MODUL 1

Integral Tak Tentu

Drs. Hidayat Sardi, M.Si

PENDAHULUAN

Modul ini akan membahas operasi balikan dari penurunan (pendiferensialan) yang disebut anti turunan (antipendiferensialan). Dengan mengikuti notasi Leibniz istilah anti turunan kita ganti dengan istilah integral tak tentu.

Secara umum, setelah mempelajari modul ini diharapkan dapat:

1. memahami konsep integral tak tentu;
2. memahami sifat-sifat integral tak tentu.

Secara khusus, setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. menentukan integral tak tentu suatu fungsi secara langsung;
2. menentukan integral tak tentu melalui substitusi sederhana;
3. menggunakan integral tak tentu untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan peubah terpisah, masalah gerak lurus dan masalah ekonomi.

KEGIATAN BELAJAR 1

Anti Turunan (Integral Tak Tentu)

Definisi 1.1
Fungsi F disebut suatu anti turunan dari fungsi f di suatu selang I apabila

$$F'(x) = f(x).$$

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh-contoh berikut

Contoh 1.1
Apabila diberikan fungsi $F(x) = 5x^3 + 3x^2 + 7$, maka $F'(x) = 15x^2 + 6x$. Jadi apabila kita sebut $f(x) = 15x^2 + 6x$ maka f adalah turunan dari F, ini berarti F adalah anti turunan dari f. Namun demikian apabila $G(x) = F(x) + C;\quad C$ suatu konstanta sebarang maka

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Ini berarti $G(x)$ juga merupakan anti turunan dari f. Jadi anti turunan dari fungsi f sangat banyak.

Contoh 1.2
Jika diberikan fungsi $F(x) = C$, C konstanta maka $F'(x) = 0$.
Ini berarti anti turunan dari fungsi $f(x) = 0$ adalah fungsi konstan.

Contoh 1.3
Misalkan dua fungsi f dan g memenuhi hubungan $f'(x) = g'(x)$. Selisih fungsi f dan g kita sebut $h(x) = f(x) - g(x)$. Sehingga didapat $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Dari Contoh 1.2, hal ini berarti $h(x) = C$, C konstan dan $C = f(x) - g(x)$ atau $f(x) = g(x) + C$.
Contoh ini memberi kesimpulan bahwa dua fungsi yang turunannya sama, maka kedua fungsi tersebut berbeda dalam konstanta.

Pembahasan selanjutnya akan digunakan istilah integral tak tentu untuk anti turunan.

Apabila $F'(x) = f(x)$, integral tak tentu dari fungsi *f* terhadap *x* adalah

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ; \quad C \text{ kontanta sembarang}$$

f(*x*) disebut integran,
dx disebut integrator dan,
F(*x*) disebut fungsi primitif.

Teorema 1.1

i. $\int dx = x + C$

ii. $\int k \ f(x)dx = k\int f(x)dx; \ \ k$ konstan

iii. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

iv. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1.$

Bukti:

Semua bukti Teorema 1.1 dari nomor i sampai dengan iv berkaitan dengan rumus turunan. Sebagai contoh berikut ini bukti (iv).

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}dx = x^n dx.$$

Dengan demikian Teorema 1.1 bagian iv terbukti.

Contoh 1.4

Hitunglah $\int (3x + 7)dx.$

Jawab:

Dengan menggunakan (iii) dan (ii)

$$\int (3x + 7)dx = \int 3x \ dx + \int 7dx$$

$$= 3\int x\ dx + 7\int dx$$
$$= 3\left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right) + 7(x + c_2)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 + 3c_1 + 7x + 7c_2.$$

Karena $3c_1 + 7c_2$ konstanta sebarang, hal tersebut dapat dinyatakan oleh C, sehingga diperoleh jawab

$$\frac{3}{2}x^2 + 7x + C$$

Hasil ini dapat diperiksa dengan menurunkan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 + 7x + C\right) = 3x + 7.$$

Contoh 1.5

Tentukan $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx.$

Jawab:

$$\int \sqrt[5]{x^3}\ dx = \int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C$$
$$= \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x\ \sqrt[5]{x^3} + C$$

Contoh 1.6

Hitunglah $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

Jawab:

$$\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int \left(x^{-3} + x^{-1/3}\right)dx$$

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}} + C$$

Dalam banyak hal untuk menentukan integral tak tentu tidak selalu bisa langsung diperoleh dengan menggunakan Teorema 1.1 di depan, tetapi terkadang dapat diusahakan dengan cara mengganti peubahnya. Sebagai contoh hitunglah integral berikut

$$\int 4x\sqrt{1-x^2}\; dx.$$

Substitusikan $u = 1 - x^2$ maka $du = -2x\,dx$ atau $4x\,dx = -2du$, sehingga

$$\int 4x\sqrt{1-x^2}\; dx = \int u^{\frac{1}{2}}(-2du) = -2\int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Prosedur penyelesaian integral tersebut dapat dituangkan pada teorema berikut, yang analog dengan aturan rantai pada penurunan.

Teorema 1.2 (Aturan rantai untuk integral tak tentu)

Misalkan fungsi g dapat diturunkan terhadap x dan range dari fungsi g adalah selang I. Misalkan fungsi f terdefinisi di I dan F merupakan antiturunan dari f di I. Jika $u = g(x)$, maka

$$\int f\big(g(x)\big)\;\; g'(x)\; dx = C = F\big(g(x)\big) + C$$

Bukti:

Dengan menggunakan aturan rantai pada penurunan dan asumsi-asumsi yang ada pada Teorema diperoleh hal berikut

$$\frac{dF(u)}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\,.\,\frac{du}{dx} = f\big(g(x)\big)\,.\, g'(x).$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa:

$$\int f\left(g(x)\right)\, g'(x)\, dx = F(u) + C = F\left(g(x)\right) + C$$

atau lebih lengkap lagi

$$\int f\left(g(x)\right)\, g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F\left(g(x)\right) + C$$

Teorema 1.3

Jika g fungsi yang diferensiabel dan $u = g(x)$, maka

$$\int \left[g(x)\right]^n\ g'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\left[g(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C$$ apabila $n \neq -1$.

Bukti:

Jelas!

Contoh 1.7

Hitunglah $\int \sqrt{5x-4}\ dx$.

Jawab:

Dengan menggunakan Teorema 1.3.

Misalkan u = 5x - 4 maka du = 5dx atau $\frac{1}{5} du = dx$, sehingga

$$\begin{aligned} \int \sqrt{5x-4}\ dx &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{15} (5x-4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Contoh 1.8

Hitunglah $\int x(4+3x^2)^{10} dx$.

Jawab:
Karena $d(4+3x^2)=6x\ dx$, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned}\int x(4+3x^2)^{10}dx &= \frac{1}{6}\int (4+3x^2)^{10}d(4+3x^2)\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{11}(4+3x^2)^{11}+C\\ &= \frac{1}{66}(4+3x^2)^{11}+C\end{aligned}$$

Contoh 1.9
Hitunglah $\int x^2\sqrt{3+x}\ dx$.

Jawab:
Misalkan $u=\sqrt{3+x}$; maka $u^2=3+x$ atau $x=u^2-3$ dan diperoleh $dx=2u\,du$.
Dengan substitusi ini didapat

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{3+x}\ dx &= \int (u^2-3)^2\ .\ u\ .\ 2u\ du\\ &= \int (2u^6-12u^4+18u^2)du\\ &= \frac{2}{7}u^7-\frac{12}{5}u^5+6u^3+C\\ &= \frac{2}{7}(3+x)^{7/2}-\frac{12}{5}(3+x)^{5/2}+6(3+x)^{3/2}+C\end{aligned}$$

Coba Anda periksa dengan cara menurunkan hasil terakhir ini, maka akan didapat fungsi yang diintegralkan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Tentukan integral tak tentu!

1) $\int (3-2x+x^2)dx$

2) $\int \left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+5\right)dx$

3) $\int x^2\sqrt{x^3-1}\ dx$

4) $\int \frac{t\ dt}{\sqrt{3t^2+1}}$

5) $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}dy$

6) $\int (5x^2+1)(5x^3+3x-8)^6 dx$

7) $\int \frac{s\ ds}{\sqrt{s+3}}$

8) $\int \frac{x^4-x^3+1}{x^2}\ dx.$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $3x-x^2+\frac{1}{3}x^3+C$

2) $-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+5x+C$

3) $\frac{2}{9}(x^3-1)^{3/2}+C$

4) $\frac{1}{3}\sqrt{3t^2+1}+C$

5) $\frac{4}{3}(3-y)^{4/3} - 18(3-y)^{1/3} + C$

6) $\frac{1}{21}(5x^3 + 3x - 8)^7 + C$

7) $\frac{2}{3}(s+3)^{3/2} - 6(s+3)^{1/2} + C$

8) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{x} + C$

RANGKUMAN

Anti turunan integral tak tentu dari fungsi f adalah

$\int f(x)dx = F(x) + C$ dengan $F'(x) = f(x)$

$f(x)$: disebut integran

$F(x)$: disebut fungsi primitif

dx : disebut integrator

$\int$: lambang integral

C : konstanta sebarang.

Integral tak tentu bersifat linear, yaitu

$$\int \left(k_1 f(x) + k_2 g(x)\right)dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

k_1, k_2 konstanta.

Sifat linear ini ekivalen dengan

1. $\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$ dan
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Teorema-teorema sederhana yang selanjutnya dijadikan rumus

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$

3. $\int f\left(g(x)\right)\ g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + C$

dengan $F'(x) = f(x)$

4. $\int \left[g(x)\right]^n\ g'(x)dx = \dfrac{\left[g(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$

Dalam beberapa hal tertentu untuk menentukan integral tak tentu dapat dibalik dari rumus turunan. Tetapi untuk beberapa hal lain harus menggunakan teknik-teknik pengintegralan yang selanjutnya akan dibahas pada Modul Teknik Pengintegralan.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $\int \left(\dfrac{3}{x^3} + 2x^{3/2} - 1 \right) dx$ sama dengan ….

A. $-9x^{-2} + 3x^{5/2} - x + C$

B. $-\dfrac{3}{2}x^{-2} + \dfrac{4}{5}x^{5/2} - x + C$

C. $\dfrac{3}{2}x^{-2} + \dfrac{4}{5}x^{5/2} - x + C$

D. $-\dfrac{3}{2}x^{-2} + \dfrac{15}{2}x^{1/2} - x + C$

2) $\int \sqrt{x}\ (1-x)^2\, dx$ sama dengan ….

A. $\dfrac{3}{2}x^{3/2} - \dfrac{5}{2}x^{2/5} + C$

B. $\dfrac{2}{3}x^{3/2} - \dfrac{2}{7}x^{7/2} + C$

C. $\dfrac{2}{3}x^{3/2} - \dfrac{4}{5}x^{5/2} + \dfrac{2}{7}x^{7/2} + C$

D. $\dfrac{1}{2}x^{-1/2} - \dfrac{5}{2}x^{3/2} + C$

3) $\int x^2\sqrt{3-x}\ dx$ sama dengan ….

A. $-\frac{2}{7}(3-x)^{7/2}-\frac{12}{2}(3-x)^{5/2}-6(3-x)^{3/2}+C$

B. $-\frac{2}{7}(3-x)^{7/2}-\frac{5}{12}(3-x)^{5/2}-(3-x)^{3/2}+C$

C. $\frac{7}{2}(3-x)^{2/7}+\frac{12}{5}(3-x)^{5/2}-6(3-x)^{1/2}+C$

D. $\frac{7}{2}(3-x)^{2/7}+\frac{5}{12}(3-x)^{5/2}-(3-x)^{1/2}+C$

4) $\int x^2\sqrt{x^3-1}\ dx$ sama dengan ….

A. $\frac{2}{3}(x^3-1)^{3/2}+C$

B. $\frac{2}{9}x^{9/2}-\frac{1}{2}x^2+C$

C. $\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2+C$

D. $\frac{2}{9}(x^3-1)^{3/2}+C$

5) $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$ sama dengan ….

A. $(x^3+3x^2+1)^{1/2}+C$

B. $-\frac{2}{3}(x^3+3x^2+1)^{1/2}+C$

C. $\frac{2}{3}(x^3+3x^2+1)^{1/2}+C$

D. $-(x^3+3x^2+1)^{1/2}+C$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Penggunaan Integral Tak Tentu

Beberapa penggunaan integral tak tentu akan dibahas pada Kegiatan Belajar 2 ini.

A. PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x)$ dapat diubah menjadi $dy = f(x)dx$, yang merupakan persamaan diferensial dengan peubah dipisah.

Apabila fungsi f merupakan turunan dari fungsi F, maka jika kedua ruas tersebut diintegralkan, yaitu

$$\int dy = \int f(x)dx \qquad \text{diperoleh}$$

$$y = F(x) + C; \quad C \text{ konstanta sebarang.}$$

$y = F(x) + C$ merupakan solusi persamaan diferensial di atas, yang merupakan keluarga (himpunan) fungsi dengan parameter C.

Kurva fungsi-fungsi tersebut di bidang; masing-masing tidak ada yang berpotongan. Suatu titik tertentu (x_1, y_1) hanya dilalui oleh sebuah kurva dari anggota himpunan fungsi tersebut.

Contoh 1.10

Tentukan semua solusi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Kemudian gambarkan solusi tersebut !

Jawab:

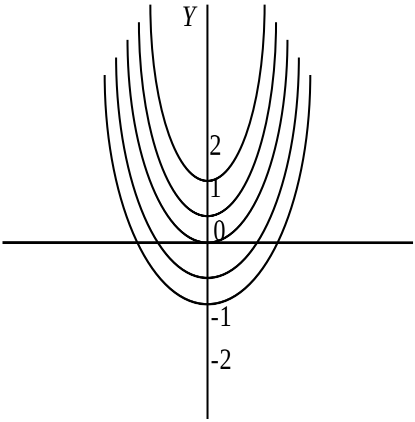
$\frac{dy}{dx} = 2x$ dapat ditulis sebagai $dy = 2x\ dx$.

Apabila kedua ruas diintegralkan, yaitu

$\int dy = \int 2x\ dx$, maka didapat $y + C_1 = x^2 + C_2$ atau

$$y = x^2 + C, \text{ di mana } C = C_2 - C_1.$$

Untuk menggambarkan solusi tersebut kita ambil beberapa nilai konstanta C, misalnya $C = 2, 1, 0, -1, -2$. Maka diperoleh himpunan fungsi seperti yang terlihat pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1

Contoh 1.11

Tentukan solusi persamaan diferensial pada contoh 1.10, yang melalui titik (2, 7).

Jawab:

Dari Contoh 1.10, telah diperoleh solusi persamaan diferensial

$$y = x^2 + C$$

Isikan koordinat titik (2, 7) ke solusi tersebut $7 = 2^2 + C$, maka didapat C = 3.

Jadi $y = x^2 + 3$ merupakan solusi khusus dari persamaan diferensial di contoh 1.10, yang melalui titik (2, 7).

Contoh 1.12
Gradien garis singgung pada suatu kurva di titik (x, y) adalah x^2y^2.
Tentukan persamaan kurva yang melalui titik (3, 1).

Jawab:
Gradien garis singgung di sebarang titik (x, y) adalah turunan di titik tersebut, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^2 \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{y^2} = x^2dx.$$

Jika diintegralkan masing-masing ruas, yaitu

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2dx,$$

maka didapat solusi umum persamaan diferensial

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Untuk memperoleh kurva yang melalui kurva titik (3,1), isikan koordinat titik ini kedalam solusi umum

$$-\frac{1}{1} = \frac{1}{3} \,.\, 3^3 + C \ \text{ atau}$$

$$-1 = 9 + C, \ \text{didapat} \ C = -10.$$

Jadi persamaan kurva yang ditanyakan adalah

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - 10.$$

B. GERAK LURUS

Persamaan gerak suatu partikel sepanjang garis lurus adalah
$s = f(t)$.
s = panjang jalan yang ditempuh
t = waktu.

Kecepatan dari gerak lurus adalah

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \ \text{ dan}$$

percepatannya

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f''(t).$$

Contoh 1.13

Suatu partikel bergerak sepanjang garis lurus pada saat (waktu) t = 1, percepatannya adalah $2t-1$, kecepatannya 3 dan panjang jalan ditempuh 4. Nyatakan kecepatan dan panjang jalan yang ditempuh sebagai fungsi dari waktu.

Jawab:

Misalkan s, v dan a berturut-turut menyatakan panjang jalan, kecepatan dan percepatan, sedangkan t menyatakan waktu.

Karena $a = \frac{dv}{dt}$, maka

$$\frac{dv}{dt} = 2t - 1 \text{ atau}$$

$$dv = (2t-1)dt.$$

Integralkan masing-masing ruas, yaitu $\int dv = \int (2t-1)dt$, sehingga diperoleh solusi

$$v = t^2 - t + C_1.$$

Pada saat t = 1, kecepatan v = 3. Isikan ke solusi tersebut

$$3 = 1^2 - 1 + C_1$$

$$C_1 = 3.$$

Jadi kecepatan gerak partikel adalah

$$v = t^2 - t + 3.$$

Selanjutnya, kita tahu bahwa:

$$\frac{ds}{dt} = v, \text{ sehingga diperoleh}$$

$$\frac{ds}{dt} = t^2 - t + 3 \text{ atau}$$

$$ds = (t^2 - t + 3)dt.$$

Integralkan ruas kiri dan ruas kanan, yaitu

$$\int ds = \int (t^2 - t + 3)dt.$$

Hasil integral ini adalah

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + C_2.$$

Pada saat t = 1, diketahui s = 4. Isikan ke hasil integral tersebut, maka didapat

$$4 = \frac{1}{3} . 1^3 - \frac{1}{2} . 1^2 + 3 . 1 + C_2$$

$$C_2 = \frac{7}{6}.$$

Akhirnya didapat persamaan gerak partikel

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{6}.$$

C. DALAM MASALAH EKONOMI

Dalam masalah ekonomi kita kenal beberapa istilah berikut.
Misalkan x jumlah unit produksi pada suatu selang waktu tertentu.

$C(x)$	: ongkos produksi
$C'(x)$	: ongkos marginal
$R(x)$	: harga jual/pendapatan
$R'(x)$	: pendapatan marginal
$P(x)$	: keuntungan
$P'(x)$	: keuntungan marginal.

Ongkos, pendapatan dan keuntungan rata-rata berturut-turut $\frac{C(x)}{x}$, $\frac{R(x)}{x}$ dan $\frac{P(x)}{x}$.

Contoh 1.14

Ongkos marginal produksi x unit suatu barang adalah $4x-8$. Apabila ongkos produksi untuk 5 unit barang tersebut Rp20.000,-.

Tentukan total ongkos produksi x unit barang !

Jawab:

$C'(x) = 4x-8$ atau

$$\frac{dC(x)}{dx} = 4x-8$$

$dC(x) = (4x-8)dx$

Integralkan ruas kiri dan kanan, didapat $C(x) = 2x^2 - 8x + K;$ K konstanta

C = 20.000 untuk x = 5

20.000 = $2 \,.\, 5^2 - 8 \,.\, 5 + K$.

$K = 19.990$

$C(x) = 2x^2 - 8x + 19.990.$

Karena ongkos marginal tak negatif, maka $4x-8 \geq 0$ atau $x \geq 2$.

Jadi total ongkos produksi : $C(x) = 2x^2 - 8x + 19.990$; $x \geq 2$.

Contoh 1.15

Apabila pendapatan marginal untuk x unit barang adalah $27-12x+x^2$.
Tentukan persamaan untuk total pendapatan dan keuntungan marginal apabila ongkos produksi x untuk barang adalah 50 + 7x.

Jawab:

$$R'(x) = 27 - 12x + x^2$$

$$R(x) = \int (27 - 12x + x^2)dx$$

$$= 27x - 6x^2 + \frac{1}{3}x^3 + K.$$

Karena R(0) = 0, kenapa? maka K = 0.

Total pendapatan $R(x) = 27x - 6x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Diketahui ongkos produksi $C(x) = 50 + 7x$.

Keuntungan $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 27x - 6x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (50 + 7x)$$

$$= -50 + 20x - 6x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Jadi keuntungan marginal

$$P'(x) = 20 - 12x + x^2; \qquad x \geq 0.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4;\ \ y = -6$ untuk $x = 3$.
   Tentukan solusi persamaan diferensial tersebut!

2) Gradien garis singgung *suatu kurva* di titik (x, y) adalah $2x - 3$. Tentukan persamaan *kurva tersebut* yang melalui titik (3,2)!

3) Gerak partikel sepanjang garis lurus pada saat $t = 0$ jarak tempuh $s = 0$, kecepatan $v = 2$,dan percepatan $a = 5 - 2t$.
   Tentukan persamaan gerak partikel tersebut!

4) Produksi x unit barang ongkos marginalnya adalah $0{,}3x - 11$, dalam rupiah. Harga jual barang tersebut Rp19,- per unit dan total ongkosnya Rp100,-
   Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh dalam jangka waktu yang ditentukan.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$

2) $y = x^2 - 3x + 2$

3) $s = 2t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$

4) Rp1400,-

RANGKUMAN

Penggunaan integral tak tentu dalam pembahasan kegiatan belajar ini pada prinsipnya menyelesaikan persamaan diferensial dengan peubah dipisah. Solusi yang diperoleh merupakan himpunan kurva. Untuk mendapatkan sebuah kurva caranya mengisikan syarat yang diberikan pada solusi tersebut, sehingga diperoleh konstanta tertentu dari persamaan kurva solusi.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = (x-1)^3$; $y = 2$ untuk $x = 0$, adalah ….
   A. $y = \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{9}{4}$
   B. $y = \frac{1}{2}(x-1)^4 + \frac{3}{2}$
   C. $y = \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{7}{4}$
   D. $y = \frac{1}{2}(x-1)^4 - \frac{3}{2}$.

2) Sebuah bola dilemparkan ke atas dari permukaan bumi dengan kecepatan awal 96 kaki per detik. Tinggi maksimum yang dicapainya adalah …. (Gesekan dengan udara diabaikan, gaya gravitasi 32 kaki/detik)

A. 144 kaki
B. 120 kaki
C. 169 kaki
D. 288 kaki.

3) Apabila ongkos marginal untuk x unit barang adalah $6x^2 - 4x$ dan ongkos awal 3.000,-, maka fungsi ongkos untuk x unit barang adalah ….
A. $c(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3000$
B. $c(x) = 6x^2 - 4x + 3000$
C. $c(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3000$
D. $c(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3000$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan Modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) B
2) C
3) A
4) D
5) C

Tes Formatif 2
1) C
2) A
3) D

Daftar Pustaka

Edward, Penny. 1994. *Calculus with Analytic Geometry*. 4^{th} edition. Prentice-Hall.

Leithold, L. 1976. *Theory Calculus with Analutic Geometry*. Harper and Row Publisher.

Purcell, E.J. dan Dale Varberg. 1994. *Calculus with Analytic Geometry*. 5^{th} edition Prentice-Hall.