bersangkutan.

8) Vektor medan:

$$\mathbf{r} = xyz\hat{\mathbf{i}} + x^2y^2z^2\hat{\mathbf{j}} + x^3y^3z^3\hat{\mathbf{k}}$$

Oleh karena itu

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^2y^2z^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(x^3y^3z^3\right)}{\partial z} = xz + 2x^2yz^2 + 3x^3y^3z^2$$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A, B, dan C salah, karena terjadi kesalahan dalam mendiferensialkan fungsi yang bersangkutan.

9) Vektor medan:

$$\mathbf{r} = x^2\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} + z^2\hat{\mathbf{k}}$$

Oleh karena itu

$$\nabla\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}(0-0) + \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(0-0) = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Jadi jawaban yang benar adalah A.

Jawaban B, C, dan D salah, karena terjadi kesalahan dalam mendiferensialkan fungsi yang bersangkutan.

10) Vektor

$$\mathbf{B} = 6\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}}$$

Panjang vektor **B**:

$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{36+64} = 10$$

Cosinus arahan:

$$\sim\ = \tfrac{6}{10} = \tfrac{3}{5}; \quad = \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5}.$$

Jadi jawaban yang benar adalah B.

Jawaban A salah, karena bilangan-bilangan ini merupakan kebalikan dari komponen-komponen vektor **B**.

Jawaban C salah, karena bilangan-bilangan ini merupakan komponen-komponen vektor **B**

Jawaban D salah, karena bilangan-bilangan ini merupakan kuadrat komponen-komponen vektor **B**.

Tes Formatif 2

1) Vektor kecepatan:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (-4\sin 2t)(2)\hat{\mathbf{i}} + (4\cos 2t)(2)\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} = (-8\sin 2t)\hat{\mathbf{i}} + (8\cos 2t)\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

Besar kecepatan:

$$v = \sqrt{(64\sin^2 2t) + (64\cos^2 2t) + 36}$$

$$v = \sqrt{64(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ m/s}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A salah, karena merupakan jumlah koefisien komponen-komponen posisi.

Jawaban B salah, karena hanya merupakan akar jumlah kuadrat komponen-komponen kecepatan dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y.

Jawaban D salah, karena merupakan jumlah koefisien komponen-komponen kecepatan.

2) Besar kecepatan benda dapat dicari sebagai berikut:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt$$

$$v - v_0 = \int_0^3 4t dt$$

$$v - 10 = \left[2t^2\right]_0^3$$

$$v = 10 + 18 = 28 \text{ m/s.}$$

Jadi jawaban yang benar adalah A.

Jawaban B salah, karena nilai v_0 = 10 m/s tidak dimasukkan.

Jawaban C salah, karena pengintegralan yang salah.

Jawaban D salah, karena pengintegralan yang salah dan nilai v_0 = 10 m/s tidak dimasukkan.

3) Mula-mula dicari kecepatan partikel sebagai berikut

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} = 16\hat{\mathbf{i}} + 50t\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

Kemudian dicari percepatan partikel

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a} = 0\hat{\mathbf{i}} + 50\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

Jadi jawaban yang benar adalah B.

Jawaban A salah, karena bilangan ini merupakan komponen kecepatan dalam arah sumbu-Y pada saat t = 2.

Jawaban C salah, karena bilangan ini merupakan komponen kecepatan dalam arah sumbu-X.

Jawaban D salah, karena bilangan ini merupakan komponen percepatan dalam arah sumbu-X atau sumbu-Z.

4) Komponen-komponen kecepatan dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y:

$v_x = dx/dt = 1$ dan $v_y = dy/dt = 2 - 2t$.

Pada saat t = 1 komponen-komponen kecepatan itu menjadi

$v_x = 1$ dan $v_y = 2 - 2t = 0$.

Berarti kecepatan tangensialnya adalah $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$ m/s. Percepatan radialnya adalah

$a_n = v^2 / \circ = 1/0,5 = 2$ m/s^2.

Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A salah, karena bilangan ini adalah komponen percepatan dalam arah sumbu-X.

Jawaban B salah, karena bilangan ini adalah komponen kecepatan dalam arah sumbu-X.

Jawaban D salah, karena digunakan rumus $a_n = v^2 / \circ^2$.

5) Komponen-komponen kecepatan tangensial:

$v_x = dx/dt = 2t$ dan $v_y = dy/dt = 2t - 2$,

sehingga

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{(8t^2 - 8t + 4)} = 2\left(2t^2 - 2t + 1\right)^{1/2}$$

Percepatan tangensial:

$$a_t = dv/dt = 2(1/2)\left(2t^2 - 2t + 1\right)^{-1/2}(4t - 2)$$

Dengan memasukkan t = 1 s diperoleh a_t = 2 m/s^2.

Jadi jawaban yang benar adalah A.

Jawaban B salah, karena bilangan ini adalah kuadrat percepatan tangensial.

Jawaban C salah, karena salah menghitung kecepatan.

Jawaban D salah, karena bilangan ini adalah dua kali kuadrat percepatan tangensial.

6) Kecepatan partikel dalam koordinat polar:

$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\overline{}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$,

sedangkan

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = ke^{kt} \text{ dan } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = a \ ,$$

sehingga

$$\mathbf{v} = ke^{kt}\hat{\mathbf{r}} + ae^{kt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

Jawaban A salah, karena hanya komponen kecepatan dalam arah radial.

Jawaban B salah, karena hanya komponen kecepatan dalam arah θ.

Jawaban C salah, karena suku kedua tidak memasukkan nilai *r*.

7) Kecepatan partikel dalam koordinat bola:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \ ,$$

sedangkan

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 0 \ , \ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = B\mu\cos\mu t \ , \text{ dan } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = b \ ,$$

sehingga

$$\mathbf{v} = 0\hat{\mathbf{r}} + aB\mu\cos\mu t\hat{\boldsymbol{\theta}} + ab\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

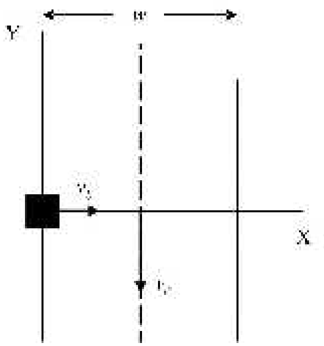
Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A salah, karena hanya komponen kecepatan dalam arah θ.

Jawaban B salah, karena hanya komponen kecepatan dalam arah φ.

Jawaban D salah, karena salah menghitung $\dot{r} = dr/dt$.

8) Perhatikan gambar berikut:



Kecepatan air:

$$v_y = kx \text{ dan } v_c = \frac{kw}{2}$$

sehingga
$dy/dt = kx \to dy = kxdt$

Kecepatan perahu:
v_b (konstan),

sehingga
$x = v_b t \to dx/dt = v_b$ atau $dt = dx/v_b$.

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) kita memperoleh

$$dy = \frac{kx}{v_b} dx$$

$$y = \frac{k}{v_b} \int xdx$$

Kita mengintegralkan dari tepi kiri sungai (x = 0) sampai pertengahan sungai (x = w/2), sehingga

$$y_1 = \frac{k}{v_b} \int_0^{w/2} xdx$$

$$y_1 = \frac{k}{2v_b} \left[x^2 \right]_0^{w/2} = \frac{k}{2v_b} \frac{w^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{kw}{2} \frac{w}{2v_b} = \frac{1}{2} v_c \frac{w}{2v_b} = \frac{1}{2} \frac{v_c w}{2v_b}.$$

Ulangi proses sebelumnya dari pertengahan sungai sampai tepi kanan sungai dengan $v_y = -kx$. Kita akan memperoleh $y_2 = \frac{1}{2} \frac{v_e w}{2v_b}$, sehingga jarak hanyut total $y = y_1 + y_2$ atau $y = \frac{v_c w}{2v_b}$.

Jadi jawaban yang benar adalah B.
Jawaban A dan D salah, karena salah menghitung/memasukkan batas integral.
Jawaban C salah, karena ini jarak hanyut ketika perahu mencapai pertengahan sungai.

9) Posisi partikel:

$$\mathbf{r} = A\left(e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Kecepatan partikel:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = A\left(\sim e^{\sim t}\hat{\mathbf{i}} - \sim e^{-\sim t}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Percepatan partikel:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\left(\sim^2 e^{\sim t} + \sim^2 e^{-\sim t}\right) = A\sim^2\left(e^{\sim t} + e^{-\sim t}\right)$$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A salah, karena besaran ini merupakan kecepatan partikel.

Jawaban B dan D salah, karena terjadi kesalahan dalam mendiferensialkan.

10) Karena $x = a\cos kt$, maka $x^2 = a^2\cos^2 kt$ atau $\dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2 kt$ (a)

Karena $y = b\sin kt$, maka $y^2 = b^2\sin^2 kt$ atau $\dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2 kt$ (b)

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) kita memperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 kt + \sin^2 kt \quad \text{atau} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan terakhir menunjukkan persamaan elips.

Jadi jawaban yang benar adalah C.

Jawaban A dan D salah, karena bentuk parabola dan hiperbola tidak bisa dibuktikan.

Jawaban C salah, karena persamaan lingkaran terjadi jika $a = b$.

Glosarium

Cosinus arahan : Cosinus sudut yang dibentuk oleh suatu vektor terhadap komponen-komponennya pada masing-masing sumbu koordinat.

Kinematika : Kinematika menggambarkan gerak benda atau partikel tanpa memperhatikan gaya yang menghasilkan gerak itu. Kinematika berkaitan dengan konsep-konsep dan hubungan antara posisi, kecepatan, percepatan, dan waktu.

Komponen vektor : Hasil penguraian sebuah vektor, biasanya dalam arah sumbu-sumbu yang bersesuaian dengan sistem koordinat yang dipilih.

Operator diferensial : Operator diferensial vektor ditunjukkan dengan **grad** atau ∇ (del). Operator del yang dioperasikan pada fungsi skalar u akan membentuk **grad** u atau ∇u. Bilamana operator del melakukan perkalian skalar dengan fungsi vektor lain **A** dengan membentuk $\nabla \cdot \mathbf{A}$ atau $\mathbf{div}\,\mathbf{A}$, hasilnya disebut divergence **A**, yaitu besaran skalar. Bilamana operator del melakukan perkalian vektor dengan fungsi vektor lain **A** dengan membentuk $\nabla \times \mathbf{A}$ atau $\mathbf{curl}\,\mathbf{A}$, hasilnya disebut curl **A** atau rot (berarti rotasi) **A**, yang merupakan besaran vektor.

Percepatan tangensial : Komponen percepatan yang arahnya menyinggung lintasan pada gerak dengan lintasan lengkung.

Percepatan sentripetal : Komponen percepatan yang arahnya normal atau tegak lurus pada lintasan pada gerak dengan lintasan lengkung.

Perkalian titik : Perkalian titik atau perkalian skalar dua vektor **A** dan **B** didefinisikan sebagai besaran skalar S yang diperoleh dengan mengalikan besar vektor **A** dan besar vektor **B**, kemudian mengalikannya dengan cosinus sudut antara dua vektor itu.

Perkalian silang : Perkalian silang atau perkalian vektor dua vektor **A** dan **B** didefinisikan sebagai vektor **C**. Besar vektor **C** ini sama dengan besar vektor **A** dikalikan besar vektor **B**, kemudian dikalikan dengan sinus sudut antara vektor **A** dan vektor **B**, sedangkan arah vektor **C** tegak lurus pada vektor **A** dan vektor **B**, atau tegak lurus pada bidang yang mengandung **A** maupun **B**.

Resultan vektor : Perpaduan antara komponen-komponen vektor menjadi sebuah vektor atau hasil penjumlahan beberapa vektor.

Sistem koordinat : Sistem untuk menggambarkan posisi atau gerak suatu benda atau partikel.

Sistem koordinat Cartesian : Sistem koordinat yang terdiri dari tiga sumbu yang saling tegak lurus yang melalui titik asal, yaitu sumbu–X, –Y, dan –Z. Posisi partikel ditentukan oleh (x,y,z), yang merupakan komponen-komponen posisi terhadap masing-masing sumbu itu.

Sistem koordinat polar bidang : Sistem koordinat di mana posisi partikel ditentukan oleh $(r,¯)$, dengan r adalah jarak posisi partikel dari titik asal O, dan ¯ adalah sudut yang dibentuk oleh r dengan sumbu-X positif dalam koordinat Cartesian dua-dimensi.

Sistem koordinat silinder : Sistem koordinat di mana posisi partikel ditentukan oleh $(°,¤,z)$, dengan ° adalah proyeksi posisi dalam bidang XY, ¤ adalah sudut yang dibentuk oleh ° dan sumbu -X, dan z adalah proyeksi posisi terhadap sumbu-Z.

Sistem koordinat bola : Sistem koordinat di mana posisi partikel ditentukan oleh $(r,¯,¤)$, dengan r adalah jarak posisi partikel dari titik asal O, ¤ adalah sudut yang dibentuk oleh proyeksi posisi dalam bidang

XY dan sumbu-X, dan ¯ adalah sudut yang dibentuk oleh *r* dan sumbu-Z.

Skalar : Besaran yang hanya dinyatakan dengan besarnya dan satuannya jika ada.

Vektor : Besaran yang dapat dinyatakan dalam besar dan arahnya.

Vektor null : Vektor yang mempunyai besar nol dan arah tak terdefinisikan.

Vektor satuan : Vektor yang besarnya satu dan mempunyai arah. Untuk sistem koordinat Cartesian, vektor-vektor satuannya merupakan himpunan tiga vektor satuan yang saling tegak lurus (atau ortogonal), satu vektor satuan untuk setiap dimensi.

Daftar Pustaka

Alonso, M., and Finn, D.J. (1992). *Physics*, Reading. Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company.

Arya, A.P. (1998). *Introduction to Classical Mechanics,* Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall.

Chow, T.L. (1995). *Classical Mechanics.* New York: John Wiley & Son, Inc.

Fowles, G.R. (1986). *Analytical Mechanics.* New York: Saunders College Publishing.

French, A.P. & Ebison, M.G. (1986). *Introduction to Classical Mechanics.* Berkshire, England: Van Nostrand Reinhold (UK) Co, Ltd.

Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics, Second Edition, Reading.* Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company.

Knudsen, J.M. and Hjorth, P.G. (1996). *Elements of Newtonian Mechanics.* Second Revised and Enlarged Edition, Berlin: Springer.