MODUL 1

Matriks

Drs. R. J. Pamuntjak, M.Sc.

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear yang muncul hampir dalam semua penerapan aljabar linear, juga sangat diperlukan sebagai landasan dalam pembahasan bagian lain aljabar linear elementer. Mencari dan menganalisis selesaiannya sangat dimudahkan dengan menggunakan matriks. Oleh sebab itu, modul pertama perkuliahan Aljabar Linear Elementer I ini kita isi dengan pembahasan pengertian matriks serta pengenalan operasi seperti penjumlahan, perkalian dua matriks, dan perkalian matriks dengan skalar.

Pada materi aljabar linear elementer, pengertian bilangan akan kita batasi dengan bilangan real. Oleh karena itu, untuk mengerti sifat-sifat operasi pada matriks, dan juga untuk memahami pengertian penting pada bagian lain aljabar linear elementer ini, diperlukan pemahaman sifat-sifat bilangan real yang sudah Anda kenal sejak Anda belajar di sekolah dasar.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan akan dapat memahami pengertian dasar mengenai bilangan real, matriks, penjumlahan dan perkaliannya.

Secara lebih rinci Anda diharapkan dapat:

1. Menentukan jenis serta ukuran suatu matriks yang diberikan.
2. Menjumlahkan dua matriks berukuran sama.
3. Menentukan apakah dua matriks dapat dikalikan atau tidak, serta (bila dapat) menentukan hasilkalinya.
4. Menentukan sifat-sifat mana saja dari lapangan atau grup yang dipunyai atau tidak oleh suatu himpunan bagian bilangan real.
5. Memeriksa sifat-sifat operasi matriks.

   Menentukan invers matriks tak singular yang sederhana langsung dihitung dari definisi invers.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengertian Matriks

Pada pembahasan sistem persamaan linear dan transformasi linear, matriks memegang peranan penting. Dalam kehidupan sehari-hari sering digunakan daftar yang memuat bilangan yang tersusun dalam kolom dan baris, misalnya daftar jumlah kemeja merek tertentu yang laku terjual selama sebulan pada suatu toko pakaian menurut ukuran dan warnanya seperti berikut.

Contoh 1

a. Daftar kemeja polos merek *"Panah"* yang terjual dalam bulan Juni 1996.

Pada contoh ini satu jenis data (barang) dikelompokkan menurut dua karakteristik, yaitu warna dan ukuran. Angka dalam daftar adalah jumlah anggota masing-masing kelompok tersusun dalam empat baris dan empat kolom.

Ukuran / Warna	S	M	L	XL
Putih	15	20	10	5
Biru	12	15	8	4
Abu-abu	14	16	9	6
Cokelat muda	11	13	7	2

b. Daftar kadar gizi dan harga bahan makanan per kg.

Gizi Ekonomi / Bahan	Protein	Lemak	Hid.Arang	Rupiah
Beras Giling	68	7	789	1200
Kentang	17	0,85	62,35	1000
Tahu	78	46	16	800
Bandeng	160	38,4	0	4000
Telur Ayam	115,2	103,5	6,3	2500

Di sini termuat daftar kadar gizi beserta nilai rupiah dari beberapa bahan makanan. Kadar gizi dalam gr per kg, harga dalam rupiah per kg. Daftar pada contoh kedua ini berisi bilangan yang tersusun dalam (lima) baris dan (empat) kolom.

Susunan bilangan seperti yang terdapat pada kedua contoh di atas disebut matriks, yang definisinya akan kita tuliskan pada kesempatan ini.

Definisi

> *Matriks* adalah jajaran bilangan real berbentuk persegi panjang.
>
> Bilangan real yang terdapat dalam jajaran itu disebut *unsur* matriks (itu).
>
> *Matriks* (berukuran) $m \times n$ adalah matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom, tiap baris memuat n bilangan, dan tiap kolom memuat m bilangan.

Cara menuliskan matriks umum berukuran $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{i\,j} \right], \quad \begin{cases} i = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Angka pertama (kiri) pada indeks suatu unsur menyatakan ***nomor*** atau ***urutan*** tempat ***baris*** yang diduduki unsur itu (dari atas ke bawah).

Angka kedua (kanan) pada indeks itu menyatakan ***nomor kolom*** yang ditempati unsur itu (dari kiri ke kanan).

Jadi $a_{j\,k}$ adalah unsur matriks A yang terdapat pada baris ke j (dari atas), pada kolom ke k (dari kiri), dengan j dan k asli, $1 \le j \le m$, $1 \le k \le n$. a_{37} adalah unsur matriks A pada baris ke 3, kolom ke-7.

Contoh 2

a. Matriks pada Contoh 1*a* adalah

$$K = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 5 \\ 12 & 15 & 8 & 4 \\ 14 & 16 & 9 & 6 \\ 11 & 13 & 7 & 2 \end{bmatrix},$$

dan

$$G = \begin{bmatrix} 68 & 7 & 789 & 1200 \\ 17 & 0{,}85 & 162{,}35 & 1000 \\ 78 & 46 & 16 & 1800 \\ 160 & 38{,}4 & 0 & 4000 \\ 115{,}2 & 103{,}5 & 6{,}3 & 2500 \end{bmatrix}$$

adalah matriks pada Contoh 1b. Matriks K berukuran 4×4, G berukuran 5×4.

b. Pandang matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 1{,}7 & \pi \\ \frac{1}{7} & 0 & 2{,}2 & 12 & 1 \\ 21 & 17 & -1 & e & 6 \end{bmatrix}.$$

Matriks A berukuran 3×5. Unsur pada baris kedua, kolom ke 4 adalah $a_{24} = 12$.

Untuk lebih memahaminya, ilustrasi berikut mungkin dapat membantu.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 1{,}7 & \pi \\ \frac{1}{7} & 0 & 2{,}2 & \boxed{12} & 1 \\ 21 & 17 & -1 & e & 6 \end{bmatrix} \\ \textbf{kolom ke 4} \end{array} \begin{array}{l} \\ \textbf{baris kedua} \\ \\ \\ \end{array}$$

c. Pandang

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \otimes & 5 \\ 0 & 2 & \Diamond \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \pi & 0 & \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-5} & 2 \\ 1{,}2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Menurut pengertian (definisi) kita *A*, *B*, dan *C* bukan matriks, dengan alasan: *A* mempunyai unsur yang bukan bilangan real, yakni $\otimes$ dan $\Diamond$.

Pada *B* tak terdapat unsur yang bertempat pada baris ke-2, kolom ke-3. Baris kedua dan kolom ketiga hanya mempunyai dua unsur.

Pada *C* terdapat unsur yang berupa bilangan kompleks yakni $\sqrt{-5}$, bukan bilangan real. Menurut definisi kita, *C* bukan matriks. Walaupun demikian adakalanya kita memerlukan matriks yang dengan unsur bilangan kompleks.

Definisi

Matriks

$$A=\left[a_{ij}\right], \begin{cases} i = 1,\cdots,m \\ j = 1,\cdots,n \end{cases} \textbf{ sama} \text{ dengan } B=\left[b_{ij}\right], \begin{cases} i = 1,\cdots,m \\ j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

(ditulis $A = B$)

bila $a_{ij} = b_{ij}$, $\begin{cases} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$

Jadi dua matriks sama, bila ukurannya sama dan unsur-unsur pada posisi (baris dan kolom) yang sama, sama.

A. JENIS-JENIS MATRIKS MENURUT UKURANNYA

Definisi

a. ***Matriks baris*** adalah matriks $1 \times n$
b. ***Matriks kolom*** adalah matriks $m \times 1$

Contoh 3

a. Matriks baris: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ adalah matriks 1×4

b. Matriks kolom:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ adalah matriks } 4 \times 1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 2 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix} \text{ adalah matriks } 5 \times 1,$$

Definisi

> ***Matriks bujursangkar*** orde n adalah matriks berukuran $n \times n$

Contoh 4

Matriks berikut adalah matriks bujursangkar.

$$\text{Orde 1: } [3], \text{Orde 2 : } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{5} & -1{,}1 \end{bmatrix}, \quad \text{Orde 4 : } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & \pi & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Unsur-unsur matriks bujursangkar dapat dikelompokkan menurut posisinya dalam matriks.

Definisi

> Unsur a_{kk}, dengan $k = 1,2,3,\ldots, n$
> disebut ***unsur diagonal.***
> Unsur a_{ij} dengan $j > i$, $i = 1,2,3,\ldots, n;$ $j = 1,2,3,\ldots, n$
> disebut unsur ***atas diagonal.***
> Unsur a_{ij} dengan $j < i$, $i = 1,2,3,\ldots, n;$ $j = 1,2,3,\ldots, n$
> disebut unsur ***bawah diagonal.***

Untuk jelasnya lihatlah ilustrasi berikut.

> AWAS!!!
> Yang dimaksud dengan diagonal suatu matriks adalah diagonal "barat laut-tenggara" (yang bergaris penuh), bukan yang "barat daya-timur laut" (garis terputus)

Bukan unsur-unsur diagonal !!!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ \pi & 2{,}1 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur atas diagonal

Unsur-unsur diagonal

Unsur-unsur bawah diagonal

Definisi

> Matriks ***segitiga bawah*** adalah matriks bujursangkar yang semua unsur atas diagonalnya = 0.

Contoh 5

a. Matriks-matriks berikut adalah matriks segitiga bawah.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karena semua unsur atas diagonal = 0.
Unsur-unsur diagonal dan bawah diagonal boleh nol atau tidak, karena pada definisi tidak ada pembatasan = 0 atau tidak untuk unsur-unsur ini.

b. Matriks berikut **bukan** matriks segitiga bawah, karena ada unsur atas diagonal yang ≠ 0 (yang dilingkari).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

Definisi

> Matriks ***segitiga atas*** adalah matriks bujursangkar yang semua unsur bawah diagonalnya = 0.

Contoh 6

a. Matriks-matriks berikut adalah matriks segitiga atas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

karena semua unsur-unsur bawah diagonal = nol.

b. Matriks-matriks bujursangkar berikut bukan matriks segitiga atas, karena ada unsur bawah diagonalnya yang tak nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tunjukkanlah yang mana!

Definisi

> Matriks ***diagonal*** adalah matriks bujursangkar yang semua unsur luar diagonal yakni unsur atas diagonal atau bawah diagonalnya = 0.
> Matriks diagonal yang semua unsur diagonalnya = 1 disebut matriks ***satuan.***

Dapat juga dikatakan bahwa matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar

$$A = \left[a_{ij} \right], \begin{cases} i = 1, \cdots, n \\ j = 1, \cdots, n \end{cases} \text{ dengan } a_{ij} = 0 \text{ bila } i \neq j.$$

Matriks diagonal adalah sekaligus matriks segitiga atas dan segitiga bawah. Perhatikan ilustrasi di bawah ini.

Semua unsur bawah diagonal=**0** $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ Semua unsur atas diagonal= **0**

Tak ada pembatasan pada unsur-unsur diagonal mengenai = 0 atau tidaknya. Unsur-unsur diagonal *a*, *b*, *c*, dan *d* boleh = 0 atau ≠ 0.

Contoh 7

a. Matriks-matriks berikut adalah matriks diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks-matriks berikut bukan matriks diagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

karena untuk tiap matriks itu ada unsur luar diagonal yang nilainya tak nol. Tunjukkanlah sendiri!

B. PENJUMLAHAN MATRIKS

Contoh 8

Di sebuah toko pakaian setelah tutup toko pada akhir bulan terdapat persediaan kemeja polos merek “Panah” warna putih dan biru ukuran S,M, dan L seperti dalam daftar berikut.

Ukuran / Warna	S	M	L
Putih	15	20	10
Biru	12	15	8

Pada keesokan harinya, jadi pada tanggal satu bulan berikutnya, sebelum buka toko, datang persediaan baru yang dipesan sebelumnya yang jumlahnya seperti dalam daftar berikut.

Ukuran / Warna	S	M	L
Putih	100	160	80
Biru	80	120	60

Bagaimanakah caranya mendapatkan daftar persediaan pada tanggal satu sebelum buka toko? Untuk itu kita buat dulu catatan persediaan berikut.

		S	M	L
	Kemarin	15	20	10
Putih	Tambahan	100	160	80
		+	+	+
	Sekarang	115	180	90

		S	M	L
	Kemarin	12	15	8
Biru	Tambahan	80	120	60
		+	+	+
	Sekarang	92	135	68

Dengan demikian, diperoleh persediaan sekarang sebagai berikut.

Ukuran / Warna	S	M	L
Putih	115	180	90
Biru	92	135	68

Untuk mendapatkan bilangan pada posisi tertentu pada daftar terakhir, bilangan-bilangan pada posisi yang sama pada daftar pertama (saat tutup toko kemarin) dan kedua (saat buka toko hari ini), dijumlahkan.

Kita lihat, ukuran matriks yang pada daftar pertama dan yang pada daftar kedua, sama. Unsur pada posisi tertentu pada matriks terakhir adalah jumlah unsur matriks yang pertama dan matriks yang kedua pada posisi itu.

Sesungguhnya begitulah cara menjumlahkan matriks, menurut definisi yang akan kita tuliskan, matriks terakhir adalah jumlah matriks pertama dengan matriks kedua.

Definisi

Bila

$$A=\left[a_{ij}\right],\begin{cases} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{cases}, \text{dan } B=\left[b_{ij}\right],\begin{cases} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{cases},$$

jumlah matriks A dengan matriks B adalah

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right],\begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

Dari definisi itu jelas bahwa yang ***dapat dijumlahkan*** adalah matriks yang berukuran ***sama***. Matriks yang ukurannya ***berlainan***, ***tak dapat*** dijumlahkan.

Contoh 9

a. **Pandang matriks-matriks berikut.**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A + B$, $B + C$, $C + D$, $A + D$ masing-masing tak punya arti. Penjumlahannya tak dapat dikerjakan.

$$B+D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2 & 1+1 & 2+0\\ 0+1 & 3+3 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 6 & 2\end{bmatrix}.$$

b. Lihat lagi Contoh 6 ! Matriks pada daftar pertama adalah $P=\begin{bmatrix}15 & 20 & 10\\ 12 & 15 & 8\end{bmatrix}$, matriks pada daftar kedua $Q=\begin{bmatrix}100 & 160 & 80\\ 80 & 120 & 60\end{bmatrix}$.

Matriks pada daftar terakhir adalah

$$S=P+Q=\begin{bmatrix}15+100 & 20+160 & 80+10\\ 80+12 & 120+15 & 60+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}115 & 180 & 90\\ 92 & 135 & 68\end{bmatrix}.$$

Mudah dilihat bahwa sifat seperti pada penjumlahan pada bilangan real, juga berlaku untuk penjumlahan matriks. Hal ini akan kita tuntaskan setelah membahas bilangan real pada bagian kedua modul ini

Arti pengurangan matriks dapat kita lihat pada contoh berikut.

Contoh 10

Andaikan persediaan kemeja polos merek tertentu pada sebuah toko pada permulaan bulan adalah sebagai berikut.

Ukuran / Warna	S	M	L
Putih	115	180	90
Biru	92	135	68

Jumlah kemeja yang laku pada bulan itu dapat dilihat pada daftar berikut.

Ukuran / Warna	S	M	L
Putih	62	85	40
Biru	55	72	35

Susunan bilangan pada daftar persediaan pada akhir bulan adalah matriks dari bilangan pada daftar pertama dikurangi dengan matriks pada daftar kedua.

$$\begin{bmatrix} 115 & 180 & 90 \\ 92 & 135 & 68 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 62 & 85 & 40 \\ 55 & 72 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 95 & 50 \\ 37 & 63 & 33 \end{bmatrix}$$

C. PERKALIAN MATRIKS

Kita mulai dengan perkalian matriks baris dengan matriks kolom.

Definisi

> **Perkalian** matriks baris
>
> $$A = \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_m$$
>
> dengan matriks kolom
>
> $$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$
>
> adalah
>
> $$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_mb_m$$

Contoh 11

a. Jika

$$A = \; 1 \quad -1 \quad 2 \; , \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka

$$AB = \; 1 \quad -1 \quad 2 \; \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 3 - 2 + 2 = 3$$

b. Bila

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

maka

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + (-3) \times 2 = 3 - 6 = -3 .$$

Baris dari matriks A berukuran $m \times k$ dapat dipandang sebagai matriks baris berukuran $1 \times k$. Kolom dari matriks B yang berukuran $k \times n$ dapat dipandang sebagai matriks kolom berukuran $k \times 1$. Dengan demikian, matriks A terdiri dari m buah baris, matriks B terdiri dari m buah kolom.
Jadi banyaknya baris matriks A sama dengan banyaknya kolom matriks B. Matriks A dan B beginilah yang dapat dikalikan. Definisi tepatnya dapat kita tampilkan sekarang.

Definisi

> ***Hasilkali matriks*** A yang berukuran $m \times k$ dengan matriks B yang berukuran $k \times n$ adalah matriks AB yang berukuran $m \times n$ yang unsur pada baris ke i kolom ke j nya adalah ***perkalian matriks*** baris ke i dari A dengan kolom ke j dari matriks B.

Jadi matriks A hanya dapat dikalikan dengan matriks B kalau banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B.
Jika matriks baris ke i dari matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \end{bmatrix}$$

dan matriks kolom ke j dari B adalah

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{bmatrix},$$

maka unsur matriks AB pada baris ke i kolom ke j adalah

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} a_{im}b_{mj} \ .$$

Hasilkali *AB* dapat digambarkan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ik}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{matrix}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

Unsur pada baris ke *i* kolom ke *j* matriks *AB* adalah hasilkali matriks baris ke *i* dari matriks *A* dengan matriks kolom ke *j* matriks *B*.

Contoh 12

a. Jika $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, tulis $PQ = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, maka

$$p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 2 = 6 + 1 + 0 = 7.$$

$$q = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 3 + 2 + 6 = 11.$$

Jadi $PQ = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$; QP tak dapat dihitung karena banyaknya kolom pada P tidak sama dengan banyaknya baris pada Q.

b. Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 1 & 0 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 2 \\ 2 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+9+2 & 0+3+4 \\ 4+3+1 & 0+1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 0 \times 2 & 2 \times 3 + 0 \times 1 & 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 3 \times 0 + 1 \times 2 & 3 \times 3 + 1 \times 1 & 3 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jelaslah $AB \neq BA$.

c. Jika $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $RS = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

sedangkan $SR = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d. Jika $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ maka $KL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$\text{sedangkan } LK = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = KL.$$

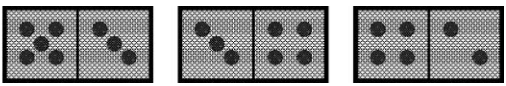
e. Bila $U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan $V = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$UV = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 & 1\times 2 & 1\times 1 \\ -1\times 2 & -1\times 2 & -1\times 1 \\ 2\times 2 & 2\times 2 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{sedangkan } VU = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2\times 1 + 2\times(-1) + 1\times 2] = [2], \text{ atau 2 saja.}$$

Dari Contoh 12 jelas terlihat bahwa pada umumnya perkalian matriks tidak komutatif.

Kesesuaian ukuran matriks yang dapat dikalikan mirip dengan aturan penyambungan domino seperti berikut.



P ***Q*** ***R***

Dalam permainan domino kita dapat menyusun kartu domino seperti di atas. Kartu domino *P*[5|3] dapat disambungkan dengan kartu *Q*[3|4] Kartu *Q* ini selanjutnya dapat pula disambungkan dengan kartu *R*[4|2]. Posisi yang terbuka sekarang adalah sama dengan posisi satu kartu [5|2] yang berarti kita dapat menyambung di kiri dengan kartu [*m*|5] di kanan dengan kartu [2|*n*]. Hal ini serupa dengan mengalikan matriks A berukuran 5×3, di kanan dengan matriks B berukuran 3×4, dilanjutkan dengan mengalikan di kanan dengan matriks C berukuran 4×2.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}\rangle & 0\\ \cap & \otimes\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ \sqrt{-5}\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ G=\ 0\quad 0\quad 0\ ,\ H=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Berilah tanda silang (x) pada kotak yang sesuai!

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
matriks									
matriks baris									
matriks kolom									
matris bujursangkar									
matriks segitiga bawah									
matriks segitiga atas									
matriks diagonal									

2) Perkalian dengan skalar.
Jika

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}\ ,\ \begin{cases}i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n\end{cases}$$

dan p bilangan real, maka

$$pA = A = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & pa_{13} & \cdots & pa_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & pa_{23} & \cdots & pa_{2n} \\ pa_{31} & pa_{32} & pa_{33} & \cdots & pa_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pa_{m1} & pa_{m2} & pa_{m3} & \ldots & pa_{mn} \end{bmatrix}$$

a. Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, hitunglah $P - 2Q$.

b. Jika $R = P + sQ$, carilah s supaya $r_{21} = 0$, dan hitunglah $P + sQ$.

3) Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

a Periksa yang manakah dari yang berikut yang dapat dihitung: AB, BA, BC, CB, $BD+2C$, $2BC+D$, $2AB+C$, $2AC+B$.

b. Hitunglah bentuk-bentuk di a. yang dapat dihitung.

4) Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a. hitunglah AB, AC, AD, BA, A^2.

b. Dibandingkan dengan perkalian bilangan real, apakah yang agak lain pada hasil di bagian a.?

5) Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

a. hitunglah A^n, B^n dan C^n untuk $a = 0$ dan n asli >1,

b. hitunglah A^n, B^n dan C^n untuk $a \neq 0$ .dan $n = 2$, $n = 3$.

c. Dari hasil di b) cobalah memperkirakan rumus untuk B^n, untuk $a \neq 0$. Buktikan rumus itu menggunakan induksi matematika.

Petunjuk Jawaban Latihan

1)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
matriks	x	x		x		x	x	x	x
matriks baris							x		
matriks kolom									
matris bujursangkar		x		x		x		x	x
matriks segitiga bawah				x		x			
matriks segitiga atas		x		x		x			
matriks diagonal				x		x			

E bukan matriks karena unsurnya ada yang kompleks.

2) a) $P-2Q=\begin{bmatrix}1 & -4 & -4\\ 4 & -3 & -3\end{bmatrix}$, b) $s = 2$, $P+sQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$

3) a) Yang dapat dihitung: *AB*, *BA*, *BC*, dan 2*BC*+*D*

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 4 & -7\\ 0 & 3 & -9\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & -7\end{bmatrix},\quad BC=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix},\ 2BC+D=\begin{bmatrix}14\\ -5\end{bmatrix}$$

4) a) $AB=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$, $AC=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$, $AD=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$,

$A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

b) Pada a. terlihat bahwa sifat-sifat perkalian bilangan real berikut.

i. hukum kanselasi: jika $a \neq 0$, dan $ab = ac$, maka $b = c$.

ii. jika $a \neq 0$ dan $d \neq 0$, maka $ad \neq 0$.

iii. komutatif: $ab = ba$.

iv. jika $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$,tak berlaku untuk perkalian matriks.

5) a) $A^n=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ untuk n asli > 1, $B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B^n=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

untuk n asli > 2, $C^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ untuk n asli > 1.

b) Kasus $a \neq 0$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}\quad C^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 2a \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix},\ C^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 3a^2 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}.$$

c) $B^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$

Bukti (dengan induksi matematika):

i) $n = 1; B^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1} & \frac{1}{2}1(1-1) \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1} \\ 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = B$

ii) Andaikan

$$B^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix},$$

maka

$$B^{k+1} = B^k B = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k.1+ka^{k-1}.a & ka^{k-1}.1+\tfrac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}.a \\ 0 & a^{k+1} & a^k.1+ka^{k-1}.a \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k & \tfrac{1}{2}(k+1)ka^{k-1} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

RANGKUMAN

1. *Matriks* $m \times n$ adalah susunan bilangan real yang berbentuk persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom (lajur), tiap baris memuat n bilangan, tiap kolom memuat m bilangan.
2. Untuk matriks bujursangkar $A = [a_{Ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, n$
   a. unsur a_{ii}, i = 1, 2,…, n disebut unsur *diagonal,*
   b. unsur a_{ij}, dengan $j > i$ disebut unsur *atas diagonal,*
   c. unsur a_{ij}, dengan $j < i$ disebut unsur *bawah diagonal.*
3. *Jenis* matriks:
   menurut *ukuran*nya:
   a. $m = 1$, matriks *baris,*
   b. $n = 1$, matriks *kolom,*
   c. $m = n$, matriks *bujursangkar*;
   untuk matriks bujursangkar:
   menurut *tempat* unsur nol:
   a. semua unsur *atas* diagonal adalah nol: *matriks segitiga bawah*,
   b. semua unsur *bawah* diagonal adalah nol: *matriks segitiga atas*,
   c. semua unsur *bukan* diagonal adalah nol: *matriks diagonal*.
4. Jika

   $A = \left[a_{ij}\right], \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$, dan $B = \left[b_{ij}\right], \begin{cases} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$,

   jumlah matriks A dengan matriks B adalah

   $$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right], \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}.$$

5. **Perkalian** matriks baris $A = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \end{matrix}$ dengan matriks kolom

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

adalah

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_mb_m$$

6. **Hasilkali matriks** A yang berukuran $m \times k$ dengan matriks B yang berukuran $k \times n$ adalah matriks AB yang berukuran $m \times n$ yang unsur pada baris ke i kolom ke j nya adalah **hasilkali matriks** baris ke i dari A dengan kolom ke j dari matriks B.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

bubuhilah tanda silang (x) pada kotak yang sesuai dalam daftar di bawah ini.

	P	Q	R	S	T	U	V
Matriks bujursangkar							
matriks segitiga atas							
matriks segitiga bawah							
matriks diagonal							

2) Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, dan $R = P + Q$, Tentukan nilai a supaya $r_{22} = 6$. Tentukan pula R untuk nilai a ini.

3) Jika A matriks 3×3, B matriks 3×2, C matriks 3×1, D matriks 2×1, periksa yang manakah dari yang berikut yang dapat dihitung.
a. $AB + 2B$, b. $2BA + B$, c. $ABD + C$, d. $BCD + A$

4) Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

hitunglah AB, BA, CB, DB, B^2.

5) Pandang matriks

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Coba rumuskan definisi untuk A_n , n asli sebarang.
b) Carilah bilangan asli m yang terkecil yang memenuhi $(A_2)^m = 0$.
c) Carilah bilangan $m(n)$ yang terkecil yang memenuhi $(A_n)^{m(n)} = 0$, $m(2)$ sudah diperoleh di *b*).

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Bilangan Real

Untuk dapat membahas sifat-sifat penjumlahan dan perkalian matriks lebih lanjut dengan lancar, begitu juga untuk mempelajari konsep lain dalam aljabar linear elementer seperti ruang vektor dan lain-lain, kita perlu membahas sifat-sifat bilangan real lebih dulu.

Sifat-sifat bilangan real yang sangat kita perlukan adalah sifat-sifat aljabarnya, yaitu sifat-sifat pada penjumlahan dan perkalian. Dengan sifat-sifat itu himpunan bilangan real dikatakan merupakan *lapangan*, yang dalam bahasa Inggris disebut *field.* Sesungguhnya semua sifat itu sudah Anda kenal sejak mulai belajar di sekolah dasar.

Untuk lebih memantapkan pemahaman Anda, pada kesempatan ini sifat itu akan kita tampilkan dengan sorotan yang lebih cermat.

BILANGAN REAL SEBAGAI LAPANGAN

Sejak Anda mulai belajar berhitung (aritmetika) di sekolah dasar, sampai dengan belajar matematika di SMU, Anda sudah mengenal bilangan real. Untuk selanjutnya himpunan semua bilangan real ditandai dengan R. Sifat-sifatnya dicantumkan di bawah ini.

1. Sifat-sifat Penjumlahan Bilangan Real

Untuk bilangan-bilangan real a, b, dan c. berlaku:

(i) $a + b$ *bilangan real.* — ***tertutup***

(ii) $a + b = b + a$. — ***komutatif***

(iii) $(a + b) + c = a + (b + c)$. — ***asosiatif***

(iv) *Ada bilangan real* 0 *yang memenuhi*
$a + 0 = a$, *untuk setiap bilangan real* a. — ***adanya unsur satuan***

(v) *Untuk tiap bilangan real a ada bilangan real* $-a$ *yang memenuhi* $(-a) + a = 0$. — ***adanya unsur invers***

Kelima sifat di atas mungkin sudah Anda pahami. Akan tetapi ada hal-hal yang perlu diperhatikan benar, untuk itu kita tampilkan penjelasan berikut.

a. **Sifat (i)** menyatakan bahwa himpunan bilangan real ***tertutup*** terhadap penjumlahan, yakni jumlah bilangan real adalah bilangan real lagi. Hal ini tak berlaku misalnya untuk himpunan bilangan tak rasional. Himpunan bilangan tak rasional ***tak tertutup*** terhadap penjumlahan, karena jumlah dua bilangan tak rasional, bisa rasional:

$$1+\sqrt{2}\ +\ 1-\sqrt{2}\ = 2.$$

b. **Sifat (ii)** adalah sifat ***komutatif*** (dapat dipertukarkan).
c. **Sifat (iii)** sifat ***asosiatif***.(pengelompokan)
d. **Sifat (iv)** menyatakan adanya unsur ***satuan*** untuk penjumlahan. Sifat ini tidak dipenuhi oleh himpunan bilangan asli karena himpunan bilangan asli tak memuat 0. Begitu pula himpunan bilangan positif.
e. **Sifat(v)** menyatakan adanya unsur ***balikan*** (invers) $-a$ untuk penjumlahan, yang disebut juga ***negatif*** dari a. Himpunan bilangan asli tak punya invers untuk penjumlahan.

Di samping itu, untuk perkalian berlaku pula:

2. Sifat-sifat Perkalian Bilangan Real
Bila a, b, dan c bilangan real, maka:

Grup Komutatif Terhadap "."

(i) $a \,.\, b$ *bilangan real.*	***tertutup***
(ii) $a \,.\, b = b \,.\, a$	***komutatif***
(iii) $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$	***asosiatif***
(iv) *Ada bilangan real* 1 *yang memenuhi* $a.1=a$ *untuk tiap bilangan real* a.	***Adanya unsur satuan***
(v) *Untuk tiap bilangan real a yang tak nol ada bilangan real* a^{-1} *yang memenuhi* $(a^{-1}).a = 1$.	***Adanya invers***

Seperti pada penjumlahan, untuk perkalian kita juga akan membuat suatu catatan yang penting untuk diperhatikan.

Himpunan yang tak tertutup baik terhadap perkalian maupun terhadap penjumlahan.

Untuk himpunan bilangan tak rasional, juga sifat tertutup terhadap perkalian tak berlaku, perkalian dua bilangan tak rasional, bisa rasional:
$\sqrt{2}-1\ \ \sqrt{2}+1\ = 2-1=1$ yang adalah rasional.

Ada perkalian yang **tak komutatif** dan ada pula yang **tak asosiatif.**

Begitu pula untuk penjumlahan,
$1+\sqrt{2}\ +\ 1-\sqrt{2}\ = 2.$ adalah rasional.

Sifat komutatif, sudah kita ketahui di Bagian 1, tak berlaku untuk perkalian matriks. Nanti akan kita lihat bahwa perkalian silang vektor di $\Re^3$ di samping tak komutatif, juga tak asosiatif.

Bilangan bulat yang **mempunyai invers** terhadap **perkalian** (dalam himpunan bilangan bulat) hanyalah 1 **dan** −1.

Untuk himpunan bilangan bulat (yang biasanya diberi notasi *Z*), balikan setiap unsurnya untuk perkalian, kecuali untuk 1 dan –1, tidak bulat. Jadi himpunan bilangan bulat tak mempunyai invers terhadap perkalian, kecuali untuk unsur 1 dan –1.

Untuk kombinasi penjumlahan dan perkalian bilangan real, berlaku

3. Sifat Distributif Bilangan Real

(i). $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
(ii). $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Dengan dipenuhinya sifat komutatif untuk perkalian bilangan real, sifat distributif cukup dituliskan satu saja.

Sifat Lapangan Bilangan Real

Semua sifat-sifat di atas: sifat-sifat dalam kelompok ***a*)** untuk penjumlahan, dengan yang dalam kelompok ***b*)** untuk perkalian, beserta sifat ***c*)** (sifat distributif), bersama sama disebut sifat ***lapangan*** bilangan real.

Dengan operasi penjumlahan, himpunan bilangan real di samping komutatif, juga memenuhi sifat **(i)**, **(iii)**, **(iv)**, dan **(v)** yakni sifat *tertutup*, *asosiatif*, *mempunyai unsur satuan*, dan setiap unsurnya *punya invers*.

Definisi

Pengurangan $a - b$ adalah penjumlahan a dengan negatif dari b, jadi $a - b = a + (-b)$.

Himpunan bilangan real yang tak nol $R\backslash\{0\}$ untuk operasi perkalian mempunyai sifat yang sama dengan yang pada operasi penjumlahan.

Definisi

> Jika $b \neq 0$, **hasil bagi** a/b adalah $a.(b^{-1})$

Sesungguhnya dalam matematika terdapat banyak himpunan yang mempunyai ciri khusus semacam itu, yakni mempunyai satu operasi biner (*) yang memenuhi sifat(***i***), (***iii***), (***iv***), dan (***v***).Himpunan seperti itu disebut **grup**. Sebelum membahas grup lebih lanjut, kita bahas dulu operasi biner pada suatu himpunan $\mathcal{K}$ sebarang. Untuk $\mathcal{K}$ himpunan matriks real berukuran 2×2, sebagai operasi binernya, untuk unsur A dan $B \in \mathcal{K}$ dapat diambil perkalian matriks biasa, jadi $A * B = AB$. Untuk jelasnya kita tuliskan dulu definisi operasi biner.

Definisi

> Operasi **biner** pada himpunan $\mathcal{K}$ yang tak hampa adalah suatu fungsi atau pemetaan (*): dari $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ ke dalam $\mathcal{K}$. Ditulis: $(*)(a,b) = a * b$.

Pengertian ke dalam di sini adalah bahwa $a* b$ harus $\in \mathcal{K}$, bila $a \in \mathcal{K}$ dan $b \in \mathcal{K}$.
Sifat ini juga disebut sifat ***tertutup*** himpunan $\mathcal{K}$ terhadap operasi (*).

Contoh 1

a. Untuk $\mathcal{K}$ himpunan bilangan real, sebagai operasi biner dapat diambil: $(*)(a,b) = a+2b$, atau $5a\sin b$, atau pada umumnya $f(a,b)$, dengan f fungsi sebarang dari $R \times R$ ke dalam R.

b. Untuk $\mathcal{K}$ himpunan bilangan bulat, $a* b = f(a,b)$ harus $\in \mathcal{K}$. Dengan demikian
  (i) $a * b = a + b$, $2ab$, $|a|b$, $2a^2|b|$ adalah *operasi biner* pada himpunan bilangan bulat, karena bila a dan b bulat, $a* b$ juga bulat.
  (ii) $a* b = a \sin b$, a/b $(b \neq 0)$, dan $a - b$, adalah operasi biner pada bilangan real, akan tetapi *bukan* operasi biner pada himpunan bilangan asli, karena ada a dan b asli yang memberikan $a* b$ bukan bilangan asli.

(iii) Operasi biner $(*)(a,b) = a + 2b$ pada bilangan real, tak komutatif dan tak asosiatif. Ambil $a=1$, $b=2$, $a * b = a + 2b = 1 + (2\times 2) = 5$, sedangkan $b * a = b + 2a = 2 + (2 \times 1) = 4$. Untuk memperlihatkan sifat tak asosiatif, ambil $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, maka
$(a * b) * c = (1 + 2 \times (-1)) + 2 \times 2 = 3$ sedangkan
$a * (b * c) = 1 + 2(-1 + 2 \times 2) = 7$.

(iv) Pandang sebagai $\mathcal{K}$ himpunan matriks 2×2 dengan operasi perkalian matriks. Sebagai operasi biner $(*)(A,B) = AB$, pada Bagian 1 sudah kita lihat bahwa operasi ini tidak komutatif.

Pandang himpunan tak hampa $\mathcal{G}$ dan unsur-unsur sebarang *a*, *b*, *dan c*.

Definisi

Himpunan $\mathcal{G}$ dengan operasi biner $(*) : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ disebut ***grup*** terhadap operasi (*) bila:

(i). $(a * b) * c = a * (b * c)$ **asosiatif**

(ii). Ada $e \in \mathcal{G}$ yang memenuhi
$a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in \mathcal{G}$ **unsur satuan**

(iii). Untuk tiap $a \in \mathcal{G}$ ada $a^{-1} \in \mathcal{G}$ yang memenuhi $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. **unsur invers**

Grup $\mathcal{G}$ yang memenuhi: $a * b = b * a$ untuk setiap $a \in \mathcal{G}$ dan $b \in \mathcal{G}$ disebut grup **komutatif** atau grup **Abel.**

Contoh 2

Contoh-contoh himpunan yang grup dan yang bukan grup terhadap suatu operasi.

a. Dari sifat penjumlahan bilangan real terhadap penjumlahan, **himpunan bilangan real** adalah grup Abel. Periksalah sendiri!

b. **Himpunan bilangan bulat** (biasanya dinotasikan dengan *Z*) dengan operasi penjumlahan bilangan real adalah grup terhadap operasi penjumlahan (jadi dalam hal ini * adalah +), karena jumlah bilangan bulat adalah bilangan bulat lagi, sifat asosiatif dan unsur satuan 0 "diwarisi" dari bilangan real sedangkan negatif dari bilangan bulat adalah bilangan bulat lagi. (Pembuktian rinci tidak kita lakukan di sini.)

c. **Himpunan bilangan rasional** (biasanya dinotasikan dengan Q) dengan operasi penjumlahan bilangan real adalah grup pula. ***Bukti***nya adalah sebagai berikut.

Kita gunakan sifat bahwa bilangan rasional adalah hasil bagi dua bilangan bulat dengan penyebut tak nol. Pandang dua bilangan rasional sebarang a dan b, maka $a = k/l$, k bulat, l bulat tak-nol. Begitu pula, $b = m/n$. m bulat, n bulat tak nol.

Maka $a + b = k/l + m/n = (kn + ml)/(ln)$, $kn + ml$ bulat, ln bulat tak nol. Jadi $a+b$ rasional, sehingga sifat **tertutup** bilangan rasional terhadap + dipenuhi.

Jika a, b, dan c, bilangan rasional, maka jelaslah a, b, c, juga bilangan real. Jadi sifat **asosiatif** terhadap + juga berlaku untuk mereka:
$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Karena 0 adalah bilangan rasional, himpunan bilangan rasional mempunyai **unsur satuan** terhadap + yakni 0 yang juga bilangan rasional.

Jika a bilangan rasional, maka $a = m/n$, m bulat, n bulat tak nol.

Invers a untuk + adalah $-a = -(m/n) = (-m)/n$ yang adalah juga bilangan rasional, karena $-m$ adalah bulat, dan n bulat tak nol. Dengan demikian jelaslah sudah bahwa himpunan bilangan rasional dengan operasi + pada bilangan real, adalah grup

Karena sifat komutatif penjumlahan juga di "warisi" maka himpunan bilangan rasional adalah grup Abel terhadap +. Dengan cara serupa dapat pula ditunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional yang tak nol juga merupakan grup Abel baik terhadap + maupun terhadap perkalian. Kerjakanlah sendiri!

d. Pada pembahasan sifat-sifat bilangan real sudah kita lihat bahwa himpunan bilangan tak rasional **tak tertutup** terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan real. Dengan demikian baik terhadap perkalian maupun terhadap penjumlahan, himpunan bilangan tak rasional **bukan** grup.

e. Himpunan bilangan real dengan operasi (*): $(a,b) \rightarrow 3ab$ komutatif dan asosiatif terhadap operasi ini. (Bukti?). Unsur satuan e memenuhi $3ae = 3ea = a$, jadi $e = 1/3$. a^{-1} memenuhi $a^{-1} * a = e$, atau $3a^{-1}\,a = 1/3$, jadi $a^{-1} = a/9$. Dengan operasi ini himpunan bilangan real adalah grup.

Himpunan bilangan real R dengan dua operasi biner, yakni penjumlah an (+) dan perkalian (.) memenuhi sifat-sifat ***a)***, ***b)***, dan ***c)*** yang di sebut sifat *lapangan.* Himpunan dengan dua operasi biner yang memenuhi tiga kelompok sifat itu akan kita sebut *lapangan* atau *medan.* Definisi tepat nya kita cantumkan di bawah ini.

Definisi

> Himpunan $\mathcal{F}$ dengan dua operasi biner $\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dan $\otimes : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ disebut **lapangan**, bila:
> (i). $\mathcal{F}$ dengan operasi $\oplus$ merupakan grup komutatif.
> (ii). $\mathcal{F}\ \backslash\{0\}$ dengan operasi $\otimes$ merupakan grup komutatif. (0 unsur satuan untuk $\oplus$)
> (iii). Pada $\mathcal{F}$ berlaku sifat distributif : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Di bawah ini kita bahas contoh-contoh himpunan yang merupakan lapangan dan yang bukan.

Contoh 3

Contoh-contoh lapangan.

a. Sudah kita lihat bahwa himpunan bilangan real terhadap penjumlahan dan perkalian yang "biasa" memenuhi tiga sifat itu. Dengan demikian, himpunan bilangan real dengan penjumlahan itu merupakan lapangan.

b. Ketika membicarakan contoh-contoh grup sudah kita lihat bahwa himpunan bilangan rasional Q dengan operasi (+) merupakan grup. Grup ini komutatif karena diwarisi dari himpunan bilangan real R. Begitu pula dapat diperlihatkan bahwa $Q\backslash\{0\}$ dengan operasi (.) juga merupakan grup Abel. Di samping itu, sifat distributif juga diwarisi dari himpunan bilangan real. Dengan demikian terlihat bahwa Q dengan operasi (+) dan (.) adalah suatu lapangan.

c. Pandang operasi $\oplus$ dan $\odot$ sebagai berikut pada himpunan bilangan real:
$\forall\ (a\ , b) \in R \times R,\ \oplus(a,b) = a \oplus b = 2a + b,$ dan $\odot(a,b) = a \odot b = ab.$
Jika $a = 1$, dan $b = 2$, maka $1 \oplus 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$, dan
$2 \oplus 1 = (2 \times 2) + 1 = 5.$
$(a \oplus b) \oplus c = 2(2a + b) + c = 4a + 2b + c$
dan
$a \oplus (b \oplus c) = 2a + (2b + c) = 2a + 2b + c.$

Jelaslah operasi $\oplus$ tak *komutatif* dan *tak asosiatif* pada R.
Sekarang akan kita periksa sifat distributif dua operasi itu.
$a \oplus (b \odot c) = a \oplus (bc) = 2a + bc$, sedangkan
$(a \oplus b)\odot(a \oplus c) = (2a+b)(2a+c) = 4a^2 + 2a(b+c)+bc$. Begitu pula
$(a \odot b) \oplus c = 2ab + c$, sedangkan $(a \odot c) \oplus (b \odot c) = 2ac + bc$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Untuk soal 1 dan 2 berikut periksa apakah pemetaan $\star: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathcal{K}$ yang diberikan.

1) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan tak rasional, $a \star b =$ (i) $a - b$ (ii) ab (iii) $a + 7b$
2) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan genap, $a \star b =$ (i) $1{,}5a + 0{,}5b$ (ii) $2a + b$ (iii) $0{,}5ab$
3) Periksa apakah sifat-sifat operasi biner pada R yang tercantum dalam tabel berikut berlaku untuk himpunan bagian $A \subseteq R$ yang berikut. Beri tanda "✓" untuk yang berlaku dan tanda "-" untuk yang tidak.

Him.Bagian	Sifat / Operasi	Tertutup	komu-tatif	Asosi-atif	Memp. unsur satuan	Memp.unsur invers	distri-butif
Asli	+						
	×						
Cacah	+						
	×						
Bulat	+						
	×						
Ganjil	+						
	×						
Genap	+						
	×						
Rasional	+						
	×						
Tak Rasional	+						
	×						

4) Periksa apakah himpunan berikut dengan operasi yang diberikan merupakan grup atau tidak. Beri alasan untuk jawaban Anda!
   (i) himpunan bilangan asli dengan penjumlahan bilangan real.
   (ii) himpunan bilangan asli dengan perkalian bilangan real.
   (iii) $R\backslash\{0\}$dengan operasi $a * b = 2ab$.
5) Periksa sifat distributif dua operasi berikut pada R. Apakah terhadap dua operasi itu R merupakan lapangan? Jelaskan jawab Anda!
   (i). $a \odot b = 2ab$, $a \oplus b = a + b$ (ii) $a \odot b = ab$, $a \oplus b = a - b$
6) (i). Jika a, b, dan c bilangan real, buktikan:
   a + b = a + c berakibat b = c. (Hukum pencoretan untuk jumlah)
   (ii). Buktikan *hukum pencoretan* untuk perkalian:
   Jika: a, b, dan c bilangan real, $a \neq 0$, $ab = ac$, maka $b = c$.
   Jelaskan kenapa diperlukan persyaratan $a \neq 0$, $b \neq 0$.
7) Buktikan untuk a, b real: (i) Jika $ab = 0$ dan $a \neq 0$, maka $b = 0$, (ii). Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka $ab \neq 0$, (iii). Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) i) $\star$ bukan operasi biner, karena ada $a, b \in \mathcal{K}$, yakni $a = b = \sqrt{2}$, yang memberikan $a \star b = a - b = 0 \notin \mathcal{K}$.
   ii) bukan operasi biner, karena ada $a, b \in \mathcal{K}$, yakni $a = b = \sqrt{2}$, yang memberikan $ab = 2 \notin \mathcal{K}$
   iii) juga bukan operasi biner karena apapun $a \in \mathcal{K}$ ambil $b = -a/7$ yang jelas tak rasional akan tetapi $a + 7b = 0 \notin \mathcal{K}$
2) $a, b \in \mathcal{K}$, $a = 2p$, $b = 2q$, p, q bulat.
   i) $1{,}5a + 0{,}5b = 1{,}5 \times 2p + 0{,}5 \times q = 3p + q$. Ada p dan q yang memberikan $3p + q$ ganjil, yaitu $p = 1$ dan $q = 2$, sehingga operasi ini bukan operasi biner.
   ii) $2a + b = 2 \times 2p + 2q = 2(2p + q)$ adalah (selalu) genap, sehingga operasi ini operasi biner.
   iii) $0{,}5ab = 0{,}5 \times 2p \times 2q = 2pq$ genap, sehingga operasi ini adalah operasi biner.

3)

Him. Bagian	Sifat Operasi	Tertutup	Komutatif	Asosiatif	Memp. unsur satuan	Memp. unsur invers	Distributif
Asli	+	✓	✓	✓	-	-	
	×	✓	✓	✓	✓	-	✓
Cacah	+	✓	✓	✓	✓	-	
	×	✓	✓	✓	✓	-	✓
Bulat	+	✓	✓	✓	✓	✓	
	×	✓	✓	✓	✓	-	✓
Ganjil	+	-	✓	✓	-	-	
	×	✓	✓	✓	✓	-	✓
Genap	+	✓	✓	✓	✓	-	
	×	✓	✓	✓	-	-	✓
Rasional	+	✓	✓	✓	✓	✓	
	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
TakRasional	+	-	✓	✓	-	✓	
	×	-	✓	✓	-	✓	✓

Terlihat bahwa sifat komutatif, asosiatif, dan distributif terhadap operasi + dan × selalu diwariskan kepada himpunan bagian bilangan real.

4) i) Bukan grup karena tak mempunyai unsur satuan terhadap +,karena 0 bukan bilangan asli(juga karena tak mempunyai unsur invers, karena ½ bukan bilangan asli).

ii) Bukan grup karena 0 tak mempunyai invers terhadap ×.

iii) Merupakan grup (komutatif) dengan unsur satuan ½ dan $a^{-1} = a/4$.

5) i) Merupakan lapangan karena semua syarat dipenuhi.
Terhadap + merupakan grup, $R\backslash\{0\}$ merupakan grup dengan unsur satuan ½ dan invers $a^{-1} = a/4$. Sifat distributif
$a \odot (b \oplus c) = 2a(b + c) = 2ab + 2ac = a \odot c \oplus b \odot c$.

ii) Tidak merupakan lapangan karena tidak asosiatif terhadap
$\oplus$: $a - (b - c) = a - b + c \neq a - b - c = (a - b) - c$.

6) i) a + b = a + c, maka –a + a +b = –a + a + c, dengan demikian
$(-a + a) + b = (-a + a) + c$, atau $b = c$.

ii) $ab = ac$, karena $a \neq 0$, a^{-1} ada, maka $a^{-1}\, a\, b = a^{-1}\, ac$, atau $1b = 1c$. Jadi $b = c$.

7) i) $ab = 0$, $a \neq 0$, a^{-1} ada, $a^{-1}\, ab = a^{-1}\, 0 = 0$, atau $1b = 0$. Jadi $b = 0$.

ii) $a \neq 0$, $b \neq 0$, a^{-1} dan b^{-1} ada. Kita buktikan menggunakan kontradiksi. Andaikan $b = 0$, maka $a^{-1}\,ab = 0$, atau $b = 0$, bertentangan dengan yang diketahui. (Dapat juga $ab\,b^{-1} = 0$ mengakibatkan $a = 0$).

iii) $ab = 0$, maka ada dua kemungkinan $a = 0$, atau $a \neq 0$. Menurut i) $a \neq 0$ berakibat $b = 0$.

RANGKUMAN

1. Operasi **biner** pada himpunan $\mathcal{K}$ yang tak hampa adalah suatu fungsi atau pemetaan (*): dari $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ ke dalam $\mathcal{K}$. Ditulis: $(*)(a,b) = a*b$.
2. Operasi biner pada himpunan $\mathcal{K}$ *belum tentu* merupakan operasi biner pula pada himpunan bagian $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$, sifat tertutup tak selalu diwariskan ke himpunan bagian (lihat Contoh 1.b.(ii)).
3. Himpunan $\mathcal{G}$ dengan operasi biner $(*) : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ disebut ***grup*** terhadap operasi (*) bila:
   (i). $(a * b) * c = a * (b * c)$ **asosiatif**
   (ii). Ada $e \in \mathcal{G}$ yang memenuhi
   $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in \mathcal{G}$ **unsur satuan**
   (iii). Untuk tiap $a \in \mathcal{G}$ ada $a^{-1} \in \mathcal{G}$ yang
   memenuhi $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. **unsur invers**
4. Grup $\mathcal{G}$ yang memenuhi: $a*b = b*a$ untuk setiap $a \in \mathcal{G}$ dan $b \in \mathcal{G}$ disebut grup **komutatif** atau grup **Abel.**
5. Sifat-sifat komutatif dan asosiatif suatu operasi biner, selalu diwariskan ke pada himpunan bagian, sedangkan adanya unsur satuan, dan adanya unsur invers tidak demikian.
6. Himpunan $\mathcal{F}$ dengan dua operasi biner $(+) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dan $(.) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ disebut **lapangan**, bila: (i). $\mathcal{F}$ dengan operasi (+) merupakan grup komutatif. (ii). $\mathcal{F} \setminus \{0\}$ dengan operasi (.) merupakan grup komutatif. (0 unsur satuan untuk (+). (iii). Pada $\mathcal{F}$ berlaku sifat distributif : $a.(b+c) = a.b + a.c$.
7. Sifat distributif operasi-operasi biner pada lapangan juga selalu diwariskan kepada himpunan bagian.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Periksa apakah pemetaan $\star: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ berikut merupakan operasi biner pada himpunan $\mathcal{K}$ yang diberikan.
   a) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan rasional, i) $a \star b = a\sqrt{|b|}$,
   ii) $a \star b = 2a - 3b$
   b) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan genap , i). $a \star b = a + ½b$, ii) $a \star b = a + b$

2) Periksa apakah operasi biner $\ast$ berikut pada R, komutatif, asosiatif, punya unsur satuan, punya invers (tentukan unsur-unsur itu, kalau ada) bila *a*) $a \ast b = a + 3b$, *b*) $a \ast b = 2ab$.

3) Manakah dari himpunan bagian bilangan real berikut yang merupakan grup: a) terhadap operasi +, *b*) terhadap operasi $\times$
   a) himpunan bilangan bulat
   b) himpunan bilangan genap
   c) himpunan bilangan positif

4) Manakah dari himpunan berikut yang merupakan lapangan terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang diberikan dan mana yang bukan, jelaskan jawab Anda!
   a) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan rasional, $a \oplus b = (a+b)$, $a \otimes b = 2ab$.
   b) $\mathcal{K}$ = himpunan bilangan real, $a \oplus b = 2(a+b)$, $a \otimes b = 2ab$

5) Buktikan bahwa:
   a) jika $p \neq 0$ dan $p(q+r) = 0$, maka $q = -r$.
   b) jika $(p - q)(r + s) = 0$, maka $p = q$ atau $r = -s$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Sifat Operasi Matriks

Pada Kegiatan Belajar 1 sudah kita bicarakan penjumlahan dan perkalian matriks dan perkalian dengan skalar. Pada Kegiatan Belajar 2 kita membahas sifat-sifat bilangan real. Hal ini mendorong kita untuk meninjau lebih lanjut sifat-sifat operasi matriks. Sudah kita ketahui penjumlahan matriks adalah komutatif, sedangkan perkalian matriks tak komutatif.

Sesungguhnya terhadap penjumlahan, himpunan matriks berukuran sama, adalah grup komutatif. Keasosiatifan berlaku untuk penjumlahan matriks. Akan kita perlihatkan kelak bahwa perkalian matriks juga asosiatif. Perkalian matriks dengan skalar ternyata ekivalen dengan mengalikan matriks itu dengan suatu matriks diagonal yang setiap unsur diagonalnya adalah skalar itu. Beberapa sifat perkalian bilangan real yang diturunkan dari sifat grup bilangan real, seperti hukum kanselasi ternyata tak berlaku untuk perkalian matriks.

A. SIFAT ASOSIATIF PERKALIAN MATRIKS

Untuk membahas keasosiatifan perkalian matriks pandang 3 matriks A, B, C berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Untuk contoh ini ternyata $(AB)C = A(BC)$

Sifat asosiatif ini memang berlaku umum untuk perkalian matriks:

D a l i l

> (Sifat asosiatif perkalian matriks)
> Jika A matriks $m \times n$, B matriks $n \times k$, C matriks $k \times q$, maka $(AB)C = A(BC)$.

Bukti

Tulis $AB = P = [p_{ih}]$, $i = 1,..,m$, $h = 1,..,k$, $(AB)C = PC = R = [r_{ij}]$, $BC = M = [m_{ij}]$, $A(BC) = AM = S = [s_{ij}]$, maka akan dibuktikan $R = S$. Jelaslah R dan S berukuran sama, yaitu $m \times q$.

$$p_{ih} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{th},\ i = 1,\ldots,m,\ h = 1,\ \ldots\ k,$$

$$m_{ij} = \sum_{h=1}^{k} b_{th} c_{hj},\ \ i = 1,\ldots,n,\ \ j = 1,\ldots,q\ ;$$

$$r_{ij} = \sum_{h=1}^{k} p_{ih} c_{hj} = \sum_{h=1}^{k} \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{th}\right) c_{hj} = \sum_{h=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{th} c_{hj}\ ;$$

$$s_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} m_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \left(\sum_{h=1}^{k} b_{th} c_{hj}\right) = \sum_{h=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{th} c_{hj}\ ,\ \ i = 1,\ \ldots\ ,m,\ \ j = 1,\ \ldots\ ,q.$$

Dengan demikian, $r_{ij} = s_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,q$, dan $(AB)C = A(BC)$.

Kalau Anda lupa mengenai perkalian matriks, lihatlah kembali bagian 1 Modul 1 ini. Dengan berlakunya sifat asosiatif pada perkalian matriks, seperti pada perkalian bilangan real, baik $A(BC)$ maupun $A(BC)$ (bila keduanya punya arti) dapat dinyatakan dengan ABC saja.

B. SIFAT DISTRIBUTIF PERKALIAN MATRIKS

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1

Ambil

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

maka

$$B + C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = A(B+C).$$

Contoh 2

Demikian pula bila

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (P+Q)R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$PR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$QR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad PR + QR = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (P+Q)R.$$

Sifat ini berlaku umum, dan dapat dinyatakan sebagai berikut.

D a l i l

Sifat distributif perkalian matriks
a. Jika A matriks $m \times n$, B dan C matriks $n \times k$, maka $A(B+C) = AB + AC$.
b. Jika P dan Q matriks $p \times s$ dan R matriks $s \times t$, maka $(P+Q)R = PR + QR$.

Bukti

a. Unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $A(B+C)$ adalah
$\sum_{s=1}^{n} a_{is}(b_{sj} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} + \sum_{s=1}^{n} a_{is} c_{sj}$. Ruas kanan adalah unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $AB + AC$.

b. Unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $(P+Q)R$ adalah
$\sum_{h=1}^{s} (p_{ih} + q_{ih}) r_{hj} = \sum_{h=1}^{s} p_{ih} r_{hj} + \sum_{h=1}^{s} q_{ih} r_{hj}$. Ruas kanan adalah unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $PR + QR$.

C. PERKALIAN MATRIKS DENGAN BILANGAN REAL

Perkalian matriks dengan bilangan real (di kiri atau di kanan) adalah mengalikan setiap unsur matriks itu dengan bilangan real itu. Dapat dilihat nanti bahwa hal ini ekivalen dengan mengalikan matriks itu dengan suatu matriks diagonal di kiri atau di kanan.

Definisi

Jika $A = [\, a_{ij} \,]$ suatu matriks, perkalian matriks A dengan bilangan real c, (ditulis cA) adalah $c[\, a_{ij} \,]$, yakni matriks yang ukurannya sama dengan ukuran matriks A dan unsur pada baris ke i kolom ke j nya adalah ca_{ij}.

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3

Pandang matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 2 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad c=3, \text{ maka } cA = Ac = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-1) \\ 3\times\frac{1}{3} & 3\times 2 \\ 3\times 0 & 3\times\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad d = 2\sqrt{3}, \text{ maka}$$

$$dB = Bd = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2} & 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\times(-\frac{1}{2}) \\ 2\sqrt{3}\times 1 & 2\sqrt{3}\times 0 & 2\sqrt{3}\times(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ambil matriks diagonal

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

maka

$$CA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 2 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3A,$$

dan

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 2 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3A.$$

Untuk B ambil

$$E = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \text{ dan } F = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

maka

$$EB = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -6 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\,B$$

dan

$$BF = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -6 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\,B.$$

Pada contoh di atas untuk matriks A yang berukuran 3×2 matriks diagonal C yang berukuran 3×3 dengan unsur diagonal 3 dan matriks diagonal D yang berukuran 2×2 dengan unsur diagonal 3 memenuhi $CA = AD = cA = Ac$, $c = 3$.

Untuk matriks B yang berukuran 2×3, matriks E yang berukuran 2×2 dengan unsur diagonal $2\sqrt{3}$ dan matriks F yang berukuran 3×3 unsur diagonalnya $2\sqrt{3}$ memenuhi $EB = BF = cB = Bc$, $c = 2\sqrt{3}$.

Sesungguhnya hal ini memang berlaku secara umum, dan dapat dinyatakan oleh dalil berikut.

D a l i l

> Jika A matriks $m\times n$, c bilangan real, C matriks diagonal $m\times m$ yang unsur diagonalnya = c, dan D matriks diagonal $n\times n$ yang unsur diagonalnya = c, maka $CA = AD = cA$.

Bukti

Ukuran matriks CA, AD, dan cA sama yaitu $m\times n$.

Tulis $A = [\,a_{ij}\,]$, $CA = P = [\,p_{ij}\,]$, $AD = Q = [\,q_{ij}\,]$, maka

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj} = c_{ii}a_{ij} = ca_{ij}$$, karena $c_{ik} = 0$, bila $i \neq k$, $c_{ik} = c$ bila $i = k$.

Jadi $CA = P = [\,p_{ij}\,] = c[\,a_{ij}\,] = cA$.

Begitu pula $q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj} = a_{ij}d_{jj} = a_{ij}\,c = c\,a_{ij}$, sehingga diperoleh

$AD = Q = [\,q_{ij}\,] = c[\,a_{ij}\,] = cA$. Jadi $CA = AD = cA$ terbukti.

Contoh 4

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ c = \sqrt{2}\ ,$$

maka menurut dalil di atas, matriks

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},\ \text{dan}\quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

memenuhi

$$CA = AD = \sqrt{2}\,A.$$

Khususnya untuk $c = 1$, dalil ini berarti $I_m A = AI_n = A$, I_m matriks satuan orde m, I_n matriks satuan orde n. Jika A matriks diagonal orde m, maka $A\,I_m = I_m A = A$.

Dari sifat-sifat bilangan real, dengan mudah dapat dibuktikan dalil berikut.

D a l i l

> Jika A matriks $m\times n$, B matriks $n\times k$, c dan d bilangan real, maka:
> (1) $c\,(dA) = (cd)\,A = d\,(cA)$
> (2) $A\,(cB) = (cA)\,B = c\,(AB)$

Bukti

1. Unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $c\,(dA)$: $c(da_{ij}) = (cd)a_{ij}$. Unsur pada baris ke i kolom ke j matriks $d\,(cA)$: $d\,(c\,a_{ij}) = (cd)\ a_{ij}$.

   Jadi $c\,(dA) = (cd)\,A = d\,(cA)$ terbukti.
2. Unsur baris ke i kolom ke j matriks $A\,(cB)$ ialah

   $$\sum_{s=1}^{n} a_{is}(cb_{sj}) = \sum_{s=1}^{n}(ca_{is})b_{sj} = c\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$, yang berarti

   $A\,(cB) = (cA)\,B = c\,(AB)$.

Contoh 5

Ambil $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $c = 2$, $d = -1$

$$2(-1A) = -2A = -2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} = (-1\times 2)A.$$

$$A(2B) = 2AB = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(-1A)B = -1AB = -AB = -\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Begitu pula sifat distributif yang dinyatakan dalil berikut dapat pula dibuktikan menggunakan sifat-sifat bilangan real.

D a l i l

Jika A dan B matriks berukuran $m\times n$, c dan d bilangan real, maka:
(1) $cA + dA = (c+d)A$, (2) $cA + cB = c\,(A+B)$, (3) $(cd)A = c(dA)$
(4) $1A = A$, (5) $(aA)B = A(aB) = a\,(AB)$

Bukti

(Di sini akan dibuktikan (1) dan (2), yang lainnya buat sendiri)
Pandang unsur pada baris ke i kolom ke j tiap matriks:

(1) Untuk $cA + dA$: $ca_{ij} + da_{ij}$. Untuk $(c + d)A$: $(c+d)a_{ij} = ca_{ij} + da_{ij}$,
$(c + d)A = Ca + dA$ terbukti.

(2) Untuk $cA + cB$: $ca_{ij} + cb_{ij}$. Untuk $c(A + B)$: $c(a_{ij} + b_{ij})$,
jadi $cA + cB = c(A + B)$ terbukti pula.

Beberapa dari sifat di atas akan diperlukan nanti dalam pembahasan ruang vektor.

D. MATRIKS BUJURSANGKAR DAN SIFAT-SIFATNYA

Karena matriks bujursangkar adalah juga matriks, maka semua sifat operasi matriks juga berlaku untuk matriks bujursangkar. Pada himpunan matriks yang berukuran sama, $m \times n$, penjumlahan matriks adalah suatu operasi biner yang asosiatif dan komutatif. Unsur satuan untuk penjumlahan adalah matriks yang semua unsurnya = 0.

Invers matriks $A = [a_{ij}]$ terhadap jumlah adalah matriks $-A = [-a_{ij}]$. Dengan demikian himpunan matriks yang berukuran sama adalah grup komutatif terhadap jumlah. Akan tetapi ada sifat operasi yang hanya berlaku pada matriks bujursangkar saja.

Pandang himpunan matriks bujursangkar orde m. Pada himpunan matriks ini perkalian matriks adalah suatu operasi biner. Unsur satuan adalah matriks satuan orde m, I_m, unsur invers mungkin ada.

Definisi

Invers suatu matriks bujur sangkar A (orde m) adalah matriks bujursangkar A^{-1} yang memenuhi $AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$. (I_m = matriks satuan orde m).

Dari definisi di atas jelaslah bahwa invers dari A^{-1} adalah A sendiri, jadi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Begitu pula invers itu ***tunggal***, karena andaikan P dan Q invers A. Maka $AP = PA = I$ dan $AQ = QA = I$, $P(AQ) = (PA)\,Q$, $PI = IQ$, jadi $P = Q$.

Contoh 6

Carilah invers matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

Tulis $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, maka p, q, r, s harus memenuhi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Maka $-p = 1$, $-q = 0$, $2r = 0$, $2s = 1$, dan

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ sehingga diperoleh $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Tidak semua matriks bujursangkar punya invers. Hal ini akan terlihat pada contoh berikut

Contoh 7

Perhatikan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, andaikan inversnya ada, yakni

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \text{ maka } BB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+r & q+s \\ -p-r & -q-s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

yang menghasilkan 4 persamaan : $p + r = 1$, $q + s = 0$, $-p - r = 0$, dan $-q - s = 1$, yang jelas tak mempunyai jawab, karena jika jawab ada, akan mengakibatkan pertentangan $0 = 1$, dan $0 = -1$.

Definisi

Matriks bujursangkar tak punya invers disebut ***matriks singular.*** Matriks bujursangkar yang bukan matriks singular, disebut ***matriks tak singular.***

Jadi, matriks A di atas adalah matriks tak singular, matriks B singular.
Di SMU Anda sudah mengenal determinan matriks 2×2, yaitu untuk

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Untuk contoh di atas $\det A$ adalah $-1\times 2 - 0\times 0 = -2 \neq 0$, sedangkan $\det B = 1\times(-1) - 1\times(-1) = 0$. Tampaknya ada kaitan antara kenolan determinan matriks dengan kesingularannya. Sesungguhnya dalil berikut dapat dibuktikan.

D a l i l

Matriks A tak singular, jika dan hanya jika $\det A \neq 0$.

Bukti (untuk matriks 2×2)

1) Andaikan A punya invers. Akan kita nyatakan matriks invers dalam unsur-unsur dari A, yaitu a, b, c, dan d. Andaikan $A^{-1} = P = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, maka p, q, r, s memenuhi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

atau

$$ap + br = 1,\ cp + dr = 0,\ aq + bs = 0,\ cq + ds = 1.$$

Persamaan pertama dikalikan dengan c menghasilkan $cap + cbr = c$, persamaan kedua dikalikan dengan a menjadi $cap + adr = 0$, sehingga diperoleh $r = -c/(ad - bc)$, $p = d/(ad-bc)$. Dari persamaan ke 3 dan ke 4 kita peroleh $s = a/(ad - bc)$ dan $q = -b/(ad - bc)$, sehingga

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Karena invers ini ada, maka haruslah $ad - bc \neq 0$.

2) Andaikan $ad - bc \neq 0$, maka matriks

$$P = \frac{1}{(ad - bc)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

memenuhi $AP = PA = I$. Jadi A mempunyai invers yakni P.

Dari dalil ini dapat pula disimpulkan setiap matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dengan $ad - bc = 0$, tak punya invers.

Contoh 8

Sebagai contoh, misalnya untuk matriks 2×2, matriks $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ tak punya invers. Matriks apa sajakah yang adalah invers dari dirinya sendiri? Matriks A yang begitu memenuhi $A = A^{-1}$, atau $AA = I$. Ambil orde $A = 2$.

Contoh 9

Carilah matriks A yang berukuran 2×2 yang memenuhi $AA = I$. (yakni A merupakan invers dari dirinya sendiri).

Penyelesaian:

Tulis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $AA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

yang menghasilkan 4 persamaan dengan 4 bilangan yang harus dicari:

$a^2+bc=1$, $b(a + d) = 0$, $c(a + d) = 0$, $cb+d^2=1$.

Hanya ada dua kemungkinkan (kasus): 1). $a + d = 0$, 2). $a + d \neq 0$.

1) $a + d = 0$, jadi $d = -a$, maka

$$A\,A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & cb+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh persamaan berikut.

$a^2+bc=1$, jadi $a = \pm\sqrt{1-bc}$, bila $bc \leq 1$, dengan demikian

$$A = \pm\begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}.$$

Untuk kasus ini tak ada matriks yang merupakan invers dari dirinya sendiri bila $bc > 1$.

2) Karena $a + d \neq 0$, persamaan $b(a + d) = 0$, $c(a + d) = 0$, mengharuskan $b = c = 0$. Dari $a^2+bc=1$ dan $cb+d^2=1$ diperoleh $a=\pm1$, $d=\pm1$, $a + d \neq 0$ menghasilkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ atau } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian kita peroleh jawab persamaan matriks real $A^2 = I$ ialah

$$\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } \pm\begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}, \quad bc \leq 1.$$

Sebagai contoh untuk yang terakhir ini:

a. $b = c = 0,\ A = \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, b. $b = 0,\ A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{bmatrix}$,

c. $c = 0,\ A = \begin{bmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix}$, d. $bc = 1,\ A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}$,

e. $bc < 1$ dan $bc \neq 0,\ A = \pm\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{b}{4} \\ \frac{3}{b} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

E. SIFAT-SIFAT INVERS

Sudah dibahas bahwa invers suatu matriks bujursangkar, tunggal. Begitu pula invers dari invers suatu matriks adalah matriks itu sendiri. Sekarang akan di bahas sifat-sifat lainnya.

Contoh 10

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, carilah AB, A^{-1}, B^{-1}, dan $B^{-1}A^{-1}$ kemudian hitung pula $(AB)^{-1}$.

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, dicari dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, yang memunculkan 4 persamaan $p+2r = 1$, $2p-r = 0$, $q+2s = 0$, $2q-s = 1$.

$2\times$ persamaan pertama: $2p+4r=2$, dikurangi persamaan kedua menghasilkan $5r = 2$, atau $r = 2/5$, disubstitusikan ke persamaan kedua menghasilkan $p = r/2 = 1/5$. $2\times$ persamaan ketiga dikurangi persamaan keempat menghasilkan $5s = -1$, atau $s = -1/5$, disubstitusikan ke persamaan ke tiga, diperoleh $q = -2s = 2/5$. Dengan demikian

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa kita peroleh $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$.

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, p, q, r, s memenuhi 4 persamaan $4p - 3r = 1$, $3p + 4r = 0$, $4q - 3s = 0$, $3q + 4s = 1$, yang menghasilkan $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix} = B^{-1}A^{-1}$.

Sifat ini memang berlaku umum, dinyatakan oleh Dalil berikut.

D a l i l

> Jika A dan B matriks tak singular berukuran sama, maka AB punya invers, dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bukti

A dan B tak singular, A^{-1} dan B^{-1} ada. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$, begitu pula $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I\,B = B^{-1}B = I$. Dengan demikian $(AB)^{-1}$ ada dan $(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$.

Selanjutnya untuk $A = B$, dalil menghasilkan $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$, dan dituliskan sebagai A^{-2}. Begitu pula $(A^3)^{-1} = (A^2A)^{-1} = A^{-1}(A^2)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^2 = (A^{-1})^3 = A^{-3}$. Dengan demikian untuk setiap n asli dapat pula dibuktikan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$.

Kalau pada bilangan real setiap bilangan yang tak nol punya invers, pada himpunan matriks bujursangkar, matriks tak nol ada yang singular, seperti terlihat pada contoh berikut.

Contoh 11

Pandang matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, andaikan invers matriks itu ada , dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, maka $A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kita peroleh persamaan $p - r = 1$, dan $2p - 2r = 0$, yang menghasilkan $1 = 0$, suatu kontradiksi. Jadi pengandaian A punya invers, tidak benar. A tak punya invers, terbukti.

Pada bilangan real berlaku sifat: $ab = 0$, dan $a \neq 0$ berakibat $b = 0$. Sifat ini tak berlaku untuk matriks, seperti pada contoh berikut.

Contoh 12

Pandang

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-2r & q-2s \\ -2p+4r & -2q+4s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

menghasilkan $p = 2r$, $q = 2s$, p, q, r, dan s real. Ambil $r = s = 1$, maka $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ memenuhi $AB = 0$, karena $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Jelaslah bahwa $AB = O$ dan $A \neq O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tidak menjamin $B = O$.

F. PENGERTIAN TRANSPOS SUATU MATRIKS

Definisi

> ***Transpos*** suatu matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $n \times m$ yang unsur pada baris ke i kolom ke j nya adalah a_{ji} .

Notasi: $A^T = \left[a_{ij}{}^T \right] = \left[a_{ji} \right]$.

Jelaslah bahwa $(A^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$.

Karena indeks (penunjuk) baris untuk matriks A menjadi penunjuk kolom untuk A^T , maka baris matriks A^T adalah kolom matriks A dan sebaliknya, seperti terlihat pada contoh berikut.

Contoh 13

Transpos untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, ialah $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Untuk matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, transposnya ialah $B^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Transpos matriks $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ialah matriks $C^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mempunyai transpos $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = D$.

Jadi transpos matriks D adalah dirinya sendiri.

Definisi

Matriks yang sama dengan transposnya disebut ***matriks simetri***.

Jika A suatu matriks berukuran $m \times n$, menurut definisi, A^T matriks berukuran $n \times m$. Untuk matriks simetri, $A = A^T$. Ini berarti A dan A^T berukuran sama yang hanya mungkin bila $m = n$. Dengan demikian suatu matriks simetri adalah matriks bujursangkar. Matriks diagonal adalah juga matriks simetri (jelaskan apa sebabnya).

Sudah kita bahas bahwa himpunan matriks yang berukuran sama (bujur sangkar atau bukan) merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan matriks. Sudah kita ketahui bahwa matriks bujursangkar punya invers terhadap perkalian jika dan hanya jika determinannya tak nol. Sudah dibuktikan hasilkali matriks bujursangkar berukuran sama yang punya invers, juga punya invers. Dengan demikian, himpunan semua matriks tak singular yang berukuran sama (sebut G), terhadap perkalian adalah asosiatif, punya unsur satuan,dan setiap unsurnya punya invers, jadi membentuk grup terhadap perkalian. Akan tetapi grup G ini tak komutatif, karena perkalian matriks tak komutatif.

Sekarang pandang himpunan K $\subset$ G. Kalau himpunan bagian ini membentuk grup pula, maka himpunan bagian ini disebut subgrup dari grup G. Untuk memeriksa apakah suatu himpunan matriks tak singular K merupakan subgrup dari G, karena sifat asosiatif sudah diwariskan dari G, maka yang harus diperiksa lagi hanyalah sifat tertutup, adanya unsur satuan, dan adanya invers untuk tiap $M \in$ K.

Untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 14

Pandang G = himpunan semua matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bu \neq 0$. Akan ditunjukkan bahwa D = himpunan matriks diagonal 2×2 tak singular membentuk grup terhadap perkalian matriks. Matriks diagonal dapat dituliskan sebagai matriks $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $ad \neq 0$, yang berarti $a \neq 0$, dan $d \neq 0$ (apa sebabnya?). Karena hasilkali matriks diagonal tak singular juga matriks diagonal, maka D tertutup terhadap perkalian. Unsur satuan I_2 adalah matriks diagonal tak singular, jadi $I \in$ D. Invers matriks diagonal taksingular $D \in$ D yakni $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$, adalah juga matriks diagonal tak singular.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat membentuk grup komutatif terhadap penjumlahan.

2) a) Tunjukkan invers matriks $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

b) tunjukkan pula bahwa $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

c) carilah A^{-1} dengan menggunakan informasi pada bagian *a*) dan *b*) dengan cara semudah mungkin.

3) Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sudah kita ketahui bahwa $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = A$. Hitunglah hasilkali lain dalam himpunan M = {A, B, C, D}, buatlah tabel untuk perkalian unsur-unsur M dan periksa apakah M suatu grup terhadap perkalian itu.

4) Pandang matriks singular $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Jelaslah $ad - bc = 0$, jika $a \neq 0$, dan $b \neq 0$, maka $c/a = d/b$, dengan demikian $c = ka$, dan $d = kb$ sehingga $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$, k real. Ambil $B = \begin{bmatrix} b & b \\ -a & -a \end{bmatrix}$, ternyata $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jadi jelaslah bahwa ada matriks A dan B yang keduanya bukan matriks nol yang memenuhi $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Jika A matriks singular, $a \neq 0$, dan $c \neq 0$, tunjukkan $b = ka$ dan $d = kc$, untuk suatu k real, sehingga $A = \begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}$. Tentukan matriks taknol B sehingga $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Tunjukkan bahwa hukum kanselasi $P(Q - R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $P \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = R$, tak berlaku untuk operasi matriks.

Petunjuk: Ambil $P = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$, $Q = R + \begin{bmatrix} b & b \\ -a & -a \end{bmatrix}$, R matriks 2×2 sebarang.

5) a) Jika P dan Q dapat dikalikan, tunjukkan bahwa $(AB)^T = B^T A^T$, dan $(P + Q)^T = P^T + Q^T$, bila AB dan $P + Q$ punya arti.

b) Jika A matriks $m \times n$, buktikan bahwa $B = AA^T$ adalah matriks simetri $m{\times}m$, $C = A^TA$ adalah matriks simetri $n{\times}n$ (Gunakan bagian a)

c) Jika A matriks bujursangkar orde m, buktikan $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. (Hitung dulu $(A^{-1}A)^T$ dan $(AA^{-1})^T$ kemudian gunakan ketunggalan invers.)

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Penjumlahan bilangan bulat adalah suatu operasi biner, karena jumlah bilangan bulat juga bulat. Unsur satuan, 0 juga bilangan bulat. Jika n bulat maka $-n$ juga bulat, invers terhadap penjumlahan juga merupakan bilangan bulat. Sifat asosiatif dan komutatif diwariskan dari bilang an real.

2. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

3)

	A	*B*	*C*	*D*
A	*A*	*B*	*C*	*D*
B	*B*	*A*	*D*	*C*
C	*C*	*D*	*A*	*B*
D	*D*	*C*	*B*	*A*

Perkalian matriks adalah operasi biner pada M: perkalian tiap dua unsur M adalah unsur M lagi. Sifat asosiatif diwariskan dari himpunan matriks real. Unsur satuan adalah A dan setiap unsur M adalah invers dari dirinya sendiri. M bahkan merupakan grup komutatif .

4) a) $ad - bc = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, kalikan dengan $1/(ac)$ diperoleh
$d/c = b/a = k$ atau $d = kc$ dan $b = ka$

$$B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+kar & aq+kas \\ cp+kcr & cq+kcs \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $p = -kr$, $q = -ks$, sehingga $B = \begin{bmatrix} -kr & -ks \\ r & s \end{bmatrix}$

Untuk pemeriksaan:

$$AB = \begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -kr & -ks \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -akr+kar & -aks+kas \\ -ckr+kcr & -cks+kcs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sebagai contoh bila $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, maka $k = -3$, ambil $r = 2$, $s = -1$,

$B = \begin{bmatrix} -kr & -ks \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, kalau diperiksa. Jelas memberikan $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Perhatikanlah bahwa pemilihan r dan s hanya memerlukan persyaratan supaya matriks $B \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Ambil $a \neq 0$, $b \neq 0$, R matriks 2×2 sebarang, maka $P \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$P\,(Q - R) = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & b \\ -a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $Q \neq R$, karena

$Q = R + \begin{bmatrix} b & b \\ -a & -a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

5) a) Jika $C = AB$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $D = B^T A^T$, $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^T a_{jk}^T$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{kj} b_{ji} = c_{ki}$$, jadi $D = C^T$ terbukti.

Ambil $K = P + Q$, $L = P^T + Q^T$, $l_{ij} = p_{ji} + q_{ji} = k_{ji}$, jadi $L = K^T$.

b) A matriks $m \times n$, A^T matriks $n \times m$, maka AA^T matriks $m \times m$, selanjutnya $(A\ A^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, jadi AA^T matriks simetri $m \times m$.
Dengan cara yang serupa A^TA adalah matriks simetri $n \times n$.

c) $(A^{-1} A)^T = I^T = I = A^T(A^{-1})^T$. Dengan cara yang serupa $(A^{-1})^T A^T = I$.

RANGKUMAN

1. Himpunan matriks ***berukuran sama*** merupakan ***grup*** terhadap ***penjumlahan*** matriks.
2. Di samping itu ***penjumlahan*** matriks dan ***perkalian*** dengan ***skalar*** memenuhi:
   a. $c(A+B) = cA+cB$
   b. $(c+d)\ A = cA+dA$
   c. $(c\ d)\ A = c\ (d\ A)$
   d. $1\ A = A$
3. ***Perkalian*** matriks (yang dapat dikalikan)mempunyai sifat umum:
   a. ***asosiatif*** : $A\ (BC) = (AB)\ C$.
   b. ***tak komutatif***.
4. ***Penjumlahan*** dan ***perkalian*** matriks mempunyai sifat ***distributif*:**
   a. $A(B + C) = AB + AC$
   b. $(A + B)C = AC + BC$

5. ***Perkalian*** matriks dan perkalian ***dengan skalar*** bersifat:
   a. Bila A matriks $m \times n$, C matriks diagonal orde m dengan unsur diagonal c, D matriks diagonal orde n dengan unsur diagonal d, maka $CA = cA$ dan $AD = Ad$
   b. Bila A dan B dapat dikalikan, $A\ (aB) = a\ (AB)$.
6. Khususnya untuk himpunan matriks ***bujursangkar*** berukuran sama.
   a. Ada matriks taknol yang tak punya invers, yang mengakibatkan tak berlakunya hukum kanselasi.
   b. Ada matriks taknol (yang tak punya invers)
      A dan B ∋ (sehingga) $AB = 0$.
   c. Jika A dan B dua matriks bujursangkar berukuran sama yang punya invers (disebut matriks ***taksingular***), $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   d. Himpunan matriks ***taksingular*** berukuran sama, merupakan ***grup*** (tak komutatif) terhadap perkalian.

7. Transpos suatu matriks A berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $n \times m$ $A^T = [a_{ij}{}^T] = [a_{ji}]$, dan memenuhi:
   a. $(AB)^T = B^T A^T$, dan $(P + Q)^T = P^T + Q^T$, bila AB dan $P + Q$ punya arti.
   b. $(cA)^T = cA^T$, dan $(A^T)^T = A$.
   c. Khusus untuk matriks bujursangkar (tak singular): $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
8. Matriks simetri adalah matriks yang sama dengan transposnya, maka AA^T dan A^TA adalah matriks simetri berukuran $m \times m$ dan $n \times n$, bila A matriks $m \times n$

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Periksa apakah himpunan matriks dengan unsur bilangan bulat genap membentuk grup terhadap penjumlahan matriks atau tidak. Komutatifkah grup itu? Tunjukkan bahwa terhadap perkalian matriks himpunan itu bukan grup.

2) a) Bila $p \neq 0$, $q \neq 0$, A = $\begin{bmatrix} p & 1 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} q & -q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, hitung A^{-1}dan B^{-1}.

   b) Bila $C = \begin{bmatrix} pq+1 & -pq+1 \\ -pq+1 & pq+1 \end{bmatrix}$, hitung C^{-1} menggunakan hasil di a..

3) a) Matriks A berukuran $m \times n$. $m \neq n$. Tentukan ukuran matriks B supaya baik AB maupun BA dapat dihitung. Samakah AB dengan BA?

   b) Jika A matriks bujursangkar orde 2 yang bukan matriks diagonal dan D matriks diagonal orde 2 yang unsur diagonalnya p dan q, $p \neq q$, apakah $AD = DA$? Berikan alasan/penjelasan yang memadai untuk tiap jawab Anda.

4) Buktikan hukum kanselasi tak berlaku (lihat soal no 4 Latihan 3) untuk P berukuran 2×2, Q dan R berukuran 2×2. (Ambillah dulu $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, kemudian tentukan Q dan R yang sesuai).

5) a) Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan $AA^{\mathsf{T}} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, buktikan bahwa A dapat dituliskan sebagai $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Tulis $A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

b) Buktikan bahwa himpunan matriks $\mathcal{A} = \{\, A(\varphi) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}$ adalah grup.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1)

	P	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*
Matriks bujursangkar	X			X	X	X	X
Matriks segitiga atas					X		X
Matriks segitiga bawah	X				X		
Matriks diagonal					X		

2) $r_{22} = p_{22} + q_{22} = -a + 1 = -6$, $a = 7$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

3) a. dan c.

4) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = B$, $CB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $DB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = CB$,

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AB$.

5) a) A_n adalah matriks $n \times n$, $A_n = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \le j \\ 1, & i > j \end{cases}$, $i = 1, \ldots ,n$,

$j = 1, \ldots ,n$

b) $m = 2$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tes Formatif 2

1) a) (i) tidak, pilih $a = 1$, $b = 2$. (ii) ya
   b) (i) tidak, pilih $a = 4$, $b = 2$. (ii) ya.
2) a) tak komutatif, tak asosiatif, takpunya unsur satuan, tak punya invers
   b) komutatif, asosiatif, unsur satuan $e = ½$ karena $a*e = 2a\ ½ = a$, unsur invers
   $a^{-1} = \frac{1}{4a}$, karena $a^{-1}*a = 2\left(\frac{1}{4a}\right)a = ½ = e$.
3) a) grup terhadap + : i) dan ii)
   b) grup terhadap $\times$: iii).
4) a) merupakan lapangan karena R grup komutatif terhadap $\oplus$, $R\backslash\{0\}$ grup komutatif terhadap $\otimes$ (lihat 2b), dan sifat distributif dipenuhi.
   b) bukan lapangan, karena R bukan grup terhadap $\oplus$.
5) a) $p \neq 0$, p^{-1} ada, $p^{-1}p(q + r) = q + r = p^{-1}\,0 = 0$, jadi $q = -r$
   b) Jika $r + s \neq 0$, maka $(r + s)^{-1}$ ada, $(p - q)(r + s)(r + s)^{-1} = (p - q) = 0(r + s)^{-1} = 0$, jadi $p = q$.

Tes Formatif 3

1) $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. a_{ij} bulat genap, b_{ij} bulat genap, $a_{ij} + b_{ij}$ bulat genap. Komutatif dan asosiatif diwariskan dari R. Sebagai unsur satuan terhadap jumlah adalah matriks nol. Invers A adalah $-A = [-a_{ij}]$. Jadi himpunan matriks dengan unsur bilangan bulat merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan matriks. Terhadap perkalian matriks himpunan itu bukan grup, karena tak punya matriks satuan.
2) a) Jika $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $\begin{bmatrix} p & 1 \\ -p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   jadi $pa+c=1$, $-pa+c=0$, $a=\frac{1}{2p}$, $c = \frac{1}{2}$, $pb + d = 0$, $-pb + d = 1$,

   $d = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2p}$, sehingga $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2p} & -\frac{1}{2p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, dengan cara yang serupa diperoleh $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2q} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2q} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

b) Ternyata C=AB, dan C^{-1}= $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Pemeriksaan: $C\,C^{-1} = \begin{bmatrix} pq+1 & -pq+1 \\ -pq+1 & pq+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4pq}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \mathrm{I}$

3) a) AB punya arti, B berukuran $n \times p$, BA punya arti, B berukuran $k \times m$. Dengan demikian $k = n$, $p = m$. Jadi B berukuran $n \times m$. AB berukuran $m \times m$, BA berukuran $n \times n$, karena $m \neq n$, maka $AB \neq BA$

b) Tidak, karena jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, dan $p \neq q$,

$AD = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap & bq \\ cp & dq \end{bmatrix}$, $DA = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} pa & pb \\ qc & qd \end{bmatrix}$.

A bukan matriks diagonal, sekurangnya satu dari b atau $c \neq 0$, karena $p \neq q$ maka $AD \neq DA$. Sebagai contoh, ambil $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $DA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

4) Ambil $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$P(Q-R) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, akan tetapi $Q \neq R$.

5) a) $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Jika $a \neq 0$, ambil $k = d/a$, maka $d = ka$, $c = -bd/a = -kb$, $c^2 + d^2 = k^2 (a^2 + b^2)$, dan $k^2 = 1$. Ambil $k = 1$,

Tulis $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, maka $c = -\sin\varphi$, $d = \sin\varphi$.

$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = A(\varphi)$

b) $\mathbb{A} = \{ A(\varphi) | \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Perkalian matriks adalah operasi biner pa da $\mathbb{A}$, karena $A(\alpha)\, A(\beta)$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = A(\alpha+\beta) \in \mathbb{A}$.

Sifat asosiatif jelas berlaku. Unsur satuan adalah $I = A(0)$.

$A(\varphi)$ punya invers, karena $\det(A(\varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\phi \end{vmatrix}$

$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0$, dan $A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Dengan demikian A grup terhadap perkalian matriks.

Daftar Pustaka

Howard Anton. (1991). *Elementary Linear Algebra*. Wiley.

Wono Setya Budhi. (1995). *Aljabar Linear*. Jakarta: Gramedia.

Bernard Kolman. (1993). *Introductory Linear Algebra with Application*. Macmillan.