MODUL 1

Fungsi Peubah Banyak

Prof. Dr. Bambang Soedijono

PENDAHULUAN

Dalam modul ini dibahas masalah Fungsi Peubah Banyak. Dengan sendirinya para pengguna modul ini dituntut telah menguasai pengertian mengenai limit fungsi, kekontinuan fungsi, derivatif fungsi dengan satu peubah. Secara umum pengertian ini disajikan dan terangkum dalam Kalkulus I dan II yang lazim disebut Matematika Dasar.

Setelah mempelajari modul ini, para pengguna modul ini diharapkan mampu memahami pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi dua peubah atau lebih, antara lain mengenai kekontinuan dan derivatif.

Secara lebih terperinci, setelah mempelajari modul ini diharapkan :

a. mampu menjelaskan pengertian limit dan kekontinuan fungsi peubah banyak;
b. dapat menjelaskan pengertian derivatif parsial;
c. terampil menghitung limit fungsi peubah banyak;
d. terampil menentukan derivatif fungsi peubah banyak.

KEGIATAN BELAJAR 1

Fungsi Peubah Banyak

Pada kegiatan belajar ini dibahas fungsi dari R^2 ke R beserta sifat-sifat yang berlaku pada fungsi tersebut. Sebagaimana diketahui R^2 merupakan ruang produk (*product space*) antara ruang R dengan dirinya sendiri, yang merupakan himpunan semua elemen berbentuk (a,b) dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Diambil ruang bagian $D \subset R^2$ dan didefinisikan fungsi f, $f : D \to R$ dengan rumus $f = f(x, y), (x, y) \in D,$ sehingga nilai fungsi f bergantung kepada nilai *x* dan *y* yang diberikan, fungsi f tersebut dikenal sebagai fungsi dengan peubah dua, atau secara umum disebut fungsi peubah banyak, dalam hal ini peubahnya disimbolisasi dengan *x* dan *y* yang masing-masing merupakan peubah real.

Selanjutnya dibahas pula fungsi dari R^3 ke R beserta berbagai sifat yang berlaku pada fungsi tersebut.

LIMIT DAN KEKONTINUAN

Pada bagian ini dibahas pengertian limit fungsi, namun sebelumnya didefinisikan terlebih dahulu pengertian jarak dua titik dan persekitaran (*neighborhood*) suatu titik pada R^2 (elemen ruang R^2 juga biasa disebut titik), selanjutnya pengertian ini dapat dikembangkan untuk R^3.

Untuk sebarang dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dalam R^2 didefinisikan pengertian jarak kedua titik tersebut, disimbolkan dengan *d*, sebagai

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.1}$$

Selanjutnya berdasarkan pengertian jarak tersebut, untuk sebarang titik (x_0, y_0) dalam R^2 didefinisikan pengertian persekitaran (*neighborhood*) titik (x_0, y_0) dengan jari-jari δ, disimbolkan dengan $N_\delta[(x_0, y_0)]$ sebagai suatu himpunan bagian dalam R^2 dengan

$$N_\delta[(x_0, y_0)] = \left\{(x, y) \in R^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\} \tag{1.2}$$

Definisi 1.1

Fungsi f, $f: R^2 \to R$ dikatakan mempunyai nilai limit untuk $(x, y) \to (x_0, y_0)$, dengan $(x_0, y_0) \in R^2$ jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x, y) \in N_\delta[(x_0, y_0)]$ berlaku $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ dan biasa ditulis sebagai

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \qquad (1.3)$$

Jika fungsi dimaksud pada Definisi 1.1 terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ maka titik (x_0, y_0) tersebut di atas harus merupakan titik limit daerah (*region*) *D*, yaitu untuk setiap $\delta > 0$ berlaku $(N_\delta[x_0, y_0] \setminus \{x_0, y_0\}) \cap D \neq \varnothing$. Dengan demikian, $(x_0, y_0) \in D$ atau $(x_0, y_0) \in C_D$, dengan C_D merupakan batas (*boundary*) dari daerah *D*.

Contoh 1.1 :

Buktikan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

Bukti :

Pada contoh ini fungsi f, $f(x, y) = \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ terdefinisi pada R^2 kecuali untuk $(x, y) = (0, 0)$. Dengan demikian, mudah diperlihatkan bahwa titik $(0, 0)$, merupakan titik limit *domain* fungsi *f*. Berdasarkan Definisi 1.1 untuk sebarang $\varepsilon > 0$ diberikan harus dibuktikan adanya $\delta > 0$ (bergantung pada ε) sehingga untuk setiap (x, y), $(x^2 + y^2)^{1/2} < \delta$ berlaku $\left|\dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| < \varepsilon$

Karena $\left|2x^3 - y^3\right| \le 2|x|x^2 + |y|y^2$ dan $|x| \le \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$, $|y| \le \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$, berarti

$$\left|\frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{\left|2x^3 - y^3\right|}{\left|x^2 + y^2\right|} \le \frac{2|x|\ x^2 + |y|\ y^2}{(x^2 + y^2)}$$

$$\le \frac{2\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} x^2 + \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} y^2}{(x^2 + y^2)} \le 2\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

Dengan demikian, apabila diambil $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$, didapat

$$\left|f(x, y)\right| = \left|\frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \le 2\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

$$< 2\delta < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

Contoh 1.2 :

Tentukan nilai limit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ jika ada.

Penyelesaian :

Ditinjau nilai limit sepanjang sumbu x, $y = 0$, untuk fungsi f dengan

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right]$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

Dan nilai limit sepanjang sumbu y, $x = 0$, untuk fungsi f tersebut adalah

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Dari kedua hasil di atas terbukti bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ternyata tidak mempunyai nilai.

Contoh 1.3:

Tentukan nilai limit $u = x^2 + y^2$ sepanjang garis $y = x$.

Penyelesaian :

Sepanjang garis $y=x$ diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{0}{2x^2} = 0$$

Berdasarkan definisi persekitaran (*neighborhood*) titik (x_0, y_0) , *Definisi 1.1* dapat pula ditulis sebagai berikut.

Fungsi bernilai real f terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$, dikatakan mempunyai nilai limit untuk $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dengan (x_0, y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) *D*, jika terdapat bilangan real *A* sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $(x, y) \in D$, $\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{1/2} < \delta$ berlaku $\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon$.

Selanjutnya berdasarkan pengertian limit di atas didefinisikan kekontinuan fungsi *f* pada suatu titik (x_0, y_0) .

Definisi 1.2

Fungsi bernilai real f terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ dikatakan kontinu di titik $(x_0, y_0) \in D$, dengan (x_0, y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) *D*, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $(x, y) \in D$, $\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{1/2} < \delta$ berlaku $\left|f(x, y) - f(x_0, y_0)\right| < \varepsilon$.

Definisi 1.2 dapat ditulis sebagai berikut.

Fungsi bernilai real f terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ dikatakan kontinu di titik $(x_0, y_0) \in D$ jika dipenuhi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0) \tag{1.4}$$

Contoh 1.4 :

Gunakan Definisi 1.2 untuk membuktikan fungsi f, dengan rumus $f(x,y) = \dfrac{5x+y}{x-y}$ kontinu di titik $(4,1)$.

Bukti :

Fungsi f di atas terdefinisi pada ruang R^2, kecuali pada garis $x = y$, sehingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ diberikan, didapat:

$$\begin{aligned}
\left| f(x,y) - f(4,1) \right| &= \left| \frac{5x+y}{x-y} - \frac{5.4+1}{4-1} \right| \\
&= \left| \frac{5x+y}{x-y} - 7 \right| \\
&= \left| \frac{-2x+8y}{x-y} \right| \\
&= \left| -2\frac{x-4}{x-y} - 2\frac{4}{x-y} + 8\frac{y-1}{x-y} + 8\frac{1}{x-y} \right| \\
&= \left| -2\frac{x-4}{x-y} + 8\frac{y-1}{x-y} \right|
\end{aligned}$$

Untuk $3 < x < 5,\ 0 < y < 2$ pastilah $x - y > 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\left| f(x,y) - f(4,1) \right| &= \left| -2\frac{x-4}{x-y} + 8\frac{y-1}{x-y} \right| \\
&\le 2\frac{|x-4|}{|x-y|} + 8\frac{|y-1|}{|x-y|} \\
&< 2|x-4| + 8|y-1|
\end{aligned}$$

$$\leq 2\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}+8\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$$
$$=10\left\{(x-4)^2+(y-1)^2\right\}^{1/2}$$
$$<10\delta$$

Dengan mengambil $\delta<\dfrac{\varepsilon}{10}$ diperoleh

$$\left|f(x,y)-f(4,1)\right|<10\delta<\varepsilon$$

Terbukti fungsi f, $f(x)=\dfrac{5x+y}{x-y}$ kontinu di titik (4,1).

Sifat-sifat yang berlaku pada kekontinuan fungsi diungkapkan pada teorema di bawah ini.

Teorema 1.3

Misalkan f dan g masing-masing merupakan fungsi bernilai real dan terdefinisi pada daerah (*region*) $D\subset R^2$ jika fungsi f dan g masing-masing kontinu di titik $(x_0,y_0)\in D$ maka :

a. fungsi $f+g$ juga kontinu di (x_0,y_0)

b. fungsi fg juga kontinu di (x_0,y_0)

c. jika $g(x_0,y_0)\neq 0$, fungsi $\dfrac{f}{g}$ juga kontinu di (x_0,y_0)

Bukti :

Diketahui bahwa fungsi f dan g masing-masing kontinu di titik (x_0,y_0) berarti (x_0,y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) D, dan dipenuhi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \quad \text{dan} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=g(x_0,y_0)$$

a. Ditinjau nilai limit :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)+g(x,y)\right]=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$
$$=f(x_0,y_0)+g(x_0,y_0)$$

Terbukti bahwa fungsi $f+g$ kontinu di (x_0,y_0).

b. Ditinjau nilai limit :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)g(x,y)\right]=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)$$
$$=f(x_0,y_0)g(x_0,y_0)$$

Terbukti bahwa fungsi *fg* kontinu di (x_0,y_0).

c. Diketahui bahwa $g(x_0,y_0)\neq 0$, selanjutnya ditinjau nilai limit :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)}$$
$$=\frac{f(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)}$$

Terbukti bahwa fungsi $\dfrac{f}{g}$ kontinu di (x_0,y_0).

(**Bukti selesai**)

Suatu fungsi bernilai real f terdefinisi pada suatu daerah (*region*) $D\subset R^2$, dikatakan kontinu pada daerah (*region*) D jika untuk setiap $(x_0,y_0)\in D$ diketahui bahwa fungsi f kontinu di (x_0,y_0).

Pengertian limit dan kekontinuan fungsi bernilai real terdefinisi pada R^2 dapat dikembangkan untuk fungsi bernilai real terdefinisi pada R^3 dengan jalan menggeneralisasikan pengertian jarak dan persekitaran (*neighborhood*).

Untuk sebarang dua titik (x_1,y_1,z_1) dan (x_2,y_2,z_2) dalam R^3, pengertian jarak kedua titik tersebut didefinisikan dengan:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\ ,$$

dan untuk sebarang titik (x_0,y_0,z_0) dalam R^3, persekitaran (*neighborhood*) titik (x_0,y_0,z_0) dengan jari-jari δ didefinisikan dengan:

$$N_\delta\left[(x_0,y_0,z_0)\right]=\left\{(x,y,z)\in R^3\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

Selanjutnya Definisi 1.1 dan Definisi 1.2 dikembangkan menjadi dua definisi di bawah ini.

Definisi 1.4

Fungsi f, $f : R^3 \to R$, dikatakan mempunyai nilai limit untuk $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$, dengan $(x_0, y_0, z_0) \in R$ jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $(x, y, z) \in N_\delta\left[(x_0, y_0, z_0)\right]$ berlaku $\left|f(x, y, z) - A\right| < \varepsilon$ dan biasa ditulis sebagai $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = A$.

Definisi 1.5

Fungsi bernilai real f terdefinisi di daerah (*region*) $D \subset R^3$ dikatakan kontinu di titik $(x_0, y_0, z_0) \in D$, dengan (x_0, y_0, z_0) merupakan titik limit daerah (*region*) D, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $(x, y, z) \in D$,

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{1/2} < \delta$$

berlaku $\left|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)\right| < \varepsilon$

Definisi 1.5 dapat pula ditulis sebagai berikut.
Fungsi bernilai real f terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^3$ dikatakan kontinu di titik $(x_0, y_0, z_0) \in D$ jika dipenuhi

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) \tag{1.5}$$

Contoh 1.5 :

Buktikan bahwa fungsi bernilai real f terdefinisi pada R^3 dengan,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^2 + 3z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

kontinu di titik $(0, 0, 0)$.

Bukti :

Untuk membuktikan fungsi f tersebut di atas kontinu di $(0,0,0)$ cukup dibuktikan bahwa

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$$

Berdasarkan Definisi 1.4 untuk sebarang $\varepsilon < 0$ diberikan harus dibuktikan adanya $\delta > 0$ (bergantung pada ε) sehingga untuk $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$ berlaku

$$\left|\frac{2x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{\left|2x^3-y^3+3z^3\right|}{\left|x^2+y^2+z^2\right|}$$

$$\leq \frac{2|x|\ x^2+|y|\ y^2+3|z|\ z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Karena $|x| \leq \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$, $|y| \leq \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$ dan $|z| \leq \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$ maka diperoleh

$$\left|\frac{2x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{\left(2x^2+y^2+3z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\leq \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

$$\leq 3\delta$$

Dengan mengambil $\delta < \frac{1}{3}$, ε diperoleh

$$\left|\frac{2x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq 3\delta < \varepsilon$$

Terbukti bahwa fungsi f di atas kontinu di $(0,0,0)$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Tentukan nilai limit berikut ini.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$ sepanjang kurva $y^2 = x$.

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^5+2y^3\left(2x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)$, jika $f\left(x,y\right)=\begin{cases} 0 & y \le 0 \text{ atau } y \ge x^2 \\ 1 & 0 < y < x^2 \end{cases}$

5) Jika diberikan $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(xy\right)}{x} & x \ne 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$

maka tentukan titik diskontinu fungsi f tersebut.

6) Jika diberikan $f\left(x,y\right)=e^{-\frac{1}{|x-y|}}$ dan $x \ne y$, tentukan $f\left(x,y\right)$ untuk $x = y$, agar fungsi f kontinu di mana-mana.

7) Jika $f(x,y)=\dfrac{5x+y}{x-y}$, tinjau apakah fungsi f tersebut kontinu di titik (4,1).

8) Jika $f(x,y)=\dfrac{2x^2-y^2+xy}{x+y}$, tinjau apakah fungsi f tersebut kontinu di titik (1,2).

9) Jika diberikan fungsi $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \ne 0 \\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$

tinjaulah apakah fungsi f kontinu di (0,0).

10) Jika diberikan fungsi

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & y \le 0 \text{ atau } x^2 \le y \\ \dfrac{4y\left(x^2-y\right)}{x^2} & 0 < y < x^2 \end{cases}$$

tinjau apakah fungsi f tersebut kontinu di titik (0,0).

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $y = x$.
2) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $y^2 = x$.
3) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $y = x$.
4) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $y = x^2$.
5) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $y = 1$ dan $x = x$
6) Lihat Contoh 1.2. Tinjau dari sepanjang kurva $x = y$.
7) Lihat Contoh 1.4.
8) Lihat Contoh 1.4.
9) Tinjau dari sepanjang kurva $y = x$. Gunakan syarat kekontinuan suatu fungsi seperti pada Kalkulus I.
10) Tinjau dari sepanjang kurva $x^2 = y$. Gunakan syarat kekontinuan suatu fungsi seperti pada Kalkulus I.

RANGKUMAN

Fungsi bernilai real $f(x,y)$ terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$, dikatakan mempunyai nilai limit untuk $(x,y) \to (x_0, y_0)$, dengan (x_0, y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) D jika terdapat bilangan real A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $(x,y) \in D$, $\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{1/2} < \delta$, berlaku $\left|f(x,y)-A\right| < \varepsilon$ dan biasa ditulis $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$

Fungsi f di atas dikatakan kontinu di titik (x_0, y_0) jika dipenuhi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Pengertian-pengertian di atas dapat digeneralisasikan untuk fungsi dengan peubah lebih dari dua. Jika fungsi bernilai real $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ masing-masing terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ dan (x_0,y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) D maka pengertian limit fungsi di atas memenuhi sifat-sifat berikut.

(1) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) = \alpha \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \beta \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

dengan α, β bilangan real sebarang

(2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\, g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

(3) Jika $g(x,y) \neq 0$ pada suatu persekitaran (*neighborhood*) titik (x_0,y_0) maka

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$$

dengan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Fungsi $f(x, y)$ bernilai real terdefinisi pada daerah (*region*) D. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ada artinya jika ….

A. (x_0,y_0) merupakan anggota daerah (*region*) D

B. (x_0,y_0) merupakan titik dalam (*interior point*) daerah (*region*) D

C. (x_0,y_0) merupakan titik-titik limit daerah (*region*) D

D. (x_0,y_0) berada pada batas (*boundary*) dari daerah (*region*) D

E. (x_0,y_0) merupakan titik terasing (*isolated point*) daerah (*region*) D

2) Jika diberikan fungsi $f(x,y)=\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$ maka $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ….

A. tidak mempunyai nilai karena f (0,0) tidak terdefinisi
B. tidak mempunyai nilai meskipun (0,0) merupakan titik limit domain fungsi f
C. titik (0,0) merupakan titik limit domain fungsi f , dan nilai limitnya 0
D. titik (0,0) merupakan titik limit domain fungsi f , dan nilai limitnya 2
E. tidak mempunyai nilai, karena (0,0) merupakan titik terasing dari domain fungsi f

3) Nilai $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ adalah ….

A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. tidak mempunyai nilai

4) Fungsi $f(x,y)$ bernilai real terdefinisi pada daerah (*region*) *D*, dikatakan kontinu di $(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in D$ jika ….

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ mempunyai nilai
B. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)= f(x_0,y_0)$
C. fungsi $f(x,y)$ terdiferensial parsial terhadap x
D. fungsi $f(x,y)$ terdiferensial parsial terhadap y
E. fungsi $f(x,y)$ terdiferensial di titik (x_0,y_0)

5) Nilai $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ adalah

A. 1
B. $\dfrac{3}{2}$
C. -1

D. $-\frac{3}{2}$

E. 0

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Derivatif Parsial

Pada bagian ini dibahas pengertian derivatif parsial fungsi peubah banyak, khususnya untuk fungsi dengan dua peubah bebas.

Misalkan, f suatu fungsi bernilai real terdefinisi pada suatu daerah (*region*) $D \subset R^2$. Dengan demikian, f merupakan fungsi dengan dua buah peubah bebas, namakan kedua peubah tersebut x dan y, sehingga biasa ditulis $f = f(x, y)$. Jika y dianggap sebagai konstanta, dengan demikian f merupakan fungsi x saja maka dapat ditentukan derivatif fungsi f terhadap x, yaitu jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\ y) - f(x,\ y)}{h}$ mempunyai nilai. Nilai limit tersebut disimbolkan dengan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan disebut derivatif parsial fungsi f terhadap x,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \tag{1.6}$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan (jika ada) derivatif fungsi f terhadap y, dengan menganggap peubah x sebagai konstanta, yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,\ y)}{k} \tag{1.7}$$

yang disebut derivatif parsial fungsi f terhadap y.

Contoh 1.6 :

Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ jika diberikan $f(x, y) = 2xy - \left(1 - x^2 - y^2\right)^{3/2}$.

Penyelesaian :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - \left[\frac{3}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/2}.(-2x)\right]$$

$$= 2y + 3x\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - \left[\frac{3}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/2}.(-2y)\right]$$
$$= 2x + 3y\left(1 - x^2 - y^2\right)^{1/2}$$

Selanjutnya derivatif parsial dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ disebut derivatif parsial orde dua dari fungsi *f*, dan terdapat empat buah derivatif parsial orde dua dari f yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Berikut ini diperlihatkan bahwa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f(x+h,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y)}{k} - \lim_{k \to 0} \frac{f(x,\ y+k) - f(x,\ y)}{k}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[\lim_{k \to 0} \frac{1}{hk}\left\{f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y) - f(x, y+k) + f(x,\ y)\right\}\right]$$
$$= \lim_{k \to 0}\left[\lim_{h \to 0} \frac{1}{kh}\left\{f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y+k) - f(x+h,\ y) + f(x,\ y)\right\}\right]$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y+k)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,\ y)-f(x,\ y)}{h}\right]$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x,\ y+k)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}}{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

Contoh 1.7 :

Tentukan derivatif parsial orde dua fungsi f jika diberikan $f(x,y)=x^2y+e^{-xy^3}$.

Penyelesaian:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy-y^3e^{-xy^3}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2-3xy^2e^{-xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=2y+y^6e^{-xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

$$=2x-3y^2e^{-xy^3}+3xy^5e^{-xy^3}$$

$$=2x+3y^2(xy^3-1)e^{-xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-6xye^{-xy^3}+9x^2y^4e^{-xy^3}$$

$$=3xy\left(3xy^3-2\right)e^{-xy^3}$$

Contoh 1.8 :

Tentukan derivatif parsial orde dua fungsi f, jika diberikan $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2xz$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2y$$

Berdasarkan definisi derivatif parsial fungsi peubah banyak, seperti disajikan dengan persamaan (1.6) dan (1.7) maka berbagai sifat yang berlaku pada derivatif fungsi dengan satu peubah bebas juga berlaku di sini. Dengan demikian diperoleh berbagai rumus, sebagaimana diungkapkan di bawah ini.

Jika diberikan fungsi bernilai real $f = f(x, y)$ dan $g = g(x, y)$ masing-masing terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ maka berlaku sifat-sifat berikut ini.

(1) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y) + g(x, y) \right] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)+g(x,y)\right]=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y).g(x,y)\right]=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}g(x,y)+f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y),\ g(x,y)\right]=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}g(x,y)+f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

(3) Jika untuk setiap $(x,y)\in D$, $g(x,y)\neq 0$ maka

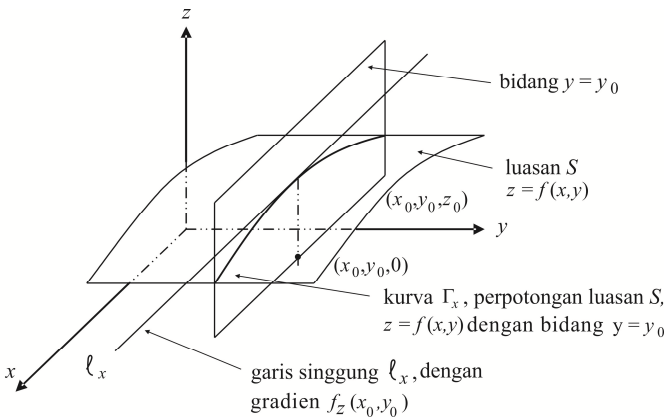
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}g(x,y)-f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{\left[g(x,y)\right]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}g(x,y)-f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{\left[g(x,y)\right]^2}$$

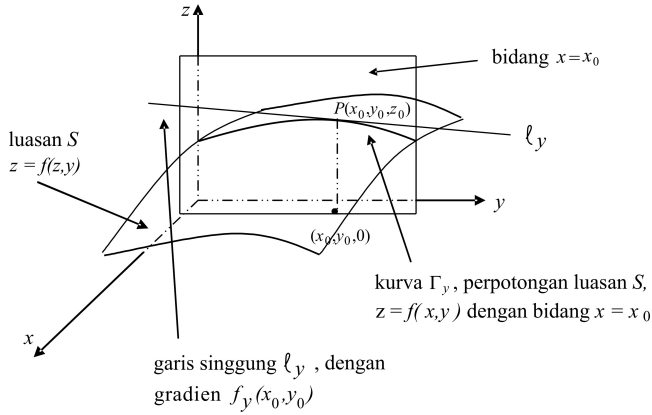
ARTI GEOMETRI DERIVATIF PARSIAL

Sebagaimana derivatif (derivatif biasa) fungsi dengan satu peubah bebas mempunyai arti geometri, yaitu nilai derivatif fungsi f di x_0, $\frac{df(x_0)}{dx}$, menyatakan gradien garis singgung kurva $y=f(x)$ di titik (x_0,y_0) dengan $y_0=f(x_0)$ maka derivatif parsial suatu fungsi dengan dua peubah bebas juga mempunyai arti geometri.

Misal diberikan fungsi bernilai real f, $z=f(x,y)$ dengan peubah bebas x, y dan peubah tak bebas z, mempunyai luasan S sebagaimana diungkapkan pada gambar berikut ini.



(a)



(b)

Gambar 1.1

Jika diambil titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada luasan S maka melalui titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dapat dibuat bidang datar $y = y_0$ sejajar bidang *xoy* (lihat Gambar 1.1.(a)), yang memotong luasan S menurut kurva Γ_x dengan ℓ_x merupakan garis singgung kurva Γ_x di titik $P(x_0, y_0, z_0)$. Demikian pula melalui titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dibuat bidang datar $x = x_0$ sejajar bidang *yoz*, (lihat Gambar 1.1.(b)), yang memotong luasan S menurut kurva Γ_y dengan

ℓ_y merupakan garis singgung kurva Γ_y di titik $P(x_0, y_0, z_0)$. Selanjutnya melalui garis ℓ_x dan ℓ_y dibuat bidang datar δ yang merupakan bidang singgung luasan *S* di titik $P(x_0, y_0, z_0)$.

Jika $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ merupakan cosinus arah garis normal bidang singgung δ maka bidang singgung tersebut mempunyai persamaan berbentuk.

$$\cos\alpha(x - x_0) + \cos\beta(y - y_0) + \cos\gamma(z - z_0) = 0 \qquad (1.8)$$

Karena bidang singgung δ tidak sejajar sumbu *z*, berarti $\cos\gamma \neq 0$ dan jika kedua ruas persamaan di atas dibagi dengan $\cos\gamma$, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \qquad (1.9)$$

dengan $A = -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ dan $B = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, dan masing-masing merupakan parameter yang harus ditentukan nilainya.

Jika pada persamaan (1.9) diambil $y = y_0$ maka diperoleh

$$z - z_0 = A(x - x_0) \qquad (1.10)$$

yang merupakan persamaan garis ℓ_x yaitu perpotongan bidang singgung δ dengan bidang datar $y = y_0$. Sedangkan kurva Γ_x (lihat Gambar 1.1.(a)) mempunyai persamaan

$$z = f(x, y_0) \qquad (1.11)$$

Karena ℓ_x merupakan garis singgung kurva Γ_x di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ maka berdasarkan pengertian geometri dari derivatif, dengan menganggap *y* sebagai konstanta, diperoleh hubungan

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \qquad (1.12)$$

Dengan cara yang sama, jika pada persamaan (1.9) diambil $x = x_0$ maka diperoleh

$$z - z_0 = B\left(y - y_0\right) \tag{1.13}$$

yang merupakan persamaan garis ℓ_y, yaitu perpotongan bidang singgung δ dengan bidang datar $x = x_0$. Sedangkan kurva Γ_y (lihat Gambar 1.1.(b)) mempunyai persamaan

$$z = f\left(x_0, y\right) \tag{1.14}$$

karena ℓ_x merupakan garis singgung kurva Γ_y di titik $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ maka berdasarkan pengertian geometri dari derivatif, dengan menganggap x sebagai konstanta, diperoleh hubungan

$$B = \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} \tag{1.15}$$

Dengan demikian persamaan (1.9), bidang singgung luasan S di titik $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$, dapat ditulis sebagai

$$z = f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\left(y - y_0\right) \tag{1.16}$$

dan garis normalnya mempunyai bilangan arah (gradien)

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}, \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}, -1 \tag{1.17}$$

Garis normal bidang singgung luasan S, $z = f\left(x, y\right)$ di titik $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ biasa disebut garis normal luasan S di titik $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Contoh 1.9 :

Jika diberikan luasan S dengan persamaan $z = 2x^2 + 3y^2$ maka tentukan:

a. persamaan bidang singgung di titik (3, 2, 30);
b. cosinus arah normal di titik tersebut.

Penyelesaian :

Diberikan persamaan luasan $z = 2x^2 + 3y^2$, atau dapat ditulis $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = 6y$$

dengan demikian

$$\frac{\partial f(3,2)}{\partial x} = 12 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial f(3,2)}{\partial y} = 12$$

sehingga persamaan bidang singgung luasan $z = 2x^2 + 3y^2$ di titik (3, 2, 30) adalah $z = 30 + 12(x - 3) + 12(y - 2)$.

Untuk menentukan cosinus arah garis normal di titik (3, 2, 30), terlebih dahulu ditentukan nilai

$$\begin{aligned} k &= \left[\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)^2 + (-1)^2\right]^{1/2} \\ &= \left[12^2 + 12^2 + 1\right]^{1/2} \qquad (1.18) \\ &= \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

Dengan demikian, cosinus arah garis normal luasan $z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ di titik $P(x_0, y_0, z_0) = P(3, 2, 30)$ adalah

$$\frac{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}{k}, \frac{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}{k}, \frac{-1}{k} \qquad (1.19)$$

yaitu, $\frac{12}{17}, \frac{12}{17}, \frac{-1}{17}$

Contoh 1.10 :

Diberikan luasan S_1, $z = f_1(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right)$, dan

luasan S_2, $z = f_2(x, y) = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}\left(x^2 + y^2\right)$.

Tunjukkan bahwa kedua garis normal luasan S_1 dan S_2 di setiap titik pada kurva perpotongannya saling tegak lurus.

Penyelesaian :

Kurva perpotongan kedua luasan S_1 dan S_2 adalah

$$2\left(x^2+y^2\right)=\frac{17}{8}-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right) \text{ atau } x^2+y^2=1$$

Jika (x_0, y_0, z_0) sebarang titik pada perpotongan kedua luasan S_1 dan S_2, yaitu lingkaran $x^2+y^2=1$ maka untuk membuktikan kedua garis normal luasan S_1 dan S_2 di titik (x_0, y_0, z_0) saling tegak lurus cukup ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}+1=0 \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}=4x_0 \qquad \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}=4y_0$$

$$\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}=-\frac{1}{4}x_0 \qquad \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{1}{4}y_0$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}+1=$$

$$(4x_0)\left(-\frac{1}{4}x_0\right)+(4y_0)\left(-\frac{1}{4}y_0\right)+1=$$

$$-x_0^2-y_0^2+1=0$$

karena $x_0^2+y_0^2=1$.

DIFERENSIAL FUNGSI PEUBAH BANYAK

Pada bagian ini dibahas pengertian diferensial fungsi peubah banyak, namun untuk mengingatkan pengertian diferensial fungsi terlebih dahulu diulang pengertian diferensial fungsi dengan satu peubah bebas.

Jika f merupakan fungsi bernilai real dengan peubah bebas x maka fungsi f dikatakan terdiferensial di x, jika untuk suatu persekitaran (*neighborhood*) x terdapat bilangan real C sehingga dipenuhi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left| f(x+\Delta x) - f(x) - C\Delta x \right|}{\left|\Delta x\right|} = 0 \qquad (1.21)$$

dan dari persamaan di atas dapat diturunkan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C$$

yang berarti fungsi *f* mempunyai derivatif di *x* dengan nilai $f'(x) = C$.

Diferensial *f*, disimbolisasi dengan *df* atau $df(x;dx)$, didefinisikan dari persamaan (1.21), yaitu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left| f(x+\Delta x) - f(x) - df(x;dx) \right|}{\left|\Delta x\right|} = 0$$

dengan demikian, diperoleh hubungan:

$$df(x;dx) = f'(x)\,dx \qquad (1.22)$$

Selanjutnya, jika *f* suatu fungsi bernilai real dengan dua peubah bebas *x* dan *y* maka sejalan dengan uraian di atas didefinisikan pengertian diferensial fungsi *f*, seperti diungkapkan dengan definisi berikut ini.

Definisi 1.6

Fungsi *f* bernilai real dengan dua peubah bebas *x* dan *y* dikatakan terdiferensial di (x, y) jika terdefinisi pada suatu persekitaran (*neighborhood*) (x, y) dan terdapat bilangan real *A* dan *B* sehingga berlaku

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\left| f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - (A\Delta x + B\Delta y) \right|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \qquad (1.23)$$

dan diferensial fungsi f, $df(x, y; dx, dy)$, didefinisikan dengan

$$df(x, y; dx, dy) = A\,dx + B\,dy \qquad (1.24)$$

Dengan mengambil $\Delta y = 0, \Delta x \neq 0$ (*y* dianggap konstan) persamaan (1.23) menjadi

$$\lim_{(\Delta x,0)\to(0,0)} \frac{\left| f\left(x+\Delta x,\ y\right) - f\left(x,y\right) - A\Delta x \right|}{\left|\Delta x\right|} = 0$$

atau

$$\lim_{(\Delta x,0)\to(0,0)} \frac{\left| f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x,y\right) \right|}{\left|\Delta x\right|} = A$$

atau

$$A = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = f_x\left(x,y\right)$$

dan dengan mengambil $\Delta x = 0, \Delta y \neq 0$ (x dianggap konstan) persamaan (1.23) menjadi

$$\lim_{(0,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left| f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) - B\Delta y \right|}{\left|\Delta y\right|} = 0$$

yang berarti

$$\lim_{(0,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left| f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x,y\right) \right|}{\Delta y} = B$$

atau

$$B = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = f_y\left(x,y\right)$$

Dengan demikian, persamaan (1.24) dapat ditulis sebagai

$$df\left(x,y;dx,dy\right) = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}dy \qquad (1.25)$$

Teorema 1.7

Diberikan fungsi bernilai real f, $f\left(x,y\right)$, terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ dan titik $\left(x_0, y_0\right) \in D$. Jika fungsi f terdiferensial di $\left(x_0, y_0\right)$ maka fungsi f kontinu di $\left(x_0, y_0\right)$.

Bukti :

Didefinisikan fungsi $u\left(h,k\right)$ dengan

$$u(h,k)=\frac{f(x+h,y+k)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{1.26}$$

jika $(h,k)\neq(0,0)$.

Dengan mengambil $h=\Delta x,\ k=\Delta y$ dan berdasarkan persamaan (1.23) diperoleh

$$\lim_{(h,k)\to(0.0)} u(h,k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Dari persamaan (1.26) diperoleh

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=Ah+Bk+u(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

dan untuk $(x,y)=(x_0,y_0)\in D$ persamaan di atas menjadi

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=Ah+Bk+u(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

dan

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)\right]$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[Ah+Bk+u(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\right]$$

atau

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)$$

Terbukti bahwa *f* kontinu di (x_0,y_0).

(Bukti selesai)

Contoh 1.11 :

Tentukan diferensial fungsi *f* di titik $(x,y)=(1,2)$, jika diberikan

$$f(x,y)=3x^2y+2xy^2+1$$

Penyelesaian:

Diketahui $f(x,y)=3x^2y+2xy^2+1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy+2y^2$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 6.1.2 + 2.2^2 = 20$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 4xy$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 3.1^2 + 4.1.2 = 11$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} df(x,y;dx,dy) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \\ &= \left(6xy + 2y^2\right)dx + \left(3x^2 + 4xy\right)dy \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} df(1,2;dx,dy) &= \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}dy \\ &= 20\,dx + 11\,dy \end{aligned}$$

Pengertian diferensial fungsi peubah banyak sebagaimana diungkapkan dengan Definisi 1.6 juga berlaku untuk fungsi dengan n buah peubah bebas $x_1, x_2, ..., x_n$. Sehingga untuk fungsi bernilai real $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, diferensial f yang disajikan dengan persamaan (1.25) menjadi

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \qquad (1.27)$$

Selanjutnya, jika diberikan fungsi bernilai real $u = u(x,y)$ dan $v = v(x,y)$ masing-masing terdefinisi dan mempunyai derivatif parsial terhadap x maupun y pada suatu daerah (*region*) $D \subset R^2$ maka berlaku sifat-sifat berikut ini.

(1) $d(u+v) = du + dv$ (1.28)

Bukti **:**

$$d(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial x}dx + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}dy$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] dy$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$= du + dv$$

(2) $d(uv) = u\ dv + v\ du$ (1.29)

Bukti :

$$d(uv) = \frac{\partial (uv)}{\partial x} dx + \frac{\partial (uv)}{\partial y} dy$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial u}{\partial y} v + u \frac{\partial v}{\partial y}\right] dy$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} v\, dx + u \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} v\, dy + u \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$= u\left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right] + v\left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right]$$

$$= u\, dv + v\, du$$

(3) Jika untuk setiap $(x, y) \in D$, $v(x, y) \neq 0$ maka berlaku

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2} \qquad (1.30)$$

Bukti **:**

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) dy$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} v - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} dx + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} v - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2} dy$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} v\, dx - u \frac{\partial v}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial y} v\, dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dy}{v^2}$$

$$= \frac{v\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] - u\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right]}{v^2}$$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Selanjutnya jika $u = u(x, y)$ dan $v = v(x, y)$ masing-masing merupakan fungsi terdiferensial terhadap peubah *x* dan *y*, dan $f = f(u, v)$ merupakan fungsi terdiferensial terhadap *u* dan *v* maka berlaku:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv \tag{1.31}$$

Bukti **:**

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right]$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Dengan demikian, persamaan (1.31) dapat ditulis sebagai

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \tag{1.32}$$

Contoh 1.7 :

Jika diberikan $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ maka tentukan *dz*.

Penyelesaian :

Misalkan, $u = x^2 + y^2$ sehingga $z = \ln\ u$.

Berdasarkan persamaan (1.32) diperoleh

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$= \frac{1}{u} 2x\, dx + \frac{1}{u} 2y\, dy$$
$$= 2 \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2}$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukanlah nilai $f_x(0,e)$ dan $f_y(0,e)$ jika diberikan $f(x,y) = e^x \ln y$.
2) Tentukan diferensial $f(x,y)$ jika $f(x,y) = e^{x-y} x^2 \sin(x-y)$.
3) Tentukan derivatif parsial orde dua fungsi *f* jika
$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x^2 y & xy \geq 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2 + y} & xy < 0 \end{cases}$$
4) Tunjukkanlah jika $u = \dfrac{xy}{x+y}$ maka dipenuhi
$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
5) Tentukanlah derivatif parsial orde dua fungsi *f* jika
   a. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$
   b. $f(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x$
   c. $f(x,y) = x^y$
   d. $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)$
   e. $f(x,y,z) = \sin\left(x + z^y\right)$
6. Tunjukkanlah jika $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ maka dipenuhi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 .$$

7) Jika diberikan fungsi f, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(y^2-x^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

tunjukan bahwa $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}\neq\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$.

8) Tentukan persamaan bidang singgung luasan $x^2+2xy^2-7z^3+3y+1=0$ di titik $(1,1,1)$.

9) Buktikan bahwa bola $x^2+y^2+z^2=16$ dan $x^2+y^2+z^2-10y+16=0$ berpotongan saling tegak lurus.

> *Petunjuk :* Dua buah luasan dikatakan berpotongan saling tegak lurus jika garis normal kedua luasan di setiap titik pada kurva perpotongannya saling tegak lurus

10) Jika diberikan $u=f\left(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-x}{xz}\right)$ dengan f fungsi sebarang, buktikan bahwa $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Lihat *Contoh 1.6*, dengan $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Lihat *Contoh 1.6*, dengan $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3) Lihat *Contoh 1.7*.

5) Lihat *Contoh 1.7*.

8) Gunakan persamaan (1.16).

9) Lihat *Contoh 1.10*, terlebih dahulu tentukan luasan bola 1 dan bola 2.

10) Diketahui apabila $u = f(v, w)$ maka $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

RANGKUMAN

Fungsi $f(x, y)$ bernilai real terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$, dikatakan terdiferensial parsial terhadap x dan y jika

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\ y) - f(x,y)}{h}$$ mempunyai nilai, dan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k}$$ mempunyai nilai.

Jika fungsi-fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ di atas terdiferensial parsial terhadap x dan y maka dipenuhi sifat-sifat :

(1) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y) + g(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y) + g(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\,g(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} g(x,y) + f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)\,g(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} g(x,y) + f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

(3) Jika $g(x, y) \neq 0$ untuk setiap $(x, y) \in D$ maka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} g(x,y) - f(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{\left[g(x,y)\right]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} g(x,y) - f(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}}{\left[g(x,y)\right]^2}$$

Fungsi $f(x,y)$ terdefinisi pada suatu daerah (*region*) $D \subset R^2$ dengan (x_0, y_0) merupakan titik limit himpunan *D*, dikatakan terdiferensial di (x_0, y_0) jika terdapat bilangan real *A* dan *B* sehingga berlaku

$$\lim_{(\Delta x,0)\to(0,0)} \frac{\left| f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y) - (A\Delta x + B\Delta y) \right|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Mudah diperlihatkan bahwa

$$A = \lim_{(\Delta x,0)\to(0,0)} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x,y)}{\Delta x}$$

$$B = \lim_{(0,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x,y)}{\Delta y}$$

dan diferensial fungsi f didefinisikan sebagai

$$df(x,y;dx,dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Diberikan fungsi $f(x,y)$ terdefinisi pada daerah (*region*) $D \subset R^2$ dengan (x_0, y_0) merupakan titik limit daerah (*region*) *D*. Jika fungsi *f* terdiferensial di titik (x_0, y_0) maka fungsi $f(x,y)$ kontinu di (x_0, y_0).

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika diberikan fungsi $f(x,y) = 2xy - \left(1 - x^2 - y^2\right)^{3/2}$ maka $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ terdefinisi ….
   A. untuk semua (*x*, *y*)
   B. untuk semua pasangan *x* dan *y* bernilai positif
   C. untuk semua pasangan *x* dan *y* bernilai negatif
   D. untuk semua (*x*, *y*) dalam lingkaran terbuka dengan pusat (0,0) dan radius 1
   E. untuk semua (*x*, *y*) dalam lingkaran tertutup dengan pusat (0,0) dan radius 1

2) Jika diberikan fungsi $f(x,y) = x^2 y + e^{-xy^3}$, maka $\dfrac{\partial f(1,-1)}{\partial x}$ mempunyai nilai ….
   A. $e-2$
   B. $1-3e$
   C. $2-6e$
   D. $15e$
   E. e

3) Jika diberikan fungsi $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$, maka bilangan arah garis normal luasan fungsi f di titik $(3,2, f(3,2))$ adalah ….
   A. 3,2,30
   B. 12,12,-1
   C. 12,12,1
   D. $\dfrac{12}{17}, \dfrac{12}{17}, -\dfrac{1}{17}$
   E. $\dfrac{12}{17}, \dfrac{12}{17}, \dfrac{1}{17}$

4) Jika diberikan fungsi $f(x,y) = 3x^2 y + 2xy^2 + 1$ maka diferensial f di titik (2,1) adalah ….
   A. $14\ dx - 20\ dy$
   B. $20\ dx - 14\ dy$
   C. $14\ dx + 20\ dy$
   D. $20\ dx + 14\ dy$
   E. $-14\ dx - 20\ dy$

5) Jika diberikan fungsi $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ maka diferensial f adalah ….

   A. $2x\ dx + 2y\ dy$
   B. $x\ dx + y\ dy$
   C. $\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$

D. $\dfrac{x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y}{x^2+y^2}dy$

E. $\dfrac{2}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2}{x^2+y^2}dy$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul berikutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C
2) C
3) E
4) B
5) B

Tes Formatif 2

1) E
2) A
3) B
4) C
5) C

Daftar Pustaka

Salas, SL & Hille, E. (1982). *Calculus One and Variables.* (Part II). 4th Edition. New York: John Wiley and Sons.

Taylor, A.E & Robert, M.W. (1983). *Advanced Calculus.* 3rd edition. New York: John Wiley and Sons.