MODUL 1

Himpunan dan Sistem Bilangan Real

Drs. Sardjono, S.U.

PENDAHULUAN

Modul himpunan ini berisi pembahasan tentang himpunan dan himpunan bagian, operasi-operasi dasar himpunan dan sistem bilangan real. Untuk Anda, materi himpunan ini umumnya bukanlah bahan baru, melainkan merupakan perluasan dan pendalaman materi himpunan dan sistem bilangan real dalam pelajaran Matematika yang pernah Anda terima sejak di bangku Sekolah Dasar sampai dengan Sekolah Lanjutan Atas.

Dalam kehidupan sehari-hari Anda banyak berjumpa dengan himpunan dan banyak menggunakan bilangan-bilangan real dalam setiap pekerjaan. Dengan mempelajari modul himpunan ini, Anda akan lebih memahami tentang himpunan serta sistem bilangan real.

Materi yang dibahas dalam modul himpunan ini merupakan dasar dan landasan konsep-konsep untuk bidang-bidang keilmuan lainnya, khususnya bidang matematika dan statistika. Sesudah menyelesaikan modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. mendeskripsikan dan mengidentifikasikan suatu himpunan,
2. menyajikan suatu himpunan,
3. membandingkan hasil operasi beberapa himpunan,
4. menunjukkan hasil operasi beberapa himpunan,
5. menggunakan sifat-sifat, hukum-hukum dan teorema-teorema dalam aljabar himpunan,
6. mendeskripsikan sistem bilangan real,
7. menerangkan jenis-jenis bilangan real dan hubungan di antara himpunan-himpunan setiap jenis bilangan real,
8. menggunakan sifat-sifat dan teorema-teorema tentang ketidaksamaan dan nilai mutlak bilangan real,
9. mencari himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan, serta
10. menggunakan induksi matematis.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan dan Himpunan Bagian

Konsep dasar semua cabang matematika adalah himpunan. Himpunan adalah suatu daftar, koleksi atau kelas objek-objek yang mempunyai sifat tertentu. Objek dalam suatu himpunan dapat berupa bilangan, orang, kota dan sebagainya yang disebut *anggota* himpunan tersebut. Sifat tertentu di atas cukup untuk dapat membedakan apakah suatu objek itu merupakan anggota himpunan tersebut atau bukan.

Pada umumnya himpunan ditulis dengan huruf besar:

$$A, B, C, X, Y, \ldots$$

sedangkan objek ditulis dengan huruf kecil:

$$a, b, c, x, y, \ldots$$

Himpunan dapat disajikan dengan cara mendaftarkan anggota-anggotanya atau dengan cara menyatakan sifat anggota-anggotanya dan ditulis di antara tanda kurung, $\{\ldots\}$.

Contoh 1.1 : A adalah himpunan bilangan 1, 3, 5, 7 dan 9 ditulis $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Contoh 1.2 : B adalah himpunan semua bilangan genap, ditulis $B = \{x \mid x \text{ bilangan genap}\}$. Perhatikan bahwa garis tegak '$\mid$' dibaca 'di mana'.

Contoh 1.3 : C adalah himpunan penyelesaian persamaan $x^2 - 3x + 2 = 0$, ditulis $C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Contoh 1.4 : D adalah himpunan mahasiswa: *Budi*, *Wati*, *Iwan* dan *Retno*. ditulis $D = \{Budi, Wati, Iwan, Retno\}$.

Contoh 1.5 : K adalah himpunan ibu kota daerah tingkat satu di pulau Jawa, ditulis

$$K = \{Jakarta,\ Serang,\ Bandung,\ Semarang,\ Yogyakarta,\ Surabaya\}.$$

Contoh 1.6 : P adalah himpunan bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$ ditulis

$$P = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Contoh 1.7 : H adalah himpunan huruf 'a', ditulis $H = \{a\}$.

Jika x anggota A maka ditulis $x \in A$ dan jika x bukan anggota A maka ditulis $x \notin A$. Pada Contoh 1.1 dan Contoh 1.2 di atas, $5 \in A$, $10 \notin A$, $4 \in B$, $5 \notin B$. Sedangkan pada Contoh 1.3 di atas, karena $(1)^2 - 3(1) + 2 = 0$ maka $1 \in C$. Tetapi $6 \notin C$ sebab $(6)^2 - 3(6) + 2 \neq 0$.

Himpunan dapat berhingga atau tak berhingga. Suatu himpunan dikatakan *berhingga* jika banyak anggota-anggotanya berhingga. Di luar keadaan ini himpunan dikatakan tak berhingga.

Contoh 1.8 : M adalah himpunan hari-hari dalam satu minggu. Maka M berhingga.

Contoh 1.9 : $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ adalah tak berhingga.

Contoh 1.10 : $T = \left\{x \middle| (-1)^n \text{ dan } n \text{ bulat}\right\}$ adalah berhingga sebab banyaknya anggota T adalah dua, yaitu 1 dan -1.

Definisi 1.1: Himpunan A dikatakan *sama* dengan himpunan B dan ditulis $A = B$ jika setiap anggota himpunan A juga merupakan anggota himpunan B dan setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota A

Contoh 1.11: Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 1, 2\}$. Maka $A = B$.

Contoh 1.12 : Misalkan $C = \{x \mid x^2 - 4x = 5\}$, $D = \{y \mid (y+1)(y-5) = 0\}$ dan $E = \{-1, 5\}$.
Maka $C = D = E$.

Anda harus dapat membedakan antara himpunan dan anggota himpunan. Jika $A = \{a\}$ maka $a \in A$. Jadi $\{a\} \neq a$.

Definisi 1.2 : Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota, ditulis dengan $\varnothing$ atau { }.

Contoh 1.13 : Himpunan orang-orang yang berusia lebih dari 1000 tahun adalah himpunan kosong.

Contoh 1.14 : $G = \{x \mid x^2 = 9 \text{ dan } x \text{ genap}\}$. Maka $G = \varnothing$.

Definisi 1.3 : Himpunan A disebut himpunan bagian dari himpunan B ditulis $A \subset B$, jika setiap anggota A juga merupakan anggota B. $A \subset B$ dibaca juga '*A* termuat dalam *B*'.

Jika A himpunan bagian dari B maka ditulis juga $B \supset A$, dan dibaca '*B* memuat *A*'. Selanjutnya, ditulis $A \not\subset B$ atau $B \not\supset A$, jika A bukan himpunan bagian dari B.

Contoh 1.15 : $K = \{1, 2, 5\}$ adalah himpunan bagian dari $L = \{5, 4, 3, 2, 1\}$. Jadi $K \subset L$.

Contoh 1.16 : $D = \{5, 10, 15\}$ adalah himpunan bagian dari $T = \{15, 10, 5\}$. Jadi $D \subset T$.

Contoh 1.17 : Misalkan $A = \{x \mid x \text{ bilangan bulat}\}$,
$B = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$ dan
$C = \{y \mid y \text{ genap}\}$. Maka $B \subset A$, $B \subset C$ dan $C \subset A$.

Dengan Definisi 1.3 maka kesamaan dua himpunan yang diberikan dalam Definisi 1.1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 1.4 : Dua himpunan A dan B adalah sama, yaitu $A = B$ jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Catatan : 1. Himpunan $\varnothing$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.
2. Jika A bukan himpunan bagian dari B, yaitu $A \not\subset B$ maka terdapat paling sedikit satu anggota A yang bukan anggota B.

Himpunan D disebut *himpunan bagian sejati* dari A, jika D himpunan bagian dari A dan D tidak sama dengan A. Jadi, D adalah himpunan bagian sejati dari A, jika $D \subset A$ dan $D \neq A$. Jika $C = A$ maka $C \subset A$ dan C disebut *himpunan bagian tak sejati* dari A.

Contoh 1.18 : Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c\}$ dan $C = \{b, d, c, a\}$. Maka B adalah himpunan bagian sejati dari A tetapi C bukan himpunan bagian sejati dari A.

Teorema 1.1: Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$.

***Bukti* :** Misalkan $x \in A$ dan misalkan $A \subset B$ dan $B \subset C$. Karena $A \subset B$ maka $x \in B$ dan karena $B \subset C$ maka $x \in C$. Jadi $A \subset C$.

Kadang-kadang anggota suatu himpunan merupakan himpunan-himpunan juga, seperti himpunan semua himpunan bagian dari A. Untuk menghindari penamaan 'himpunan dari himpunan' biasanya himpunan semacam ini disebut *keluarga himpunan* atau *kelas himpunan*, dan ditulis dengan lambang-lambang $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}, \mathcal{K}, \mathcal{H}, \ldots$ dan sebagainya.

Contoh 1.19 : Keluarga himpunan-himpunan $\mathcal{A} = \{\{1, 5\}, \{5\}, \{7, 8\}\}$.

Anggota-anggotanya adalah himpunan-himpunan $\{1, 5\}$,$\{5\}$, dan $\{7, 8\}$.

Kadang-kadang juga anggota-anggota suatu himpunan terdiri dari himpunan dan bukan himpunan. Namun, di dalam praktik himpunan semacam ini jarang sekali dijumpai.

Contoh 1.20 : Misalkan $B=\{a,\{a,b,c\}\}$ dan $A=\{3,\{4\},\{9,10\}\}$. B dan A bukan keluarga himpunan, sebab terdapat anggota B dan anggota A yang bukan himpunan.

Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang dibicarakan akan merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan tertentu. Himpunan ini disebut *himpunan semesta* atau *semesta pembicaraan* dan ditulis dengan S atau U.

Contoh 1.21 : Dalam pembicaraan tentang bilangan bulat, himpunan semesta adalah himpunan semua bilangan bulat.

Keluarga semua himpunan bagian dari suatu himpunan A disebut *himpunan kuasa* A dan ditulis dengan 2^A.

Contoh 1.22 : Misalkan $A = \{a, b\}$. Maka $2^A=\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$.

Contoh 1.23 : Misalkan $B = \{5, 6, 7\}$. Maka
$$2^B=\{B, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}, \{5\},\{6\}, \{7\}, \varnothing\}.$$

Jika himpunan A berhingga, katakanlah A mempunyai n anggota maka himpunan kuasa A mempunyai 2^n anggota. Inilah alasannya mengapa himpunan kuasa A, ditulis 2^A.

Jika himpunan-himpunan A dan B tidak mempunyai anggota berserikat, yaitu jika tidak terdapat anggota A yang menjadi anggota B dan tidak terdapat anggota B yang menjadi anggota A maka dikatakan bahwa A dan B *saling asing*.

Contoh 1.24 : Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{7, 9\}$. Maka A dan B *saling asing*.

Contoh 1.25 : $P = \{x | x \text{ positif}\}$ dan $Q = \{x | x \text{ negatif}\}$ adalah *saling asing*.

Contoh 1.26 : Misalkan $C = \{x | x^2 = 4\}$ dan $D = \{1,\ 2,\ 5\}$. Maka C dan D *tidak saling asing*, sebab $2 \in C$ dan $2 \in D$.

Misalkan ditentukan himpunan A dan B. Himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ disebut *produk Cartesius* dari A dan B, dan ditulis dengan lambang $A \times B$.

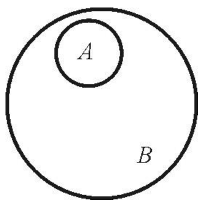
Jadi: $A \times B = \{(a, b) | a \in A,\ b \in B\}$.

Contoh 1.27 : Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{c, d, e\}$. Maka produk Cartesius dari A dan B adalah

$$A \times B = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}.$$

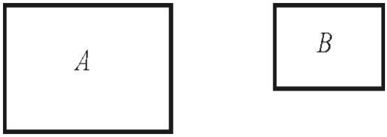
Suatu cara sederhana untuk menggambarkan hubungan di antara himpunan-himpunan ialah dengan menggunakan *diagram Venn Euler* atau secara singkat *diagram Venn*. Suatu himpunan digambarkan sebagai suatu luasan bidang dari bangun sederhana, seperti bidang lingkaran, bidang persegi panjang.

Contoh 1.28 : Andaikan $A \subset B$ dan $A \neq B$. Maka A dan B dapat digambarkan seperti Gambar 1.1



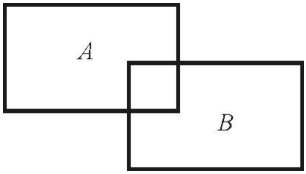
Gambar 1.1

Contoh 1.29 : Jika A dan B saling asing maka A dan B digambarkan sebagai berikut:



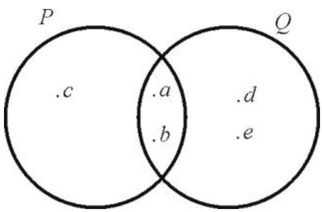
Gambar 1.2

Contoh 1.30 : Jika $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ dan A dan B tidak saling asing maka A dan B dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.3

Contoh 1.31 : Misalkan $P = \{a, b, c\}$ dan $Q = \{a, b, d, e\}$. Maka P dan Q dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.4

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tuliskan himpunan-himpunan berikut dalam bentuk daftar.
   a) K adalah himpunan bilangan-bilangan bulat positif kelipatan 3 dan yang tidak lebih besar dari 20.
   b) A adalah himpunan huruf-huruf dalam kata ‘matematika’.
   c) $B = \left\{ x \middle| x^2 - x - 12 = 0 \text{ dan } x \text{ positif} \right\}$.

2) Misalkan $C = \{x | 5x = 10\}$ dan misalkan $a = 2$. Apakah $C = a$?

3) Tentukan semua himpunan bagian dari himpunan $F = \{0, 1, \{1, 2\}\}$. Berapa banyak himpunan bagiankah yang ada ?

4) Misalkan $A = \{1\}$, $B = \{2, 1\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, $D = \{4, 3\}$ dan $E = \{1, 3, 4\}$.
Tentukan masing-masing pernyataan berikut, benar ataukah salah!
   a) $D \subset C$
   b) $B \not\supset A$
   c) $C \neq E$
   d) $E \supset A$
   e) $E \supset C$
   f) $A \not\subset D$
   g) $A \subset C$
   h) $B \subset C$
   i) $E \supset B$
   j) $C \subset E$

5) Manakah di antara himpunan-himpunan berikut adalah himpunan kosong?
   a) $N = \{x | x^2 = 25 \text{ dan } 3x = 12\}$
   b) $L = \{x | 8x = 8\}$
   c) $M = \{x | x \neq x\}$
   d) $K = \{\varnothing\}$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $K = \{6, 9, 12, 15, 18\}$
   b) $A = \{\text{m, a, t, e, i, k}\}$
   c) $B = \{4\}$

2) tidak, karena $c = \{2\}$ dan a bukan suatu himpunan

3) 2^3, karena $\{1, 2\} \in F$ dan $2 \notin F$

4) Gunakan
   a) benar
   b) salah
   c) benar
   d) benar
   e) salah
   f) benar
   g) salah
   h) salah
   i) salah
   j) salah

5) N, M dan K

RANGKUMAN

1. Pengertian-pengertian dalam Kegiatan Belajar 1: himpunan, anggota himpunan, himpunan berhingga, kesamaan himpunan, himpunan kosong, himpunan bagian, himpunan bagian sejati, himpunan bagian tak sejati, himpunan semesta, himpunan kuasa, saling asing.
2. Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan $M = \{r, s, t\}$ dan $N = \{p, t\}$ maka ....
   A. $\{t\} \in M$
   B. $N \subset M$
   C. M dan N tidak saling asing
   D. $p \notin N$

2) Himpunan $K = \left\{ x \middle| 2x^2 + x - 1 = 0 \right\}$ sama dengan ....
   A. $\varnothing$
   B. $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$
   C. $\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$
   D. $\{-1\}$

3) Jika $G = \{1, 2, 3, ...\}$ dan $H = \{5, 10, 15, ...\}$, maka ....
   A. $G \subset H$
   B. $H \subset G$
   C. $G \not\supset H$
   D. G dan H saling asing

4) Himpunan kuasa dari $A = \{2, \{2, 4\}, 4\}$ mempunyai anggota sebanyak ....
   A. 4
   B. 16
   C. 32
   D. 8

5) Jika $E \subset F$, $F \subset G$, $G \subset H$ dan $H \subset E$, maka ....
   A. $F = H$
   B. $G \not\subset E$
   C. $E \neq H$
   D. $E \not\subset H$

Untuk soal nomor 6) – 10)
Pilihlah:
   A. Jika (1) dan (2) benar.
   B. Jika (1) dan (3) benar.
   C. Jika (2) dan (3) benar.
   D. Jika (1), (2), dan (3) benar.

6) Misalkan $H = \{r, s, t\}$, $K = \{t, r\}$ dan $L = \{p, s\}$ maka ....
   (1) $K \not\subset H$ dan $L \subset H$
   (2) H dan K tidak saling asing, tetapi $K \subset H$
   (3) $t \in K$ dan $t \in L$

7) Jika $A = \{2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{x \mid x \text{ genap}\}$,
   maka ...
   (1) A berhingga tetapi B tidak berhingga
   (2) $A \not\subset B$
   (3) A dan B tidak saling asing

8) Misalkan $C = \{x \mid x^2 = 1\}$ dan x positif dan $D = \{x \mid 5x = x\}$,
   maka ....
   (1) $C = \{1\}$ dan $D \not\subset C$
   (2) $D \neq \varnothing$
   (3) $1 \in C$ dan $D = \varnothing$

9) Misalkan $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $H = \{3, 4, 5\}$ dan $E = \{3, 5\}$. Jika X suatu himpunan yang memenuhi sifat $X \subset H$ dan $X \not\subset G$ maka ....
(1) X mungkin sama dengan E
(2) $E \subset X$
(3) $X \subset E$

10) Misalkan A adalah sebarang himpunan yang tidak kosong maka ....
(1) $A \subset 2^A$
(2) $\varnothing \not\subset 2^A$
(3) $A \in 2^A$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Operasi Dalam Himpunan

Dalam Ilmu Hitung kita pernah belajar menjumlah, mengurangi, dan mengalikan dua bilangan, yaitu untuk setiap dua bilangan a dan b, bilangan $a + b$ disebut jumlah a dan b, bilangan $a - b$ disebut selisih a dan b, dan bilangan ab disebut hasil kali a dan b. Operasi-operasi di atas disebut penambahan, pengurangan dan pengalian bilangan-bilangan. Dalam pembahasan ini akan didefinisikan operasi-operasi *gabungan*, *irisan* dan *selisih* dari himpunan-himpunan.

Definisi 1.5: *Gabungan* himpunan A dan B adalah himpunan semua objek yang menjadi anggota A dan B atau keduanya, dan ditulis dengan lambang $A \cup B$.

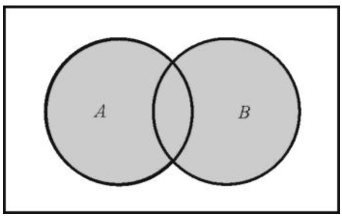
Contoh 1.32 : Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, c, d, e\}$ maka $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

Contoh 1.33 : Misalkan $\mathbb{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan real positif dan $\mathbb{R}^-$ adalah himpunan semua bilangan real negatif. Maka $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ berisi semua bilangan real kecuali *nol*.

Dengan notasi himpunan gabungan A dan B dapat didefinisikan $A \cup B$

$$\text{dengan } A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x | x \in B\} .$$

Dalam diagram Venn, $A \cup B$ adalah daerah yang diarsir dalam Gambar 1.5.



Gambar 1.5.
$A \cup B$ yang diarsir

Dari Definisi 1.5 didapat sifat-sifat sebagai berikut:
Sifat (1.1): $A \cup B = B \cup A$ (hukum komutasi).
Sifat (1.2): $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$.

Definisi 1.6: *Irisan* himpunan A dan B adalah himpunan semua objek yang sekaligus menjadi anggota A dan B, ditulis dengan lambang $A \cap B$.

Contoh 1.34: Misalkan $H = \{0, 5, 10, 15\}$ dan $K = \{1, 5, 8, 15, 17\}$. Maka $H \cap K = \{5, 15\}$.

Contoh 1.35: Misalkan $A = \{4, 8, 12, 16, ...\}$ dan $B = \{1, 5, 9, 13, ...\}$. Maka $A \cap B = \varnothing$

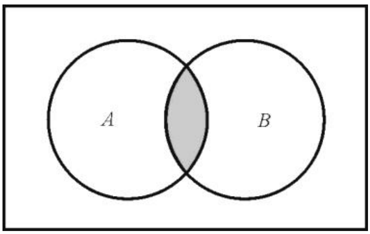
Irisan A dan B dapat juga didefinisikan sebagai:

$$A \cap B = \{x | x \in A,\ x \in B\} \quad \text{atau}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}\ .$$

Dalam diagram Venn, $A \cap B$ adalah daerah yang diarsir dalam Gambar 1.6

Sifat (1.3): $A \cap B = B \cap A$ (hukum komutasi).
Sifat (1.4): $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$.



Gambar 1.6.
$A \cap B$ yang diarsir

Definisi 1.7 : Selisih himpunan A dan B adalah himpunan semua objek yang menjadi anggota A tetapi tidak menjadi anggota B, dan ditulis dengan lambang $A - B$.

Contoh 1.36 : $D = \{2, 4, 5\}$ dan $E = \{1, 2, 3\}$. Maka $D - E = \{4, 5\}$ dan $E - D = \{1, 3\}$.

Contoh 1.37 : Misalkan $F = \{a, b, c, d\}$ dan $G = \{f, b, d, g\}$. Maka $G - F = \{f, g\}$ dan $F - G = \{a, c\}$.

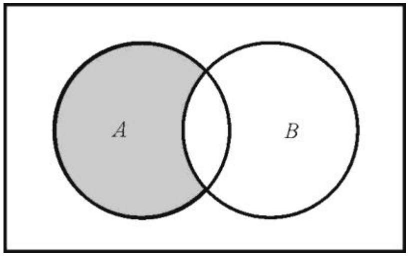
Contoh 1.38 : $A = \left\{ x \middle| x^2 - 1 = 0 \right\}$ dan $B = \{-1, 0, 1\}$, maka $A - B = \varnothing$ dan $B - A = \{0\}$.

Dengan notasi himpunan, $A - B$ dapat didefinisikan sebagai:

$$A - B = \left\{ x \middle| x \in A,\ x \notin B \right\}.$$

Dalam diagram Venn, $A - B$ adalah daerah yang diarsir dalam Gambar 1.7

Sifat (1.5): $(A - B) \subset A$
Sifat (1.6): $A - B$, $A \cap B$ dan $B - A$ adalah saling asing.



Gambar 1.7.
A–*B* yang diarsir

Definisi 1.8 : *Komplemen* himpunan A adalah himpunan semua obyek yang bukan anggota A, yaitu selisih himpunan semesta S dengan himpunan A, ditulis dengan lambang A' atau A^c. Berarti $A' = S - A$.

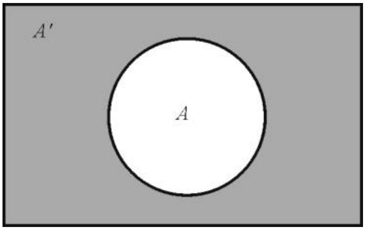
Contoh 1.39: Misalkan himpunan semesta S adalah himpunan semua bilangan bulat positif, dan misalkan $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ maka $A' = \{2, 4, 6, 8, ...\}$.

Contoh 1.40: Misalkan himpunan semesta S adalah $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \left\{ x \middle| x^2 - 5x + 6 = 0 \right\}$. Maka $B' = S$.

Dengan notasi himpunan, A' dapat juga didefinisikan sebagai:

$A' = \left\{ x \middle| x \in S,\ x \notin A \right\}$, atau secara singkat $A' = \left\{ x \middle| x \notin A \right\}$.

Dalam diagram Venn, A' adalah daerah yang diarsir dalam Gambar 1.8. Di sini S adalah daerah di dalam persegi panjang.



Gambar 1.8.
A' yang diarsir

Dari Definisi 1.8 diperoleh sifat-sifat sebagai berikut:

Sifat (1.7): $A \cup A' = S$ (hukum komplemen)

Sifat (1.8): $A \cap A' = \varnothing$ (hukum komplemen)

Sifat (1.9): $(A')' = A$ (hukum komplemen)

Terhadap operasi-operasi gabungan, irisan dan komplemen, aljabar himpunan memenuhi bermacam-macam hukum yang berupa kesamaan-kesamaan, beberapa di antaranya dituliskan dalam sifat-sifat di muka. Bukti-bukti tidak diberikan di sini, tetapi diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

Hukum Idempoten	:	$A \cup A = A \cap A = A$
Hukum Asosiasi	:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
		$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Hukum Komutasi	:	$A \cup B = B \cup A$,
		$A \cap B = B \cap A$
Hukum Distribusi	:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Hukum Identitas	:	$A \cup \varnothing = A$, $A \cap S = A$
		$A \cup S = S$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
Hukum Komplemen	:	$A \cup A' = S$, $A \cap A' = \varnothing$
		$(A')' = A$, $S' = \varnothing$, $\varnothing' = S$

Hukum De Morgan : $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Teorema 1.2: A dan B saling asing jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$

Bukti : Misalkan A dan B saling asing. Maka tidak terdapat anggota A yang menjadi anggota B dan tidak terdapat anggota B yang menjadi anggota A. Jadi tidak terdapat objek yang sekaligus menjadi anggota A dan B, yang berarti $A \cap B = \varnothing$. Maka tidak terdapat objek yang sekaligus berada dalam A dan B. Berarti setiap anggota A bukan anggota B dan setiap anggota B bukan anggota A, yaitu A dan B saling asing.

Teorema 1.2 kadang-kadang dipakai sebagai definisi dua himpunan yang saling asing.

Berikut ini diberikan beberapa teorema tanpa bukti.

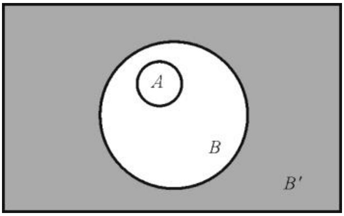
Teorema 1.3 : Jika $A \subset B$ maka $A \cup B = B$

Teorema 1.4 : Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$

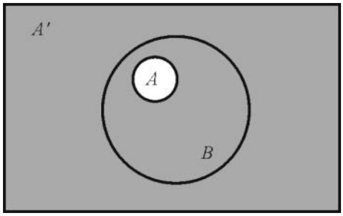
Teorema 1.5 : Jika $A \subset B$ maka $B' \subset A'$

Teorema 1.6 : Jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$

Untuk dapat memahami sifat-sifat, hukum-hukum maupun teorema-teorema, pemakaian diagram Venn sangat membantu. Sebagai contoh kita ambil Teorema 1.5. Jika $A \subset B$ maka B' dan A' terlihat pada daerah yang diarsir dalam Gambar 1.9 dan Gambar 1.10. Tampak bahwa $B' \subset A'$.



Gambar 1.9.
B' yang diarsir



Gambar 1.10.
A' yang diarsir

Perlu diperhatikan bahwa pemakaian diagram Venn seperti pada Gambar 1.9 dan Gambar 1.10 semata-mata hanyalah untuk menjelaskan, tidak dapat dipakai sebagai bukti formal teorema yang bersangkutan.

Contoh 1.41: Misalkan diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{4, 5, 6\}$.
Carilah $(A \cup B) \cup C$, $A \cup (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$ dan $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Jawab:

$(A \cup B) \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cup \{4, 5, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Perhatikan juga hukum asosiasi dan distribusi.

Contoh 1.42: Misalkan himpunan semesta adalah $S = \{a, b, c, d, e\}$ dan $G = \{a,b,c\}$, $H =\{a,c,d\}$, $K = \{c, e\}$. Carilah $(G \cup H)'$, $G' \cap H'$, $(G \cap K)'$, $G' \cup K'$.

Jawab:

$(G \cup H)' = \{a, b, c, d\}' = \{e\}$

$G' \cap H' = \{d, e\} \cap \{b ,e\} = \{e\}$

$(G \cap K)' = \{c\}' = \{a, b, d, e\}$

$G' \cup K' = \{d, e\} \cup \{a, b, d\} = \{d, e, a, b\}$

Perhatikan juga hukum De Morgan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan himpunan semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan misalkan $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 6, 7\}$ dan $C = \{2, 4, 7\}$. Carilah:

a) $A \cup B$
b) $B \cap C$
c) A'
d) $B - A$
e) $C' \cup A$
f) $A \cap B'$
g) $(A - C)'$
h) $(B' \cap C)'$
i) $(A \cup C)'$

2) Buktikan bahwa $A - B = A \cap B'$

3) Gambarkan dalam diagram Venn himpunan-himpunan berikut!

a) $(A \cap B') \cup C$
b) $(A' \cup B) \cap C'$
c) $B - (A' \cap C)$
d) $A' \cap B' \cap C$
e) $(A \cup B') - C$
f) $(A - C) \cap B'$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

b) $B \cap C = \{7\}$

c) $A' = \{4,\ 5,\ 7\}$

d) $B - A = \{7\}$

e) $C' \cup A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

f) $A \cap B' = \{2\}$

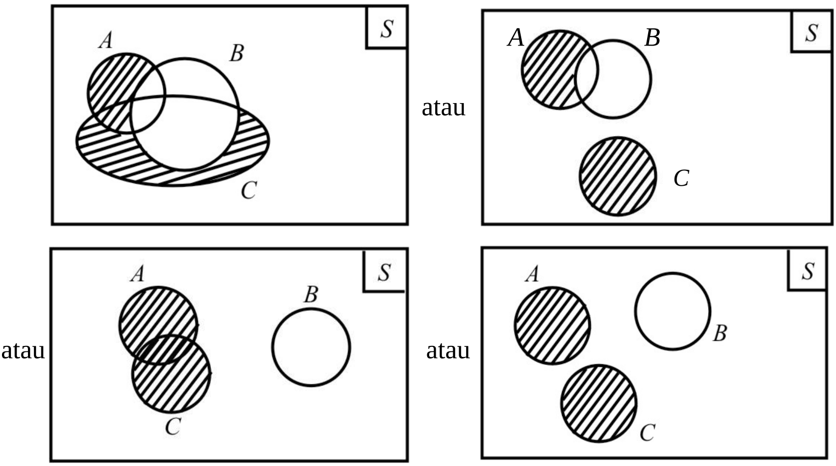
g) $(A - C)' = \{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$

h) $(B' \cap C)' = \{1, 3, 5, 6, 7\}$

i) $(A \cup C)' = \{5\}$

2)
$$\begin{aligned} A - B &= \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B'\} \\ &= A \cap B' \end{aligned}$$

3) Untuk latihan nomor 3) ini akan diberikan jawaban untuk bagian a dan untuk b sampai dengan f dikerjakan sendiri.
Jawaban soal tidak tunggal, dengan kata lain, jawaban yang benar dapat lebih dari satu tergantung situasi dari himpunan *A*, *B* dan *C*.



Keempat diagram Venn di atas menunjukkan $(A \cap B') \cup C$.

RANGKUMAN

1. Pengertian-pengertian dalam Kegiatan Belajar 2:
   a. Gabungan dua himpunan,
   b. Irisan dua himpunan,
   c. Selisih dua himpunan,
   d. Komplemen suatu himpunan.
2. Hukum-hukum dan teorema-teorema:
   a. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
   b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   c. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
   d. $A \cup (B \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathrm{C})$, $A \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathrm{C})$
   e. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup S = S$
   $A \cap S = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
   f. $A \cup A' = S$, $A \cap A' = \varnothing$
   $(A')' = A$, $S' = \varnothing$, $\varnothing' = S$
   g. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $(A \cap B)' = A' \cup B'$
   h. A dan B saling asing jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$
   i. Jika $A \subset B$ maka $A \cup B = B$
   j. Jika $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ maka $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$
   k. Jika $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ maka $\mathrm{B}' \subset \mathrm{A}'$
   l. Jika $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ maka $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \mathrm{B}$
   m. $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}'$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

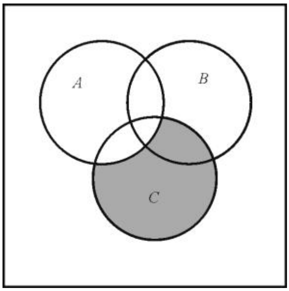
1) Misalkan $A = \{a, b, e\}$ dan $B = \{b, a, p\}$, maka $(A \cup B) - A =$ ....
   A. $\{a, b\}$
   B. $\{e\}$
   C. $\{p\}$
   D. $\{a, b, e, p\}$

2) Jika $H = \{2,4,5\}$, $K = \{1,4,7\}$ dan $L = \{7,5,1\}$ maka $(H - K) \cap L =$ ....
   A. $\{1, 0, -2, 7, 5\}$
   B. $\{2, 5, 7, 1\}$

C. {1}
D. {5}

3) Misalkan himpunan semesta adalah himpunan semua bilangan asli $N = \{1, 2, 3, 4\}$ dan misalkan $D = \{x | x \text{ kelipatan } 5\}$ dan $E = \{x | x \text{ kelipatan } 10\}$. Maka $D \cap E' = \ldots.$
A. $\{x | x \text{ kelipatan } 5,\ x \text{ ganjil}\}$
B. $\{x | x \text{ kelipatan } 5,\ x \text{ genap}\}$
C. $\{x | x \text{ kelipatan } 50\}$
D. $\{x | x \text{ kelipatan } 2\}$

4) Pada gambar di samping (Gambar 1.11), daerah yang diarsir adalah ....
A. $A \cap C'$
B. $A' \cap C$
C. $A - C$
D. $B' \cap (C - A)$



Gambar 1.11

5) Misalkan $P = \{Retno, Bayu, Rani, Erna\}$, $Q = \{Retno, Dian, Bimo\}$ dan $R = \{Bayu, Bimo\}$, maka $P' \cap (Q \cup R) = ...$
A. {Retno, Dian, Bayu}
B. {Retno, Bayu, Rani, Erna, Bimo}
C. {Bimo}
D. {Dian, Bimo}

6) $G \cup (H - K) = ...$
A. $(G \cup H) - K$
B. $(G \cup H) - K'$
C. $(G \cup H) \cap (G \cup K')$
D. $(G \cup H) \cup K'$

7) Jika $E=\left\{x\middle|(x-1)^2=0\right\}$, $F=\left\{x\middle|x^2=1\right\}$ dan $G=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\}$.
Maka $(E \cap F') \cup G =$ ....
A. {1, –1, 2}
B. {–1, 2}
C. {–1}
D. {1, 2}

8) Jika $A' \subset B$ maka $A' \cup (B \cap A) =$ ….
A. A'
B. B
C. $\varnothing$
D. S

9) Misalkan $P = \{c, \{a, b\}, a, d\}$ dan $Q = \{\{a, b\}\}$. Maka $P \cap Q' =$ ....
A. $\{a\}$
B. $\{c, a, d\}$
C. $\{c, \{a, b\}, d\}$
D. $\{a, b\}$

10) Jika $D=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ dan $E = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ maka
$E - D =$ ....
A. $\left\{0,\ 2-\frac{1}{2},\ 3-\frac{1}{3},\ 4-\frac{1}{4}, \ldots\right\}$
B. {0, 2, 3, 4, . . .}
C. {1}
D. {2, 3, 4, 5, . . .}

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100%	= baik sekali
	80 - 89%	= baik
	70 - 79%	= cukup
	< 70%	= kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 3

Sistem Bilangan Real

Dalam analisis, himpunan-himpunan yang diperhatikan adalah himpunan bilangan real. Himpunan semua bilangan real ditulis dengan lambang $\mathbb{R}$. Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dengan dua operasi *penambahan* dan *pengalian* memenuhi hukum-hukum sebagai berikut:

Hukum 1.1 : Jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka terdapat dengan tunggal bilangan real c dan d sedemikian hingga $a + b = c$ dan $ab = d$.

Hukum 1.2 : Jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka $a + b = b + a$ dan $ab = ba$.

Hukum 1.3 : Jika $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a\,(bc) = (ab)\,c$.

Hukum 1.4 : Jika $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka $a\,(b + c) = ab + ac$.

Hukum 1.5 : Terdapat dua bilangan real 0 dan 1 sedemikian hingga untuk setiap bilangan real a, $a + 0 = a$ dan $a\,.1 = a$

Hukum 1.6 : Untuk setiap bilangan real a, terdapat suatu bilangan real b sedemikian hingga $a + b = 0$. Bilangan b ditulis dengan lambang $-a$

Hukum 1.7 : Untuk setiap bilangan real a, kecuali 0 terdapat suatu bilangan real c sedemikian hingga $a.c = 1$. Bilangan c ditulis dengan lambang a^{-1} atau $1/a$.

Ketujuh buah sifat di atas disebut *aksioma-aksioma field*. Pengurangan dari a dengan b ditulis $a - b$ dimaksudkan $a + (-b)$.

Pembagian a dengan b, $b \neq 0$, ditulis a/b atau $\frac{a}{b}$, dimaksudkan $a.\ 1/b$, atau $a.\frac{1}{b}$.

Hukum 1.8 (Aksioma Urutan):

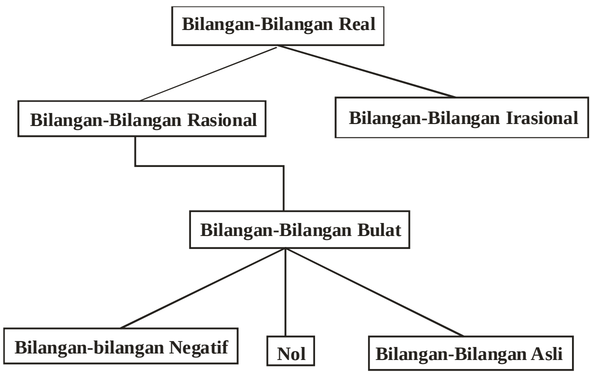
a. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, berlaku tepat satu di antara tiga pernyataan berikut: $a = 0$, a positif atau $-a$ positif,
b. Jumlah dua bilangan positif adalah positif,
c. Hasil kali dua bilangan positif adalah positif.

Hukum 1.9: Bilangan real a dikatakan negatif jika $-a$ positif.

Bilangan-bilangan 1,2,3,4, ... disebut bilangan-bilangan asli. Himpunan semua bilangan asli ditulis $\mathbb{N}$. Bilangan-bilangan ... –3, –2, –1, 0, 1,2,3, ... disebut bilangan *bulat*. Himpunan semua bilangan bulat ditulis dengan $\mathbb{Z}$.

Bilangan-bilangan real yang dapat ditulis dalam bentuk p/q dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$ disebut bilangan *rasional* atau *terukur*. Himpunan semua bilangan rasional ditulis dengan $\mathbb{Q}$. Bilangan-bilangan real yang bukan bilangan rasional disebut bilangan *irasional* atau *tak terukur*.

Pembagian jenis-jenis bilangan real di atas dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Definisi 1.9 : a dikatakan *lebih kecil* daripada b dan ditulis $a < b$, jika $b - a$ positif.

Definisi 1.10: a dikatakan *lebih besar* daripada b dan ditulis $a > b$, jika b lebih kecil daripada a. Jadi $a > b$ jika dan hanya jika $b < a$. Tanda $\leq$ dimaksud 'lebih kecil atau sama dengan'. Dan tanda $\geq$ dimaksud 'lebih besar atau sama dengan'.

Keempat buah tanda <, ≤, >, ≥ disebut tanda ketidaksamaan. *Ketidaksamaan* adalah pernyataan tentang bilangan-bilangan yang memuat tanda <, ≤, >, atau ≥. *Pertidaksamaan* adalah ketidaksamaan yang memuat variabel.

Contoh 1.43 : $2 < 6$, sebab $6 - 2 = 4$, positif
$-10 < -3$, sebab $-3 - (-10) = 7$, positif
$-5 < 12$, sebab $12 - (-5) = 17$, positif

Contoh 1.44: Pernyataan-pernyataan $3x < 12$, $2y^2 + 1 \geq 9$, $\frac{1}{t-3} \leq 2$, adalah merupakan pertidaksamaan-pertidaksamaan.

Suatu pertidaksamaan mungkin bernilai benar, maksudnya merupakan pernyataan yang benar, dan mungkin bernilai salah, yaitu merupakan pernyataan yang salah. Hal ini tergantung pada nilai variabel yang diberikan. Sebagai contoh dalam pertidaksamaan $3x < 12$. Jika diberikan nilai $x = 1$ maka $3 < 12$, benar. Tetapi jika diberikan nilai $x = 5$ maka $15 < 12$, adalah salah. Penyelesaian suatu pertidaksamaan yang memuat variabel x adalah himpunan semua nilai-nilai x sedemikian hingga pertidaksamaan tersebut bernilai benar.

Sifat-sifat ketidaksamaan:

1.10. $a > 0$ jika dan hanya jika a positif,
$a < 0$ jika dan hanya jika a negatif,
$a > 0$ jika dan hanya jika $-a < 0$,
$a < 0$ jika dan hanya jika $-a > 0$.

1.11. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.

1.12. Jika $a < b$ maka $a + c < b + c$ untuk setiap c.

1.13 Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$.

1.14 Jika $a < b$ dan c positif maka $ac < bc$.

1.15 Jika $a < b$ dan c negatif maka $ac > bc$.

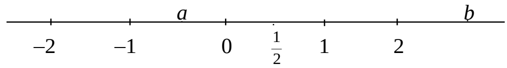
1.16. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$ *maka* $ac < bd$.

Dengan mengingat Definisi 1.9 dan Definisi 1.10 maka semua tanda < dalam sifat-sifat di atas boleh diganti dengan tanda >, dan tanda > dapat diganti dengan tanda <. Sebagai contoh misalnya dari sifat 1.15, akan didapat jika $a > b$ dan c negatif maka $ac < bc$.

Hukum 1.10 ***(Aksioma kelengkapan)*** **:** Setiap himpunan bilangan real yang mempunyai batas bawah, mempunyai batas bawah terbesar. Juga setiap himpunan bilangan real yang mempunyai batas atas, mempunyai batas atas terkecil.

Suatu himpunan bilangan real E dikatakan mempunyai batas bawah jika terdapat bilangan $a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \leq x$ untuk setiap $x \in E$; dan dikatakan mempunyai batas atas jika terdapat bilangan $b \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $x \leq b$ untuk setiap $x \in E$.

Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dengan *aksioma-aksioma field, aksioma urutan* dan *aksioma kelengkapan*, secara lengkap mendeskripsikan *sistem bilangan real*. Suatu sifat penting dalam sistem bilangan real ialah bahwa setiap bilangan real dapat digambarkan dengan tepat satu titik pada suatu garis lurus yang disebut garis bilangan. Sebaliknya, setiap titik pada garis ini menggambarkan atau mewakili suatu bilangan real tertentu sehingga suatu bilangan a dapat dan sering disebut titik a. Pada garis bilangan dipilih satu titik 0 yang disebut titik awal untuk menunjukkan bilangan nol. Kemudian, tetapkan satuan skala. Selanjutnya setiap bilangan real positif x ditunjukkan oleh suatu titik sejauh x di sebelah kanan 0 dan setiap bilangan real negatif x ditunjukkan oleh suatu titik sejauh $-x$ di sebelah kiri 0. Jika $a < b$ maka a di sebelah kiri b.



Gambar 1.12

Definisi 1.11 : *Selang terbuka* dari a ke b, ditulis (a, b), didefinisikan dengan: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

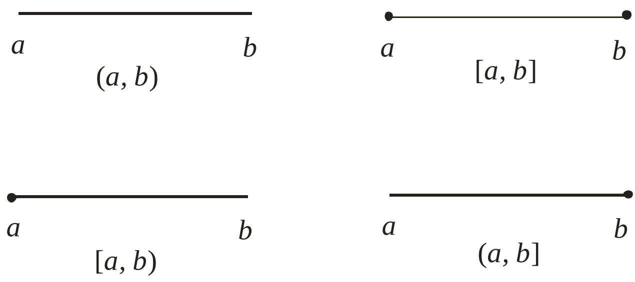
Definisi 1.12 : *Selang tertutup* dari a ke b, ditulis $[a, b]$, didefinisikan dengan: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

Di samping selang terbuka dan selang tertutup, terdapat *selang tidak terbuka* dan *tidak tertutup* yang sering disebut *selang setengah terbuka* atau *setengah tertutup*, yaitu $[a, b)$ dan $(a, b]$.

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b]. = \{x \mid a < x \leq b\}$$

Selang (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ dan $(a, b]$ akan dilukiskan seperti dalam Gambar 1.13.



Gambar 1.13

Selang-selang di atas adalah *terbatas*. Selang-selang yang *tak terbatas* adalah:

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \le a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \ge a\}$$

Contoh 1.45 : Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $1 + 4x < 2x + 9$.

Jawab:

$$1 + 4x < 2x + 9.$$

$$1 + 4x - 1 < 2x + 9 - 1 \qquad \text{(dengan sifat (1.12))}$$

$$4x < 2x + 8$$

$$4x - 2x < 2x + 8 - 2x \qquad \text{(dengan sifat (1.12))}$$

$$2x < 8$$

$$x < 4 \qquad \text{(dengan sifat (1.14))}$$

Himpunan penyelesaian $1 + 4x < 2x + 9$ adalah $\{x \mid x < 4\}$

Contoh 1.46 : Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $1 \le 5 - 3x < 11$.

Jawab:

Setiap ruas ditambah -5, didapat $-4 \le -3x < 6$.

Selanjutnya kalikan dengan $-\frac{1}{3}$, diperoleh $\frac{4}{3} \ge x > -2$.

Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah:

$$\left\{x \,\middle|\, -2 < x \le \frac{4}{3}\right\}$$

Contoh 1.47 : Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{2x}{-x+1} < 8.$$

Jawab:

Kasus 1 **:** $-x + 1 > 0$, yaitu $x < 1$.

Kalikan kedua ruas dengan $-x + 1$, didapat

$$2x < -8x + 8$$

$$10x < 8, \quad x < \frac{4}{5}.$$

Karena x juga harus memenuhi $x < 1$ maka himpunan penyelesaian pada kasus 1 adalah:

$$\{x \mid x < 1\} \cap \left\{x \middle| x < \frac{4}{5}\right\} = \left\{x \middle| x < \frac{4}{5}\right\}.$$

Kasus 2 **:** $-x + 1 < 0$, yaitu $x > 1$.

Kalikan kedua ruas dengan $-x + 1$, didapat:

$$2x > -8 + 8$$

$$10x > 8, \quad x > \frac{4}{5}.$$

Karena x juga harus memenuhi $x > 1$ maka penyelesaian kasus 2 adalah:

$$\{x \mid x > 1\} \cap \left\{x \middle| x > \frac{4}{5}\right\} = \{x \mid x > 1\}.$$

Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\dfrac{2x}{-x+1} < 8$ adalah $\left\{x \middle| x < \frac{4}{5}\right\} \cup \{x \mid x > 1\}$ yaitu $\left\{x \middle| x < \frac{4}{5} \text{ atau } x > 1\right\}$.

Contoh 1.48 : Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(x - 1)(x + 5) \geq 0$.

Jawab:

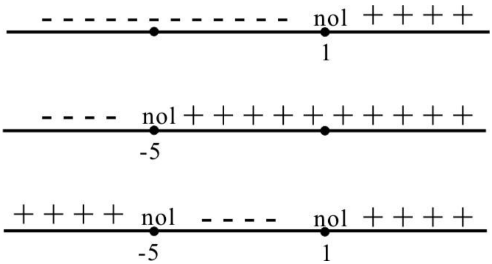
Kasus 1**:** $(x - 1) \geq 0$ dan $(x + 5) \geq 0$.

Jadi $x \geq 1$ dan $x \geq -5$. Kedua pertidaksamaan ini dipenuhi jika $x \geq 1$.

***Kasus 2*:** $(x - 1) \le 0$ dan $x + 5 \le 0$. Maka $x \le 1$ dan $x \le -5$, yaitu $x \le -5$.

Jadi himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(x - 1)(x + 5) \ge 0$ adalah: $\{x | x \ge 1\} \cup \{x | x \le -5\}$, yaitu $\{x | x \ge 1 \text{ atau } x \le -5\}$.

Cara lain untuk menyelesaikan soal Contoh 1.48 yaitu dengan melihat tanda dari masing-masing faktor, $(x - 1)$ dan $(x + 5)$. Tanda dari hasil kali $(x - 1)(x + 5)$ didapat berdasarkan tanda dari kedua faktor tersebut.



Gambar 1.14

Jadi penyelesaian $(x - 1)(x + 5) \ge 0$ adalah: $\{x \mid x \le -5 \text{ atau } x \ge 1\}$

Cara demikian ini lebih mudah dipakai jika ruas kiri pertidaksamaan terurai atas faktor-faktor linear yang lebih dari dua faktor, sedangkan ruas kanan nol.

Definisi 1.13 : Nilai mutlak suatu bilangan real x ditulis dengan tanda $|x|$, didefinisikan sebagai: $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \ge 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Jadi $|5| = 5$, $|-8| = -(-8) = 8$.

Sifat-sifat nilai mutlak:

1.17. $|a| \geq a$, $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$

1.18 $|ab| = |a| . |b|$

1.19 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

1.20 $|a + b| \leq |a| + |b|$

1.21 $|a - b| \geq |a| - |b|$, $|a - b| \geq - |a| + |b|$

Sifat (1.20) dan (1.21) disebut ketidaksamaan segitiga.

Teorema 1.7 : Jika $a > 0$, maka:

1. $|x| < a$ jika dan hanya jika $- a < x < a$.
2. $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $- a \leq x \leq a$.
3. $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < - a$.
4. $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq - a$.

Bukti bagian pertama: misalkan $|x| < a$, $a > 0$.

Kasus 1 : $x \geq 0$. Maka $x \leq |x| < a$. Karena $a > 0$ maka $- a < 0 \leq x$.

Jadi $- a < x < a$.

Kasus 2 : $x < 0$. Maka $|x| = -x$. Jadi $-x < a$. Karena $x < 0$ maka $0 < - x$.

Jadi $- a < 0 < -x < a$, atau $a > x > - a$.

Untuk sebaliknya misalkan: $- a < x < a$.

Kasus 1 : $x \geq 0$. Maka $|x| = x$. Jadi $|x| < a$.

Kasus 2 : $x < 0$. Maka $|x| = - x$. Karena $-a < x$ maka $a > - x$.

Jadi $|x| < a$.

Bukti bagian lain diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

Contoh 1.49 : Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|x-5| \geq 4$.

Jawab:

Dari Teorema 1.7(4) maka $x-5 \geq 4$ atau $x-5 \leq -4$. Jadi $x \geq 9$ atau $x \leq 1$,

Dan himpunan penyelesaiannya adalah:

$\{x \mid x \geq 9 \text{ atau } x \leq 1\}$

Contoh 1.50 : Jika $|x-3| < 2$ maka $|x+2| < 7$. Buktikanlah.

Bukti:

Cara 1: Dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga, sebagai berikut:

Jika $|x-3| < 2$,

maka

$$|x+2| = |x-3+5| \leq |x-3| + |5| < 2+5 = 7.$$

Sehingga $|x+2| < 7$.

Cara 2: Jika $|x-3| < 2$,

Maka,

$$-2 < x-3 < 2,$$

$$-2+5 < x-3+5 < 2+5,$$

$$3 < x+2 < 7,$$

$$3 < x+2 < 7,$$

$-7 < x+2 < 7$, dan ini berarti $|x+2| < 7$.

Contoh 1.51: Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan:

$$\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| < 4$$

Jawab:

Dari Teorema 1.7, maka:

$$-4 < \frac{3-2x}{2+x} < 4.$$

***Kasus 1* :** $2 + x > 0$, yaitu $x > -2$.

Maka,

$-4(2 + x) < 3 - 2x < 4(2 + x)$,

$-8 - 4x < 3 - 2x$ dan $3 - 2x < 8 + 4x$,

$-2x < 11$ dan $-6x < 5$,

$x > -\frac{11}{2}$ dan $x > -\frac{5}{6}$

Penyelesaian dari Kasus 1: $x > -\frac{5}{6}$.

***Kasus 2*:** $2 + x < 0$, yaitu $x < -2$.

Maka,

$-4(2 + x) > 3 - 2x > 4(2 + x)$,

$-8 - 4x > 3 - 2x$ dan $3 - 2x > 8 + 4x$,

$-2x > 11$ dan $-6x > 5$, $x < -\frac{11}{2}$ dan $x < -\frac{5}{6}$

Penyelesaian dari Kasus 2: $x < -\frac{11}{2}$.

Jadi himpunan penyelesaian $\left|(3-2x)/(2+x)\right| < 4$ adalah:

$$\left\{x \middle| x > -\frac{5}{6}\right\} \cup \left\{x \middle| x < -\frac{11}{2}\right\}.$$

Dalam matematika sering dijumpai pernyataan-pernyataan yang menyangkut bilangan-bilangan asli. Pernyataan-pernyataan yang dimaksud misalnya:

1. $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$.
2. $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \; b^i; \quad \text{yang mana } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad 0! = 1$$

   $n!$ dibaca: n faktorial, dan $n! = (1)\,(2)\,(3) \ldots (n-1)\,(n)$.

   Rumus ini disebut *Binomium Newton*.

3. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Pernyataan seperti di atas dapat dibuktikan dengan aksioma induksi atau induksi matematis, yang merupakan aksioma ketiga dari aksioma peano sebagai berikut:

Hukum 1.11: ***Aksioma Peano***

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli:

1. Jika $x \in \mathbb{N}$, maka $x + 1 \neq 1$.
2. Jika $x, y \in \mathbb{N}$ dan $x \neq y$, maka $x + 1 \neq y + 1$.
3. Jika himpunan K memenuhi:

$$\left.\begin{array}{l} a.\ K \subset \mathbb{N} \\ b.\ 1 \in K \\ c.\ \text{Jika } k \in K, \text{ maka } k+1 \in K \end{array}\right\} \text{maka } K = \mathbb{N}.$$

Sebagai contoh, akan dibuktikan pernyataan:

$$P: \; 1 + 3 + 5 + \; . \; . \; . + (2n - 1) = n^2.$$

Misalkan K adalah himpunan bilangan asli yang memenuhi pernyataan tersebut. Maka $1 \in K$, sebab $1 = 1^2$. Andaikan $k \in K$. Dari pengandaian ini akan diperlihatkan $k + 1 \in K$. Dari pengandaian $k \in K$, maka:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,k - 1) = k^2.$$

Jadi,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + ((2k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k + 1)^2.$$

Terlihat bahwa $k + 1$ memenuhi pernyataan P. Berarti $k + 1 \in K$. Kesimpulan $K = \mathbb{N}$, yaitu pernyataan P benar untuk setiap bilangan asli.

Contoh 1.52 : Hitunglah $(a + b)^5$.

Jawab:

Dengan Binomium Newton,

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Contoh 1.53 : Buktikanlah bahwa $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$

Bukti:

Dalam Binomium Newton, ambillah $a = 1$ dan $b = 1$, akan diperoleh

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.1^{n-i}.1^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Dari soal No. 1) – 10), carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan yang diberikan !

1) $3 - x < 5 + 3x$. 6) $|x - 2| \le 10$.

2) $3x-5 \le \frac{1}{2}x+1 < 16$.

3) $x^2 - 3x + 2 > 0$.

4) $\frac{x-1}{4-x} < \frac{x+5}{x-3}$.

5) $x^3 + 1 \ge x^2 + x$.

7) $|6x - 7| > 5$.

8) $|3 + 2x| < |4 - x|$.

9) $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| < \frac{1}{2}$.

10) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \ge \left|\frac{1}{x-2}\right|$.

11) Jika $b > a > 0$, maka $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ untuk setiap $c > 0$. Buktikan !

12) Buktikan ketidaksamaan segitiga:

$|a + b| \le |a| + |a|$, $|a - b| \ge |a| - |b|$ dan
$|a - b| \ge -|a| + |b|$.

13) Dengan induksi matematis, buktikan:

a) $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$.

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

14) Buktikan bahwa:

a) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$.

b) $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i} = 2^{2n-1}$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Kerjakan seperti contoh 1.45

2) Kerjakan seperti contoh 1.46

3) Faktorkan ruas kiri pertidaksamaan, kemudian kerjakan seperti contoh 1.48

4) Lakukan sebagai berikut:

$\frac{x-1}{4-x} < \frac{x+5}{x-3} \Rightarrow \frac{x-1}{4-x} - \frac{x+5}{x-3} < 0.$ Selanjutnya diperoleh

$\frac{2x^2-3x-17}{(4-x)(x-3)} < 0$, kemudian faktorkan bagian pembilang.

Akhirnya dengan melihat tanda dari masing-masing faktor (lihat contoh 1.48) diperoleh himpunan penyelesaian sebagai berikut.

$\left\{x \,\middle|\, x < \frac{3-\sqrt{77}}{4} \text{ atau } \frac{3-\sqrt{77}}{4} < x < 3 \text{ atau } x > 4\right\}$

5) Tulis $x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$ kemudian faktorkan ruas kiri pertidaksamaan. Selanjutnya tentukan tanda dari masing-masing faktor.

6) Lakukan seperti contoh 1.49
7) Lakukan seperti contoh 1.49

RANGKUMAN

1. Pengertian-pengertian dalam Kegiatan Belajar 3.
   a. Operasi-operasi: penambahan, pengalian, pengurangan, pembagian,
   b. Aksioma-aksioma field, aksioma urutan, aksioma kelengkapan, aksioma Peano,
   c. Jenis-jenis bilangan: asli, bulat, rasional, irasional, positif, negatif,
   d. Relasi di antara bilangan-bilangan: lebih kecil, lebih besar.
   e. Ketidaksamaan dan pertidaksamaan,
   f. Sistem bilangan real, garis bilangan, titik, titik awal, nilai mutlak, Binomium Newton, induksi matematis,
   g. Jenis-jenis selang: terbuka, tertutup, setengah terbuka, setengah tertutup.

2. Sifat-sifat dan teorema-teorema.
   a. $a > 0$ jika dan hanya jika a positif,
      $a < 0$ jika dan hanya jika a negatif,
      $a > 0$ jika dan hanya jika $-a < 0$,
      $a < 0$ jika dan hanya jika $-a > 0$,
   b. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$,
   c. Jika $a < b$ maka $a + c < b + \mathrm{c}$ untuk setiap c
   d. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$
   e. Jika $a < b$ dan c positif, maka $ac < bc$
   f. Jika $a < b$ dan c negatif maka $ac > bc$
   g. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < cd$
   h. $|a| \geq a$
   i. $|ab| = |a|\,|b|$
   j. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
   k. $|a + b| \leq |a| + |b|$
   l. $|a - b| \geq |a| - |b|$
   m. $|a - b| \geq -|a| + |b|$
   n. Jika $a > 0$, maka:
      $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$
      $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$
      $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$
      $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika/adalah himpunan semua bilangan irasional maka antara himpunan bilangan-bilangan $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan*I*berlaku hubungan-hubungan berikut:
   A. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cup // \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$
   B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cup // = \mathbb{R}$
   C. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset // \; \mathbb{Q} \cup // = \mathbb{R}$
   D. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ dan // tidak saling asing

2) Jika a, $b \in \mathbb{Q}$ dan $c \in //$ di mana // adalah himpunan semua bilangan irasional, maka:
   A. $a + b \in \mathbb{Q}$ dan $ac \in \mathbb{Q}$
   B. $a + b \in //$ dan $ac \in //$
   C. $a + b \in //$ dan $ac \in \mathbb{Q}$
   D. $a + b \in \mathbb{Q}$ dan $ac \in //$

Untuk soal nomor 3) – 10), carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan yang diberikan!

3) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$
   Jawab:
   A. [4,8]
   B. (4,8)
   C. $\{x \mid x \leq 4 \quad \text{atau} \quad x \geq 8\}$
   D. $\{x \mid x \leq 1 \quad \text{atau} \quad x \geq 5\}$

4) $\dfrac{5}{x} < \dfrac{3}{4}$
   Jawab:
   A. $\left[0, \dfrac{20}{3}\right]$
   B. $\left\{x \middle| x > \dfrac{20}{3} \text{ atau } x < 0\right\}$
   C. $\left(0, \dfrac{20}{3}\right)$
   D. $x > \dfrac{15}{4}$

5) $1 - x - 2x^2 \geq 0$
   Jawab:
   A. $\left\{x \middle| x \leq \dfrac{1}{2}\right\}$
   B. $\{x \mid x \geq -1\}$

C. $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$

D. $\left\{x \middle| x \; -1 \text{ atau } x \geq \dfrac{1}{2}\right\}$

6) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$

Jawab:

A. $\{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 3\}$

B. $\{x \mid x < -1\} \cup \left\{\dfrac{1}{3},\ 3\right\}$

C. $\{x \mid x < -1\} \cup \left\{x \middle| x > \dfrac{1}{3}\right\}$

D. $\{x \mid x < -1\} \cup \left\{x \middle| x > \dfrac{-1}{3}\right\}$

7) $|x + 4| < 7$

Jawab:

A. $\{x \mid x < 3\}$

B. $\{x \mid x > -11\}$

C. $\{x \mid x < 3 \text{ atau } x > 5\}$

D. $(-11,3)$

8) $|2x - 5| \geq 3$

Jawab:

A. $[1,4]$

B. $[-4,-1]$

C. $\{x \mid x \leq 1 \quad \text{atau} \quad x > 8\}$

D. $\{x \mid x \leq 1 \quad \text{atau} \quad x \geq 4\}$

9) $|9 - 2x| \geq |4x|$

Jawab:

A. $\left[\dfrac{-9}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

B. $\left\{x \middle| x \geq \dfrac{3}{2} \text{ atau } x \leq \dfrac{-9}{2}\right\}$

C. $\left\{x \middle| x \geq \frac{3}{2}\right\}$

D. $\left\{x \middle| x \leq \frac{3}{2}\right\}$

10) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

Jawab:

A. $\left\{x \middle| x < \frac{10}{9}\right\}$

B. $\{x \mid x > 2\}$

C. $\left\{x \middle| x < \frac{10}{9} \text{ atau } x > 2\right\}$

D. $\left(\frac{10}{9}, 2\right)$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C. $t \in M$ dan $t \in N$.
2) B.
3) B.
4) D. Banyaknya anggota A adalah 3.
5) A. Gunakan Teorema 5 untuk membuktikan $F \subset H$ dan $H \subset F$.
6) B.
7) D.
8) A.
9) A. $X = \{3,4\}$ memenuhi hipotesis. Demikian pula $X = E$.
1). C.

Tes Formatif 2

1) C.
2) D.
3) A.
4) B. $C - A = C \cap A'$.
5) D. $P' \cap (Q \cap R) = (Q \cup R) - P$.
6) C. $H - K = H \cap K'$., selanjutnya gunakan hukum distribusi.
7) D. $E \cap F' = E - F$.
8) B. Gunakan hukum distribusi dan hukum komplemen.
9) B. $P \cap Q' = P - Q$.
10) D.

Tes Formatif 3

1) B.
2) D.
3) A. Semua ruas tambah 3, kemudian dibagi 2.
4) B. Tinjau kasus $x > 0$ dan kasus $x < 0$. Pada setiap kasus kalikan dengan x kemudian bagilah dengan $\frac{3}{4}$.
5) C.

6) B. Selesaikan dahulu masing-masing kasus $x < -1$.

$$-1 < x < \frac{1}{3}, \quad x > \frac{1}{3}.$$

7) D. Gunakan Teorema 1.7.
8) D. Gunakan Teorema 1.7.
9) A. Gunakan Teorema 1.7 pada kasus $x \geq 0$ dan kasus $x < 0$.
10) C. Gunakan Teorema 1.7 kemudian tinjau kasus $x > \frac{3}{2}$ dan kasus $x < \frac{3}{2}$. Selesaikanlah pada masing-masing kasus tersebut.

Daftar Pustaka

Lipschutz, S. (1981). *Theory and Problems of Set Theory*. Singapore: Mc.Graw Hill. International Book Co.

Leithold, L. (1976). *The Calculus with Analytic Geometry*. New York: Harper and Row Publishers.