MODUL 1

Sistem Bilangan Real

Prof. R. Soemantri

PENDAHULUAN

Dalam modul ini akan dibahas sifat-sifat pokok bilangan real. Meskipun pembaca sudah akrab benar dengan bilangan real namun modul ini akan membahasnya lebih cermat lagi. Mungkin ada sifat mendasar yang sudah biasa pembaca gunakan, namun bukti kebenaran sifat itu belum pernah dipelajari.

Pangkal pembicaraan dalam pembahasan tentang bilangan real ini adalah sistem bilangan rasional. Maksudnya para pembaca sudah dianggap memahami apa bilangan rasional itu, dengan segala sifat operasi hitungnya. Meskipun demikian tinjau ulang secara singkat tentang sistem bilangan ini, termasuk sistem bilangan asli dan bilangan bulat juga diberikan.

Tinjau ulang dimulai dengan mengasumsikan Prinsip Pengurutan Baik (*Well Ordering Principle*) dalam sistem bilangan asli, selanjutnya berdasarkan prinsip ini dibuktikan berlakunya Prinsip Induksi Matematik (*Principle of Mathematical Induction*). Sistem bilangan rasional dipandang sebagai suatu medan terurut (*ordered field*). Ditunjukkan bahwa medan terurut $\mathbb{Q}$ dari bilangan-bilangan rasional tidak mempunyai *sifat batas atas terkecil,* artinya ada subhimpunan *E* dari $\mathbb{Q}$ yang tidak kosong dan terbatas ke atas tetapi tidak ada bilangan rasional $p \in \mathbb{Q}$ yang merupakan batas atas terkecil dari *E*.

Selanjutnya untuk menyederhanakan pembahasan, sistem bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai medan terurut yang mempunyai sifat batas atas terkecil, dan memuat medan terurut $\mathbb{Q}$ sebagai submedannya. Jadi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dan setiap himpunan $E \subset \mathbb{R}$ yang tidak kosong dan terbatas ke atas mempunyai batas atas terkecil anggota dari $\mathbb{R}$. Setiap anggota $\mathbb{R}$ dinamakan bilangan real. Jadi, bilangan rasional adalah bilangan real. Bilangan real yang bukan bilangan rasional dinamakan bilangan irasional.

Dalam membahas sistem bilangan real ditekankan dan dibuktikan berlakunya sifat Archimedes, yaitu bahwa untuk setiap bilangan real x terdapat bilangan asli n sehingga $n > x$; juga tentang sifat kerapatan himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional dalam sistem bilangan real, yaitu bahwa di antara dua bilangan real terdapat bilangan rasional dan bilangan irasional. Bagaimana menentukan supremum dan infimum suatu himpunan bilangan real, teorema interval susut, dan beberapa ketaksamaan yang dianggap penting yang mungkin digunakan dalam pembahasan modul-modul berikutnya dicantumkan dalam modul ini.

Sebagai akhir modul ini disajikan sistem bilangan real yang diperluas $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, yakni $\mathbb{R}$ disertai dua lambang $-\infty$ dan ∞. Jadi dua lambang ini bukan bilangan real, tetapi untuk setiap bilangan real x didefinisikan $-\infty < x < \infty$.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan mahasiswa dapat memahami jenis dan sifat bilangan yang termasuk dalam sistem bilangan real.

Secara lebih terinci, setelah selesai mempelajari modul ini diharapkan mahasiswa dapat:

1. membuktikan dengan induksi matematik;
2. memahami sistem bilangan rasional adalah suatu medan terurut dan tidak mempunyai sifat batas atas terkecil;
3. menjelaskan sistem bilangan real adalah medan terurut yang mempunyai sifat batas atas terkecil;
4. menentukan infimum dan supremum suatu himpunan bilangan real.

KEGIATAN BELAJAR 1

Sistem Bilangan Rasional

Pembahasan sistem bilangan rasional diawali dengan membahas sistem bilangan asli dan sifat-sifatnya yang khusus dimiliki oleh sistem ini.

1.1 Bilangan Asli

Bilangan asli adalah bilangan bulat positif. Himpunan bilangan asli diberi notasi $\mathbb{N}$, jadi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dalam $\mathbb{N}$ ada operasi perjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$, yakni untuk setiap *a* dan *b* di dalam $\mathbb{N}$ terdapat *c* dan *d* di dalam $\mathbb{N}$ sehingga $a + b = c$ dan $a \cdot b = d$. Di samping itu di dalam $\mathbb{N}$ terdapat relasi urutan, yakni untuk setiap $a \in \mathbb{N}$ dan $b \in \mathbb{N}$ terdapat tepat satu dari tiga hubungan:

(i) $a < b$ (*a* lebih kecil dari *b*),
(ii) $a = b$ (*a* sama dengan *b*),
(iii) $b < a$ (*b* lebih kecil dari *a*).

Hubungan $a < b$ juga ditulis $b > a$ (*b* lebih besar dari *a*). Bilangan 1 adalah bilangan anggota $\mathbb{N}$ yang paling kecil. Pembahasan tentang bilangan asli didasari asumsi berlakunya prinsip pengurutan baik (*well ordering principle*) sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.1 (Prinsip Pengurutan Baik)
Setiap subhimpunan tidak kosong *S* dari $\mathbb{N}$ mempunyai elemen terkecil.

Jadi, jika $S \subset \mathbb{N}$ dan $S \neq \varnothing$, maka terdapat $a \in S$ dan $a \leq x$ untuk semua $x \in S$. Notasi $a \leq x$ dibaca "*a* lebih kecil atau sama dengan *x*", jadi *a* tidak lebih besar dari *x*. Berdasarkan asumsi berlakunya prinsip pengurutan baik akan dibuktikan sifat yang sangat terkenal dalam sistem bilangan asli, yang dinamakan prinsip induksi matematik.

Teorema 1.2 (Prinsip Induksi Matematik)
Jika $S \subset \mathbb{N}$ dengan sifat :

(i) $1 \in S$,
(ii) $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$,

maka $S = \mathbb{N}$.

Jadi, suatu subhimpunan dari $\mathbb{N}$ yang memenuhi (i) dan (ii), subhimpunan itu adalah $\mathbb{N}$.

Bukti:

Teorema ini akan dibuktikan dengan kontradiksi.
Diandaikan $S \neq \mathbb{N}$. Jadi, S subhimpunan sejati dari $\mathbb{N}$, sehingga himpunan $T = \mathbb{N} - S$ adalah subhimpunan yang tidak kosong dari $\mathbb{N}$. Menurut prinsip pengurutan baik terdapat $a \in T$ sehingga $a \leq t$ untuk semua $t \in T$. Karena $T \cap S = \varnothing$ dan $1 \in S$, maka $a \neq 1$. Jadi, elemen $a - 1 \in \mathbb{N}$, sebab a bukan elemen terkecil dari $\mathbb{N}$. Karena a elemen terkecil dari T, maka $a - 1$ bukan elemen T, jadi $a - 1 \in S$. Menurut sifat (ii) dari S, maka $(a-1)+1 = a \in S$. Terdapat suatu kontradiksi, yakni $a \in T$, $a \in S$, dan $T \cap S = \varnothing$. Dengan demikian pengandaian kita bahwa $S \neq \mathbb{N}$ harus salah, dan terbukti $S = \mathbb{N}$.

Bentuk kedua dari prinsip induksi matematik disajikan sebagai teorema berikut, buktinya diserahkan kepada Anda.

Teorema 1.3 (Prinsip Induksi Matematik)

Jika S subhimpunan dari $\mathbb{N}$ dengan sifat:

(i) $1 \in S$,

(ii) $\{1, \ldots, k\} \subset S \Rightarrow k + 1 \in S$,

maka $S = \mathbb{N}$.

Teorema berikut hanyalah suatu variasi dari Prinsip Induksi Matematik.

Teorema 1.4

Jika $S \subset \mathbb{N}$ dengan sifat:

(i) $n_0 \in S$,

(ii) $k \geq n_0, k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$,

maka $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

Prinsip Induksi matematik sangat bermanfaat untuk membuktikan suatu rumus atau sifat P benar untuk setiap bilangan asli.

Contoh 1.1

Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$ mewakili pernyataan $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.
Harus kita buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, pernyataan $P(n)$ adalah benar.
Dimisalkan $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ benar}\}$. Jadi $S \subset \mathbb{N}$. Jumlah $1^2 = 1$ dan
$P(1) = \frac{1}{6} 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1$.
Jadi $P(n)$ benar untuk $n = 1$, sehingga $1 \in S$.
Diasumsikan $k \in S$ atau $P(k)$ benar, yakni pernyataan

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

diasumsikan benar.
Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \left[1^2 + 2^2 + \cdots + k^2\right] + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+3) + 2(2k+3)\right] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)\left[2(k+1) + 1\right].
\end{aligned}$$

Perhitungan ini menunjukkan bahwa jika $P(n)$ benar untuk $n = k$, maka $P(n)$ benar untuk $n = k+1$, yakni pernyataan $k \in S \Rightarrow (k+1) \in S$.

Jadi himpunan $S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\}$ mempunyai sifat (i) $1 \in S$ dan (ii) $k \in S \Rightarrow (k+1) \in S$, sehingga $S = \mathbb{N}$. Dengan demikian terbukti bahwa $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ benar untuk semua bilangan asli *n*.

BUKTI DENGAN INDUKSI MATEMATIK

Dalam praktek untuk membuktikan sifat atau rumus $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan induksi menurut Teorema 1.2 cukup dilakukan tiga langkah berikut.

Langkah (i) : Dibuktikan $P(n)$ benar $n = 1$.

Langkah (ii) : Diasumsikan bahwa $P(n)$ benar untuk $n = k$.

Langkah (iii) : Berdasarkan asumsi langkah (ii) dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk $n = k+1$.

Langkah (i) dinamakan pangkal induksi, dan (ii) dinamakan langkah induksi.

Contoh 1.2

Buktikan rumus binomium Newton, jika diberikan bilangan real *a* dan *b* maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} C(n,r) a^r b^{n-r} \;, C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} .$$

Bukti:

(i) Untuk $n = 1$, maka

$$\sum_{r=0}^{r=1} C(1,r) a^r b^{1-r} = \frac{1!}{0!\,1!} a^0 b^1 + \frac{1!}{1!\,0!} a^1 b^0 = a + b .$$

Jadi, kita telah membuktikan bahwa rumus Newton benar untuk $n=1$.

(ii) Diasumsikan bahwa rumus benar untuk $n = k$.

Jadi dianggap benar bahwa $(a+b)^k = \sum_{r=0}^{r=k} C(k,r) a^r b^{k-r}$.

(iii) Berdasarkan asumsi pada langkah (ii), maka

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\sum_{r=0}^{r=k} C(k,r)a^r b^{k-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=k+1} C(k,r)a^{r+1}b^{k-r} + \sum_{r=0}^{r=k+1} C(k,r)a^r b^{k+1-r}.$$

Pada jumlah yang pertama $r+1$ diganti s dan pada yang kedua r diganti s, diperoleh

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{s=1}^{s=k+1} C(k,s-1)a^s b^{k+1-s} + \sum_{s=1}^{s=k+1} C(k,s-1)a^{s-1}b^{k+2-s}$$

$$= C(k,k)a^{k+1}b^0 + \sum_{s=1}^{s=k} C(k,s-1)a^s b^{k+1-s} + \sum_{t=0}^{t=k} C(k,t)a^t b^{k+1-t}$$

dengan

$$t = s-1 = C(k,k)a^{k+1}b^0 + \sum_{s=1}^{s=k} C(k,s-1)a^s b^{k+1-s}$$

$$+ \sum_{t=1}^{t=k} C(k,t)a^t b^{k+1-t} + C(k,0)a^0 b^{k+1}.$$

Akan tetapi $C(k,k) = \dfrac{k!}{k!\,0!} = \dfrac{(k+1)!}{(k+1)!\,0!} = C(k+1,k+1)$ dan $C(k,0) = C(k+1,0)$,

$$C(k,s-1) + C(k,s) = \frac{k!}{(s-1)!(k-s+1)!} + \frac{k!}{s!(k-s)!}$$

$$= \frac{k!}{(s-1)!(k-s)!}\left[\frac{k+1}{s(k+1-s)}\right] = C(k+1,s).$$

$$(a+b)^{k+1} = C(k+1,k+1)\,a^{k+1}b^0 + \sum_{s=1}^{s=k} C(k,s-1)\,a^s b^{k-s+1}$$

$$+ \sum_{t=1}^{t=k} C(k,t)\,a^t b^{k-t+1} + C(k+1,0)\,a^0 b^{k+1}$$

$$= C(k+1,0)\,a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{s=k} [C(k,s-1) + C(k,s)]a^s b^{k-s+1}$$

$$+ C(k+1,k+1)\,a^{k+1}b^0$$

$$= C(k+1,0)\,a^0 b^{k+1} + \sum_{s=1}^{s=k} C(k+1,s)\,a^s b^{k-s+1}$$

$$+ C(k+1,k+1)a^{k+1}b^0$$

$$= \sum_{r=0}^{r=k+1} C(k+1,r)\,a^r b^{k+1-r}.$$

Berdasar asumsi rumus Newton benar untuk $n = k$ telah dibuktikan rumus benar untuk $n = k+1$.

Menurut Prinsip Induksi Matematik, Teorema 1.2, telah dibuktikan bahwa rumus Newton $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} C(n,r)a^r b^{n-r}$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 1.3

Buktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, bilangan $8^n - 5^n$ habis dibagi 3.

Bukti:

Dimisalkan $P(n)$ mewakili pernyataan “$8^n - 5^n$ habis dibagi 3”. Harus dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(i) Untuk $n = 1$, $8^1 - 5^1 = 3$ habis dibagi 3. Jadi, $P(n)$ benar untuk $n = 1$.

(ii) Diasumsikan $P(n)$ benar untuk $n = k$. Jadi, dianggap benar bahwa $8^k - 5^k$ habis dibagi 3.

(iii) Dibuktikan bahwa jika $P(n)$ benar untuk $n = k$, maka juga benar untuk $n = k+1$.

Karena $8^k - 5^k$ habis dibagi 3, maka demikian juga $8(8^k - 5^k)$, dan mengingat (i), maka $8(8^k - 5^k) + 5^k(8^1 - 5^1)$ habis dibagi 3. Jadi $8^{k+1} - 8(5^k) + 3(5^k) = 8^{k+1} - 5^{k+1}$ juga habis dibagi 3. Terbukti bahwa $P(n)$ benar untuk $n = k+1$.

Menurut prinsip induksi matematik terbukti bahwa $8^n - 5^n$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan asli *n*.

Contoh 1.4

Diberikan barisan $< x_n >$, dengan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan rumus $x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1\frac{1}{2}$, $x_4 = 1\frac{3}{4}$, $x_5 = 1\frac{5}{8}$.

Masalah ini akan dibuktikan dengan induksi Teorema 1.3, jika $S \subset \mathbb{N}$ dengan sifat (i) $1 \in S$ dan (ii) $\{1, \ldots, k\} \subset S \Rightarrow k+1 \subset S$, maka $S = \mathbb{N}$.

Andaikan $P(n)$ adalah pernyataan "$x_{2n+1} = 1 + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$" dan $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ benar}\}$.

Tiga langkah pembuktian dengan induksi berdasarkan Teorema 1.3 sebagai berikut.

Langkah (i) : Ditunjukkan $P(n)$ benar untuk $n = 1$.

Untuk $n = 1$, maka $x_3 = x_{2+1} = 1 + \frac{1}{2^{2-1}} = 1\frac{1}{2}$.

Jadi $P(1)$ benar, sehingga $1 \in S$.

Langkah (ii) : Diasumsikan $\{1, \ldots, k\} \subset S$, jadi $P(n)$ benar untuk $n = 1, 2, \ldots, k$.

Langkah (iii) : Berdasar asumsi langkah (ii), dibuktikan $P(k+1)$ benar.

Menurut definisi

$$x_{2k+3} = \frac{1}{2}\left(x_{2k+2} + x_{2k+1}\right), x_{2k+2} = \frac{1}{2}\left(x_{2k+1} + x_{2k}\right), \; x_{2k} = 2x_{2k+1} - x_{2k-1}.$$

Jadi $x_{2k+2} = \frac{3}{2}x_{2k+1} - \frac{1}{2}x_{2k-1}$, sehingga $x_{2k+3} = \frac{5}{4}x_{2k+1} - \frac{1}{4}x_{2k-1}$.

Diperoleh

$$x_{2(k+1)+1} = \frac{5}{4}x_{2k+1} - \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1}.$$

Menurut asumsi pada langkah (ii), $P(n)$ benar untuk $n = k$ dan $n = k-1$, jadi

$$\begin{aligned} x_{2(k+1)+1} &= \frac{5}{4}\left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}} + \frac{1}{2^{2k-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)\frac{1}{2^{2k-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-3}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Jadi, $x_{2(k+1)+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{2(k-1)-1}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2(k+1)-1}}$ yang menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Menurut Teorema 1.3, maka $S = \mathbb{N}$, terbukti rumus x_{2n+1} benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Keterangan:

Dapat pembaca periksa bahwa $P(n)$ benar untuk $n = 1$ dan $n = 2$. Jadi $\{1,2\} \subset S \Rightarrow 2+1 = 3 \in S$. Maka $\{1,2,3\} \subset S \Rightarrow 3+1 = 4 \in S$. Selanjutnya secara induksi $n \in S$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 1.5

Buktikan untuk bilangan real $x > -1$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $(1+x)^n \geq 1 + nx$. (Ketaksamaan Bernoulli)

Bukti:

Jelas rumus benar untuk $n = 1$. Diasumsikan bahwa rumus benar untuk $n = k$, jadi benar bahwa $(1+nx)^k \geq 1 + kx.$ Karena $1 + x > 0$ dan $kx^2 \geq 0$, maka

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

dan terbukti ketaksamaan benar untuk $n = k+1$. Dengan demikian ketaksamaan Bernoulli benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Bilangan Rasional

Dalam sistem bilangan asli $\mathbb{N}$ kita tidak dapat menemukan bilangan asli *n* sehingga $8 + n = 5.$ Masalah ini dapat diatasi dengan memperluas $\mathbb{N}$ menjadi sistem bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Jadi, $\mathbb{N}$ menjadi subsistem dari $\mathbb{Z}$. Pada $\mathbb{N}$ ditambahkan bilangan $0, -1, -2, ..., -n, ...$ sehingga

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \cdots\}.$$

Bilangan 0 mempunyai sifat $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$ dan $a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat tepat satu bilangan $-a \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = 0$. Bilangan $-a$ dinamakan invers dari *a* terhadap operasi perjumlahan. Akan tetapi dalam $\mathbb{Z}$ tidak terdapat invers terhadap operasi perkalian, artinya untuk $x \neq 0$ (kecuali $x = 1$) tidak terdapat *y* sehingga $x \cdot y = 1$. Hal ini diatasi dengan memperluas sistem bilangan bulat $\mathbb{Z}$ menjadi sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$. Boleh dikatakan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{y}{x} : y \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Z},\ x \neq 0 \right\}$.

Sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan suatu struktur matematik yang dinamakan *medan* (*field*) terhadap operasi perjumlahan dan perkalian. Suatu medan F adalah suatu himpunan yang dilengkapi dua operasi $(+)$ dan $(\cdot)$ yang memenuhi aksioma *J*, *K*, dan *D* :

$J1$: $x \in F, y \in F \Rightarrow x + y \in F$

$J2$: $x \in F, y \in F \Rightarrow x + y = y + x$ (*sifat komutatif*)

$J3$: $x \in F, y \in F, z \in F \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$ (*sifat asosiatif*)

$J4$: terdapat elemen $0 \in F$ sehingga $0 + x = x$ untuk semua $x \in F$

$J5$: untuk setiap $x \in F$ terdapat $-x \in F$ sehingga $x + (-x) = 0$

$K1$: $x \in F, y \in F \Rightarrow x \cdot y \in F$

$K2$: $x \in F, y \in F \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$ (*sifat komutatif*)

$K3$: $x \in F, y \in F, z \in F \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (*sifat asosiatif*)

$K4$: terdapat elemen $1 \in F$ dan $1 \neq 0$ sehingga $x \cdot 1 = x$ untuk semua $x \in F$

$K5$: untuk semua $x \in F$ dan $x \neq 0$ terdapat elemen $\frac{1}{x} \in F$ dan $x \cdot \left(\frac{1}{x} \right) = 1$

D : $x \in F, y \in F, z \in F \Rightarrow x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*sifat distributif*)

Sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ memenuhi semua aksioma di atas, maka $\mathbb{Q}$ suatu medan. Karena dalam $\mathbb{Q}$ terdapat relasi urutan, maka $\mathbb{Q}$ suatu *medan terurut*.

1.2.1 Supremum dan Infimum dalam Medan Rasional $\mathbb{Q}$

Dalam pasal ini kita berbicara dalam medan rasional $\mathbb{Q}$. Jadi elemen atau bilangan yang dimaksud adalah bilangan rasional dan himpunan adalah subhimpunan dari $\mathbb{Q}$.

Definisi 1.1

Diberikan himpunan tidak kosong $E \subset \mathbb{Q}$. Himpunan E dikatakan terbatas ke atas jika terdapat $y \in \mathbb{Q}$ sehingga $x \leq y$ untuk semua $x \in E$, dan dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat $z \in \mathbb{Q}$ sehingga $z \leq x$

untuk semua $x \in E$. Himpunan E dikatakan terbatas jika E terbatas ke atas dan ke bawah. Himpunan E dikatakan tak terbatas jika E tidak terbatas ke atas atau tidak terbatas ke bawah.

Definisi 1.2

Diberikan himpunan terbatas $E \subset \mathbb{Q}$.

Bilangan $y \in \mathbb{Q}$ dinamakan suatu *batas atas* dari E jika $x \leq y$ untuk semua $x \in E$, dan $z \in \mathbb{Q}$ suatu *batas bawah* dari E jika $z \leq x$ untuk semua $x \in E$.

Bilangan $a \in \mathbb{Q}$ dinamakan batas atas terkecil atau *supremum* dari E yang dinyatakan $\sup E$:

(i) jika a suatu batas atas E, dan
(ii) jika $y < a$, maka y bukan batas atas E.

Bilangan $b \in \mathbb{Q}$ dinamakan batas bawah terbesar atau *infimum* dari E yang ditulis $\inf E$:

(i) jika b suatu batas bawah E, dan
(ii) jika $z > b$, maka z bukan batas bawah E.

Anda tentu mengenal lambang $\exists$ dan $\forall$. Lambang $\exists y \in \mathbb{Q}$ dibaca "terdapat y di dalam $\mathbb{Q}$" dan lambang $\forall x \in E$ dibaca "untuk setiap x di dalam E" atau "untuk semua x di dalam E". Jika digunakan lambang definisi-definisi di atas menjadi sebagai berikut.

(E terbatas ke atas) $\Leftrightarrow$ ($\exists y \in \mathbb{Q}$ dan $x \leq y, \forall x \in E$)

(E terbatas ke bawah) $\Leftrightarrow$ ($\exists z \in \mathbb{Q}$ dan $z \leq x, \forall x \in E$)

(y batas atas E) $\Leftrightarrow$ ($y \in \mathbb{Q}$ dan $x \leq y, \forall x \in E$)

(z batas bawah E) $\Leftrightarrow$ ($z \in \mathbb{Q}$ dan $z \leq x, \forall x \in E$)

$(a = \sup E)$ $\Leftrightarrow$ [(a batas atas E) dan ($y < a \Rightarrow y$ bukan batas atas E)]

$(b = \inf E)$ $\Leftrightarrow$ [(b batas bawah E) dan ($z > b \Rightarrow z$ bukan batas bawah E)]

Contoh 1.6

Untuk himpunan berhingga $F = \{x_i \in \mathbb{Q} : x_i < x_{i+1},\, i = 1, 2, ..., n\}$ maka F terbatas, sebab F terbatas ke atas dan juga ke bawah. Batas atas E adalah semua $y \in \mathbb{Q}$ dengan $y \geq x_{n+1}$, dan batas bawahnya semua $z \in \mathbb{Q}$ dengan $z \leq x_1$, $\sup E = x_{n+1}$ dan $\inf E = x_1$.

Contoh 1.7

Karena $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N}$ sehingga $x < n$, maka tidak ada $y \in \mathbb{Q}$ dan $n \le y, \forall n \in \mathbb{N}$. Jadi, $\mathbb{N}$ tidak terbatas ke atas, sehingga $\mathbb{N}$ tak terbatas. Mudah Anda amati bahwa $\mathbb{N}$ terbatas ke bawah dengan $\inf \mathbb{N}$ adalah 1.

Contoh 1.8

Ditinjau himpunan $E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Tampak $0 < x, \forall x \in E$, jadi 0 batas bawah *E*. Apabila $z > 0$ terdapat $n \in \mathbb{N}$ dan $x = \frac{1}{n} \in E$ dengan $x < z$, maka *z* bukan batas bawah *E*. Menurut definisi maka $0 = \inf E$. Jelas bahwa jika $x \in E$, maka $x \le 1$. Jadi 1 suatu batas atas *E*, dan jika $y < 1$ karena $1 \in E$, maka *y* bukan batas atas *E*. Jadi, $1 = \sup E$ dan *E* himpunan terbatas.

Pertanyaan timbul apakah setiap subhimpunan yang tidak kosong dan terbatas ke atas dari $\mathbb{Q}$ mempunyai batas atas terkecil atau supremum di dalam $\mathbb{Q}$? Apakah subhimpunan dari $\mathbb{Q}$ yang tidak kosong dan terbatas ke bawah pasti mempunyai infimum? Jawabnya "*tidak*".

Lemma 1.1

Tidak ada bilangan rasional *x* sehingga $x^2 = 2$.

Bukti:

Mudah dibuktikan bahwa m^2 genap jika dan hanya jika *m* genap untuk *m* bilangan bulat.

Diandaikan terdapat bilangan rasional *x* dan $x^2 = 2$, sehingga dapat kita nyatakan $x = \frac{m}{n}$ dengan *m* dan *n* bulat dan tidak mempunyai pembagi persekutuan kecuali 1.

Maka diperoleh $m^2 = 2n^2$. Ini berarti m^2 genap sehingga m juga harus genap. Jadi, terdapat *k* bulat sehingga $m = 2k$. Jika demikian, maka $4k^2 = 2n^2$ yang berarti $n^2 = 2k^2$ sehingga *n* harus genap. Dengan demikian *m* dan *n* mempunyai pembagi persekutuan 2.

Terdapat kontradiksi dengan asumsi kita bahwa $x = \frac{m}{n}$ dengan *m* dan *n* tidak mempunyai pembagi persekutuan kecuali 1. Karena terdapat suatu kontradiksi, maka pengandaian kita harus salah. Terbukti bahwa tidak ada bilangan rasional *x* sehingga $x^2 = 2$.

Teorema 1.5

Di dalam medan rasional $\mathbb{Q}$ terdapat suatu himpunan yang terbatas ke atas yang tidak mempunyai supremum di dalam $\mathbb{Q}$.

Bukti:

Ditinjau himpunan $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ dan } x^2 < 2\}$.

Lebih dahulu akan ditunjukkan bahwa *A* tidak memuat elemen terbesar.

Jika rasional $x \in A$, maka $x > 0$ dan $x^2 < 2$. Karena x^2 rasional, maka $p = \frac{2 - x^2}{x + 2}$ adalah bilangan rasional dan $p > 0$. Maka $y = x + p$ rasional dan $y > x$. Kita periksa nilai $2 - y^2$.

$$y = x + p = \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{x + 2} = \frac{2x + 2}{x + 2}.$$

$$2 - y^2 = \frac{2(x^2 + 4x + 4) - (4x^2 + 8x + 4)}{(x+2)^2} = \frac{2(2 - x^2)}{(x+2)^2} > 0, \text{ karena } x^2 < 2.$$

Jadi $y \in \mathbb{Q}$, $y > 0$, $y^2 < 2$, dan $y > x$. Dari uraian ini telah ditunjukkan benarnya pernyataan "Jika $x \in A$ maka terdapat $y \in A$ dan $y > x$". Ini berarti bahwa jika $x \in A$ maka ada $y \in A$ dan *y* lebih besar dari *x*. Dengan demikian *A* tidak memuat elemen terbesar.

Sekarang ditinjau himpunan $B = \{z \in \mathbb{Q} : z > 0 \text{ dan } z^2 > 2\}$.

Jelas bahwa jika bilangan rasional $u \in B$ maka $x < u, \forall x \in A$. Jadi, $u \in B \Rightarrow u$ batas atas *A*.

Lagi pula $v \notin B \Rightarrow [(v \le 0) \vee (v \in A)]$, sehingga $\exists x \in A$ dan $x > v$. Jadi, jika $v \notin B$ maka *v* bukan batas atas *A*. Dengan demikian *B* adalah himpunan semua batas atas *A*.

Jika $z \in B$ maka $p = \dfrac{2 - z^2}{z + 2}$ rasional negatif.

Maka $u = z + p = \dfrac{2z + 2}{z + 2}$ positif, $u < z$, dan $2 - u^2 = \dfrac{2(2 - z^2)}{(z + 2)^2} < 0$ karena $2 - z^2 < 0$.

Jadi, jika $z \in B$ maka terdapat $u \in B$ dan $u < z$. Dengan demikian *B* tidak memuat elemen terkecil. Ini berarti bahwa tidak ada batas atas terkecil atau supremum dari *A*.

Mudah pembaca periksa bahwa *B* terbatas ke bawah tetapi tidak mempunyai infimum.

Catatan:

Uraian di atas menunjukkan bahwa terdapat lubang-lubang dalam sistem bilangan rasional, meskipun di antara dua rasional $r_1 < r_2$ terdapat rasional lain $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$.

1.2.2 Sifat Batas Atas Terkecil

Definisi 1.3

Himpunan *S* (yang elemen-elemennya tidak perlu bilangan) dikatakan terurut jika dilengkapi dengan relasi urutan $<$, yakni untuk $x \in S$ dan $y \in S$ berlaku tepat satu hubungan $x < y$, $x = y$, atau $y < x$.

Pernyataan $x < y$ dibaca "*x* lebih kecil dari *y*" atau "*x* mendahului *y*".

Untuk $E \subset S$ konsep keterbatasan, batas atas/bawah *E*, $\sup E$, dan $\inf E$ didefinisikan seperti pada Definisi 1.1 dan 1.2.

Definisi 1.4

Himpunan terurut *S* dikatakan mempunyai *sifat batas atas terkecil* jika setiap subhimpunan tidak kosong dari *S* yang terbatas ke atas mempunyai supremum di dalam *S*, dan dikatakan mempunyai sifat batas bawah terbesar jika setiap subhimpunan yang tidak kosong dan terbatas ke bawah mempunyai infimum di dalam *S*.

Teorema 1.6

Himpunan terurut S mempunyai sifat batas atas terkecil (SBAT) jika dan hanya jika S mempunyai sifat batas bawah terbesar (SBBT).

Bukti:

Diandaikan S mempunyai SBAT dan B suatu subhimpunan yang tidak kosong dari S dan terbatas ke bawah. Dibentuk himpunan $A = \{x \in S : x \text{ batas bawah } B\}$. Karena B terbatas ke bawah, maka A tidak kosong. Jika $y \in B$, maka $x \leq y$ untuk semua $x \in A$ sebab semua elemen A batas bawah B. Jadi, jika $y \in B$ maka y batas atas A. Karena $A \neq \varnothing$ dan S mempunyai SBAT, maka $\exists a \in S$ dan $a = \sup A$. Akan dibuktikan bahwa $a = \inf B$. Jadi, harus dibuktikan :

(i) a suatu batas bawah B, dan

(ii) jika $z > a$, maka z bukan batas bawah B.

(i) Di atas telah dibuktikan "jika $y \in B$ maka y batas atas A" yang ekuivalen dengan implikasi "jika y bukan batas atas A maka $y \notin B$". Karena $a = \sup A$, jadi jika $y < a$ maka y bukan batas atas A. Menurut implikasi terakhir ini, diperoleh jika $y < a$ maka $y \notin B$. Ini berarti bahwa jika $y \in B$ maka $a \leq y$, sehingga a suatu batas bawah B.

(ii) Karena $a = \sup A$ maka $x \leq a$ untuk semua $x \in A$. Jadi, jika $z > a$ maka $z > x$ untuk semua $x \in A$, sehingga $z \notin A$. Karena A himpunan semua batas bawah B, jadi jika $z > a$ maka z bukan batas bawah B.

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa sembarang subhimpunan tidak kosong B dari S yang terbatas ke bawah mempunyai infimum di dalam S, jadi S mempunyai SBBT.

Implikasi yang sebaliknya dibuktikan dengan cara yang serupa.

Dengan memperhatikan Teorema 1.5 dan $\mathbb{Q}$ suatu medan terurut jadi himpunan terurut maka kita telah membuktikan teorema berikut.

Teorema 1.7

Medan rasional $\mathbb{Q}$ tidak mempunyai sifat batas atas terkecil maupun sifat batas bawah terbesar.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dengan rumus $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ dan rumus dalam Contoh 1.1, turunkan rumus untuk jumlah $1^3+2^3+\cdots+n^3$.
2) Buktikan kebenaran rumus jawaban soal 1) berlaku untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ dengan prinsip induksi matematik.
3) Untuk barisan $<x_n>$ dalam Contoh 1.4, tentukan nilai x_n untuk $n=2,4,6,8.$ Cobalah Anda duga rumus untuk x_{2n}, dan buktikan kebenaran dugaan Anda dengan induksi.
4) Buktikan Teorema 1.3 dan Teorema 1.4.
5) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan 3.
6) Apakah yang dimaksud himpunan terurut *S* mempunyai SBAT/SBBT?
7) Buktikan jika himpunan terurut *S* mempunyai SBBT maka *S* mempunyai SBAT.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan kesamaan $\sum_{r=1}^{r=n}(r+1)^4=\sum_{r=1}^{r=n}r^4+4\sum_{r=1}^{r=n}r^3+6\sum_{r=1}^{r=n}r^2+4\sum_{r=1}^{r=n}r+\sum_{r=1}^{r=n}1$.
2) Kerjakan sendiri bukti $\sum_{r=1}^{r=n}r^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
3) $x_2=2$, $x_3=1\frac{1}{2}$.

$$x_4=\frac{x_3+x_2}{2}=\frac{1\frac{1}{2}+2}{2}=\frac{2\cdot 2-\frac{1}{2}}{2}=2-\frac{1}{2^2}=1\frac{3}{4},\ x_5=1\frac{5}{8}.$$

$$x_6 = \frac{x_5 + x_4}{2} = \frac{1\frac{5}{8} + 1\frac{3}{4}}{2} = \frac{\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(2 - \frac{1}{4}\right)}{2} = \frac{2\left(2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}}{2}$$

$$= 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4}.$$

Jadi, $x_2 = 2$, $x_4 = 2 - \frac{1}{2^2}$, $x_6 = 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4}$, dapat Anda hitung

$$x_8 = 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6}.$$

Wajar bahwa Anda akan menduga $x_{2n} = 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} - \cdots - \frac{1}{2^{2(n-1)}}$ untuk semua $n \geq 2$.

Buktikan kebenaran rumus ini dengan induksi matematik Teorema 1.4 untuk $n_0 = 2$.

4) Kerjakan seperti pada bukti Teorema 1.2.

5) Tunjukkan jika m bulat maka (m^2 habis dibagi 3) $\Leftrightarrow$ (m habis dibagi 3). Implikasi $\Leftarrow$ jelas. Untuk implikasi $\Rightarrow$, buktikan (m tidak habis dibagi 3) $\Rightarrow$ (m^3 tidak habis dibagi 3) dengan memisalkan $m = 3k \pm 1$. Selanjutnya dibuktikan dengan kontradiksi.

RANGKUMAN

Prinsip Pengurutan Baik: $S \subset \mathbb{N}, S \neq \varnothing \Rightarrow \exists a \in S$ dan $x \leq a, \forall x \in S$.

Prinsip Induksi Matematik I: $S \subset \mathbb{N}$ dan (i) $1 \in S$,
(ii) $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$,
maka $S = \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematik II: $S \subset \mathbb{N}$ dan (i) $1 \in S$,
(ii) $\{1, 2, \ldots, k\} \subset S \Rightarrow k+1 \in S$,
maka $S = \mathbb{N}$.

Rumus Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, a^r b^{n-r}, \forall n \in \mathbb{N}, \; C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah medan terurut terhadap perjumlahan dan perkalian dan tidak mempunyai *sifat batas atas terkecil.*

Medan terurut F dikatakan mempunyai sifat batas atas terrkecil jika setiap subhimpunan tidak kosong $S \subset F$ dan yang terbatas ke atas mempunyai supremum di dalam F.

TES FORMATIF 1

Jawablah dengan singkat dan jelas!

1) Buktikan bahwa $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
2) Buktikan untuk $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ habis dibagi 7, dan $3^{2n} + 7$ habis dibagi 8.
3) Diberikan barisan bilangan $< x_n >$, dengan $x_1 = 2$ dan $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 5}$ untuk semua bilangan asli *n*. Buktikan $0 < x_n < 3$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
4) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional yang pangkatnya tiga sama dengan 9.
5) Buktikan himpunan $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 3\right\}$ terbatas ke atas dan tidak mempunyai supremum di dalam $\mathbb{Q}$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sistem Bilangan Real

Setelah membahas sistem bilangan rasional, kita sudah siap membahas sistem bilangan real.

1.3 Bilangan Real

Sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah suatu medan terurut dengan operasi perjumlahan dan perkalian yang tidak mempunyai sifat batas terkecil, artinya ada suatu subhimpunan tidak kosong dari $\mathbb{Q}$ yang tidak kosong dan terbatas ke atas tetapi tidak mempunyai batas atas terkecil. Perlu pembaca ketahui bahwa subhimpunan semacam ini tak berhingga banyaknya. Dalam sistem bilangan rasional kita tidak dapat menyelesaikan persamaan seperti $x^2 = 2$. Untuk mengatasi hal ini kita perluas sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ menjadi sistem bilangan real $\mathbb{R}$.

Teorema 1.8

Terdapat suatu medan terurut $\mathbb{R}$ yang mempunyai sifat batas atas terkecil dan memuat medan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai submedannya.

Teorema 1.8 tidak dibuktikan dalam modul ini, pembaca yang berminat dapat mebacanya dalam *Rudin,"Principles of Mathematical Analysis",* 1976, edisi ke-3, halaman 17-21.

Jadi, sistem bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai medan terurut oleh Teorema 1.8. Pernyataan $\mathbb{Q}$ sebagai submedan dari $\mathbb{R}$ berarti $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dan operasi perjumlahan dan perkalian di dalam $\mathbb{R}$ jika dikenakan pada elemen-elemen $\mathbb{Q}$ adalah perjumlahan dan perkalian antara bilangan rasional yang sudah pembaca kenal dengan baik. Urutan dalam $\mathbb{Q}$ terbawa berlaku dalam $\mathbb{R}$. Bilangan anggota dari $\mathbb{R}$ dinamakan bilangan real. Seperti halnya bilangan rasional, bilangan real $x > 0$ dinamakan bilangan positif dan yang lebih kecil dari 0 dinamakan bilangan negatif. Jadi, semua bilangan rasional, termasuk bilangan bulat dan bilangan asli adalah bilangan real.

Himpunan $A=\left\{x\in\mathbb{Q}: x>0,\ x^2<2\right\}$ dalam sistem bilangan rasional terbatas ke atas tetapi tidak mempunyai batas atas terkecil. Dalam sistem bilangan real karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil maka $\sup A$ ada di dalam $\mathbb{R}$ yaitu bilangan $\sqrt{2}$. Pada dasarnya medan terurut $\mathbb{R}$ dikonstruksikan dari medan $\mathbb{Q}$ dengan mengisi lubang-lubang semacam itu dengan bilangan jenis baru sehingga diperoleh medan terurut $\mathbb{R}$ yang mempunyai sifat batas atas terkecil. Bilangan jenis baru yang bukan anggota $\mathbb{Q}$ dinamakan bilangan irasional. Jadi, bilangan real ada dua jenis yakni bilangan rasional dan irasional.

Eksistensi Akar Pangkat *n*

Di atas dikatakan bahwa $\sqrt{2}$ adalah $\sup A$ untuk

$$A=\left\{x\in\mathbb{Q}: x>0,\ x^2<2\right\}.$$

Sekarang akan ditunjukkan eksistensi dari akar pangkat *n* untuk bilangan real positif.

Teorema 1.9

Untuk setiap bilangan real $a>0$ dan setiap bilangan asli n terdapat tepat satu bilangan real *x* sehingga $x^n=a$.

Bukti:

Ketunggalan dari nilai *x* jelas, sebab jika $0<x_1<x_2$ maka $x_1{}^n<x_2{}^n$.

Ditinjau himpunan bilangan real $E=\left\{t\in\mathbb{R}: t>0,\ t^n<a\right\}$.

Jika $t=\dfrac{a}{1+a}$ maka $0<t<1$, sehingga $t^n<t<a$ dan *E* tidak kosong.

Jika $t>1+a$ maka $t^n>t>a$ sehingga $t\notin E$ dan $1+a$ batas atas *E*. Jadi *E* terbatas ke atas.

Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil maka $x=\sup E$ dijamin ada.

Untuk membuktikan bahwa $x^n=a$ akan ditunjukkan bahwa jika $x^n<a$ atau $x^n>a$ akan menghasilkan suatu kontradiksi.

Identitas $p^n - q^n = (p-q)\left(p^{n-1} + p^{n-2}q + \cdots + q^{n-1}\right)$ akan menghasilkan ketaksamaan

$$p^n - q^n < (p-q)np^{n-1}, \text{ jika } 0 < q < p.$$

Diasumsikan $x^n < a$. Dipilih $0 < h < 1$ dan $h < \dfrac{a - x^n}{n(x+1)^{n-1}}$.

Jika diambil $q = x$ dan $p = x + h$ maka

$$(x+h)^n - x^n < hn(x+h)^{n-1} < hn(x+1)^{n-1} < a - x^n.$$

Jadi, $(x+h)^n < a$, dan $x + h \in E$. Karena $x + h > x$ maka kontradiksi dengan *x* batas atas *E*.

Diasumsikan $x^n > a$. Dipilih $k = \dfrac{x^n - a}{nx^{n-1}}$.

Maka $0 < k < x$. Jika $t \geq x - k$, maka diperoleh

$$x^n - t^n \leq x^n - (x-k)^n < knx^{n-1} = x^n - a.$$

Jadi $t^n > a$, dan $t \notin E$. Ini berakibat $x - k$ suatu batas atas *E*. Tetapi $x - k < x$ terdapat kontradiksi dengan *x* batas atas terkecil dari *E*. Oleh karena itu $x^n = a$ dan lengkaplah bukti teorema ini.

SIFAT PENTING

Teorema 1.10 (Sifat Archimedes)

Untuk setiap bilangan real *a* dan *b* dengan $a > 0$ terdapat bilangan asli *n* dan $na > b$.

Bukti:

Diandaikan teorema ini salah. Jadi, terdapat bilangan real *b* dan $a > 0$ sehingga $na \leq b$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Dibentuk himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} : x = na,\ n \in \mathbb{N}\}$. Jelas *S* tidak kosong dan menurut asumsi di atas *S* terbatas ke atas dengan *b* suatu batas atasnya. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai SBAT maka terdapat $c \in \mathbb{R}$ dan $c = \sup S$.

Diketahui $a > 0$ sehingga $c - a < c$. Karena $c = \sup S$ maka terdapat $y \in S$ dan $c - a < y$. Jadi terdapat $m \in \mathbb{N}$ dan $y = ma > c - a$.

Dengan demikian maka $c<(m+1)a$ dengan $m+1\in\mathbb{N}$, sehingga terdapat kontradiksi dengan $c=\sup S$. Karena terdapat kontradiksi maka pengandaian kita salah dan terbuktilah sifat Archimedes di atas.

Sifat Archimedes lebih dikenal untuk *a* diambil 1.

Teorema 1.11 (Sifat Archimedes)
Untuk setiap bilangan real *x* terdapat $n\in\mathbb{N}$ dan $n>x$.

Teorema 1.12 (Akibat)
Untuk *x* bilangan real positif terdapat $m\in\mathbb{N}$ dan $m-1\le x<m$.

Bukti:
Menurut sifat Archimedes himpunan $S=\{n\in\mathbb{N}:n>x\}$ tidak kosong. Dengan menggunakan prinsip pengurutan baik, terdapat $m\in S$ dan $m\le n,\forall n\in S$. Jadi $m-1\notin S$ sehingga $m-1\le x<m$.

Dikatakan bahwa sistem bilangan rasional $\mathbb{Q}$ *rapat* dalam $\mathbb{R}$, dalam arti untuk setiap x dan *y* real, bagaimanapun dekatnya kedua bilangan ini, di antara mereka terdapat bilangan rasional.

Teorema 1.13 (Sifat kerapatan $\mathbb{Q}$ dalam $\mathbb{R}$)
Jika *x* dan *y* bilangan real dan $x<y$ terdapat suatu bilangan rasional *r* dan $x<r<y$.

Bukti:
Lebih dahulu dibahas untuk kasus $0<x<y$. Karena $y-x>0$ menurut sifat Archimedes terdapat $n\in\mathbb{N}$ sehingga $n(y-x)>1$, dan menurut Teorema 1.12, karena $nx>0$ terdapat $m\in\mathbb{N}$ sehingga $m-1\le nx<m$.
Dari kedua ketaksamaan ini diperoleh
$$nx<m\le nx+1<ny\Rightarrow nx<m<ny.$$
Jadi, terdapat *m* dan *n* sehingga $x<r=\dfrac{m}{n}<y$. Telah dibuktikan Teorema 1.13 untuk kasus $0<x<y$.

Untuk $0 = x < y$ maka $0 = x < \frac{x+y}{2} < y$. Menggunakan hasil di atas terdapat rasional *r* sehingga $x < \frac{x+y}{2} < r < y$.

Dengan menggunakan hasil ini maka untuk $x < 0 < y$ terdapat rasional *r* dan $x < 0 < r < y$. Sedangkan untuk $x < y < 0$ maka $0 < -y < -x$ dan kembali ke keadaan awal bukti ini. Dengan demikian Teorema 1.13 telah dibuktikan semua keadaan *x* dan *y*.

Teorema 1.14

Jika *x* dan *y* bilangan real dan $x < y$ maka terdapat bilangan irasional *q* dan $x < q < y$.

Bukti:

Sudah kita ketahui bahwa $\sqrt{2}$ bilangan irasional, jadi tidak ada bilangan bulat *m* dan *n* sehingga $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Mudah dibuktikan bahwa jika *r* suatu bilangan rasional maka $r\sqrt{2}$ juga bilangan irasional. Menurut Teorema 1.13 terdapat rasional *r* dan $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ sehingga $x < r\sqrt{2} < y$. Jadi, himpunan semua rasional $\mathbb{Q}$ maupun himpunan semua irasional $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$.

Contoh 1.9

Buktikan jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli *n* sehingga $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Bukti:

Menurut sifat Archimedes Teorema 1.11 terdapat $n \in \mathbb{N}$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Jadi $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Contoh 1.10

Diberikan bilangan real *p*. Buktikan ada barisan bilangan irasional $< x_n >$ sehingga $p < x_n < p+1$ dan $x_{n+1} < x_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Menurut Teorema 1.14 terdapat bilangan irasional x_1 dan $p < x_1 < p+1$. Dengan menggunakan Teorema 1.14 terdapat bilangan irasional x_2 dan $p < x_2 < x_1$ sehingga $p < x_2 < x_1 < p+1$.
Diasumsikan untuk bilangan asli $k \geq 2$ terdapat bilangan irasional x_k dan x_{k+1} sehingga $p < x_{k+1} < x_k < p+1$. Karena $p < x_{k+1}$ maka menurut Teorema 1.14 terdapat bilangan irasional x_{k+2} dan $p < x_{k+2} < x_{k+1}$, jadi $p < x_{k+2} < x_{k+1} < p+1$. Jadi jika terdapat bilangan irasional x_k, x_{k+1} sehingga $p < x_{k+1} < x_k < p+1$ maka terdapat bilangan irasional x_{k+2} dan $p < x_{k+2} < x_{k+1} < p+1$. Menurut prinsip induksi matematik maka terdapat barisan bilangan irasional $< x_n >$ dengan $p < x_{n+1} < x_n < p+1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Supremum dan Infimum dalam $\mathbb{R}$

Tidak seperti dalam sistem bilangan rasional, dalam sistem bilangan real setiap himpunan yang tidak kosong dan terbatas ke atas pasti mempunyai supremum, yang tidak kosong dan terbatas ke bawah infimumnya pasti ada. Lemma berikut memberi petunjuk kepada kita bilamana suatu batas atas supremum dan suatu batas bawah adalah infimum suatu himpunan.

Lemma 1.2

Diberikan himpunan $E \subset \mathbb{R}$ yang tidak kosong dan terbatas, *u* adalah batas atas *E* dan *v* batas bawah *E*, maka:

(i) $u = \sup E \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E)(u - \varepsilon < x)$

(ii) $v = \inf E \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in E)(y < v + \varepsilon)$

Bukti

(i) Diberikan $u = \sup E$ dan $\varepsilon > 0$. Maka $u - \varepsilon < u$ sehingga $u - \varepsilon$ bukan batas atas E.
Karena $u - \varepsilon$ bukan batas atas *E* maka terdapat $x \in E$ dan $x > u - \varepsilon$.

Sekarang diketahui bahwa $(\forall\varepsilon>0)(\exists x\in E)(u-x<\varepsilon)$, akan dibuktikan $u=\sup E$.

Diandaikan *a* suatu batas atas *E* dan diberikan sembarang $\varepsilon>0$. Maka $\exists x\in E$ dan $u-x<\varepsilon$. Karena *a* batas atas *E* maka $x\leq a$ sehingga $u-a<\varepsilon$ untuk sembarang $\varepsilon>0$. Ini akan berakibat $u\leq a$. Sebab, jika $u>a$ dan diambil $\varepsilon=\dfrac{u-a}{2}>0$ akan diperoleh $u-a=2\varepsilon>\varepsilon$ untuk suatu $\varepsilon>0$, kontradiksi dengan $u-a<\varepsilon$ untuk sembarang $\varepsilon>0$. Karena *u* suatu batas atas *E* dan jika *a* batas atas *E* maka $u\leq a$, ini berarti bahwa *u* batas atas terkecil *E*.

(ii) Dibuktikan dengan cara yang serupa pembuktian (i).

Contoh 1.11

E himpunan tidak kosong dan terbatas dalam $\mathbb{R}$, buktikan $\inf E\leq\sup E$. Bilamana $\inf E=\sup E$?

Jawab:

Dimisalkan $a=\sup E$ dan $b=\inf E$. Jika $x\in E$ maka $b\leq x\leq a$, sehingga $b\leq a$. Jadi $\inf E\leq\sup E$.

Jika $a=b$ maka $a\leq x\leq b,\forall x\in E$ sehingga $a=x=b,\forall x\in E$, jadi himpunan dengan satu elemen.

Contoh 1.12

Jika *A* dan *B* tidak kosong dan terbatas dalam $\mathbb{R}$ dan $B\subset A$, maka buktikan $\inf A\leq\inf B$ dan $\sup A\geq\sup B$.

Bukti:

Diandaikan $a_1=\inf A$ dan $b_1=\inf B$. Maka $a_1\leq x,\forall x\in A$. Karena $B\subset A$ maka $a_1\leq x,\forall x\in B$ sehingga a_1 suatu batas bawah *B*. Jika $a_1>b_1=\inf B$ maka a_1 bukan batas bawah *B*, jadi haruslah $a_1\leq b_1$. Terbuktilah ketaksamaan yang pertama.

Anda dipersilakan membuktikan sendiri ketaksamaan yang kedua.

Contoh 1.13

Untuk suatu bilangan real *c* dan himpunan $E \subset \mathbb{R}$ didefinisikan

$$E + c = \{x : x = t + c,\ t \in E\}.$$

Buktikan $\sup(E+c) = c + \sup E$, $\inf(E+c) = c + \inf E$.

Bukti:

Diandaikan $a = \sup E$. Jadi $a \geq t, \forall t \in E$ dan $a + c \geq x = t + c, \forall x \in E + c$. Jadi $a + c$ suatu batas atas $E + c$. Menurut Lemma 1.2 karena $a = \sup E$, jika diberikan $\varepsilon > 0, \exists t \in E$ dan $a - \varepsilon < t$. Jadi, $\exists x = t + c \in E + c$ dan $a + c - \varepsilon < x$. Karena $a + c$ batas atas $E + c$ maka menurut Lemma 1.2, $a + c$ supremum $E + c$.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan kesamaan yang kedua.

Contoh 1.14

Tentukan supremum dan infimum himpunan $E = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Jawab:

Untuk *m* tetap dimisalkan $E_m = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Jadi, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ maka berlaku

$$x \in E_m \Rightarrow x = \frac{1}{m} - \frac{1}{n},$$

jadi $x < \frac{1}{m}$. Karena ini berlaku $\forall m \in \mathbb{N}$ maka $x < 1$.

Jika $x \in E$ maka $\exists m \in \mathbb{N}$ sehingga $x \in E_m$, jadi $x < 1$ untuk semua $x \in E$. Dengan demikian 1 adalah suatu batas atas *E*. Jika diberikan $\varepsilon > 0$ menurut sifat Archimedes, $\exists n \in \mathbb{N}$ dan $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Jika diambil $m = 1$ maka $x = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ sehingga $x \in E$ dan $1 - x = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Menurut Lemma 1.2 maka 1 adalah $\sup E$. Selanjutnya pembaca dipersilakan membuktikan sendiri bahwa -1 suatu batas bawah dan $\inf E$.

Definisi 1.5

Untuk $a \in \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$ himpunan $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ dinamakan interval tertutup dan diberi notasi $[a,b]$, sedangkan $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ interval terbuka dengan notasi (a,b).

Lemma 1.3 (Lemma Interval Susut)

Jika $I_n = [a_n, b_n]$ dengan $a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}$ dan $I_n \supset I_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.

Jika diketahui pula bahwa $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ dimana $|I_n| = b_n - a_n = \text{panjang}\, I_n$ maka terdapat tepat satu titik $p \in \mathbb{R}$ dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{p\}$.

Bukti:

Kita mempunyai barisan bilangan

$$\cdots \le a_n \le a_{n-1} \le \cdots \le a_2 \le a_1 < b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_{n-1} \le b_n \le \cdots$$

Untuk setiap n maka $a_n < b_1$, jadi himpunan $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas ke atas sehingga $\exists p \in \mathbb{R}$ dan $p = \sup\{a_n\}$. Karena b_1 suatu batas atas $\{a_n\}$ maka $p < b_1$. Dengan demikian $p \in I_1 \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Terbukti $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing$.

Jika diketahui $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ maka jika diberikan $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, dan $|I_n| < \varepsilon, \forall n \ge N$. Diandaikan terdapat x dan y di dalam $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, jadi x dan y di dalam I_N dengan $|I_N| < \varepsilon$. Jadi $|x - y| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ yang berakibat bahwa $|x - y| = 0$ sehingga $x = y$.

Karena $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing$ dan jika x dan y didalam $\bigcap I_n$ maka $x = y$.

Jadi $\bigcap I_n$ hanya terdiri atas satu elemen saja.

Catatan:

Meskipun dalam bukti ini digunakan konsep limit dan nilai mutlak, yang belum dibahas dalam modul ini, namun pembaca pasti sudah mengenalnya.

1.3.2 Nilai Mutlak Bilangan Real

Akar pangkat bilangan asli *n* dari *x* adalah bilangan real $\sqrt[n]{x}$ jika dipangkatkan *n* sama dengan *x*. Untuk *n* genap maupun gasal dan *x* *positif*, notasi $\sqrt[n]{x}$ adalah bilangan real *positif*. Untuk *n gasal* dan *y negatif*, akar pangkat *n* dari *y* bilangan real *negatif* $-\sqrt[n]{(-y)}$, sedangkan untuk *n* genap, akar pangkat dari *y tidak ada*.

Definisi 1.6 (Nilai mutlak bilangan real)

Nilai mulak bilangan real *x* adalah $|x|$ yang didefinisikan

$$|x| = x \text{ jika } x \geq 0 \text{ dan } |x| = -x \text{ jika } x < 0.$$

Definisi ini ekuivalen dengan

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Teorema 1.15

(i) $|x| \geq 0$,

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$|-x| = |x|$,

$x \leq |x|$,

$|x|^2 = x^2$.

(ii) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$,

$|x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1||x_2|\cdots|x_n|$,

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ untuk $y \neq 0$.

Teorema 1.16 (Ketaksamaan Segitiga)

(i) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$,

(ii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Bukti Teorema 1.15 diserahkan Anda, sedangkan bukti Teorema 1.16 ada dalam Contoh 1.15.

Catatan:

Nilai mutlak hasilkali sama dengan hasilkali nilai mutlak. Nilai mutlak hasilbagi sama dengan hasilbagi nilai mutlak. Tetapi tidak demikian halnya untuk jumlah dan selisih (perhatikan Teorema 1.16).

1.3.3 Ketaksamaan

Tentang sifat-sifat ketaksamaan dalam bilangan real dianggap sudah pembaca pahami sehingga tidak perlu diulang dalam modul ini. Di bawah ini beberapa ketaksamaan yang penting dan perlu dikenal dengan baik.

Teorema 1.17

(i) Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$ maka $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

(ii) Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Bukti:

(i) Diberikan $a \leq b$, jadi $b - a \geq 0$, maka

$$b^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) \geq 0 \Leftrightarrow b - a \geq 0 .$$

Jadi, $b^2 \geq a^2 \Leftrightarrow b \geq a$.

$a \geq 0, b \geq 0$ maka $\sqrt{a} \geq 0$ dan $\sqrt{b} \geq 0$ sehingga

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{a}\right)^2 \leq \left(\sqrt{b}\right)^3 \;\Leftrightarrow\; a \leq b .$$

(ii) Karena a dan b positif maka $\sqrt{a}$ dan $\sqrt{b}$ ada dan diperoleh

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Contoh 1.15

Buktikan ketaksamaan segitiga $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

Bukti:

Karena nilai mutlak nonnegatif maka $|x+y| \le |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2$.

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = |x|^2+|y|^2+2xy \\ &\le |x|^2+|y|^2+2|x|\,|y| = (|x|+|y|)^2.\end{aligned}$$

Jadi $|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2$, dan terbukti $|x+y| \le |x|+|y|$.

Ketaksamaan yang kiri dapat dibuktikan dengan ketaksamaan yang kanan.

$$|x| = |-y+(x+y)| \le |-y|+|x+y| = |y|+|x+y| \;\Rightarrow\; |x|-|y| \le |x+y|$$

$$|y| = |-x+(x+y)| \le |-x|+|x+y| = |x|+|x+y| \;\Rightarrow\; |y|-|x| \le |x+y|$$

Gabungan kedua ketaksamaan ini menghasilkan $\big||x|-|y|\big| \le |x+y|$, dan lengkaplah bukti ketaksamaan (i) dalam Teorema 1.16. Ketaksamaan (ii) dibuktikan dengan mengganti y dengan $-y$ dan mengingat $|-y| = |y|$.

Contoh 1.16 (Ketaksamaan Bernoulli)

Jika $x > -1$ dan $n \in \mathbb{N}$ maka $(1+x)^n \ge 1+nx$. (lihat Contoh 1.5)

Contoh 1.17 (Ketaksamaan Cauchy)

Jika $n \in \mathbb{N}$ dan $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right).$$

Jika semua $b_i \ne 0$ maka ketaksamaan menjadi kesamaan jika dan hanya jika $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ sehingga $a_i = \lambda b_i, \forall i = 1, 2, ..., n$.

Bukti:

Diandaikan $A = \sum a_i^{\,2}$, $B = \sum b_i^{\,2}$, dan $C = \sum a_i b_i$ penjumlahan meliputi *i* dari 1 sampai *n*. Untuk $A = 0$ dan $B = 0$ maka semua $a_i = b_i = 0$ dan ketaksamaan Cauchy benar karena kedua ruas ketaksamaan bernilai nol.

Dimisalkan $B \ne 0$, jadi $B > 0$ dan dibentuk

$$f(x) = \sum (b_i x - a_i)^2 = Bx^2 - 2Cx + A.$$

Fungsi ini nonnegatif untuk semua $x \in \mathbb{R}$, jadi diskriminan $C^2 - AB \le 0$ sehingga terbuktilah ketaksamaan Cauchy di atas.
Jika $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ dan $a_i = \lambda b_i, \forall i$, maka diperoleh $f(x) = B\sum(x-\lambda)^2$ maka persamaan kuadrat $Bx^2 - 2Cx + A = 0$ mempunyai dua akar yang sama yaitu λ sehingga $C^2 - AB = 0$ dan ketaksamaan Cauchy menjadi suatu kesamaan. Sebaliknya, jika $C^2 - AB = 0$ maka persamaan kuadrat $f(x) = 0$ mempunyai dua akar real yang sama, sebut saja λ. Jadi $f(\lambda) = 0$ yang berarti $B\sum(b_i\lambda - a_i)^2 = 0$ sehingga $b_i\lambda - a_i = 0$ atau $a_i = \lambda b_i$ untuk semua *i*.

1.3.4 Sistem Bilangan Real Diperluas

Definisi 1.7

Sistem bilangan real diperluas $\mathbb{R}^*$ memuat medan real $\mathbb{R}$ dan dua lambang $-\infty$ dan ∞. Urutan yang berlaku dalam $\mathbb{R}$ tetap dipertahankan didefinisikan $-\infty < x < \infty$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Jadi, $-\infty$ dan ∞ bukan bilangan real. Dalam sistem $\mathbb{R}^*$ setiap subhimpunan dari $\mathbb{R}$ menjadi himpunan terbatas. Himpunan $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ yang tidak terbatas ke atas dalam $\mathbb{R}$, dalam $\mathbb{R}^*$ menjadi terbatas dengan $\inf E = 0$ dan $\sup E = \infty$. Demikian himpunan tidak kosong yang tidak terbatas ke bawah di dalam $\mathbb{R}$, di dalam $\mathbb{R}^*$ mempunyai infimum $-\infty$.

Sistem bilangan real diperluas bukan suatu medan, tetapi biasanya diadakan perjanjian sebagai berikut:

(i) Untuk $x \in \mathbb{R}$: $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, $\dfrac{x}{\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$

(ii) Untuk $x > 0$: $x \cdot \infty = \infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$

(iii) Untuk $x < 0$: $x \cdot \infty = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = \infty$

Jika diinginkan, untuk membedakan bilangan-bilangan real dengan lambang ∞ dan $-\infty$ secara lebih eksplisit, bilangan-bilangan real dinamakan bilangan *berhingga*.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan Lemma 1.2 (ii) untuk *v* suatu batas bawah *E*.
2) Buktikan dalam Contoh 1.14 bahwa $-1 = \inf E$.
3) Buktikan dengan contoh bahwa $I_n = (a_n, b_n),\, I_n \supset I_{n+1} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$ tidak benar.
4) Tunjukkan bahwa jika *x* dan *y* rasional, maka $x + y$ dan $x \cdot y$ juga rasional.
5) Tunjukkan bahwa jika *x* dan *y* irasional, maka $x + y$ dan $x \cdot y$ mungkin rasional mungkin juga irasional.
6) Tunjukkan bahwa jika *r* rasional tidak nol dan *s* irasional, maka $r + s$ dan $r \cdot s$ irasional.
7) Gunakan Lemma 1.2 dan sifat Archimedes untuk membuktikan bahwa $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$. Buktikan juga bahwa supremumnya 1.
8) Diberikan *A* dan *B* subhimpunan $\mathbb{R}$ dengan $x \le y, \forall x \in A, \forall y \in B$, buktikan $\sup A \le \inf B$.
9) Jika $a \in \mathbb{R}$, *E* subhimpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$ dan didefinisikan $aE = \{ax : x \in E\}$, buktikan:
   (i) $a > 0 \Rightarrow \sup(aE) = a \sup E$ dan $\inf(aE) = a \inf E$.
   (ii) $a < 0 \Rightarrow \sup(aE) = a \inf E$ dan $\inf(aE) = a \sup E$.
10) Diberikan $E = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\}$, buktikan untuk $x \in E$ dan $\varepsilon > 0$ maka: (i) $|x^2 - 4| < 5$,
    (ii) $|x^2 - 4| < \varepsilon$ jika $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.
11) Dengan yang diberikan seperti soal 10), buktikan terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall x \in E, |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.
12) Untuk *a* dan *b* real, buktikan jika $|a - b| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a = b$.

13) Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy, buktikan untuk $c_i > 0,\ i \in \{1,2,...,n\}$ maka

$$n^2 \le (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right).$$

14) Dengan rumus binomium Newton dan

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} < 2,$$

buktikan untuk semua bilangan asli *n* berlaku $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $v = \inf E$ dan $\varepsilon > 0 \Rightarrow v + \varepsilon > v \Rightarrow v + \varepsilon$ bukan batas bawah $E \Rightarrow \exists y \in E, y < v + \varepsilon$.
Diketahui *v* batas bawah *E* dan $(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in E)(y < v + \varepsilon)$.
Diandaikan *b* batas bawah *E*. Diketahui $\exists y \in E$ dan $y < v + \varepsilon$.
Karena *b* batas bawah *E*, maka $b \le y < v + \varepsilon$. Jadi $b - v < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ yang berakibat $b \le v$.
Diperoleh pernyataan : Jika *b* batas bawah *E* maka $b \le v$, jadi *v* batas bawah terbesar.

2) $E = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m,n \in \mathbb{N}\right\}$. Untuk *n* tetap, $E_n = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N}\right\}$.

$$x \in E_n \ \Rightarrow\ x > -\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jadi $x > -1$ untuk $\forall x \in E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, dengan demikian -1 suatu batas bawah *E*.

Jika diberikan $\varepsilon > 0, \exists m$ dan $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Untuk $n = 1$, maka $x = \frac{1}{m} - 1 \in E$ dan $x = -1 + \frac{1}{m} < -1 + \varepsilon$ sehingga menurut Lemma 1.2(ii), $-1 = \inf E$.

3) $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, maka $(0,1) \supset \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \supset \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \supset \cdots \supset \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \supset \cdots$

$P = \bigcap I_n = \varnothing$, sebab jika $x \in P$ maka $x \in (0, 1/n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Jadi $x > 0$. Tetapi $\exists m \in \mathbb{N}$ sehingga $x > 1/m$, jadi $x \notin (0, 1/m)$ terdapat kontradiksi.

4) Sebab himpunan semua rasional $\mathbb{Q}$ suatu medan terhadap perjumlahan dan perkalian.

5) $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ dan $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$. Buktikan $a + b$ dan ab irasional.

6) Jika $r + s = p = \text{rasional}$ maka $s = p + (-r)$, terdapat kontradiksi sebab $p + (-r)$ rasional.

7) Diberikan $\varepsilon > 0$. Jelas 0 batas bawah dan 1 batas atas. $\exists m \in \mathbb{N}$ dan $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$ (sifat Archimedes) dan $\dfrac{1}{m} < 0 + \varepsilon$ (Lemma1.2(ii)).

$\exists 1 \in \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ dan $1 > 1 - \varepsilon$ (Lemma 1.2 (i)).

8) $x \in A, y \in B \Rightarrow x \le y$. Diandaikan $a = \sup A$, $b = \inf B$.

Maka $x \in A \Rightarrow x \le y, \forall y \in B$ Jadi $x \in A \Rightarrow x = \text{batas bawah}\, B$.

$a = \sup A \Rightarrow$ menurut Lemma 1.2 (i), jika diberi $\varepsilon > 0, \exists x \in A$ dan $x > a - \varepsilon$ sehingga $y > a - \varepsilon, \forall y \in B$. Jadi $a - \varepsilon$ suatu batas bawah *B*. Karena $b = \inf B$, maka $a - \varepsilon \le b$. Jadi $a - b \le \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Dengan demikian $a \le b$.

9) (i) Diberikan $\varepsilon > 0$ dan *aE* = $aE = \{ y = ax : x \in E \}$.

Jika $u = \sup E$, maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ (jadi $\dfrac{\varepsilon}{a} > 0$) terdapat $x \in E$ dan $x > u - \dfrac{\varepsilon}{a}$ sehingga terdapat $y = ax \in aE$ dan $y > au - \varepsilon$.

Menurut Lemma 1.2 (i), $au = \sup(aE)$.

Jika $v = \inf E$, maka terdapat $x \in E$ dan $x < v + \dfrac{\varepsilon}{a}$ sehingga $y = ax \in aE$ dan $y < av + \varepsilon$.

Menurut Lemma 1.2(ii), maka $av = \inf aE$.

(ii) Untuk $a < 0$, pembaca kerjakan sendiri.

10) (i) Untuk $x \in E$, maka

$$\left|x^2-4\right| = |x-2|\,|x+2| < |x+2| = |(x-2)+4| \le |x-2| + |4| < 1+4 = 5.$$

(ii) Untuk $x \in E$, maka $\left|x^2-4\right| = |x-2|\,|x+2| < 5|x-2|$.

Jadi, jika $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ maka $\left|x^2-4\right| < 5|x-2| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$.

11) Jika $x \in E$ dan $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$, maka $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$.

Jadi, $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\}$ yakni δ adalah bilangan terkecil dari dua bilangan 1 dan $\dfrac{\varepsilon}{5}$, yakni $\delta \le 1$ dan $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{5}$ maka $|x-2| < \delta \Rightarrow \left|x^2-4\right| < \varepsilon.$

12) Maka $|a-b| \le 0$. Karena nilai mutlak suatu bilangan pasti lebih dari atau sama dengan 0, jadi $|a-b| \ge 0$ maka $|a-b| = 0$ sehingga $a = b$.

13) $$\left(\sum \sqrt{c_i} \times \frac{1}{\sqrt{c_i}}\right)^2 \le \left(\sum \left(\sqrt{c_i}\right)^2\right)\left(\sum\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}}\right)^2\right) \Rightarrow n^2 \le (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right)$$

14) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{C(n,r)}{n^r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!\,n^r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(n-r+1)(n-r+2)\cdots n}{r!\,n^r} = \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(1-\dfrac{r-1}{n}\right)\left(1-\dfrac{r-2}{n}\right)\cdots 1}{r!}$$

$$< \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}$$

$$< 1 + \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 3.$$

RANGKUMAN

Sistem bilangan real $\mathbb{R}$ adalah medan terurut yang mempunyai sifat batas atas terkecil dan yang memuat medan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai submedannya.

Sifat Archimedes : $\left(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ x > 0\right) \Rightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N} \text{ dan } nx > y\right)$.

Sifat Archimedes : $x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \exists n \in \mathbb{N}$ dan $n > x$.

Akibat : $x > 0 \ \Rightarrow\ \exists n \in \mathbb{N}$ dan $n - 1 \le x < n$.

$\mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ x < y \ \Rightarrow\ \exists r \in \mathbb{Q}$ dan $x < r < y$.

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ rapat dalam $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dan $x < p < y$.

Supremum dan Infimum dalam $\mathbb{R}$

u batas atas E : $(u = \sup E) \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E)(x > u - \varepsilon)]$.

v batas bawah E : $(v = \inf E) \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in E)(y < v + \varepsilon)]$.

Lemma Interval susut:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n] = \left\{x : a_n \le x \le b_n\right\}$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tidak kosong.

Jika $\lim_{n\to\infty} \left|I_n\right| = 0$, maka terdapat tepat satu $p \in \mathbb{R}$ dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \left\{p\right\}$.

Ketaksamaan Segitiga : $\left|\,|x| - |y|\,\right| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$.

Nilai mutlak : $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x|^2 = x^2$.

Ketaksamaan Cauchy : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)$.

Notasi $-\infty$ dan ∞ bukan bilangan real ; $-\infty < x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$.

TES FORMATIF 2

Jawablah dengan singkat dan jelas!

1) Buktikan dengan menggunakan Teorema 1.15(i), bahwa $|xy| = |x||y|$ dan dengan induksi bahwa $|x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1|\,|x_2| \cdots |x_n|$.
2) Buktikan perluasan ketaksamaan segitiga
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| .$$
3) Papan catur biasa adalah papan catur $2^3 \times 2^3$. Didefinisikan papan catur $2^n \times 2^n$ *berlubang* adalah papan catur $2^n \times 2^n$ yang diberi berlubang dengan menghilangkan satu petak persegi *sembarang* dari petak-petaknya. Ubin triomino huruf **L** adalah ubin yang tersusun atas tiga petak sehingga membentuk huruf **L**. Buktikan untuk setiap bilangan asli *n*, papan catur $2^n \times 2^n$ berlubang dapat diubin dengan ubin triomino huruf **L**.
4) Dengan menggunakan rumus Newton, hitunglah jumlah $\sum_{r=0}^{n} C(n,r)$.
5) Diberikan barisan bilangan real dengan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) Buktikan bahwa $|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Untuk $n > m$, buktikan $|x_n - x_m| < \dfrac{1}{2^{m-2}}$.

   (Petunjuk: Gunakan (a) dan Perluasan ketaksamaan segitiga).
6) Diberikan $|x-2| < 1$ dan $\varepsilon > 0$, buktikan :

   (i) $|x^3 - 8| < 19|x-2|$.

   (ii) $\exists \delta > 0$, dan $|x-2| < \delta \Rightarrow |x^3 - 8| < \varepsilon$.

   Petunjuk: Gunakan identitas $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

7) Tentukan $\inf F$ dan $\sup F$ jika $F = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{(-1)^n}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ dan buktikan bahwa jawaban Anda benar-benar infimum dan supremum dari F.

8) Jika A dan B himpunan tidak kosong yang terbatas dalam $\mathbb{R}$ dan didefinisikan $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$, buktikan

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \text{ , } \inf(A+B) = \inf A + \inf B .$$

9) Diberikan barisan real $< s_n >$, $x_n = \inf\{s_n, s_{n+1}, \ldots\}$ dan $y_n = \sup\{s_n, s_{n+1}, \ldots\}$.
Buktikan $x_n \le x_{n+1}$ dan $y_n \ge y_{n+1}$, untuk setiap bilangan asli n.

10) Buktikan $\dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{\sqrt{n}} \le \left(c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + \cdots + c_n^{\,2}\right)^{1/2} \le c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ jika diketahui $c_i > 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Langkah (iii):

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[k(2k+1)(2k-1) + 3(2k+1)^2] = \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$= \frac{1}{3}(2k+1)(2k+3)(k+1) = \frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)+1][2(k+1)-1]$$

$$= \frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}.$$

2) $(2^3-1)(2^{3k}-1) = 2^{3k+1} - 2^{3k} - 8 + 1 = (2^{3k+1}-1) - (2^{3k}-1) - 7$.

3) (i) $0 < x_1 < 3$ benar, sebab $x_1 = 2$.

   Jika $0 < x_k < 3$, maka $0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k + 5} < \sqrt{3+5} = \sqrt{8} < 3$.

4) Tunjukkan $(m$ tidak habis dibagi $3) \Rightarrow (m^3$ tidak habis dibagi $3)$. Selanjutnya buktikan dengan kontradiksi.

5) Jelas bahwa $x \in A \Rightarrow 0 < x < 2$. Jadi A terbatas sehingga terbatas ke atas. Ditunjukkan A tidak memuat elemen terbesar. Untuk $x \in A$ dicari rasional $p > 0$ dan $y = x + p \in A$. Dicari rasional $c > 0$ sehingga $p = \dfrac{3-x^2}{x+c}$. Maka $y = \dfrac{cx+3}{x+c}$ dan c dicari dari syarat $y^2 < 3$.

   $y^2 < 3 \Leftrightarrow (cx+3)^2 < 3(x+c)^2 \Leftrightarrow (c^2-3)(x^2-3) < 0$.

   Karena $x^2 - 3 < 0$, diperoleh $(c-3)^2 > 0$.

   Untuk c dapat diambil 1, jadi $p = \dfrac{3-x^2}{x+1}$ dan $y = \dfrac{x+3}{x+1}$.

   Bentuklah $B = \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 3\right\}$. Ditunjukkan B himpunan semua batas atas A dan B tidak memuat elemen terkecil.

Tes Formatif 2

1) Karena nilai mutlak nonnegatif, menurut Teorema 1.15(ii) :

$$|xy| = |x||y| \Leftrightarrow |xy|^2 = |x|^2 |y|^2 \Leftrightarrow (xy)^2 = x^2 y^2.$$

2) Dibuktikan dengan induksi.

(i) $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$ benar (lihat Contoh 1.15).

(ii) Diasumsikan benar untuk $n = k$.

Selanjutnya langkah (iii) :

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \\ &\le |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)| + |x_{k+1}| \\ &\le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}| \, . \end{aligned}$$

3) Dibuktikan dengan induksi:

(i) Jelas benar untuk papan catur berlubang 2×2.

(ii) Diasumsikan benar untuk $n = k$.

(iii) Bagilah papan catur $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ berlubang mejadi 4 papan catur $2^k \times 2^k$ dimana satu diantaranya berlubang dan 3 yang lain tidak berlubang. Letakkan ubin triomino huruf **L** di pusat papan catur $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ sehingga menutup papan catur $2^k \times 2^k$ yang tidak berlubang masing-masing satu petaknya.

4) Ambillah $a = b = 1$ pada rumus Newton, $\sum_{k=0}^{n} C(n,r) = 2^n$.

5) (a) Buktikan dengan induksi.

(b) Diberikan m dan n dan $n > m$, dengan (a) dan perluasan ketaksamaan segitiga

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{n-(n-m-1)} - x_m)\right| \\ &= \left|(x_{m+1} - x_m) + \cdots + (x_{m+(n-m)} - x_{m+(n-m-1)})\right| \\ &\le 1/2^{m-1} + \cdots + 1/2^{n-2} = \left(1/2^{m-1}\right) \frac{1 - 1/2^{n-m}}{1 - 1/2} \\ &< \left(1/2^{m-1}\right) 2 = 1/2^{m-2} \, . \end{aligned}$$

6) (a) $\left|x^3-8\right|=\left|x-2\right|\left|x^2+2x+4\right|=\left|x-2\right|\left|(x-2)^2+6(x-2)+12\right|$

$$\leq\left|x-2\right|(1+6+12)=19\left|x-2\right|.$$

(b) $\delta=\min\{1,\varepsilon/19\}$.

7) Untuk m tetap, $F_m=\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}:n\in\mathbb{N}\right\}=A_m\cup B_m$ dengan

$$A_m=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{4n^2}:n\in\mathbb{N}\right\},\ B_m=\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{(2n-1)^2}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

$$x\in F_m\ \Rightarrow\left(\frac{1}{m}<x\leq\frac{5}{4}\ \text{atau}\ \frac{1}{m}-1\leq x<\frac{1}{m}\right),\forall m\in\mathbb{N}.$$

Untuk m yang manapun berlaku $x\in F_m\Rightarrow 0<x\leq 5/4$ atau $-1<x<0$.

Dengan demikian, -1 batas bawah dan $5/4$ batas atas F.

Buktikan $\inf F=-1$ dan $\sup F=5/4$.

8) Misalkan $a=\sup A, b=\sup B$ dan $\varepsilon>0$. Maka $\exists\alpha\in A,\ \beta\in B$ dan

$$\alpha>a-\frac{\varepsilon}{2},\ \beta>b-\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$x\leq a,\forall x\in A;\ y\leq b,\forall y\in B\Rightarrow x+y=z\leq a+b,\forall z\in A+B$$

$$\Rightarrow a+b\ \text{batas atas}\ A+B.$$

Lagi pula $\exists\varsigma=\alpha+\beta\in A+B$ dan $\varsigma>a+b-\varepsilon$.

Jadi, $a+b=\sup(A+B)$.

9) $x_n=\inf\{s_k:k\geq n\}$, $x_{n+1}=\inf\{s_k:k\geq n+1\}$.

$A=\{s_k:k\geq n\}$, $B=\{s_k:k\geq n+1\}\Rightarrow B\subset A$.

Selanjutnya lihat Contoh 1.12.

10) Gunakan Teorema 1.17(i) dan Ketaksamaan Cauchy untuk $a_i=c_i$, $b_i=1$.

Daftar Pustaka

Burton, David M. (1980). *Elementary Number Theory*.

Rudin, Walter. (1976). *Principles of Mathematical Analyasis*, *Edisi ke*-3.