

Beberapa Konsep Matematika

Artoto Arkundato, S.Si., M.Si.



PENDAHULUAN

Telaah fenomena gelombang memerlukan penggunaan beberapa konsep matematika, seperti deret Taylor, bilangan kompleks, persamaan diferensial, transformasi Laplace. Ungkapan deret Taylor sering sekali digunakan dalam Fisika untuk membantu merumuskan penyelesaian masalah terkait. Pada fenomena gelombang demikian, akan membantu sekali jika kita memanfaatkan teknik *powerful* deret Taylor ini meskipun Anda tidak begitu mengenal ini sebelumnya. Pada Modul 1 ini Anda akan mempelajari sedikit dari konsep-konsep matematika yang berguna untuk telaah gelombang, seperti deret Taylor, bilangan kompleks dan persamaan diferensial, serta transformasi Laplace yang merupakan teknik khusus untuk memecahkan persamaan diferensial.

Modul 1 ini terdiri dari dua kegiatan belajar. Secara umum setelah mempelajari dan mendalami materi Modul 1 ini diharapkan Anda mampu untuk:

1. menjelaskan beberapa konsep matematika penting untuk gelombang;
2. menggunakan konsep-konsep matematika tersebut untuk memecahkan soal yang relevan.

Persamaan diferensial merupakan alat bantu matematika yang sangat penting untuk menelaah dinamika sistem fisis. Oleh karena itu, penguasaan yang kuat pada konsep-konsep dan pengalaman yang memadai dalam memecahkan problem-problem persamaan diferensial yang bervariasi sangat dituntut pada mahasiswa. Sangat diharapkan Anda terus-menerus berusaha memperdalam teknik-teknik mencari solusi persamaan diferensial dengan cara mencari variasi problem persamaan diferensial untuk dipecahkan. Mahasiswa dipersilakan mencari problem-problem maupun variasi contoh persamaan diferensial baik dari *textbook* dan terutama dari sumber luar, seperti dari internet yang biasanya menampilkan problem-problem fisika

yang *up to date*. Penguasaan konsep dan teknik persamaan diferensial juga sangat diperlukan manakala Anda harus membuat model matematika untuk dinamika fisis (fenomena fisis) yang ada, dan kemudian memecahkan solusinya untuk mengevaluasi perilaku sistem tersebut.

Agar Anda dapat mempelajari modul ini dengan lancar ikutilah petunjuk singkat berikut ini.

1. Bacalah bagian pendahuluan dari modul ini dengan cermat dan ikutilah petunjuknya.
2. Bacalah dengan cepat bagian-bagian modul ini dan cobalah resapkan inti sarinya.
3. Baca kembali bagian demi bagian dari modul ini dengan cermat dan cobalah buat rangkumannya dengan kata-kata sendiri. Apabila ada kata-kata yang belum dipahami dengan baik carilah artinya dalam kamus atau tanyakan kepada teman atau tutor.
4. Diskusikan isi modul ini dengan teman-teman Anda agar tidak terjadi miskonsepsi.
5. Di samping mempelajari modul ini, disarankan Anda juga mencari dari sumber lain, seperti dari internet.

KEGIATAN BELAJAR 1

Deret Taylor, Bilangan Kompleks, dan Persamaan Diferensial

Kita awali pembahasan dari modul ini dengan definisi dan penggunaan deret Taylor yang sangat terkenal.

A. DERET TAYLOR

Teorema Taylor dinyatakan sebagai berikut: sebuah fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat dari x dengan:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (1.1)$$

dengan $f^n(a)$ adalah nilai turunan ke- n fungsi di $x = a$ dan $n!$ adalah permutasi n .

Contoh 1.1:

Nyatakan fungsi $f(x) = \sin x$ dalam bentuk deret, kemudian evaluasilah nilai fungsi tersebut di titik $x = a = 0$?

Penyelesaian:

Kita cari dulu turunan ke- n fungsi sebagai berikut.

- a. Turunan pertama $n = 1 \rightarrow f^1(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- b. Turunan kedua $n = 2 \rightarrow f^2(x) = \frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x$
- c. Turunan ketiga $n = 3 \rightarrow f^3(x) = \frac{d^3}{dx^3} \sin x = -\cos x$, dan seterusnya.

Dengan menggunakan persamaan (1.1) kita peroleh hasil deretnya adalah berikut ini.

$$\begin{aligned} \sin x = & \sin a + (\cos a)(x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 \\ & + \frac{\cos a}{5!}(x-a)^5 + \dots \end{aligned}$$

Selanjutnya jika pilih $a = 0$ maka $\sin 0 = 0$ dan $\cos 0 = 1$ sehingga $f(x) = \sin x$ dalam bentuk deret dinyatakan dengan,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (1.2)$$

Kita akan menggunakan hasil deret ini, misalnya untuk kasus pendulum pada Modul 2 bahwa untuk sudut kecil (x) maka dengan persamaan (1.2) kita dapatkan pendekatan $\sin x \approx x$, dengan suku-suku berikutnya dapat diabaikan karena kecil nilainya.

Beberapa fungsi hasil pendekatan deret Taylor adalah berikut ini.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (1.3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (1.4)$$

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (1.5)$$

dan khususnya ekspansi binomial berikut sangat penting.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (1.6)$$

dengan n adalah bilangan sebarang (tidak harus bilangan bulat). Khususnya jika kita ambil $n = 1/2$ maka memberikan:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} - \dots \quad (1.7)$$

Kita juga akan menggunakan ekspansi binomial ini pada Modul 2. Hal yang cukup penting jika kita ambil $n = -1$ sehingga:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (1.8)$$

Apabila nilai x cukup kecil, misalnya $0 < x < 1$ maka dapat kita ambil pendekatan dengan persamaan (1.6), yaitu:

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad (1.9)$$

Selanjutnya jika kita ambil nilai $x = x+a$ dan mensubstitusikan ini ke-(1.1) maka akan kita dapatkan:

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \dots \quad (1.10)$$

Jika nilai x cukup kecil maka dapat kita ambil pendekatan:

$$f(x+a) \approx f(a) + f'(a)x \quad (1.11)$$

B. BILANGAN KOMPLEKS

Satu lagi konsep matematika yang penting untuk gelombang adalah bilangan kompleks. Sesuatu besaran fisis yang dapat diukur diwakili nilainya dengan bilangan riil. Pertanyaan yang akan muncul umumnya adalah *Apa perlunya mengkaji bilangan kompleks (mengandung bilangan imajiner) jika besaran fisis terukur perlu diwakili oleh bilangan riil?* Jawabnya meskipun tidak ada besaran fisis tunggal yang dapat dikaitkan dengan suatu bilangan kompleks, namun ada pasangan besaran fisis yang dapat dengan rapi digambarkan dengan representasi bilangan kompleks. Sebagai contoh, dalam telaah gelombang, sebuah gelombang yang mengandung amplitudo dan fase dapat dengan ringkas digambarkan menggunakan bilangan kompleks jika kita lukiskan dalam bidang $x-y$ (kartesian) merupakan vektor dengan panjang adalah amplitudo gelombang dan sudut vektor dengan sumbu- x adalah fasenya. Dalam hal ini, ada tidaknya terbatas kemungkinan pemanfaatan bilangan kompleks, baik untuk bidang fisika maupun teknik. Pokok bahasan

kali ini akan mempelajari bilangan kompleks agak lebih sistematis dan komprehensif.

Bilangan kompleks muncul apabila kita mencoba mencari solusi persamaan matematik, misalnya berikut ini.

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \quad (1.12)$$

Jawaban ini tentu saja *imaginer* sehingga kita perlu memperluas konsep bilangan kita dengan memikirkan *bilangan kompleks* yang bentuknya kita desain sebagai berikut.

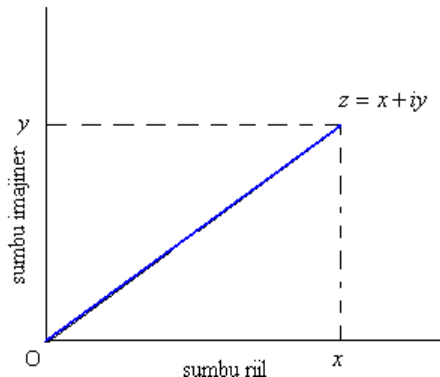
$$z = x + iy \quad (1.13)$$

dengan

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \quad (1.14)$$

Persamaan (1.13) selanjutnya merupakan solusi formal persamaan $x^2 + 1 = 0$ di atas.

Bilangan kompleks cocok sekali jika kita gambarkan sebagai sebuah titik dalam bidang $x - y$ yang kita sebut sebagai *bidang kompleks* (Gambar 1.1), seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 1.1.
Diagram Bilangan Kompleks

Pada Gambar 1.1 maka sebuah bilangan kompleks kita gambarkan sebagai sebuah titik $z = x + iy$ dengan x adalah bagian riil z atau $\text{Re}(z)$, sedangkan y adalah bagian *imaginer* z atau $\text{Im}(z)$. Sumbu y adalah sumbu *imaginer* dan sumbu x adalah sumbu riil

Operasi matematika untuk bilangan kompleks adalah sebagai berikut. Dua buah bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dapat dijumlahkan dengan hasil sebagai berikut.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.15}$$

Dua buah bilangan kompleks juga dapat dikalikan dengan hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 (iy_2) + iy_1 x_2 + iy_1 (iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) + i^2 y_1 y_2 \\ &= [x_1 x_2 - y_1 y_2] + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Faktor i dalam $z = x + iy$ mengizinkan kita melakukan operasi baru untuk bilangan kompleks yang mana ini tidak dimiliki oleh bilangan riil. Salah satu operasi tersebut adalah operasi konjugasi kompleks (*complex conjugation*). Konjugat kompleks dari z yaitu z^* didefinisikan dengan

$$z^* \equiv (x + iy)^* \equiv x - iy \tag{1.17}$$

yaitu mengganti i dengan $-i$. Dengan definisi ini maka kita dapat melakukan operasi yang lain,

$$zz^* = z^* z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \tag{1.18}$$

yang hasilnya adalah bilangan riil positif. Akar kuadrat positif dari zz^* disebut harga mutlak atau *norm* dari z yang kita tuliskan dengan $|z|$, yaitu:

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.19)$$

Nilai mutlak ini tentu saja panjang vektor z dalam bidang kompleks. Beberapa hal penting adalah:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (1.20)$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (1.21)$$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.21)$$

Contoh 1.2:

a. $\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \dots$

b. $(i+1)^{-4} = \dots$

Penyelesaian:

a. $\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{|1-i|^2} = i,$

di mana telah kita gunakan $z = 1 - i$ dan $|z|^2 = x^2 + y^2$.

b. $(i+1)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = \frac{1}{(1+i)^2(1+i)^2} = \dots = -\frac{1}{4}$

1. Koordinat Polar dan Bilangan Kompleks

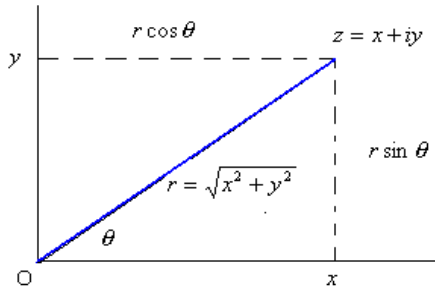
Penggunaan koordinat polar untuk bidang kompleks memberikan perangkat yang *powerful* untuk manipulasi bilangan kompleks. Gambar 1.2 memperlihatkan bilangan kompleks dan koordinat polar.

Jarak dari titik pusat ke titik z tentu saja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan sudut antara garis Oz dan sumbu riil x kita namakan θ . Oleh karena itu, kita mempunyai:

$$x = r \cos \theta \tag{1.22}$$

dan

$$y = r \sin \theta \tag{1.23}$$



Gambar 1.2.
Wakilan polar bilangan kompleks z

Dengan menggunakan Gambar 1.2 maka nilai bilangan kompleks dapat kita nyatakan dalam:

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1.24}$$

Selanjutnya dari persamaan (1.5):

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Kalau kita bandingkan dengan persamaan (1.2) dan (1.3) maka kita dapat mengambil kesimpulan bahwa,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.26}$$

Oleh sebab itu, bilangan kompleks dapat kita nyatakan juga z dalam bentuk polar,

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (1.27)$$

Dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} = |z| \quad (1.28)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.29)$$

Konjugat kompleks z , yaitu z^* untuk koordinat polar dapat kita temukan:

$$z^* = x - iy = r \cos \theta - ir \sin \theta = r [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = re^{-i\theta} \quad (1.30)$$

Persamaan ini memberikan sekaligus konfirmasi bahwa konjugat kompleks adalah ekuivalen menukar i dengan $-i$.

Contoh 1.3:

Uraikan $e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ dalam bentuk eksplisit fungsi sin dan cos, selanjutnya buktikan identitas trigonometri bahwa

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad \text{dan}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 ?$$

Penyelesaian:

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (a)$$

Sebaliknya berlaku,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} &= e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \quad (b) \end{aligned}$$

Membandingkan (a) dan (b) maka kita menyimpulkan bahwa:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (1.31)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \tag{1.32}$$

C. PERSAMAAN DIFERENSIAL

Dinamika sistem fisis sering digambarkan melalui sebuah persamaan diferensial. Sebuah persamaan diferensial adalah persamaan matematik yang mengandung turunan-turunan fungsi dalam persamaannya. Jika persamaan mengandung turunan-turunan parsial (turunan dari beberapa variabel bebas) maka disebut persamaan diferensial parsial (PDP) dan jika hanya mengandung turunan-turunan biasa (dalam persamaan hanya ada satu variabel bebas turunan) maka disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Sebarang ungkapan, seperti $y = f(x, \dots)$ yang memenuhi persamaan diferensial disebut sebagai solusi persamaan tersebut. Jika ungkapan $y = f(x, \dots)$ mengandung tetapan-tetapan sebarang sebanyak derajat persamaan maka $y = f(x, \dots)$ disebut solusi umum, sebaliknya $y = f(x, \dots)$ disebut solusi khusus atau integral khusus (*particular*). Sebagai contoh dalam rangkaian listrik ada berlaku $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ maka $q = K \exp(-t/RC)$ dengan K adalah tetapan merupakan solusi umum dari PDB, sedangkan jika ada $q = 35 \exp(-t/RC)$ maka ini disebut solusi khusus dari PDB.

Fenomena gelombang telaah matematisnya tidak terlepas dari menemukan solusi persamaan gelombang. Sebuah persamaan gelombang merupakan persamaan diferensial parsial, khususnya dalam variabel ruang (x, y, z) -waktu (t) yang secara umum dapat kita nyatakan dalam persamaan gelombang berbentuk:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

dengan $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ untuk koordinat kartesian, dan untuk koordinat yang lain harus ditransformasikan ke bentuk lain yang sesuai. Persamaan gelombang ini diterapkan pada kasus-kasus menyangkut telaah

gelombang, seperti vibrasi kawat dan gendang (drum), perambatan suara dalam medium gas, padatan, dan cairan serta perambatan gangguan dalam plasma sampai perambatan gelombang elektromagnetik. Oleh karena itu, persoalan penting dalam gelombang adalah mencari **solusi persamaan gelombang**. Dalam pokok bahasan ini kita akan membahas (mengingat kembali) beberapa teknik penting solusi PDB dan PDP.

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Prinsip Superposisi

Misalnya, sebuah PDB mempunyai bentuk umum sebagai berikut.

$$a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t) y = 0$$

yang merupakan persamaan *linear* dan *homogen* dan mempunyai *orde* dua, yaitu pangkat tertinggi dalam turunan sama dengan dua. Persamaan ini harus dipecahkan {diberikan juga syarat batas dan syarat awal yang diperlukan} untuk mendapatkan solusi berupa $y = y(t)$. Kemudian, apabila $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ solusi PDB ini untuk sembarang tetapan C_1 dan C_2 maka **prinsip superposisi** menyatakan bahwa $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ juga solusi persamaan diferensial yang linear. Dalam fisika Anda akan sering menemukan sistem fisis dengan model matematis persamaan diferensial orde dua di atas.

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial (**PDP**) adalah persamaan diferensial dengan lebih dari satu variabel turunan. PDP linear mengandung suku-suku variabel tak bebas dengan pangkat satu. Sebagai contoh PDP linear adalah:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{x \partial y} = 0$$

sedangkan PDP berikut adalah:

$$\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} = y^{-1} \text{ dan } \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = ky^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

adalah PDP nonlinear. Secara umum sebuah PDP orde dua, linear dan dua variabel dapat kita tuliskan dengan:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \psi}{\partial x} + E \frac{\partial \psi}{\partial y} + F \psi = G \quad (1.33)$$

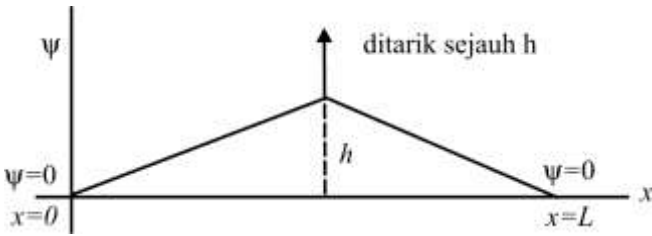
dengan A,B,C,D,E,F,G nilai boleh sebagai fungsi dari x dan y . Selanjutnya jika $G(x,y)=0$ maka kita menyebut PDP adalah *homogen* dan jika $G(x,y) \neq 0$ adalah PDP tak homogen.

Untuk PDP dalam (1.33) mempunyai solusi berbentuk $\psi = \psi(x, y)$. Untuk terapan PDP untuk problem kita, kita tidak memfokuskan pada mencari solusi umum PDP. Kita juga tertarik untuk membahas PDP linear orde dua. Mencari solusi umum PDP linear orde dua biasanya sering sulit dan juga solusi umum ini biasanya tidak semuanya berguna dalam aplikasi-aplikasi. Jadi, fokus kita pada mencari solusi khusus dari PDP linear yang penting yang muncul dalam banyak aplikasi.

3. Syarat Awal dan Syarat Batas

Sebuah solusi persamaan diferensial mungkin bergantung pada waktu t , Jika kita ketahui bagaimana bentuk fungsi saat $t = 0$ maka kita mengetahui **syarat awal** (S.A.) untuk persamaan diferensial. Sebagai contoh kita lihat sebuah kawat yang ditarik sejauh h dari sumbu horisontal. Kawat tersebut ditahan pada kedua ujungnya di $x = 0$ dan $x = L$ sepanjang waktu. Untuk kawat yang bervibrasi kita dapat memberikan pergeseran awal (atau bentuk) $f(x)$ dan juga kecepatan awalnya $g(x)$. Jika persamaan gelombang diberikan

dengan $a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ maka secara matematik, kita mencari fungsi $\psi(x, t)$ yang memenuhi PDP ini dengan diberi syarat awal, misalnya $\psi(x, 0) = f(x)$ dan $\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), 0 < x < L$



Gambar 1.3

Kawat yang bervibrasi ketika ditarik sejauh h dari sumbu horisontal

Demikian juga kita dapat memberikan nilai-nilai fungsi di daerah batas sebagai **syarat batas (S.B.)**, misalnya $\psi(0,t) = 0$, $\psi(L,t) = 0$, $t > 0$.

Secara umum ada tiga tipe syarat batas dikaitkan dengan sebuah persamaan diferensial. Pada batas kita dapat menetapkan nilai-nilai untuk:

- a. ψ (syarat batas Dirichlet) (1.34a)
- b. $\partial\psi/\partial n$ (syarat batas Neumann) atau (1.34b)
- c. $\partial\psi/\partial n + h\psi$, (syarat batas Robin), h sebuah konstanta. (1.34c)

$\partial\psi/\partial n$ menyatakan turunan normal dari ψ (turunan arah ψ dalam arah tegak lurus batas).

Selanjutnya jika ada persamaan gelombang $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dengan $0 < x < L, t > 0$. Kemudian, diberikan:

S.B. (syarat batas): $u(0,t) = 0$ dan $u(L,t) = 0$ selama $t > 0$

S.A. (syarat awal): $u(x,0) = f(x)$ dan $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), 0 < x < L$

Maka, contoh problem yang kita hadapi ini disebut sebagai **problem nilai batas (boundary-value problems)**.

D. BEBERAPA METODE PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Beberapa metode yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial diberikan berikut ini.

1. Metode Integrasi Langsung

Sebuah PDB linear orde satu berbentuk sederhana $\frac{dA(t)}{dt} = 6t + 9$ dengan syarat awal (S.A) $A(0) = 3$ ini dapat dipecahkan dengan mudah menggunakan metode integrasi langsung. Jika kita integralkan kedua ruas persamaan secara langsung dan bersama-sama dalam selang $0[t]$ maka dapat kita peroleh solusi khusus:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 6t + 9 \rightarrow \int_0^t \frac{dA(t)}{dt} dt = \int_0^t (6t + 9) dt \quad (1.35)$$

$A(t) - A(0) = 3t^2 + 7t$. Jika $A(0) = 3$ maka solusi yang kita cari adalah $A(t) = 3t^2 + 7t + 3$.

2. Metode Faktor Integrasi

Sebuah PDB orde satu linear juga dapat diselesaikan dengan teknik faktor integrasi. Untuk dapat mencari solusi dengan teknik ini dilakukan langkah-langkah berikut.

- a. Susun PDB dalam bentuk koefisien suku turunan sama dengan satu, yaitu menjadi PDB berbentuk $\frac{dv(t)}{dt} + a(t)v(t) = b(t)$.
- b. Hitung faktor integrasi $\exp\left(\int a(t) dt\right)$.
- c. Kalikan kedua ruas persamaan dalam langkah pertama dengan faktor integrasi, kemudian hitunglah:

$$\frac{d}{dt} \left(v(t) \exp \left[\int a(t) dt \right] \right) = b(t) \exp \left[\int a(t) dt \right]$$

- d. Integralkan kedua sisi ruas persamaan untuk mendapatkan solusi yang diinginkan.

Contoh 1.4:

Persamaan diferensial berbentuk $\frac{dv(t)}{dt} = tv(t) + t$. Carilah solusinya!

Penyelesaian:

Dengan metode faktor integrasi, dapat kita pecahkan sebagai berikut.

$\frac{dv(t)}{dt} = tv(t) + t \rightarrow \frac{dv(t)}{dt} - tv(t) = t$. Misalnya, $v(0) = 0$. Faktor integrasi

$\exp\left(\int -tdt\right)$. Langkah kedua menghasilkan: $\frac{d}{dt}\left[e^{-t^2/2}v(t)\right] = te^{-t^2/2}$.

Langkah ketiga dengan interval integrasi $[0, t]$ menghasilkan:

$e^{-t^2/2}v(t) - e^{-0^2/2}v(0) = \int_0^t e^{-t^2/2} dt = 1 - e^{-t^2/2}$. Jika $v(0) = 0$ maka diperoleh

solusi: $v(t) = e^{t^2/2}\left(1 - e^{-t^2/2}\right) = e^{t^2/2} - 1$.

Catatan:

Keberhasilan teknik ini sangat bergantung pada kemampuan mengintegalkan fungsi-fungsi yang terlibat.

3. Metode Persamaan Karakteristik

Gejala fisis yang dapat ditelaah dengan persamaan diferensial orde dua banyak dijumpai di alam. Untuk mencari solusi PDB orde dua linear homogen ada beberapa cara, di antaranya dengan metode persamaan

karakteristik. Untuk persamaan diferensial berbentuk: $a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$,

misalnya dengan metode ini solusinya dapat dicari dengan langkah-langkah berikut.

- a. Cobakan solusi tebakan e^{mt} pada PDB sehingga diperoleh persamaan karakteristik.

- b. Selesaikan persamaan karakteristik, menghasilkan dua akar m_1 dan m_2 (jika dengan rumus ABC maka $m_{1,2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$).
- c. Jika akar persamaan karakteristik telah diperoleh maka solusi umum PDB diberikan, seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.1.
Solusi Umum PDB

Akar Persamaan	Kondisi yang Ada	Solusi Umum
Jika m_1 dan m_2 riil dan berbeda	$b^2 - 4ac > 0$	$C_1 \exp(m_1 t) + C_2 \exp(m_2 t)$
Jika m_1 dan m_2 berbentuk $p \pm iq$, $p = -b/2a$ dan $q = \frac{+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$b^2 - 4ac [0,1] < 0$	$e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$ atau $C_1 e^{pt} \cos(qt + C_2)$
Jika m_1 dan m_2 sama	$b^2 - 4ac = 0$	$e^{mt} (C_1 t + C_2)$

- d. Gunakan syarat awal untuk menentukan tetapan-tetapan yang tidak diketahui

Contoh 1.5:

PDB berbentuk $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -3x(t)$. Jika S.A. adalah $x(0) = 1$ dan $x'(0) = 0$ maka carilah solusi yang mungkin!

Penyelesaian:

Dari langkah (1) dengan solusi coba e^{mt} ke PDB diperoleh persamaan karakteristik $m^2 = -3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$. M merupakan akar persamaan karakteristik. Dari Tabel 1.1 maka bentuk solusi umumnya adalah $x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{3}) + C_2 \sin A(t\sqrt{3})$. Jika hal ini kita berikan S.A > maka dapat diambil kesimpulan $C_1 = 1$ dan $C_2 = 0$ sehingga solusi khusus PDB adalah $x(t) = \cos(t\sqrt{3})$.

4. Persamaan Diferensial Tak Homogen

Jika PDB linear yang kita pecahkan termasuk persamaan diferensial tak homogen maka salah satu metode yang dapat digunakan adalah **metode koefisien tak tentu**. Misalkan, PDB berbentuk $Ly = f$, dengan L adalah operator diferensial. Langkah-langkah yang dapat kita kerjakan adalah sebagai berikut.

- Tentukan PDB yang akan dipecahkan.
- Menentukan fungsi pelengkap.

$y = y_{CF} + y_{PI}$ dengan y_{CF} adalah fungsi pelengkap dan y_{PI} adalah integral khusus. Oleh karena itu, PDB menjadi $Ly = L(y_{CF} + y_{PI}) = Ly_{CF} + Ly_{PI} = f$. Fungsi y_{CF} pelengkap dapat ditentukan dengan cara yang sudah ada untuk PDB homogen, yaitu $Ly_{CF} = 0$.
- Asumsikan bentuk y_{PI} dan disubstitusikan ke PDB untuk menentukan tetapannya. Solusi yang dicari adalah $y = y_{CF} + y_{PI}$.
- Bentuk-bentuk y_{PI} yang sering digunakan seperti terlihat pada tabel berikut ini.

Tabel 1.2.
Bentuk-bentuk Integral Khusus

$f(t)$	$y_{PI}(t)$
$\exp(at)$	$A \cdot \exp(at)$
$\sin(at)$	$A \cdot \sin(at) + B \cdot \cos(at)$
$\cos(at)$	$A \cdot \sin(at) + B \cdot \cos(at)$
$\exp(at) \cdot \sin(bt)$	$A \cdot \exp(at) \cdot \sin(bt) + B \cdot \exp(at) \cdot \cos(bt)$

Contoh 1.6:

Carilah solusi $y'' - 3y' - 4y = 3 \exp 2t$?

Penyelesaian:

Langkah 2: Fungsi pelengkap, yaitu

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \Rightarrow y_{CF}(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$$

dengan metode persamaan karakteristik.

Langkah 3: $f(t) = 3 \exp(2t) \Rightarrow y_{PI}(t) = A \exp(2t)$. Substitusi ke PDB:

$$\rightarrow (4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{PI}(t) = -\frac{1}{2} e^{2t}$$

$$A = -\frac{1}{2} \text{ dan } y_{PI}(t) = -\frac{1}{2}\exp(2t).$$

Langkah 4: $y(t) = C_1 \exp(4t) + C_2 \exp(-t) - \frac{1}{2}\exp(2t).$

(solusi umum yang dicari).

5. Metode Pemisahan (Separasi) Variabel

Sejauh ini kita baru fokus pada menyelesaikan PDB. Dalam praktik kita sering harus menyelesaikan persamaan diferensial berbentuk PDP. Penyelesaian PDP juga tidak lepas dari kemampuan kita menyelesaikan PDB karena PDP dapat dibawa ke bentuk PDB dengan cara tertentu, misalnya dengan teknik atau metode separasi variabel berikut ini.

Metode pemisahan variabel merupakan metode yang *powerful* untuk memecahkan PDP linear homogen. Metode ini dapat kita terapkan melalui tiga langkah berikut.

Langkah 1: Buat pemisalan solusi sebagai hasil kali fungsi-fungsi variabel bebas, misalnya berikut ini.

$$\psi(x, y, z, \dots) = X(x)Y(y)Z(z) \dots$$

Langkah 2: Substitusikan solusi pengandaian ini ke PDP sehingga problem PDP dapat diubah menjadi problem PDB (persamaan diferensial biasa) untuk masing-masing variabel.

Langkah 3: Terapkan syarat batas (S.B.) dan syarat awal (S.A.) yang ada pada solusi hasil langkah 2.

Definisi:

Jika ada PDP orde dua linear berbentuk, seperti berikut.

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \psi}{\partial x} + E \frac{\partial \psi}{\partial y} + F \psi = 0$$

dengan A,B,C,D,E,F adalah tetapan-tetapan riil. Maka, PDP diklasifikasikan dalam salah satu berikut.

- Jika $B^2 - 4AC > 0$ maka PDP adalah hiperbolik.
- Jika $B^2 - 4AC = 0$ maka PDP adalah parabolik.
- Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka PDP adalah eliptik.

Untuk kajian fisika maka bentuk PDP parabolik dan hiperbolik sering dijumpai menyangkut problem nilai batas bergantung waktu.

Contoh 1.7:

Carilah solusi umum PDP $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ menggunakan metode separasi variabel jika diberikan S.B. $\psi(0,t) = 0$ $\psi(L,t) = 0$ dan S.A. $\psi(x,0) = f(x)$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$?

Penyelesaian:

PDP ini nantinya akan Anda kenal sebagai salah satu persamaan gelombang. Dengan **pemisahan variabel** $\psi(x,t) = X(x)T(t)$ dan substitusi ke PDP soal, lalu kedua ruas dibagi dengan XT/v^2 kita peroleh persamaan dengan variabel terpisah:

$$\frac{v^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$$

Dari persamaan ini kita lihat bahwa kedua ruas sudah terpisah variabelnya, yaitu ruas kiri hanya variabel x dan ruas kanan variabel t . Oleh karena itu, satu kesimpulan yang ada adalah kedua ruas nilainya sama dengan sebuah tetapan dan dalam praktik biasanya sesuai jika tetapan ini adalah berbentuk kuadrat misalnya ω^2 atau $-\omega^2$.

Persamaan ini benar jika kedua ruas adalah tetapan yang sama, misal $\frac{v^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2$ sehingga kita mendapatkan dua PDB:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0 \quad (1^*)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2^*)$$

Solusi masing-masing PDB ini, seperti telah Anda pelajari di muka adalah:

$$X(x) = a \sin kx + b \cos kx \quad (3^*)$$

$$T(t) = c \sin \omega t + d \cos \omega t \quad (4^*)$$

Oleh karena itu, solusi sementara PDP kita adalah:

$$\psi(x,t) = X(x)T(t) = A \sin kx \cos \omega t + B \sin kx \sin \omega t + C \cos kx \sin \omega t + D \cos kx \cos \omega t \quad (5^*)$$

Hasil langkah 1 dan 2 ini, kemudian diterapkan **S.B. dan S.A.** yang diperlukan. Dengan S.A. kita peroleh:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\omega \sin kx \cos \omega t - A\omega \sin kx \sin \omega t + C\omega \cos kx \cos \omega t - D\omega \cos kx \sin \omega t \quad (6^*)$$

Menurut S.A. maka agar persamaan benar haruslah diambil $B = 0$ dan $C = 0$ sehingga:

$$\psi(x,t) = A \sin kx \cos \omega t + D \cos kx \cos \omega t \quad (7^*)$$

Selanjutnya kita terapkan S.B., yang pertama untuk $\psi(0,t) = 0 \Rightarrow 0 = D \cos \omega t$. Jika ini benar untuk seluruh t maka haruslah $D = 0$ sehingga:

$$\psi(x,t) = A \sin kx \cos \omega t \quad (8^*)$$

Untuk S.B. yang lain, $\psi(L,t) = 0 \Rightarrow 0 = A \sin kL \cos \omega t$. Jika ini benar untuk seluruh t maka haruslah:

$$kL = n\pi, \text{ dengan } n = 1,2,3,\dots \quad (9^*)$$

Jika $\omega = vk = n\pi v / L$ maka kita peroleh:

$$\psi_n(x,t) = A_n \sin(n\pi x / L) \cos(n\pi vt / L) \quad n = 1,2,3,\dots \quad (10^*)$$

Solusi ini mengizinkan masing-masing suku mempunyai amplitudo yang berbeda A_n . Bagaimana bentuk solusi secara tunggalnya? Kita dapat menuliskan **solusi umumnya** berdasarkan prinsip superposisi yang berlaku untuk persamaan diferensial linear sehingga:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x / L) \cos(n\pi vt / L) \quad (11^*)$$

Kita masih memerlukan S.A. yang lain, yaitu bagaimana bentuk fungsi saat awal, *misalnya* adalah:

$$\psi(x, 0) = f(x) \quad (12^*)$$

Dengan S.A. pada pers.(11) maka diperlukan kondisi:

$$\psi(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x / L) \quad (13^*)$$

Problem kita yang sekarang adalah menemukan **koefisien Fourier deret sinus $f(x)$ ini**, yaitu bagaimana kita menentukan amplitudo A_n .

Contoh 1.8:

Misalkan, untuk contoh di atas bentuk gelombang awal diberikan oleh:

$$\psi(x, 0) = f(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq L/4 \\ AL/4 & L/4 \leq x \leq 3L/4 \\ A(L-x) & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

Carilah $\psi(x, t)$?

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan **koefisien Fourier** dapat kita hitung dengan rumus berikut (dapat Anda buka kembali materi kuliah Fisika Matematika).

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x / L) dx \quad (14^*)$$

Jika kita gunakan $f(x)$ seperti pada soal ini maka dapat kita hitung hasilnya adalah:

$$A_n = \frac{2AL}{\pi^2} [\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)] \quad (15^*)$$

Dengan ini maka dapat kita berikan **solusi lengkap untuk soal sebelumnya** adalah

$$\psi(x,t) = \frac{2AL}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)] \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi vt/L) \quad (16^*)$$

Selanjutnya sebarang **solusi persamaan gelombang** (akan Anda pelajari pada modul-modul selanjutnya) harus dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x \pm vt)$. Oleh karena itu, persamaan (16*) harus dapat juga dinyatakan dalam bentuk $f(x \pm vt)$. Untuk melakukan ini dapat kita gunakan *rumus trigonometri* berikut.

$$\sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)] \quad (1.36)$$

Dengan ini maka persamaan (11*) atau (16*) menjadi:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left\{ \frac{n\pi x}{L} (x + vt) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left\{ \frac{n\pi x}{L} (x - vt) \right\} \quad (1.37)$$

Dari persamaan (13*) dua suku dalam persamaan (1.36) ini berkaitan dengan ekspansi Fourier $f(x)$ dengan menggantikan $x + vt$ dan $x - vt$ masing-masing. Oleh karena itu, persamaan (1.37) ekuivalen dengan

$$\psi(x,t) = f(x + vt) + f(x - vt) \quad (1.38)$$

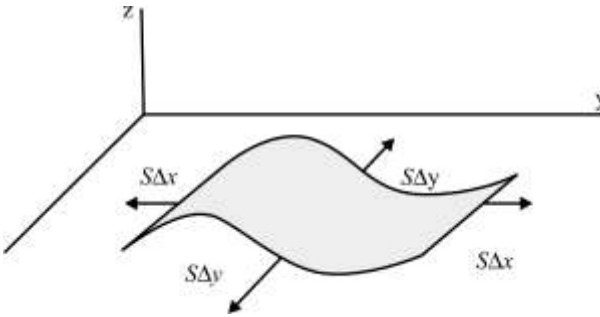
E. PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DALAM DUA DIMENSI

Sekarang kita bayangkan sebuah medium dua dimensi dalam bidang x-y dengan pergeseran transversal dalam arah z (Gambar 1.3). Pada gambar maka tegangan permukaan (gaya per satuan luas) adalah S yang diambil

konstan nilainya. Jika medium dideformasi maka arah gaya-gaya pada sisi-sisi elemen bervariasi, dan untuk amplitudo yang kecil (dapat kita telaah secara linear) maka persamaan gelombangnya adalah:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1.39)$$

dengan $v = \sqrt{S/\sigma}$ adalah kecepatan gelombang dan σ adalah massa/luasan diambil konstan.



Gambar 1.3
Gelombang dalam Dua Dimensi

Untuk sementara, Anda tidak perlu merisaukan bagaimana persamaan gelombang ini diperoleh karena akan Anda temukan penjelasan yang lebih terperinci pada modul-modul berikutnya. Kita hanya memfokuskan pada usaha bagaimana memecahkan persamaan gelombangnya saja.

Untuk dapat memecahkan problem ini, yang tidak lain adalah persamaan diferensial maka harus diberikan syarat batas yang berlaku. Namun demikian, kita dapat menggunakan metode separasi variabel dengan beberapa penyesuaian. Langkah-langkah solusi yang kita tempuh adalah berikut ini.

Langkah 1:

Berikan solusi berbentuk.

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (1.40)$$

Substitusi persamaan ini ke persamaan (1.39) kita peroleh,

$$YT \frac{d^2 X}{dx^2} + XT \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{v^2} XY \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.41)$$

Membagi kedua ruas dalam (1.41) dengan XYT diperoleh

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.42)$$

Persamaan ini sudah dipisah untuk bagian waktu dan bagian koordinat maka kedua ruas tidak lain adalah sebuah konstanta, misalnya $-k^2$, yaitu:

$$\frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \quad (1.43)$$

dan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \quad (1.44)$$

Langkah 2:

Persamaan (1.43) dapat kita nyatakan dengan:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (1.45)$$

dengan $\omega^2 = k^2 v^2$. Solusi persamaan (1.45) sangat sederhana, yaitu:

$$T(t) = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t) \quad (1.46)$$

Demikian juga untuk persamaan (1.44), kedua suku ruas kiri adalah bebas satu sama lain sehingga dapat kita pisah lagi menjadi:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0 \quad (1.47)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0 \quad (1.48)$$

dengan $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Sama seperti di atas maka solusi untuk kedua persamaan terakhir ini adalah:

$$X(x) = C \exp(ik_1 x) + D \exp(-ik_1 x) \quad (1.49)$$

$$Y(y) = E \exp(ik_2 y) + F \exp(-ik_2 y) \quad (1.50)$$

Solusi umum persamaan diferensial adalah perkalian dari persamaan (1.50), (1.49) dan (1.46).

Langkah 3:

Berikan syarat batas dan syarat awal yang sesuai pada solusi umum. Misalkan, pada soal kita adalah:

$$T(0) = 0 \text{ dan } \dot{T}(0) = 0 \quad (1.51)$$

Jika ini kita berikan ke persamaan (1.46) dapat kita peroleh $T(0) = A + B = T_0$ dan $\dot{T}(0) = i\omega A - i\omega B = 0$ atau $A = B$. Dengan ini maka kita mendapatkan bahwa $T(t) = T_0 [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]$ atau

$$T(t) = T_0 \cos(\omega t) \quad (1.52)$$

Kemudian, untuk syarat batas komponen ruang adalah:

$$X(0) = X(a) = 0 \text{ dan } Y(0) = Y(b) = 0 \quad (1.53)$$

Dengan cara yang sama tersebut, dapat kita peroleh $X(0) = C + D = X_0$ sehingga $X(x) = X_0 \sin(k_1 x)$. Juga $X(a) = X_0 \sin(k_1 a) = 0 \rightarrow k_1 a = n\pi$.

Dengan cara yang sama untuk bagian Y. Oleh karena itu, kita memperoleh solusi:

$$X(x) = X_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{1.54}$$

dan

$$Y(y) = Y_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{1.55}$$

dengan n m adalah bilangan bulat. Frekuensi diberikan oleh persamaan:

$$\omega^2 = v^2 k^2 = v^2 (k_1^2 + k_2^2) = v^2 \left[(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2 \right] \tag{1.56}$$

atau kita dapat menyatakan mode frekuensi dalam bentuk:

$$\omega_{nm} = v\pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \tag{1.57}$$

Kita dapat menggabungkan konstanta-konstanta menjadi satu sehingga solusi umumnya adalah:

$$z(x, y, t) = A_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega_{nm}t) \tag{1.58}$$

Kemudian, persamaan diferensial kita adalah PDP linear maka berlaku asas superposisi, yaitu solusi umum adalah kombinasi linear dari solusi-solusi berbentuk persamaan (1.58). Jadi, kita dapat menyatakan solusi umumnya adalah,

$$z(x, y, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega_{nm}t) \tag{1.59}$$

Tentu saja kita masih harus menentukan berapa nilai koefisien A_{nm} dengan mengetahui bentuk gelombang pada saat awal $t = 0$, seperti pada contoh soal untuk satu dimensi. Namun demikian, kiranya tidak terlalu sulit bagi Anda untuk merumuskannya jika diberikan bentuk gelombang saat $t = 0$.

F. PERSAMAAN DIFERENSIAL DALAM SISTEM KOORDINAT KURVA LINEAR

Sejauh ini yang kita perhatikan baru problem dalam sistem koordinat kartesian (x, y, z) . Sering sekali dalam praktik kita lebih tertarik menghitung dan memecahkan problem dalam sistem koordinat yang lain, seperti sistem polar, silinder, bola dan lain-lain. Untuk itu PDP yang akan dipecahkan perlu dimodifikasi sesuai kebutuhan.

Contoh 1.9:

Laplacian (operator ∇^2) dalam koordinat Polar. Dalam sistem kartesian (x, y) maka Laplacian dituliskan sebagai $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Nyatakan $\nabla^2 u$ dalam koordinat Polar (r, θ) ?

Penyelesaian:

Dalam sistem polar maka berlaku:

- $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dan $\tan \theta = y/x$

Kita ingin mentransformasi bentuk

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \nabla^2 u(r, \theta) = ?$$

Kita gunakan dalil rantai bahwa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ &\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (i)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{(ii)}$$

Menjumlahkan (i) dan (ii) dan menyederhanakan maka Laplacian dalam koordinat polar adalah:

$$\text{Koordinat Polar, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{(1.60)}$$

Demikian juga yang lain dapat dicari dan dibuktikan:

$$\text{Koordinat Silinder } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(1.61)}$$

Koordinat Bola,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Solusi persamaan diferensial dalam sistem koordinat kurva linear untuk problem fisis yang diberikan sering memerlukan beberapa **fungsi khusus**, seperti fungsi Bessel, Legendre dan lain-lain.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Tunjukkan bahwa berlaku teorema de Moivre bahwa $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ untuk n adalah bilangan cacah?
- 2) Tunjukkan kaitan identitas trigonometri bahwa $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$?

- 3) Carilah solusi untuk problem syarat batas di bawah ini:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 4xy + e^x \text{ dengan S.B. } \psi(x, 0) = 2 \text{ dan } \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = y$$

- 4) Klasifikasikan PDP berikut: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ apakah hiperbolik, parabolik atau yang lain?

- 5) PDP berbentuk $\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ untuk S.A. diberikan dengan $\psi(x, 0) = \exp(x)$?

- 6) Carilah solusi umum PDB $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 4 \frac{du(t)}{dt} + 4u(t) = 0$?

Petunjuk Jawaban Latihan

$$1) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.a)$$

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta} \right)^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (1.b)$$

Dari (1.a) dan (1.b) maka kita dapat menyimpulkan teorema de Moivre tersebut.

- 2) Kita lakukan, seperti pada contoh soal. Kita tuliskan lebih dulu bahwa:
- $$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad (a)$$

Kemudian seperti pada contoh soal, Anda cari bentuk lain, yaitu:

$$e^{3i\theta} = \left(e^{i\theta} \right)^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \dots \quad (b)$$

Membandingkan (a) dan (b) maka akan Anda peroleh kaitan identitas,

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

- 3) Dengan metode integral langsung pada PDP terhadap variabel x menghasilkan:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = 2x^2 y + e^x + F(y)$$

Selanjutnya $F(y)$ ditentukan dengan menerapkan S.B. kedua:

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = y + 1 + F(y)$$

sehingga kita peroleh $F(y) = y - 1$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + e^x + y - 1$. Integrasi

ini terhadap y kita peroleh:

$$\psi(x, y) = x^2y^2 + ye^x + y^2/2 - y + F(x)$$

Selanjutnya menerapkan S.B. kedua menghasilkan $\psi(x, 0) = 2 = F(x)$ sehingga solusinya adalah:

$$\psi(x, y) = x^2y^2 + ye^x + y^2/(2 - y + 2)$$

4) Seperti dalam contoh maka kita dapat menyimpulkan $A = 1$, $B = 0$ dan $C = -1$ sehingga $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$ atau PDP hiperbolik.

5) Kita asumsikan pertama $\psi(x, t) = X(x)T(t)$. Substitusi ini ke PDP diperoleh $\frac{X}{v} \frac{dT}{dt} = T \frac{dX}{dx}$. Membagi kedua ruas dengan XT dan dipisah:

$$\frac{1}{vT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{dX}{dx}, \text{ mempunyai implikasi matematis}$$

$$\frac{1}{vT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = \alpha. \text{ Selanjutnya dari PDP dengan metode pemisahan}$$

ini kita memperoleh atau dapat membuat PDB terpisah yaitu:

$$\frac{1}{vT} \frac{dT}{dt} = \alpha \text{ dan } \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = \alpha. \text{ Solusi PDB ini adalah } T(t) = A \exp(\alpha vt)$$

dan $X(x) = B \exp(\alpha x)$ dengan A dan B adalah tetapan sebarang yang harus dicari. Solusi PDP kita oleh sebab itu

$$\psi(x, t) = X(x)T(t) = C e^{\alpha x} e^{\alpha vt} = C e^{\alpha(x+vt)}.$$

Kita masih belum menentukan tetapan C . Untuk itu kita terapkan S.A. ke solusi ini sehingga kita peroleh $\psi(x, 0) = \exp x = C \exp(\alpha x)$. Ini dipenuhi jika kita ambil $C = 1$ dan $\alpha = 1$ sehingga $\psi(x, t) = e^{x+vt}$. Ini adalah solusi yang kita ingin dapatkan untuk soal PDP di atas.

6) Persamaan karakteristik untuk PDB ini adalah $m^2 + 4m + 4 = 0$. Akar persamaan dapat dicari adalah $m_{1,2} = -2$. Solusi umum PDB adalah $u(t) = C_1 t \exp(-2t) + C_2 \exp(-2t)$.



Sebuah fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret menurut deret Taylor dengan cara:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

dengan $f^n(a)$ adalah nilai turunan ke- n fungsi di $x = a$ dan $n!$ adalah permutasi n .

Bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} = |z|, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) orde dua homogen linear mempunyai bentuk umum:

$$a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = 0$$

Jika ruas kanan tidak sama nol yaitu

$$a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t)$$

maka disebut PDB tak homogen. Solusi PDB yang dicari adalah $y = y(t)$.

Secara umum sebuah PD Parsial (PDP) orde dua, linear dan dua variabel dapat kita tuliskan dengan

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \psi}{\partial x} + E \frac{\partial \psi}{\partial y} + F \psi = G$$

Jika $G(x,y) = 0$ maka kita menyebut PDP adalah *homogen* dan jika $G(x,y) \neq 0$ adalah PDP tak homogen.

Untuk mengetahui solusi khusus persamaan diferensial maka diperlukan **syarat awal** (S.A.) dan/atau **syarat batas** (S.B). Sebagai

contoh, jika persamaan gelombang diberikan dengan $a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ maka solusi khusus $\psi(x,t)$ dapat dicari untuk S.A. Misalnya, $\psi(x,0) = f(x)$ dan $\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), 0 < x < L$, serta S.B. $\psi(0,t) = 0$, $\psi(L,t) = 0, t > 0$, misalnya.

Secara umum ada tiga tipe syarat batas dikaitkan dengan sebuah persamaan diferensial. Pada batas, kita dapat menetapkan nilai-nilai untuk:

- 1) ψ (syarat batas Dirichlet)
- 2) $\partial \psi / \partial n$ (syarat batas Neumann) atau
- 3) $\partial \psi / \partial n + h\psi$, (syarat batas Robin), h sebuah konstanta.

$\partial \psi / \partial n$ menyatakan turunan normal dari ψ (turunan arah ψ dalam arah tegak lurus batas).

Beberapa metode untuk mencari solusi PDB homogen, misalnya berikut ini.

- 1) Metode integrasi langsung untuk PDB yang sederhana.
- 2) Metode faktor integrasi. Jika kita dapat mengubah PDB menjadi bentuk: $\frac{dv(t)}{dt} + a(t)v(t) = b(t)$ maka solusi umum dicari dengan

$$\text{menyelesaikan persamaan } \frac{d}{dt} \left(v(t) \exp \left[\int a(t) dt \right] \right) = b(t) \exp \left[\int a(t) dt \right].$$

Bagian eksponensial integral disebut faktor integrasi.

- 3) Metode persamaan karakteristik. Jika PDB berbentuk linear homogen orde dua $a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$ maka solusi umum dapat dicari dengan mencari akar persamaan karakteristik

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Selanjutnya solusi umumnya dapat melihat pada tabel berikut.

Akar Persamaan	Kondisi yang ada	Solusi Umum
Jika m_1 dan m_2 riil dan berbeda	$b^2 - 4ac > 0$	$C_1 \exp(m_1 t) + C_2 \exp(m_2 t)$
Jika m_1 dan m_2 berbentuk $p \pm iq$, $p = -b/2a$ dan $q = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$b^2 - 4ac < 0$	$e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$ atau $C_1 e^{pt} \cos (qt + C_2)$
Jlka m_1 dan m_2 sama	$b^2 - 4ac = 0$	$e^{mt} (C_1 t + C_2)$

PDB tak homogen dapat dipecahkan dengan metode koefisien tak tentu. Solusi PDB ini memisalkan berbentuk $y = y_{CF} + y_{PI}$ dengan y_{CF} adalah fungsi pelengkap yang dicari dengan memecahkan solusi PDB homogenya, dan y_{PI} adalah integral khusus yang solusinya dapat melihat tabel berikut.

$$a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t) y = f(t)$$

$f(t)$	$y_{PI}(t)$
$\exp(at)$	$A \cdot \exp(at)$
$\sin(at)$	$A \cdot \sin(at) + B \cdot \cos(at)$
$\cos(at)$	$A \cdot \sin(at) + B \cdot \cos(at)$
$\exp(at) \cdot \sin(bt)$	$A \cdot \exp(at) \cdot \sin(bt) + B \cdot \exp(at) \cdot \cos(bt)$

Untuk persamaan diferensial parsial, solusinya dapat dicari menggunakan salah satu metode yaitu metode separasi variabel. Metode ini berusaha mengubah PDP menjadi sejumlah PDB yang dapat dipecahkan dengan metode-metode di atas.

Dalam menelaah gejala fisika sering perlu membuat model matematis untuk dinamika sistem yang ada. Model matematis ini sering tepat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial, oleh karena itu bagi seorang fisikawan kemampuan untuk memahami (fenomena) sistem fisis yang dihadapi secara intuitif kemudian berusaha membuat model matematis yang sesuai dan mencari solusinya merupakan hal yang sangat penting.



TES FORMATIF 1 _____

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) PDP orde dua linear $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ termasuk
 - A. PDP hiperbolik
 - B. PDP parabolik
 - C. PDP eliptik
 - D. jawaban A, B, dan C benar semua

- 2) Persamaan gelombang diberikan oleh $a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ yang merupakan PDP
 - A. PDP hiperbolik
 - B. PDP parabolik
 - C. PDP eliptik
 - D. jawaban A, B, dan C benar semua

- 3) Sebuah PDP $\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \sin y$ dengan syarat batas (S.B.) bahwa $\psi(0, y) = 0$. Carilah solusi yang sesuai!
 - A. $\psi(x, y) = x \sin y$
 - B. $\psi(x, y) = x^2 \sin y$
 - C. $\psi(x, y) = y \sin x$
 - D. $\psi(x, y) = \cos y$

- 4) Sebuah persamaan gelombang berbentuk $a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$. Dalam koordinat polar persamaan yang berlaku adalah
 - A. $a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
 - B. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$C. \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$D. \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

5) Problem simetri radial adalah problem yang tidak bergantung pada koordinat sudut θ (ditinjau koordinat polar). Kembali ke soal Nomor 4, persamaan yang berlaku adalah

$$A. \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$B. \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$C. \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$D. \quad a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

6) Sebuah PDB $\frac{dv(t)}{dt} = tv(t) + t^2$ dengan syarat batas $v(0) = 5$. Carilah solusi yang sesuai!

$$A. \quad v(s) = e^{s^2/2} \left[5 + \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt \right]$$

$$B. \quad v(s) = 5 + \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt$$

$$C. \quad v(s) = 5 + e^{s^2/2} \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt$$

$$D. \quad v(s) = 5 + e^{s^2/2} \int_0^s t e^{-t^2/2} dt$$

7) PDB berbentuk $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -4\frac{d}{dt}x(t) - 3x(t)$ dengan $x(0) = 1$ dan

$$\left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=0} = 0. \text{ Carilah solusinya!}$$

A. $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

B. $x(t) = e^{-3t} \left[2 + \frac{3}{2}t \right]$

C. $x(t) = e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

D. $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} - 2e^{-t}$

8) PDB tak homogen $y'' - 3Y' - 4Y = 2\sin(t)$. Solusi umum yang memenuhi adalah

A. $y(t) = C_1 \exp(4t) + C_2 \exp(-t)$

B. $y(t) = C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-t) - \sin t + \frac{3}{17} \cos t$

C. $y(t) = C_1 [\exp(4t) + C_2] - \sin t + \frac{3}{17} \cos t$

D. $y(t) = C_1 \exp(4t) + C_2 \exp(-t) - \frac{5}{17} \sin t + \frac{3}{17} \cos t$

9) Diketahui bilangan kompleks $z = 1 \pm \sqrt{3}i$, nyatakan dalam bentuk polar.

A. $\sqrt{3}e \pm i(\pi/3)$

B. $e \pm i(3\pi)$

C. $2e \pm i \left(\frac{\pi}{3} \right)$

D. $3e \pm i(3\pi)$

- 10) Jika Persamaan Diferensial Parial (PDP) orde dua berbentuk, maka klasifikasi PDP tersebut adalah
- A. hiperbolik
 - B. parabola
 - C. eliptik
 - D. bundar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Transformasi Laplace

A. DEFINISI TRANSFORMASI LAPLACE

Sistem fisis massa pegas atau rangkaian listrik seri dapat ditelaah dengan memecahkan persamaan diferensial biasa, misalnya berbentuk berikut ini.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \text{ dan } L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

dengan $f(t)$ adalah gaya eksternal dan $E(t)$ adalah tegangan yang diberikan. Dalam hal ini sebenarnya $f(t)$ dan $E(t)$ dapat berupa fungsi kontinu maupun diskontinu. Sebagai contoh tegangan $E(t)$ diberikan dalam bentuk fungsi undak periodik, seperti berikut.



Gambar 1.5.
Fungsi Undak Periodik

Menyelesaikan dan memecahkan problem-problem persamaan diferensial untuk kasus seperti ini cukup sulit, namun bukan tidak mungkin. Transformasi Laplace adalah perangkat matematika yang sangat bernilai untuk menyelesaikan problem persamaan diferensial selain juga untuk problem lain secara umum. Transformasi Laplace sangat bermanfaat juga karena dapat digunakan untuk mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar sehingga mudah untuk mendapatkan solusinya. Selain itu, dalam transformasi Laplace syarat batas dan syarat awal akan muncul secara alamiah dalam proses transformasi tersebut. Jika $f(t)$ didefinisikan untuk $t \geq 0$

maka integral improper $\int_0^{\infty} K(s,t) f(t) dt$ didefinisikan sebagai limit berikut.

$$\int_0^{\infty} K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s,t) f(t) dt$$

Jika dipilih $K(s,t) = e^{-st}$ maka ini akan memberikan transformasi integral yang penting untuk transformasi Laplace.

Definisi:

Jika $f(t)$ adalah fungsi yang didefinisikan untuk $t \geq 0$ maka transformasi Laplace dari $f(t)$ diberikan oleh:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.62)$$

Pada definisi persamaan (1.62) yang hasil integrasi perlu konvergen maka hasil integrasi merupakan fungsi dari s . Kita gunakan huruf kecil untuk menuliskan fungsi yang akan ditransformasi dan huruf besar untuk transformasi Laplacenya, seperti:

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathbf{L}\{g(t)\} = G(s) \quad \text{dan} \quad \mathbf{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Contoh 1.10:

Carilah hasil dari $\mathbf{L}\{1\}$?

Penyelesaian:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s}$$

dengan syarat batas $s > 0$ agar hasil transformasi berhingga. Kita lihat di sini syarat batas $s > 0$ muncul secara otomatis dan alamiah dari transformasi Laplace.

B. SIFAT LINEAR TRANSFORMASI

Untuk dua buah fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ maka berlaku transformasi Laplace:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (1.63)$$

L dikatakan sebagai transformasi linear.

Contoh 1.11:

Carilah $L\{1+5t\}$?

Penyelesaian:

$$L\{1+5t\} = L\{1\} + L\{5t\} = L\{1\} + 5L\{t\} = 1/s + 1/s^2$$

C. INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

Jika $F(s)$ mewakili transformasi Laplace untuk fungsi $f(t)$, yaitu $L\{f(t)\} = F(s)$ maka kita dapat menyatakan bahwa $f(t)$ adalah invers dari $F(s)$, yaitu kita tuliskan:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (1.64)$$

Dari Tabel 1.2 dapat dituliskan $1 = L^{-1}\{1/s\}$, $t = L^{-1}\{1/s^2\}$ dan $e^{-3t} = L^{-1}\{1/(s+3)\}$.

Contoh 1.12:

Hitunglah invers berikut $L^{-1}\{1/s^5\}$?

Penyelesaian:

Kita lakukan trik agar dapat menggunakan hasil dalam Tabel 1.2. yaitu:

$$L^{-1}\{1/s^5\} = \frac{1}{4!} L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24} t^4$$

Beberapa fungsi dan transformasi Laplacinya dapat dilihat pada Tabel 1.2 berikut.

Tabel 1.2.
Transformasi Laplace beberapa fungsi

No.	Fungsi $f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	Keterangan
1	1	$1/s, s>0$	<p>Jika fungsi yang diketahui adalah $F(s)$ yang merupakan hasil transformasi Laplace, maka fungsi asli $f(t)$ sebelum di transformasi dapat dicari dari inversnya, yaitu: $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.</p> <p>Sebagai contoh: $L^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at} = f(t)$</p>
2	t^n	$n!/(s^{n+1}),$ $n = 1,2,3,\dots$	
3	$\exp(at)$	$1/(s-a)$	
4	$\sin(kt)$	$k/(s^2+k^2)$	
5	$\cos(kt)$	$s/(s^2-k^2)$	
6	$\sinh(kt)$	$k/(s^2-k^2)$	
7	$\cosh(kt)$	$s/(s^2-k^2)$	
8	$t^n/n!$	$1/(s^{n+1})$	
9	$\exp(-at)$	$1/(s+a)$	
10	$t^n \cdot \exp(-at)$	$n!/(s+a)^{n+1}$	
11	$1-\exp(-at)$	$a/[s(s+a)]$	
12	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} - 1 + at)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	
13	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	
14	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	
15	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	

Invers transformasi Laplace juga memenuhi sifat linearitas seperti untuk transformasi Laplace sendiri, yaitu

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\}$$

D. FRAKSI PARSIAL

Agar menemukan $f(t)$ dari $F(s)$, akan sering kita menyatakan $F(s)$ sebagai jumlahan dari fungsi yang diketahui, yaitu transformasi-transformasi yang ada pada tabel. Operasi ini sering memerlukan kegunaan fraksi parsial. Fraksi parsial akan memainkan peranan penting dalam usaha menemukan hasil invers transformasi Laplace. Untuk memahami teknik ini maka akan diberikan contoh berikut ini.

Contoh 1.13:

Carilah $f(t)$ dari $F(s) = \frac{s+4}{s^2-s-2}$?

Penyelesaian:

Kita lakukan penggunaan metode fraksi parsial sebagai berikut.

$$\frac{s+4}{s^2-s-2} = \frac{s+4}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow s+4 = A(s+1) + B(s-2)$$

Kita lihat pada penyebut bahwa kita dapat mengambil nilai s sebagai berikut.

$$s = -1: 3 = -3B \rightarrow B = -1$$

$$s = 2: 6 = 3A \rightarrow A = 2$$

sehingga kita mendapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{s+4}{(s-2)(s+1)} &= \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{s+4}{(s-2)(s+1)} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{2}{s-2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \end{aligned}$$

Setelah kita mendapatkan bentuk fraksional ini maka melihat pada Tabel 1.2. kita dapat menyimpulkan:

$$f(t) = L^{-1} \{F(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s-2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = 2\exp(2t) - \exp(-t)$$

E. TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK DERIVATIF

Kita akan mencoba menghitung transformasi Laplace untuk turunan fungsi. Misalkan, untuk $f'(t)$ maka hasil transformasi Laplaceny adalah:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sL\{f(t)\}$$

atau

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (1.65)$$

dengan asumsi $e^{-st}f(t) \rightarrow 0$ jika $t \rightarrow \infty$. Dengan cara yang sama dan dengan bantuan persamaan (1.65) dapat kita hitung untuk turunan kedua,

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = e^{-st} f'(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = -f'(0) + sL\{f'(t)\} \\ &= s\{sF(s) - f(0)\} - f'(0) = s^2 F(s) - sf'(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Dapat ditunjukkan bahwa transformasi Laplace untuk turunan ketiga adalah,

$$L\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0) \quad (1.67)$$

Secara umum untuk turunan ke-n fungsi maka berlaku:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (1.68)$$

dengan $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$.

F. MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINEAR

Dari hasil transformasi Laplace persamaan (1.68) maka tampak bahwa $L\{d^n y / dt^n\}$ bergantung pada $Y(s) = \mathbf{L}\{y(t)\}$ dengan turunan ke-(n-1) fungsi $y(t)$ dievaluasi pada $t = 0$. Sifat ini mengizinkan transformasi Laplace sangat ideal untuk memecahkan persamaan diferensial problem syarat awal dengan koefisien tetap. Persamaan diferensial seperti ini adalah kombinasi linear dari suku-suku $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, yaitu

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = g(t) \quad (1.69)$$

dengan $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots$, dan $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ dan $a_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ dan y_0, y_1, \dots, y_{n-1} adalah tetapan.

Dengan sifat linear transformasi maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n L \left\{ \frac{d^n y}{dt^n} \right\} + a_{n-1} L \left\{ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_0 L \{y\} = L \{g(t)\} \quad (1.70)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace turunan fungsi (derivatif) maka dapat kita ubah persamaan (1.71) menjadi:

$$a_n \left[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \right] + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0) \right] + \dots + a_0 Y(s) = G(s) \quad (1.71)$$

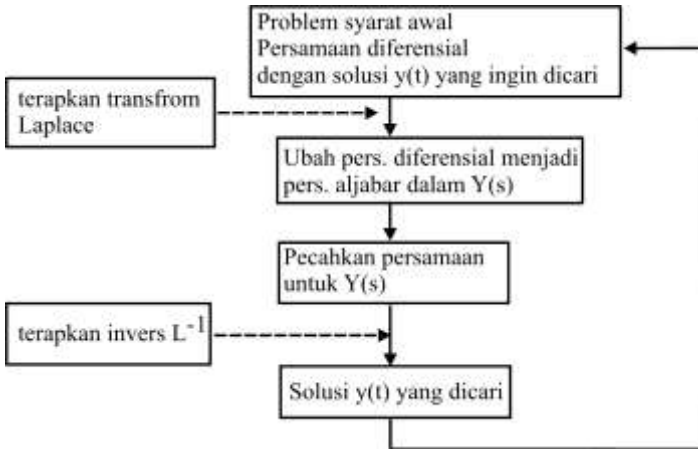
dengan $L\{y(t)\}=Y(s)$ dan $L\{g(t)\}=G(s)$. Dengan kata lain dengan transformasi Laplace kita telah mengubah persamaan diferensial menjadi sebuah persamaan aljabar dalam $Y(s)$. Jika kita memecahkan persamaan umum yang ditransformasi menurut (1.71) untuk simbol $Y(s)$ kita pertama mendapatkan $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ dan kemudian menuliskan,

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)} \quad (1.72)$$

dengan $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ adalah polinomial dalam s dengan derajat kurang dari atau sama dengan $(n-1)$. Solusi $y(t)$ dari problem syarat awal yang sebenarnya ingin dicari akhirnya dapat dihitung dengan

$$y(t) = L^{-1} \{Y(v)\} \quad (1.73)$$

Prosedur untuk mendapatkan solusi menurut metode transformasi Laplace dapat dilihat pada diagram pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5.

Diagram Prosedur Pemecahan Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace

Contoh 1.14:

Problem syarat awal. Carilah solusi dari $y' + 3y = 13\sin(2t)$ dengan $y(0) = 6$?

Penyelesaian:

Kita lakukan transformasi untuk setiap elemen persamaan diferensial,

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3L\{y\} = 13L\{\sin 2t\}$$

Dari persamaan (1.66) dapat kita hitung

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$$

Dari Tabel 1.2. dapat kita tuliskan,

$$L\{\sin(2t)\} = 2/(s^2+4),$$

Oleh karena itu, persamaan diferensial seluruhnya dapat dituliskan dengan,

$$sY(s)-6 + 3Y(s) = 26/(s^2+4) \rightarrow (s+3)Y(s) = 6 + 26/(s^2+4)$$

Menyelesaikan persamaan terakhir untuk Y(s) maka dapat kita peroleh,
 $Y(s) = 6/(s+3) + 26/[(s+3)(s^2+4)] = (6s^2+50)/[(s+3)(s^2+4)]$.

Selanjutnya kita lakukan fraksi parsial dengan definisi berikut.

$$\frac{6s^2 + 50}{(s+3)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2 + 4} \Rightarrow 6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s+3)$$

Jika $s = -3$ maka $A = 8$. Apabila kedua ruas tidak mempunyai nol lagi maka kita samakan koefisien s^2 dan s , yaitu $6 = A + B$ dan $0 = 3B + C$. Menggunakan nilai $A = 8$ maka $B = -2$, dan seterusnya $C = 6$ sehingga persamaan menjadi:

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s+3)(s^2 + 4)} = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2 + 4} \Rightarrow y(t) = 8L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$$

Dari Tabel 1.2 dapat kita simpulkan solusinya:

$$y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\sin 2t$$

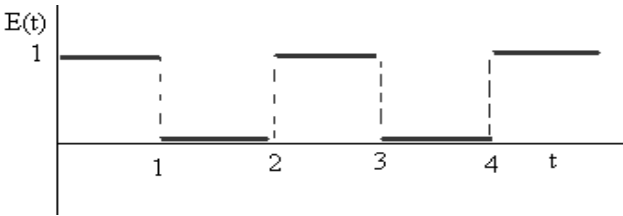
G. FUNGSI PERIODIK

Jika fungsi $f(t)$ periodik dengan periode T , $T>0$ maka $f(t+T) = f(t)$. Transformasi Laplacinya adalah $L\{f(t)\} =$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \tag{1.74}$$

Contoh 1.15:

Carilah transformasi Laplace untuk fungsi dalam gambar berikut.



Gambar 1.6.
Fungsi Periodik

Penyelesaian:

Fungsi $E(t)$ disebut fungsi gelombang kotak dengan periode $T = 2$ pada interval $0 \leq t < 2$ dan $E(t)$ dinyatakan dengan:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

dan di luar interval maka $E(t+2) = E(t)$. Selanjutnya dapat dikerjakan dengan cara biasa:

$$\begin{aligned} L\{E(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} \cdot 1 \cdot dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0 \cdot dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1}{s(1+e^{-s})} \end{aligned}$$

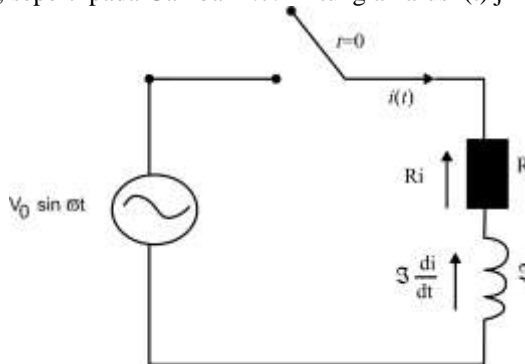


LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Tunjukkan bahwa hasil dari transformasi Laplace fungsi e^{-3t} adalah $1/(s+3)$ dengan syarat batas $s > -3$?
- 2) Tunjukkan bahwa $L\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, $s > 0$?
- 3) Hitunglah $L^{-1}\{1/(s^2+7)\}$?

- 4) Menggunakan fraksi parsial, hitunglah $L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} \right\}$?
- 5) Carilah $y(t)$ dari $Y(s) = \frac{6s^2 + 5s + 19}{(s^2 + 4)(s+1)}$?
- 6) Carilah solusi dari $y'' - 3y' + 2y = \exp(-4t)$, $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 5$
- 7) Sebuah rangkaian RL tiba-tiba dihubungkan dengan sebuah sumber tegangan, seperti pada Gambar 1.7. Hitunglah arus $i(t)$ jika $i(0) = 0$!



Gambar 1.7
Rangkaian RL

Petunjuk Jawaban Latihan

$$1) \quad L\{e^{-3t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-3t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt = \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3$$

$$2) \quad L\{\sin 2t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t dt = \frac{-e^{-st} \sin 2t}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t dt$$

$$= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t dt, \quad s > 0$$

$$= \frac{2}{s} \left[\frac{-e^{-st} \cos 2t}{s} \Big|_0^{\infty} - \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t dt \right] = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2} L\{\sin 2t\}$$

Jika kita kumpulkan suku yang sama di satu ruas maka kita dapatkan bahwa $L\{\sin(2t)\} = 2/(s^2 + 4)$, $s > 0$.

$$3) \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 7)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{7}}{s^2 + 7} \right\} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sin \sqrt{7}t$$

$$4) \quad L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} \right\} = ? \quad \text{Kita coba membawa ini ke bentuk}$$

fraksional,

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}. \quad \text{Dapat kita lanjutkan bahwa,}$$

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} = \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

atau

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)$$

Kita dapat menyelesaikan ini lebih lanjut dan dengan aljabar yang agak panjang kita peroleh $A = -16/5$, $B = 25/6$ dan $C = 1/30$. Oleh karena itu, Anda akan dapat menemukan bahwa, dengan aljabar yang agak panjang sekali lagi,

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} \right\} = -\frac{16}{5} e^t + \frac{25}{6} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{-4t}$$

- 5) Untuk mendapatkan jawaban soal ini maka gunakan fraksi parsial. Kita lihat pada soal $Y(s) = \frac{6s^2 + 5s + 19}{(s^2 + 4)(s+1)}$, bahwa pada penyebut terdapat suku s^2 . Oleh karena itu, bentuk fraksional dapat diasumsikan dengan:

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 5s + 19}{(s^2 + 4)(s+1)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s+1} \rightarrow$$

$$6s^2 + 5s + 19 = (As + B)(s+1) + C(s^2 + 4)$$

Jika dipilih $s = -1$ maka $C = 4$, jika $s = 0$ maka $B = 3$. Menyamakan koefisien dalam s^2 maka kita dapatkan $A = 2$. Oleh karena itu:

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 5s + 19}{(s^2 + 4)(s + 1)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 4} + \frac{4}{s + 1} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

Dengan aljabar yang agak panjang dapat ditemukan bahwa:

$$y(t) = 2 \cos 2t + (3/2) \sin 2t + 4 \exp(-t)$$

6)

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} - 3L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2L\{y\} = L\{\exp(-4t)\} \Rightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) -$$

$$3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s + 4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + 1/(s + 4)$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s + 4)} = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)}$$

Selanjutnya dapat dihitung $y(t) = L^{-1}Y\{s\} = \frac{-16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$

7) Pecahkan persamaan diferensial $\Im \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \sin \omega t$. Selanjutnya

akan diperoleh bahwa

$$i(t) = \frac{\omega V_0}{\Im} \frac{1}{\omega^2 + (R/\Im)^2} \left[\exp(-(R/\Im)t) + \frac{R}{\omega \Im} \sin \omega t - \cos \omega t \right]$$



Solusi persamaan diferensial untuk fungsi diskontinu relatif mudah diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi Laplace karena dapat mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar dan syarat batas serta syarat awal akan muncul secara alamiah dalam proses transformasi Laplace.

Transformasi Laplace didefinisikan: Jika $f(t)$ adalah fungsi yang didefinisikan untuk $t \geq 0$ maka transformasi Laplace dari $f(t)$ diberikan oleh

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

Dengan ini maka persamaan diferensial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = g(t)$$

akan diubah menjadi persamaan aljabar

$$a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 Y(s) = G(s), \text{ menggunakan transformasi:}$$

$$a_n L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} L\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \dots + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

Jika $L\{y(t)\} = Y(s)$ dan $L\{g(t)\} = G(s)$ maka dari persamaan aljabar yang diperoleh disusun menjadi:

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}$$

Solusi PD yang dicari adalah invers dari $Y(s)$ yaitu $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.



TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Transformasi Laplace dari fungsi: $4\exp^{-3t} - 10\sin 2t$ adalah
 - A. $4/(s+3) - s^2+4$
 - B. $4/(s-3) - s^2$
 - C. $4/(s+3) - 20/(s^2+4)$
 - D. $1/(s^2+3)(s-1)$

- 2) Berapakah hasil dari $L^{-1} \left\{ \frac{-2s+6}{s^2+4} \right\}$?
- A. $-2\cos 2t + \sin 2t$
 - B. $\cos 2t + \sin 2t$
 - C. $3\sin 2t$
 - D. $-2\cos 2t + 3\sin 2t$
- 3) Carilah $f(t)$ dari $F(s) = 1/(s^3 - s^2 + s - 1)$?
- A. $\frac{1}{2}(\exp(t) - \cos t - \sin t)$
 - B. $(\exp(t) - 2\cos t - \sin t)$
 - C. $\frac{1}{3}(\exp(t) - \cos t - \sin t)$
 - D. $2[(\exp(t) - \cos t - \sin t)]$
- 4) Carilah solusi dari $f''(t) + f(t) = t$, $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$
- A. $f(t) = t^2 + \cos(t) - 3\sin(t)$
 - B. $f(t) = t + \cos(t) - 3\sin(t)$
 - C. $f(t) = t - 2\cos(t)$
 - D. $f(t) = \cos(t) - 3\sin(t) + 2t$
- 5) Carilah solusi persamaan diferensial berikut:
 $y''(t) + y(t) = 3\sin 2t$, $t \in [0, \infty]$ dengan syarat batas
 $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
- A. $y(t) = t + \cos t - \sin 2t$
 - B. $y(t) = 2\cos 2t - 3t$
 - C. $y(t) = 2t + t^2 \cos t$
 - D. $y(t) = \cos t - \sin 2t$
- 6) Persamaan diferensial $\ddot{f}(t) + 3\dot{f}(t) + 2f(t) = \exp(-t)$, dengan syarat awal: $f(0+) = \dot{f}(0+) = 0$. Carilah solusi yang memenuhi persamaan ini?
- A. $f(t) = \exp(-2t) - \exp(-t) + t \exp(-2t)$
 - B. $f(t) = \exp(-3t) - \exp(-t) + t \exp(-3t)$

C. $f(t) = \exp(-t) - \exp(-t) + t \exp(-2t)$

D. $f(t) = \exp(-2t) - \exp(-t) + t \exp(-t)$

7) Carilah solusi sistem dua persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} + y = 3\exp(2t), \quad x(0) = 2$$

$$\frac{dy}{dt} + x = 0, \quad y(0) = 0$$

A. $x = -\frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) + 2\exp(2t)$;

$$y(t) = \frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(2t)$$

B. $x = -\frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) + 2\exp(2t)$;

$$y(t) = -\frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(2t)$$

C. $x = -\frac{1}{3}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) + 2\exp(2t)$;

$$y(t) = \frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(2t)$$

D. $x = -\frac{1}{2}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) + 2\exp(2t)$;

$$y(t) = \frac{1}{3}\exp(t) + \frac{1}{2}\exp(-t) - \exp(2t)$$

8) Carilah solusi dari $y' + 2y = 1$, $y(0) = 1$?

A. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(-2t)$

B. $y = 1 + \frac{1}{2}\exp(-2t)$

C. $y = 2 + \frac{1}{2}\exp(-2t)$

D. $y = \frac{1}{2} + \exp(-2t)$

9) Temukan solusi dari $dy/dt + 5y = 3\exp(-2t)$ dengan $y(0) = 4$.

A. $y(t) = \exp(-2t) + 3\exp(-5t)$

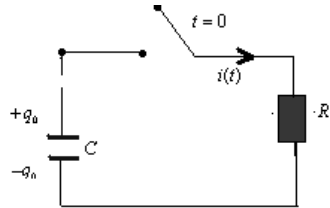
B. $y(t) = \sin(2t) + 1$

C. $y(t) = \cos(2t) + \exp(-t)$

D. $y(t) = 2\exp(-t)$

10) Sebuah rangkaian kapasitor (lihat gambar) diamati mempunyai muatan q_0 . Tiba-tiba rangkaian dihubungkan dengan resistor R . Hitunglah muatan $q(t)$?

- A. $q(t) = q_0 \exp(-t / RC)$
- B. $q(t) = q_0 \exp(-2t / RC)$
- C. $q(t) = q_0 \exp(-t / 2RC)$
- D. $q(t) = 2q_0 \exp(-t / RC)$



Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

- Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
- 80 - 89% = baik
- 70 - 79% = cukup
- < 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

- 1) C. Parabolik. Dengan $A = 1$, $B = 0$ dan $C = 1$ maka $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$ maka berarti PDP adalah eliptik.
- 2) A. PDP hiperbolik.
- 3) B. Integrasi langsung terhadap x menghasilkan $\psi(x, y) = x \sin y + F(y)$. Untuk menentukan $F(y)$ maka S.B. di atas harus diterapkan, yaitu $\psi(0, y) = 0 = 0 \sin y + F(y) = 0 + F(y) \Rightarrow F(y) = 0$. Oleh karena itu, solusi PDP adalah $\psi(x, y) = x \sin y$.

4) D.
$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Ingat kembali Laplacian dalam Polar

5) C.
$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Jika simetri radial maka bagian sudut tidak relevan lagi.

6) C.
$$v(s) = 5 + e^{s^2/2} \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt.$$

Solusi ini dapat dicari dengan metode faktor integrasi.

$$\frac{dv(t)}{dt} = tv(t) + t^2, v(0) = 5. \quad \text{Kita ubah menjadi}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} - tv(t) = t^2 \quad \text{dengan faktor integrasi } e^{-t^2/2}. \quad \text{Selanjutnya}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-t^2/2} v(t) \right] = t^2 e^{-t^2/2}.$$

Integrasi kedua ruas dalam selang $[0, s]$ menghasilkan:

$$e^{-s^2/2} v(s) - 5e^{-0^2/2} = \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt$$

$$\Rightarrow v(s) = 5 + e^{s^2/2} \int_0^s t^2 e^{-t^2/2} dt$$

7) A. $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$. Gunakan persamaan karakteristik!

8) D. $y(t) = C_1 \exp(4t) + C_2 \exp(-t) - \frac{5}{17} \sin t + \frac{3}{17} \cos t$.

Gunakan metode koefisien tak tentu.

9) C. Diketahui $x = 1$, $y = \pm\sqrt{3}$ atau $z = \sqrt{1+3z^\theta}$. Nilai θ dapat dihitung dari $\theta = \operatorname{arctan}(\sqrt{3}/1) = \frac{\pi}{3}$. Jadi dalam polar

$$z = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\left(\frac{\pi}{3}\right)}.$$

10) B. Parabolik.

Tes Formatif 2

1) C. $4/(s+3) - 20/(s^2+4)$. Cukup jelas, dapat dihitung berdasarkan definisi.

2) D. $-2\cos 2t + 3\sin 2t$. Penjabaran:

$$L^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+4}\right\} = -sL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{s}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = -2\cos 2t + 3\sin 2t$$

3) A. $\frac{1}{2}(\exp(t) - \cos t - \sin t)$. Ubah ke bentuk fraksional terlebih dahulu yaitu:

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right) \Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = \dots$$

4) B. $f(t) = t + \cos(t) - 3\sin(t)$

$$L\{f''(t)\} + L\{f(t)\} = L\{t\} \Rightarrow [s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] + F(s) = 1/s^2$$

$$s^2F(s) - s + 2 + F(s) = 1/s^2 \rightarrow F(s) = 1/s^2 + s/(s^2+1) - 3/(s^2+1)$$

$$\rightarrow F(s) = 1/s^2 + s/(s^2+1) - 3/(s^2+1)$$

$$\rightarrow f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{1/s^2 + s/(s^2+1) - 3/(s^2+1)\} = t + \cos(t) - 3\sin(t)$$

$$f(t) = t + \cos(t) - 3\sin(t)$$

5) D. $y(t) = \cos t - \sin 2t$

$$L\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s + 2$$

$$L\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$$

Persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar:

$$s^2 Y(s) - s + 2 + Y(s) = 6/(s^2 + 4)$$

Menyelesaikan untuk Y(s) diperoleh:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \cos t - \sin 2t$$

6) D. $f(t) = \exp(-2t) - \exp(-t) + t \exp(-t)$

Prosedur penyelesaian:

Langkah 1: $s^2 F(s) + 3sF(s) + 2F(s) = 1/(s+1)$

Langkah 2: $F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2}$

Langkah 3: Fraksi parsial $\rightarrow F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \rightarrow f(t) = \exp(-2t) - \exp(-t) + t \exp(-t)$$

7) A. $x = -\frac{1}{2} \exp(t) + \frac{1}{2} \exp(-t) + 2 \exp(2t)$;

$$y(t) = \frac{1}{2} \exp(t) + \frac{1}{2} \exp(-t) - \exp(2t)$$

Gunakan prosedur yang sudah ada.

8) A. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-2t)$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{2y\} = L\{1\} \Rightarrow sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \dots =$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-2t)$$

9) A. $y(t) = \exp(-2t) + 3 \exp(-5t)$

Gunakan prosedur seperti biasanya:

a. Lakukan transformasi $\rightarrow L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 5L\{y\} = 3L\{\exp(-2t)\}$

b. Ubahlah menjadi persamaan aljabar $Y(s) = 1/(s+2) + 3/(s+5)$

c. $y(t) = L^{-1}\{\dots\} + L^{-1}\{\dots\} = \exp(-2t) + 3 \exp(-5t)$

10) A. $q(t) = q_0 \exp(-t/RC)$. Pecahkan persamaan $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$.

Glosarium

- Persamaan diferensial : Persamaan matematika yang mengandung turunan-turunan fungsi dalam persamaannya.
- Persamaan diferensial biasa : Persamaan diferensial dengan hanya satu variabel turunan.
- Persamaan diferensial parsial : Persamaan diferensial dengan lebih dari satu variabel turunan.
- Solusi khusus : Persamaan diferensial yang suku ruas kanan tidak sama dengan nol.
- Transformasi Laplace : Salah satu metode pemecahan persamaan diferensial yang lebih umum, terutama untuk persamaan diferensial tak homogen yang fungsinya tidak kontinu (suku ruas kanan persamaan). Metode ini unggul karena dapat mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar.
- Persamaan aljabar : Persamaan matematika yang hanya menggunakan operasi aljabar dalam perumusannya.

Daftar Pustaka

- Hirose, A.(1985). *Introduction to Wave Phenomena*. New York: John Wiley and Sons.
- Malham, S.J.A. *Differential Equation and Linear Algebra*. Lecture Notes, Dept of Mathematics, Heriot-Watt University.
- Sertoz, A.S. (2003). *Lecture notes on Laplace and z-Transforms*.
- Sohon, H. (1944). *Engineering Mathematics*. New Jersey: D. Van Nostrand Comp, Inc.
- Veeh, J.A. (2002). *Lecture Notes on Ordinary Differential Equation*.
- Zill, D.G. (2000). *Advanced Engineering Mathematics*. Massachusetts: Jones and Bartlett.