Modul 1

Aljabar Bentuk Pernyataan

Prof. R. Soemantri

PENDAHULUAN

Bahasa adalah suatu bentuk pengungkapan yang sangat kompleks dan fleksibel. Bahasa dapat digunakan untuk menyampaikan emosi yang sangat mendalam kepada orang yang sangat dicintai atau hal yang sama sekali tak ada artinya kepada orang banyak. Ada orang yang ahli mengungkapkan pendapat atau menceritakan sesuatu peristiwa dengan uraian yang panjang lebar, dengan kata-kata yang indah, namun miskin dari isi yang bermakna.

Banyak matematikawan dan filsuf ulung bekerja keras untuk menyederhanakan bahasa menjadi prosedur simbolik, sehingga ungkapan dengan bahasa diubah menjadi manipulasi simbolik. Pengembangan cara simbolik dimaksudkan untuk dapat mengubah ungkapan-ungkapan yang kompleks ke bentuk yang jauh lebih sederhana namun ekuivalen. Di samping itu, pendekatan simbolik perlu memuat aturan-aturan dasar tentang penalaran yang sahih (*valid reasoning*). Pengungkapan verbal yang kompleks dalam bentuknya yang lebih sederhana harus mempunyai arti atau dapat ditunjukkan barangkali memuat sesuatu kekeliruan atau kontradiksi. Jelasnya, pendekatan simbolik ini harus membuktikan kegunaannya dalam banyak bidang. Perlu diperhatikan bahwa penalaran yang sahih dan pengungkapan yang jelas adalah hal yang sangat penting dalam matematika.

Kegiatan Belajar 1

Pernyataan dan Bentuk Pernyataan

A. PERNYATAAN

Dalam percakapan sehari-hari banyak ungkapan-ungkapan yang bersifat *deklaratif*, yaitu ungkapan yang diucapkan akan mempunyai arti; maksudnya, ungkapan akan benar atau salah tetapi *tidak pernah sekaligus benar dan salah*. Ungkapan semacam ini dalam logika matematik dinamakan *pernyataan*.

Timbul pertanyaan bilamana suatu ungkapan *deklaratif* benar atau bilamana salah. Ungkapan *deklaratif* menggambarkan suatu fakta atau keadaan tertentu. Sebagai contoh perhatikan ungkapan: "Negara Republik Indonesia diproklamasikan pada tanggal 17 Agustus 1945". Ungkapan ini menggambarkan keadaan atau fakta yang telah terjadi, yaitu bilamana Negara Republik Indonesia diproklamasikan. Ungkapan ini cocok dengan fakta yang diungkapkannya, sehingga dikatakan ungkapan yang *benar*. Sekarang kita tinjau ungkapan berikut. "Gunung Krakatau terletak di pulau Bali". Ungkapan ini tidak cocok dengan keadaan yang sebenarnya, sebab gunung Krakatau tidak terletak di pulau Bali, melainkan terletak di selat Sunda. Ungkapan semacam ini dikatakan ungkapan yang *salah*.

Ada kalanya kita menemukan kesulitan untuk menentukan apakah suatu ungkapan *deklaratif* itu benar atau salah. Sebagai misal, ungkapan: "Sari adalah mahasiswa yang pandai". Di sini kita harus membuat kesepakatan dahulu apa yang dimaksud "mahasiswa yang pandai". Jika diambil kesepakatan bahwa mahasiswa dikatakan pandai jika dan hanya jika indeks prestasinya lebih besar atau sama dengan 3,00 maka ungkapan itu benar sebab kenyataannya Sari mempunyai indeks prestasi 3,80.
Dengan demikian kita dapat mendefinisikan apa yang dimaksud dengan pernyataan.

Definisi 1.1

Pernyataan adalah suatu ungkapan atau kalimat *deklaratif* yang hanya dapat mempunyai tepat satu nilai, yakni nilai *benar* atau *salah*.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai ungkapan yang tidak *deklaratif*, seperti kalimat tanya, kalimat perintah, dan sebagainya yang tidak mungkin mempunyai nilai benar atau nilai salah, sehingga bukan suatu pernyataan.

Contoh 1.1

Kalimat-kalimat berikut adalah suatu pernyataan, sebab mempunyai arti. Anda dapat mengatakan apakah kalimat-kalimat berikut benar atau salah.

1. Undang-Undang Dasar Republik Indonesia disahkan pada tanggal 18 Agustus 1945.
2. London terletak di negara Perancis.
3. Cacah satu kilogram butir-butir pasir adalah berhingga
4. π adalah bilangan irasional
5. 437 adalah bilangan prima
6. Jika x bilangan gasal maka x^2 juga gasal.

Contoh 1.2

Kalimat-kalimat berikut bukan suatu pernyataan, sebab bukan kalimat *deklaratif*. Jika Anda ucapkan, kalimat-kalimat berikut tidak mempunyai arti apakah benar atau salah.

1. Berapa meter tinggi gunung itu?
2. Apakah dua ditambah dua sama dengan empat?
3. Pergilah ke pasar!
4. $x^3 + 5$.
5. $y - 3$ habis dibagi 4.

B. BENTUK PERNYATAAN

Anda telah mengetahui apa yang dimaksud oleh istilah pernyataan. Dalam modul ini yang banyak Anda jumpai nanti pernyataan itu sendiri, tetapi Anda akan lebih banyak berhadapan dengan lambang atau simbol yang akan menyajikan pernyataan itu.

Di sini kita berhadapan dengan masalah peristilahan. Huruf-huruf p, q, r dan sebagainya yang akan digunakan bukan merupakan pernyataan; sebab menurut definisi di atas suatu pernyataan harus mempunyai *tepat* satu nilai benar atau salah. Apabila kita tidak mengetahui makna huruf-huruf itu, tentu saja kita tidak dapat bekerja dengan huruf-huruf itu. Kita tidak dapat memberikan nilai benar atau salah kepada huruf yang belum diketahui maknanya. Untuk mengatasi kesulitan ini kepada Anda akan diperkenalkan istilah baru.

Huruf-huruf yang belum diketahui artinya p, q, r dan sebagainya yang digunakan untuk menyajikan secara simbolik sesuatu pernyataan dikatakan *bentuk pernyataan*. Huruf-huruf tersebut bukan pernyataan melainkan sekedar *menduduki tempat* yang disediakan untuk pernyataan, atau sekedar *pembawa tempat* untuk pernyataan. Kata *variabel* juga digunakan untuk kata pembawa tempat.

Definisi 1.2

Lambang p yang menjadi pernyataan apabila telah diberi arti tertentu disebut *bentuk pernyataan*.

Jika bentuk pernyataan p telah ditentukan artinya, maka pernyataan yang telah memberikan arti kepada p itu dinamakan *misal* dari p, dan p dinamakan *penyaji* dari pernyataan itu. Keuntungan mempelajari bentuk pernyataan daripada langsung mempelajari pernyataan, adalah bahwa kita dapat mengembangkan sifat-sifat bentuk pernyataan yang akan berlaku umum, artinya tidak tergantung kepada interpretasi khusus yang mungkin diberikan kepada sesuatu pernyataan. Sifat-sifat ini akan sangat berguna dan akan memberikan kelengkapan kepada kita untuk dapat melaksanakan penalaran dengan baik.

C. PENGHUBUNG

Dari bentuk-bentuk pernyataan dapat dibuat bentuk pernyataan baru dengan menggunakan kata-kata penghubung yang disajikan dengan lambang sebagai berikut,

Kata penghubung	Lambang
dan	$\wedge$
atau	$\vee$
jika ... maka	$\Rightarrow$
jika dan hanya jika	$\Leftrightarrow$
tidak	$\sim$

Jika diberikan bentuk pernyataan p *dan* q, maka bentuk pernyataan majemuk yang dibuat dengan menggunakan kata penghubung "*dan*" akan dinyatakan dengan $p \wedge q$. Jika p menyajikan pernyataan "Siti lulus ujian" dan q menyajikan "Anita membeli piano", maka pernyataan "Siti lulus ujian *dan* Anita membeli piano", adalah suatu *misal* dari bentuk pernyataan $p \wedge q$. Dengan demikian bentuk pernyataan $p \wedge q$ menyajikan pernyataan yang benar jika dan hanya jika p dan q keduanya menyajikan pernyataan yang benar.

Pernyataan "Siti lulus ujian *atau* Anita membeli piano" adalah *misal* untuk bentuk pernyataan $p \vee q$. Kita harus berhati-hati dalam menggunakan kata penghubung "*atau*". Dalam bahasa sehari-hari pernyataan dengan penghubung "*atau*" kebanyakan berarti "Siti lulus ujian, tetapi Anita tidak membeli piano", atau "Siti tidak lulus ujian, tetapi Anita membeli piano". Dalam logika matematik kita *menerima interpretasi inklusif*, artinya bentuk pernyataan $p \vee q$ akan menyajikan pernyataan yang benar apabila satu di antara p dan q ditempati oleh pernyataan yang benar dan yang lain salah, atau *keduanya* menyajikan pernyataan benar.

Pernyataan benar "$9 > 7$ *atau* $8 < 5$" dan "9 lebih besar daripada 7 *atau* lebih besar daripada 5" adalah pernyataan yang benar sebagai *misal* dari bentuk pernyataan $p \vee q$. Dalam pernyataan yang pertama p ditempati oleh "$9 > 7$" dan q oleh "$8 < 5$", sedang dalam pernyataan yang kedua p dan q berturut-turut ditempati oleh pernyataan "9 lebih besar daripada 7" dan "9 lebih besar daripada 5".

Dalam berkomunikasi kita sering berhadapan dengan pernyataan bersusun yang panjang, namun dengan menyajikannya dalam bentuk lambang dan menggunakan aturan-aturan logika, kita dapat menganalisis dan menyederhanakan pernyataan itu sehingga menjadi bentuk pernyataan yang lebih pendek dan jelas.

Kelima kata penghubung dalam bentuk pernyataan beserta ilustrasi *misal* dapat Anda pelajari baik-baik dalam ikhtisar di bawah ini.

Ikhtisar Lima Penghubung

Penghubung	Lambang	Bentuk Pernyataan	Nama	*Misal*
dan	$\wedge$	$p \wedge q$	*Konjungsi*	Siti lulus ujian dan Anita membeli piano
atau	$\vee$	$p \vee q$	*Disjungsi*	Siti lulus ujian atau Anita membeli piano
jika ... maka	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	*Kondisional*	Jika Siti lulus ujian maka Anita membeli piano
jika dan hanya jika	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	*Bikondisional*	Jika Siti lulus ujian jika dan hanya jika Anita membeli piano
tidak	$\sim$	$\sim q$	*Ingkaran*	Anita tidak membeli piano

Kondisional dinamakan juga *implikasi*, sedangkan *bikondisional* disebut juga *biimplikasi* atau *ekuivalensi*, dan *ingkaran* dinamakan juga *negasi*.

Contoh 1.3

Jika p menyajikan pernyataan "Esok hari akan hujan" dan q menyajikan pernyataan "Ali akan sakit", maka tulislah pernyataan yang disajikan oleh lambang berikut?

(a) $p \wedge q$

(b) $\sim p$

(c) $q \vee \sim q$

(d) $\sim p \wedge (q \vee \sim q)$

(e) $(p \wedge q) \vee [\sim p \wedge (q \vee \sim q)]$

Jawab:

(a) Esok hari akan hujan dan Ali akan sakit.

(b) Esok hari tidak akan hujan.

(c) Ali akan sakit ataupun sehat.

(d) Esok hari tidak akan hujan dan Ali akan sakit ataupun sehat.

(e) Esok hari akan hujan dan Ali akan sakit, atau esok hari tidak akan hujan, dan Ali akan sakit ataupun sehat.

Catatan: Kata "sehat" diasumsikan "tidak sakit".

Contoh 1.4

Tulislah pernyataan-pernyataan berikut dengan menggunakan lambang.

(a) Jika hari Rabu libur, saya tidak akan pergi ke kebun binatang atau saya akan tinggal di rumah, atau saya tidak akan tinggal di rumah maupun ke kebun binatang.

(b) Tidak benar bahwa ia belajar giat dan memahami materinya, meskipun benar bahwa ia memahami materinya.

(c) Bilangan bulat adalah genap jika dan hanya jika kelipatan dua.

Jawab:

(a) Berikan lambang p untuk menyajikan "hari Rabu libur", q untuk "saya akan pergi ke kebun binatang", dan r untuk "saya akan tinggal di rumah". Pernyataan disajikan dengan $p \Rightarrow [(\sim q \vee r) \vee (\sim r \wedge \sim q)]$

(b) Lambang s menyajikan "ia belajar giat" dan t menyajikan "ia memahami materinya". Pernyataan disajikan dengan $[\sim (s \wedge t)] \wedge t$

(c) Jika g menyajikan "bilangan bulat adalah genap" dan h menyajikan "bilangan bulat kelipatan dua", maka pernyataan disajikan dengan $g \Leftrightarrow h$.

D. KONVERSE, INVERSE DAN KONTRAPOSISI

Diberikan kondisional $p \Rightarrow q$

Bentuk pernyataan:

$q \Rightarrow p$ dinamakan *konverse* dari $p \Rightarrow q$,

$\sim p \Rightarrow \sim q$ dinamakan *inverse* dari $p \Rightarrow q$,

$\sim q \Rightarrow \sim p$ dinamakan *kontraposisi* $p \Rightarrow q$.

Sebagai contoh diberikan pernyataan "Jika sore nanti cerah, Ali pergi ke rumah Nina". Konverse dari pernyataan ini adalah "Jika Ali pergi ke rumah Nina, maka sore nanti cerah". Inverse pernyataan adalah "Jika sore nanti tidak cerah, maka Ali tidak pergi ke rumah Nina". Kontraposisi pernyataan adalah "Jika Ali tidak pergi ke rumah Nina maka sore nanti tidak cerah".

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan kalimat-kalimat berikut mana yang disebut pernyataan dan mana yang bukan pernyataan.
   (a) Perbaiki sepeda ini.
   (b) Komit Halley terlihat jelas pada tanggal 11 April 1986.
   (c) Di mana Sari bersekolah?
   (d) Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 5 = 0$.
   (e) Washington ibu kota Argentina.
   (f) Gadis itu cantik sekali.
   (g) Tiga adalah bilangan genap.
   (h) Lima adalah bilangan gasal.
2) Tulislah bentuk pernyataan sehingga pernyataan berikut menjadi salah satu *misal*nya
   (a) Jika benda mengkilat maka benda itu emas.
   (b) Tidak benar jika esok sore hujan maka pertandingan sepak bola tidak dilangsungkan.
   (c) Dana penelitian ditambah jika dan hanya jika penelitian bermanfaat bagi perkembangan ilmu dan pembangunan negara.
   (d) Jika pesanan bertambah maka produksi ditingkatkan dan tidak dilakukan pemutusan hubungan kerja.
   (e) Kurva ini parabola atau hiperbol.
3) Buatlah *misal* untuk p dan q, kemudian tulislah bentuk *misal* untuk bentuk pernyataan:
   (a) $p \vee q$ (d) $\sim p \vee q$
   (b) $p \wedge q$ (e) $\sim p \Rightarrow q$
   (c) $p \Rightarrow q$ (f) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Yang disebut pernyataan adalah (b), (e), (f), (g), (h)
   Yang bukan pernyataan adalah (a), (c), (d)
2) (a) $p \Rightarrow q$; p menyajikan “benda mengkilat” dan q “benda emas”.

(b) $\sim(p \Rightarrow \sim q)$; p menyajikan "esok sore hujan", dan q menyajikan "pertandingan sepak bola dilangsungkan".

(c) $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$; p menyajikan "dana penelitian ditambah", q "penelitian bermanfaat bagi perkembangan ilmu", dan r "penelitian bermanfaat bagi pembangunan negara"

(d) dan (e) anda kerjakan sendiri.

3) "Ali belajar di Inggris" misal untuk *p*, dan "Ali memperoleh beasiswa" untuk *q*.

(a), (b), (c) Anda kerjakan sendiri.

(d) Ali tidak belajar di Inggris atau memperoleh beasiswa.

(e) Ali tidak belajar di Inggris jika dan hanya jika ia tidak memperoleh beasiswa.

(f) Anda kerjakan sendiri.

RANGKUMAN

1. Pernyataan adalah ungkapan/kalimat deklaratif yang hanya mempunyai tepat satu nilai yaitu nilai benar atau salah.
2. Pernyataan dituliskan dalam lambang atau simbol
3. Lambang atau simbol yang menyajikan suatu pernyataan disebut bentuk pernyataan.
4. Terdapat lima penghubung dengan lambang dan namanya seperti yang digambarkan pada tabel berikut ini.

Penghubung	Lambang	Nama
dan	$\wedge$	*Konjungsi*
atau	$\vee$	*Disjungsi*
jika ... maka	$\Rightarrow$	*Kondisional*
jika dan hanya jika	$\Leftrightarrow$	*Bikondisional*
Tidak	$\sim$	*Ingkaran (negasi)*

TES FORMATIF 1

Silakan Anda mengerjakan tes formatif berikut ini!

1) Tulislah bentuk pernyataan yang menyajikan pernyataan berikut: "Jika esok sore tidak hujan dan Wulan menjumpaiku maka Wulan akan kuajak melihat film atau makan di restoran".
2) Tulislah pernyataan berikut dalam bentuk lambang. "Jika ini musik keroncong, diciptakan untuk dinikmati. Musik yang diciptakan untuk dinikmati adalah bernilai budaya. Jadi, musik keroncong adalah musik yang dinikmati".
   (Nyatakan: p untuk "musik adalah keroncong", q untuk "musik diciptakan untuk dinikmati", dan r untuk "musik bernilai budaya").
3) Tulislah kontraposisi dari pernyataan:
   (a) Jika nilai fungsi $f(a)$ ada dan $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ maka fungsi f kontinu di a.
   (b) Jika fungsi f terdiferensial di a, maka f kontinu di a.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Nilai Bentuk Pernyataan

Telah Anda ketahui bahwa pernyataan hanya dapat mempunyai satu dari dua nilai, yakni nilai benar dan nilai salah. Pernyataan bernilai benar (B) apabila pernyataan itu cocok dengan fakta yang dilukiskan oleh pernyataan itu, dan diberi nilai salah (S) yakni apabila pernyataan itu tidak benar.

A. NILAI BENTUK PERNYATAAN

Bentuk pernyataan yang tidak memuat tanda penghubung dinamakan bentuk pernyataan *tunggal*, sedang bentuk pernyataan yang memuat tanda penghubung dinamakan bentuk pernyataan *majemuk*. Suatu *misal* dari bentuk pernyataan tunggal dinamakan pernyataan tunggal, dan *misal* untuk bentuk pernyataan majemuk dinamakan pernyataan majemuk. Kata bentuk pernyataan akan digunakan baik untuk bentuk pernyataan tunggal maupun majemuk; demikian juga halnya untuk kata pernyataan.

Seperti halnya pernyataan, bentuk pernyataan hanya dapat mempunyai satu dari dua nilai benar (B) dan nilai salah (S). Suatu bentuk pernyataan tunggal p dikatakan bernilai B, apabila pembawa tempat p ditempati oleh pernyataan yang benar, dan bentuk pernyataan tunggal p bernilai S apabila p ditempati oleh pernyataan yang salah.

Nilai bentuk pernyataan majemuk sebagai hasil operasi bentuk pernyataan tunggal p dan q dengan menggunakan kata-kata penghubung didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Untuk bentuk pernyataan p dan q, nilai bentuk pernyataan majemuk $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ dan $\sim p$ didefinisikan oleh tabel-tabel nilai di bawah ini.

Tabel Nilai 1

Definisi Nilai Konjungsi		
p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel Nilai 2

Definisi Nilai Disjungsi		
p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel Nilai 3

Definisi Nilai Kondisional		
p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Tabel Nilai 4

Definisi Nilai Bikondisional		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Tabel Nilai 5

Definisi Nilai Ingkaran	
p	$\sim p$
B	S
S	B

Definisi Tabel Nilai 1 dan 2 telah diuraikan dalam Kegiatan Belajar 1, dan hal ini mudah dipahami. Demikian juga definisi dalam Tabel Nilai 4 dan 5, karena maksudnya tidak berbeda dengan pengertian dalam percakapan sehari-hari. Yang mungkin dapat menimbulkan pertanyaan adalah definisi dalam Tabel Nilai 3, yakni yang menyangkut kondisional.

Hal-hal yang perlu Anda perhatikan adalah:

(a) Konjungsi $p \wedge q$ bernilai B hanya jika p dan q keduanya bernilai B. Jika paling sedikit satu di antara p dan q bernilai S, maka konjungsi $p \wedge q$ bernilai S.

(b) Disjungsi $p \vee q$ bernilai S hanya jika p dan q keduanya bernilai S, sedangkan untuk pasangan nilai lainnya dari p dan q, disjungsi $p \vee q$ bernilai B.

(c) Kondisional $p \Rightarrow q$ bernilai S hanya jika p bernilai B dan q bernilai S. Untuk pasangan yang lain dari nilai p dan q, kondisional $p \Rightarrow q$ adalah B. Perhatikan bahwa jika p bernilai S, nilai kondisional $p \Rightarrow q$ adalah B tak peduli nilai mana yang diberikan kepada q.

(d) Bikondisional $p \Leftrightarrow q$ bernilai B jika dan hanya jika p dan q bernilai sama. Jika nilai p dan q berlainan maka nilai $p \Leftrightarrow q$ adalah S.

(e) Nilai p dan $\sim p$ selalu tidak sama.

Kesulitan atau keraguan untuk menerima definisi nilai kondisional yang diberikan oleh Tabel Nilai 3, umumnya terletak pada nilai yang diberikan oleh baris ke-3 dan ke-4. Contoh berikut diharapkan dapat menghilangkan keraguan itu.

Contoh 2.1

Dalam suatu kampanye pemilihan lurah, seorang calon membuat pernyataan “Jika saya terpilih, semua jalan akan diaspal”. Dalam hal mana pernyataan calon itu hanyalah suatu kebohongan, dan dalam hal mana ia tidak berdusta (jadi menyatakan hal yang benar)?

Keadaan yang mungkin terjadi tentang pernyataan calon itu dapat dilihat dalam empat alternatif yang digambarkan oleh tabel berikut.

Calon itu terpilih	Jalan sudah diaspal	Calon mengatakan hal yang benar (Calon tidak berdusta)
ya	ya	ya
ya	tidak	tidak
tidak	ya	ya
tidak	tidak	ya

Perhatikan bahwa tabel ini telah disusun sesuai Tabel Nilai 3. Seperti yang sudah dikatakan, biasanya keraguan untuk menerima definisi nilai kondisional, terletak pada baris ke-3 dan ke-4 dalam tabel alternatif di atas. "Bagaimana mungkin bahwa $p \Rightarrow q$ benar jika *p* salah?" Perhatikan ilustrasi di atas.

Jika calon tidak terpilih, jadi *p* salah, maka tidak mungkin untuk mengatakan bahwa pernyataan calon itu tak benar apapun yang disajikan oleh *q*, apakah *q* menyajikan pernyataan benar atau salah. Di dalam logika bernilai dua yang kita bicarakan ini, jika pernyataan calon itu *tidak* tak benar (*is not untrue*) maka pernyataan itu harus benar.

Contoh 2.2

Selidikilah pernyataan berikut apakah benar atau salah.

(a) $3=4$ dan $3<4$

(b) $3=4$ atau $3<4$

(c) $9>5$

(d) Jika $7<2$ maka Tokyo ibu kota Jepang

(e) Jika $7\geq 2$ maka London ibu kota Perancis

(f) Jika $7<2$ maka London ibu kota Perancis

(g) Tokyo ibu kota Jepang jika dan hanya jika $7\geq 2$

(h) London ibu kota Perancis jika dan hanya jika $7<2$

(i) Tokyo ibu kota Jepang jika dan hanya jika London ibu kota Perancis

(j) Jika $3=4$ atau $3<4$ maka London ibu kota Perancis

Jawab:

Untuk contoh (a) dan (b), *p* menyajikan pernyataan "$3=4$" dan *q* menyajikan "$3<4$", maka *p* salah dan *q* benar.

(a) Menurut Tabel Nilai 1 pernyataan salah.

(b) Menurut Tabel Nilai 2 pernyataan benar.

(c) Pernyataan benar karena faktanya memang 9 lebih besar daripada 5.
Untuk contoh (d), (e) dan (f), *r* menyajikan pernyataan "$7<2$", *s* menyajikan "Tokyo ibu kota Jepang, dan *t* menyajikan "London ibu kota Perancis", maka *r* salah, *s* benar, dan *t* salah.

(d) Menurut Tabel Nilai 3, $r\Rightarrow s$ kondisional yang benar.

(e) Pernyataan ditulis $\sim r\Rightarrow t$. Karena $\sim r$ benar dan *t* salah, menurut Tabel Nilai 3 pernyataan salah.

(f) $r\Rightarrow t$ benar, sebab *r* salah.

(g) $s \Leftrightarrow \sim r$ benar, sebab *s* dan $\sim r$ benar.

(h) $t \Leftrightarrow r$ benar, sebab *t* dan *r* keduanya salah.

(i) $s \Leftrightarrow t$ salah, sebab nilai *s* dan *t* tidak sama.

(j) $(p \vee q) \Rightarrow t$ salah, sebab $p \vee q$ benar dan *t* salah.

Catatan tentang kondisional:

Kondisional $p \Rightarrow q$ dapat dibaca dalam 4 cara:

(1) Jika *p* maka *q*
(2) *p* hanya jika *q*
(3) *q* syarat perlu untuk *p*
(4) *p* syarat cukup untuk *q*

Cara membaca dijelaskan sebagai berikut:
Kita berasumsi dari *benarnya* kondisional $p \Rightarrow q$ (lihat Tabel Nilai 3).
Cara membaca (2), *p* benar hanya terjadi apabila *q* benar (ingat $p \Rightarrow$ benar). Ini berarti jika *q* salah, *p* tidak mungkin benar (baris ke-4 Tabel Nilai 3).
Cara membaca (3), untuk *q* yang benar diperlukan *p* benar; apabila *q* salah tidak mungkin *p* benar (lihat baris ke-2 dan ke-4 Tabel Nilai 3).
Cara membaca (4) mengatakan bahwa *p* yang benar mencukupi untuk *q* benar; apabila *p* benar pastilah *q* juga benar (lihat baris ke-1 Tabel Nilai 3).
Ingat bahwa pembahasan ini didasarkan asumsi kondisional $p \Rightarrow q$. Dengan demikian bikondisional $p \Leftrightarrow q$ dapat juga dibaca "*p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*".
Keempat pernyataan berikut adalah kondisional yang sama:
(1) Jika suatu bilangan asli dapat dibagi empat maka ia genap.
(2) Suatu bilangan asli dapat dibagi empat hanya jika genap.
(3) Genap adalah syarat perlu agar bilangan asli dapat dibagi 4.
(4) Syarat dapat dibagi 4 adalah cukup untuk bilangan asli genap.
Pernyataan "Segitiga adalah samakaki jika dan hanya jika sudut-sudut alasnya sama besar", dapat dibaca "Syarat perlu dan cukup suatu segitiga agar samakaki adalah sudut-sudut alasnya sama besar".

Contoh 2.3

Tentukan nilai bentuk pernyataan majemuk $(p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$ untuk semua susunan nilai yang diberikan kepada variabel *p* dan *q*.

Tabel nilai untuk bentuk pernyataan $(p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$, dengan memperhatikan definisi dalam Tabel Nilai 1 sampai 5 adalah:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$
B	B	S	B	B	B
B	S	B	B	S	S
S	B	S	S	B	S
S	S	B	B	B	B

Dari tabel dapat ditarik kesimpulan bahwa bentuk pernyataan $(p \vee \sim q) \wedge (p \Rightarrow q)$ benar hanya jika p dan q keduanya benar atau keduanya salah.

Contoh 2.4

Buktikan bahwa untuk semua kombinasi nilai yang diberikan kepada variabel p dan q, bentuk pernyataan $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ selalu benar.

Dengan memperhatikan definisi nilai pada tabel-tabel di atas kita bentuk tabel nilai untuk bentuk pernyataan yang diberikan.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
B	B	S	B	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	B	B

Dalam kolom terakhir tabel, semua baris menunjukkan nilai B berarti $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ selalu benar untuk semua kombinasi nilai yang diberikan kepada variabel p dan q.

Catatan:

Bentuk pernyataan yang selalu benar adalah sangat penting, akan dilakukan pembahasan lebih lanjut tentang bentuk ini.

Contoh 2.5

Buktikan bentuk pernyataan $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ selalu salah untuk semua kombinasi nilai yang diberikan kepada variabel *p* dan *q*.

Seperti contoh 2.4 kita buat tabel nilai untuk bentuk pernyataan yang diberikan.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
B	B	S	S	S	B	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	S	S

Dalam kolom terakhir dari tabel, semua baris menunjukkan nilai S berarti pernyataan $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ semua salah untuk semua kombinasi nilai diberikan kepada variabel *p* dan *q*.

B. BENTUK PERNYATAAN YANG EKUIVALEN

Cobalah Anda perhatikan bentuk pernyataan majemuk $p \wedge (p \vee q)$ dan bentuk pernyataan tunggal *p*. Dari tabel berikut dapat Anda lihat bahwa nilai kedua bentuk pernyataan itu adalah identik. Artinya untuk sembarang nilai yang diberikan kepada variabel *p* dan *q*, nilai yang dicapai oleh kedua bentuk pernyataan itu sama.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
B	B	B	B
B	S	B	B
S	B	B	S
S	S	S	S

Definisi 2.2

Dua bentuk pernyataan adalah *ekuivalen* jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk semua kombinasi nilai yang mungkin diberikan kepada bentuk-bentuk pernyataan tunggal yang menyusun kedua bentuk pernyataan itu.

Untuk menyatakan dua bentuk pernyataan adalah ekuivalen digunakan lambang "$\equiv$". Jadi $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

Contoh 2.6

Perlihatkan bahwa $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Periksalah tabel nilai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	S	S
S	S	B	B	B	B

Perhatikan bahwa nilai-nilai yang terletak pada baris yang sama untuk kolom $p \Leftrightarrow q$ dan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ adalah nilai yang sama. Ini menunjukkan bahwa kedua bentuk pernyataan ini mempunyai nilai yang sama untuk kombinasi nilai yang mungkin diberikan kepada bentuk pernyataan tunggal (p dan q) yang terdapat dalam kedua bentuk pernyataan majemuk itu, jadi keduanya ekuivalen.

Contoh 2.7

Buktikan bahwa $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Jadi suatu kondisional ekuivalen dengan kontraposisinya.

Seperti Contoh 2.6, Anda dapat membuktikan dengan memeriksa nilai-nilai pada baris yang sama dalam kolom ke-3 dan ke-6 tabel nilai berikut:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	B	S	S	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Jelas dari tabel nilai bahwa bentuk pernyataan $p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan $\sim q \Rightarrow \sim p$.

C. TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Berikut ini akan didefinisikan suatu bentuk pernyataan majemuk yang khusus, yang dinamakan *tautologi* dan *kontradiksi*.

Definisi 2.3

Suatu bentuk pernyataan majemuk adalah suatu *tautologi*, jika bentuk pernyataan itu selalu bernilai benar, tak tergantung pada nilai yang diberikan kepada bentuk-bentuk pernyataan tunggal penyusunnya.
Suatu bentuk pernyataan majemuk adalah suatu *kontradiksi*, jika bentuk pernyataan itu selalu bernilai salah, tak tergantung pada nilai yang diberikan kepada bentuk-bentuk pernyataan tunggal penyusunnya.
Tautologi dan *kontradiksi* berturut-turut diberi lambang huruf **U** dan **C**.

Contoh 2.8

Buktikan bahwa bentuk pernyataan $p \vee \sim p$ dan $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ adalah *tautologi*.

Kebenaran pernyataan $p \vee \sim p$ dan $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ dapat diperiksa dari tabel berikut.
Bentuk pernyataan pertama hanya memuat satu pernyataan tunggal *p*, sedangkan pernyataan kedua selain pernyataan *p* ada juga pernyataan *q*.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
B	S	B
S	B	B

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 2.9

Dengan mudah dapat Anda pahami bahwa menurut Tabel Nilai 5 bentuk pernyataan $p \wedge \sim p$ adalah suatu kontradiksi.

Contoh 2.10

Buktikan bahwa bentuk-bentuk pernyataan:

(i) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

(ii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

adalah tautologi

Dari tabel nilai dalam Contoh 2.4 dapat ditarik kesimpulan (i) adalah bentuk pernyataan yang selalu benar untuk sembarang nilai yang diberikan kepada *p* dan *q* (lihat baris-baris yang sama dalam kolom ke-4 dan ke-5 tabel nilainya mempunyai nilai yang sama), jadi bentuk pernyataan (i) suatu tautologi. Karena semua nilai pada kolom terakhir adalah B, maka (ii) juga adalah suatu tautologi.

Pernyataan (i) dan (ii) dapat dibaca :

"$p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan $\sim p \vee q$"

Catatan:

Untuk membuktikan bahwa dua bentuk pernyataan adalah ekuivalen $(\equiv)$, dapat dikerjakan dengan membuktikan bahwa bikondisional yang menghubungkan kedua bentuk pernyataan itu suatu tautologi.

D. ALJABAR BENTUK PERNYATAAN

Jika kita rangkaikan bentuk-bentuk pernyataan dengan lambang-lambang kata penghubung akan diperoleh bentuk pernyataan baru. Kata penghubung merupakan operasi pada bentuk-bentuk pernyataan, dan kita mempunyai suatu aljabar yang dinamakan *aljabar bentuk pernyataan.* Bentuk pernyataan hanya dapat memiliki dua nilai, yakni *nilai benar* dan *nilai salah*. Di antara bentuk pernyataan ada yang selalu bernilai benar dinamakan *tautologi* yang diberi lambang **U**, sedangkan yang selalu bernilai salah dinamakan *kontradiksi* diberi lambang **C**.

Kita telah mendefinisikan *ekuivalensi* dua bentuk pernyataan. Khususnya $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$. Ini dapat diartikan bahwa penghubung $\Rightarrow$

dapat diganti dengan penghubung $\sim$ dan $\vee$. Hasil-hasil yang sangat bermanfaat dalam pengembangan atau pekerjaan selanjutnya dalam aljabar dinamakan *teorema*.

Setelah meletakkan dasar aljabar bentuk pernyataan, mungkin timbul dugaan (*conjectures*) yang menyangkut elemen-elemen, operasi-operasi, dan hubungan-hubungan, yang kemudian diusahakan untuk membuktikan apakah dugaan itu benar atau salah. Dugaan yang benar dan dipandang mempunyai arti penting biasanya diangkat menjadi teorema, dan akan menjadi hukum logika yang sangat bermanfaat. Akan kita pelajari beberapa teorema dasar dan teorema lainnya yang dianggap sangat penting.

Teorema 2.1 (Sifat *komutatif*)

Jika p dan q bentuk pernyataan maka

(i) $p \vee q \equiv q \vee p$

(ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Teorema 2.2 (Sifat *distributif*)

Jika p, q, dan r bentuk pernyataan maka

(i) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(ii) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Teorema 2.3 (Sifat *identitas*)

Jika **C**, **U**, dan p bentuk pernyataan dengan **C** suatu kontradiksi dan **U** suatu tautologi, maka untuk setiap p berlaku

(i) $p \vee \mathbf{C} \equiv p$

(ii) $p \wedge \mathbf{U} \equiv p$

Teorema 2.4 (Sifat *komplemen*)

Jika **C**, **U**, dan p bentuk pernyataan dengan **C** suatu kontradiksi dan **U** suatu tautologi, maka untuk setiap p berlaku

(i) $p \vee \sim p \equiv \mathbf{U}$

(ii) $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{C}$

Teorema 2.1 sampai 2.4 dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel nilai. Akan dibuktikan Teorema 2.2 (i), yang lain diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$ $(1) \wedge (4)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(5) \vee (6)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	B	S	B	B
B	S	B	B	S	B	B	B
B	S	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	S	S	S	S
S	B	S	B	S	S	S	S
S	S	B	B	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S	S

Jika diperhatikan pada tabel, nilai-nilai pada baris-baris yang sama dalam kolom (7) dan (8) untuk berbagai kombinasi nilai yang mungkin diberikan kepada *p*, *q*, dan *r* adalah sama maka terbukti

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) .$$

Teorema 2.5

Jika **C**, **U**, dan *p* bentuk pernyataan dengan **C** suatu kontradiksi dan **U** suatu tautologi, maka untuk setiap *p* berlaku

(i) $p \vee \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}$

(ii) $p \wedge \mathbf{C} \equiv \mathbf{C}$

Teorema ini dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel nilai. Akan dibuktikan dengan Teorema 2.1 sampai Teorema 2. 4.

$$\begin{aligned}
p \vee \mathbf{U} &\equiv (p \vee \mathbf{U}) \wedge \mathbf{U} && \text{(Teorema 2.3(ii))}\\
&\equiv (p \vee \mathbf{U}) \wedge (p \vee \sim p) && \text{(Teorema 2.4(i))}\\
&\equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \mathbf{U}) && \text{(Teorema 2.1(ii)}\\
&\equiv p \vee (\sim p \wedge \mathbf{U}) && \text{(Teorema 2.2(ii))}\\
&\equiv p \vee \sim p && \text{(Teorema 2.3(ii))}\\
&\equiv \mathbf{U} && \text{(Teorema 2.4(i))}
\end{aligned}$$

Terbukti Teorema 2.5 (i)

$$
\begin{aligned}
p \wedge \mathbf{C} &\equiv (p \wedge \mathbf{C}) \vee \mathbf{C} && \text{(Teorema 2.3}(i)) \\
&\equiv (p \wedge \mathbf{C}) \vee (p \wedge \sim p) && \text{(Teorema 2.4}(ii)) \\
&\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \mathbf{C}) && \text{(Teorema 2.1}(i)) \\
&\equiv p \wedge (\sim p \vee \mathbf{C}) && \text{(Teorema 2.2}(i)) \\
&\equiv p \wedge \sim p && \text{(Teorema 2.3}(i)) \\
&\equiv \mathbf{C} && \text{(Teorema 1.2.4}(ii))
\end{aligned}
$$

Terbukti Teorema 2.5 (ii)

Telah ditunjukkan bahwa Teorema 2.5 dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 2.1 sampai dengan Teorema 2.4. Jadi, Teorema 2.1 sampai dengan Teorema 2.4 dapat dipandang sebagai teorema dasar, sebagai landasan tempat berpijak teorema-teorema lainnya, yakni Teorema 2.5 sampai dengan Teorema 2.17. Teorema 2.5 sampai dengan Teorema 2.17 dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel nilai.

Jika p, q, dan r bentuk-bentuk pernyataan, **U** suatu *tautologi* dan **C** suatu *kontradiksi*, maka:

Teorema 2.6

Untuk setiap p berlaku $p \vee p \equiv p$

Teorema 2.7

Untuk setiap p berlaku $p \wedge p \equiv p$

Teorema 2.8

Jika x suatu bentuk pernyataan dan $p \vee x \equiv p$ untuk setiap p, maka $x \equiv \mathbf{C}$

Teorema 2.9

Jika x suatu bentuk pernyataan dan $p \wedge x \equiv x$ untuk setiap p, maka $x \equiv \mathbf{U}$

Teorema 2.10

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Sifat *absorbsi*)

Teorema 2.11

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Sifat *absorbsi*)

Teorema 2.12

$p \wedge q \equiv p$ jika dan hanya jika $p \vee q \equiv q$

Teorema 2.13

Jika $p \vee q \equiv p \vee r$ dan jika $p \wedge q \equiv p \wedge r$ maka $q \equiv r$

Teorema 2.14

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Sifat *asosiatif*)

Teorema 2.15

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (Sifat *asosiatif*)

Teorema 2.16

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (Sifat *De Morgan*)

Teorema 2.17

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Sifat *De Morgan*)

Akan dibuktikan beberapa teorema, untuk yang lain harap Anda kerjakan sendiri sebagai latihan.

Bukti Teorema 2.8

Karena $p \vee x \equiv p$ untuk setiap bentuk pernyataan *p*, maka $\mathbf{C} \vee x \equiv \mathbf{C}$. Menurut Teorema 2.1 (i) berlaku $\mathbf{C} \vee x \equiv x \vee \mathbf{C}$ dan menurut Teorema 2.3 (i) $x \vee \mathbf{C} \equiv x$, jadi $x \equiv \mathbf{C}$.

Bukti Teorema 2.10

$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge \mathbf{U}) \vee (p \wedge q)$	(Teorema 2.3 (ii))
$\equiv p \wedge (\mathbf{U} \vee q)$	(Teorema 2.2 (i))
$\equiv p \wedge (q \vee \mathbf{U})$	(Teorema 2.1 (i))
$\equiv p \wedge \mathbf{U}$	(Teorema 2.5 (i))
$\equiv p$	(Teorema 2.3 (ii))

Bukti Teorema 2.16 lebih mudah dengan menggunakan tabel nilai.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Dengan memperhatikan nilai-nilai pada baris yang sama dalam dua kolom yang terakhir tabel, terbukti bahwa $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Catatan:
Teorema 2.16 dapat diperluas menjadi :

$$\sim (p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \cdots \wedge \sim p_n)$$
$$\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \cdots \vee \sim p_n)$$

Contoh 2.11

Narti berkata: "Ibu pergi ke pasar atau ayah tidak pergi ke kantor". Jika Narti berdusta, apakah sesungguhnya yang terjadi?

Jika pernyataan "Ibu pergi ke pasar" dan "ayah pergi ke kantor" berturut-turut *misal* dari bentuk pernyataan p dan q, maka perkataan Narti adalah suatu *misal* dari bentuk pernyataan $p \vee \sim q$. Karena Narti berdusta, menurut Teorema 2.16 kita mempunyai bentuk pernyataan

$$\sim (p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim (\sim q) \equiv \sim p \wedge q$$

Jadi yang terjadi adalah "Ibu tidak pergi ke pasar dan ayah pergi ke kantor".

Contoh 2.12

Narto menyangkal perkataan Hardi "Jika motor Marno dibeli orang, maka Marno akan membeli mobil". Apakah yang dikatakan oleh Narto?

Jika bentuk pernyataan p menyajikan pernyataan "Motor Marno dibeli orang" dan q menyajikan "Marno akan membeli mobil" maka perkataan Hardi dapat disajikan dengan $p \Rightarrow q$ yang ekuivalen dengan $\sim p \vee q$. Jadi yang dikatakan Narto dapat disajikan dengan $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$, dan ia berkata: "Motor Marno dibeli orang dan Marno tidak akan membeli mobil".

Contoh 2.13

Sederhanakan bentuk pernyataan $(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$

Karena $\sim p \Rightarrow q \equiv [\sim(\sim p) \vee q] \equiv p \vee q$ maka bentuk pernyataan di atas ekuivalen dengan

$$(p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv (q \vee p) \vee (p \wedge q) \qquad \text{(Sifat } \textit{komutatif}\text{)}$$

$$\equiv q \vee [p \vee (p \wedge q)] \qquad \text{(Sifat } \textit{asosiatif}\text{)}$$

$$\equiv q \vee p \qquad \text{(Sifat } \textit{absorpsi}\text{)}$$

Jadi $(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee q$ (Sifat *komutatif*)

Contoh 2.14

Ali berkata: "Badu mengambil boneka itu". Badu membantah: "Ali bohong". Candra memberi keterangan: "Saya tidak mengambilnya". Sedangkan Danu mendakwa: "Ali yang mengambil boneka itu". Jika tepat tiga dari empat orang anak yang dicurigai itu bohong, siapakah yang mengambil boneka itu ?

Diandaikan:

p mewakili pernyataan "Ali mengambil boneka itu"
q mewakili pernyataan "Badu mengambil boneka itu"
r mewakili pernyataan "Candra mengambil boneka itu"
s mewakili pernyataan "Danu mengambil boneka itu"

Jadi Ali, Badu, Candra, dan Danu telah mengajukan pernyataan berturut-turut yang dapat disajikan:

$$q, \sim q, \sim r, \text{dan } p \qquad (*)$$

Karena tepat satu dari bentuk pernyataan (*) benar, maka satu dari empat konjungsi yang dibentuk dari suatu bentuk pernyataan dan ingkaran masing-masing bentuk yang lainnya dalam (*) harus benar.

$$q \wedge (\sim(\sim q)) \wedge (\sim(\sim r)) \wedge \sim p \qquad (1)$$

$$\sim q \wedge \sim q \wedge (\sim(\sim r)) \wedge \sim p \qquad (2)$$

$$\sim q \wedge (\sim(\sim q)) \wedge \sim r \wedge \sim p \qquad (3)$$

$$\sim q \wedge (\sim(\sim q)) \wedge (\sim(\sim r)) \wedge p \qquad (4)$$

Jadi bentuk pernyataan (1) $\vee$ (2) $\vee$ (3) $\vee$ (4) harus benar.

$$[q \wedge q \wedge r \wedge \sim p] \vee [\sim q \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim p] \vee [\sim q \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim p] \vee [\sim q \wedge q \wedge r \wedge p]$$

$$\equiv [q \wedge r \wedge \sim p] \vee [\sim q \wedge r \wedge \sim p] \vee [\mathbf{C} \wedge \sim r \wedge \sim p] \vee [\mathbf{C} \wedge r \wedge p]$$

$$\equiv [(\sim q \vee q) \wedge r \wedge \sim p] \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{C}$$

$$\equiv \mathbf{U} \wedge r \wedge \sim p$$

$$\equiv r \wedge \sim p$$

Jadi $r \wedge \sim p$ harus bernilai benar, sehingga r dan $\sim p$ keduanya benar. Jadi r benar dan p salah. Kesimpulannya, Candra yang mengambil boneka.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Buktikan Teorema 2.14 dan 2.15 dengan menggunakan tabel nilai.
2) Tentukan bentuk pernyataan majemuk dengan tabel nilai berikut

(a)

P	q	?
B	B	B
B	S	B
S	B	S
S	S	S

(b)

p	q	?
B	B	S
B	S	S
S	B	B
S	S	S

3) Buktikan Teorema 2.10, Teorema 2.11, Teorema 2.12, dan Teorema 2.13
4) Jika bentuk pernyataan $(q \wedge \sim p) \vee q$ bernilai benar , tentukan nilai $p \vee q$?

5) Sederhanakan bentuk pernyataan berikut dengan menggunakan Teorema 2.1 s/d Teorema 2.5
   (a) $\sim p \wedge (q \vee p)$
   (b) $(p \wedge \sim p) \vee [(q \vee \sim q) \wedge p]$
   (c) $\sim p \vee (q \wedge p)$
   (d) $p \vee [q \vee (p \wedge \sim p)]$
6) Buktikan dengan menggunakan Teorema 2.14 s/d Teorema 2.17 bahwa:
   (a) $\sim (p \vee q \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$
   (b) $\sim (p \wedge q \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r$
   (c) $\sim (p \wedge q \wedge r \wedge s) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s$
   (d) $\sim (p \vee q \vee r \vee s) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s$
7) Tentukan ingkaran dari pernyataan "Setiap penonton di gedung bioskop itu mempunyai karcis dan berusia 17 tahun ke atas".
8) Di antara pernyataan (a) sampai dengan (d), pilihlah pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan "Jika segiempat adalah persegi panjang, maka sisi-sisinya yang berhadapan sejajar".
   (a) Jika sisi-sisi yang berhadapan tidak sejajar, maka segiempat bukan persegi panjang.
   (b) Sisi-sisi yang berhadapan sejajar adalah syarat perlu agar segiempat persegi panjang.
   (c) Segiempat adalah persegi panjang cukup untuk sisi-sisi yang berhadapan suatu segiempat sejajar.
   (d) Jika sisi-sisi yang berhadapan suatu segiempat sejajar, maka segiempat itu persegi panjang.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Anda kerjakan sendiri.
2) (a) $p \vee \sim q$
   (b) $\sim p \wedge q$
3) Teorema 2.10 sudah dikerjakan
   Teorema 2.11 $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \mathbf{C}) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (\mathbf{C} \wedge q) \equiv p \vee \mathbf{C} \equiv p$
   Teorema 2.12 Diketahui $p \wedge q = p$ maka
   $p \vee q \equiv (p \wedge q) \vee q \equiv q$ (Teorema 2.10)
   Diketahui $p \vee q = q$ maka
   $p \wedge q \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Teorema 2.11)

Teorema 2.13 $q \equiv q \wedge (q \vee p) \equiv q \wedge (p \vee r) \equiv (q \wedge p) \vee (q \wedge r)$

$\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv r \wedge (p \vee q) \equiv r \wedge (p \vee r) \equiv r$

4) $(q \wedge \sim p) \vee q \equiv q \vee (q \wedge \sim p) \equiv q$ benar, jadi $p \vee q$ benar.

5) (a) $\sim p \wedge (q \vee p) \equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge p) \vee \mathrm{C} \equiv \sim p \vee q$

(b) $(p \wedge \sim p) \vee [(q \vee \sim q) \wedge p] \equiv \mathrm{C} \vee [\mathrm{U} \wedge p] \equiv \mathrm{C} \vee p \equiv p$

(c) dan (d) Anda kerjakan sendiri.

6) (a) $\sim (p \vee q \vee r) \equiv \sim [(p \vee q) \vee r] \equiv [\sim (p \vee q) \wedge \sim r] \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r]$

$\equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

(b) $\sim (p \wedge q \wedge r) \equiv \sim [(p \wedge q) \wedge r] \equiv [\sim (p \wedge q) \vee \sim r] \equiv [(\sim p \vee \sim q) \vee \sim r]$

$\equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

(c) dan (d) Anda kerjakan sendiri.

7) “Setiap penonton di gedung bioskop mempunyai karcis” misal untuk *p*, dan “Setiap penonton di gedung bioskop berusia 17 tahun ke atas” misal untuk *q*.

Pernyataan dalam soal misal $p \wedge q$, maka ingkarannya adalah $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ menyajikan “Ada penonton di gedung bioskop tidak mempunyai karcis atau ada yang berusia kurang dari 17 tahun”.

8) Jawabannya adalah (a), (b), dan (c).

RANGKUMAN

1. Pernyataan yang tidak memuat tanda penghubung disebut pernyataan tunggal, sedang yang memuat penghubung disebut pernyataan majemuk.
2. Nilai bentuk pernyataan $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, dan $\sim p$ ditentukan dengan Tabel 1-5.
3. Dua bentuk pernyataan disebut ekuivalen jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk semua komposisi nilai yang mungkin diberikan kepada bentuk pernyataan tunggal yang menyusunnya.
4. Suatu bentuk pernyataan majemuk disebut tautologi jika bentuk pernyataan tersebut selalu bernilai benar dan tidak tergantung pada nilai-nilai bentuk pernyataan tunggal yang menyusunnya.
5. Suatu bentuk pernyataan majemuk disebut kontradiksi, jika bentuk pernyataan tersebut selalu bernilai salah dan tidak tergantung pada nilai-nilai bentuk pernyataan tunggal yang menyusunnya.

6. Beberapa teorema dasar yang menyajikan elemen-elemen, operasi dan hubungan dalam aljabar bentuk pernyataan adalah teorema-teorema sifat komutatif, distributif, identitas dan komplemen. Selain itu untuk setiap pernyataan, berlaku
   (i) $p \vee \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}$ (iii) $p \wedge \mathbf{U} \equiv p$ (v) $p \vee \sim p \equiv \mathbf{U}$
   (ii) $p \wedge \mathbf{C} \equiv \mathbf{C}$ (iv) $p \vee \mathbf{U} \equiv p$ (vi) $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{C}$
7. Dalam aljabar bentuk pernyataan berlaku juga sifat-sifat
   a. absorbsi: (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$; (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
   b. asosiatif
   c. De Morgan
      (i) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$;
      (ii) $\sim (p \wedge q) = (\sim p \wedge) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$.

TES FORMATIF 2

Silakan Anda mengerjakan tes formatif berikut ini!

1) Tulislah bentuk pernyataan $p \Leftrightarrow q$ hanya dengan menggunakan lambang $\sim, \wedge$ dan $\vee$.
2) Sederhanakan bentuk-bentuk pernyataan:
   (a) $[(q \wedge \sim p) \vee q] \Rightarrow (p \vee q)$
   (b) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)$
3) Selidikilah bentuk-bentuk pernyataan di bawah ini apakah suatu *tautologi*, *kontradiksi*, atau bukan keduanya.
   (a) $[\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow p$
   (b) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
   (c) $[(p \wedge \sim q) \vee q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   (d) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
4) Kaca jendela pecah dan empat orang anak dimintai keterangan. Keempat orang anak itu P, Q, R dan S berkata sebagai berikut.
   P: “Q yang memecahkan”,
   Q: “P berdusta”,
   R: “Saya tidak memecahkannya”,
   S: “P yang memecahkan”.
   (a) Jika tepat tiga di antara tersangka berdusta, siapakah yang memecahkan jendela?

(b) Jika tepat satu di antara tersangka berdusta, siapakah yang memecahkan jendela?

5) Setelah mempelajari tiga lamaran, perusahaan mengeluarkan pengumuman sebagai berikut.
“Kita memerlukan Ahmad dan jika kita memerlukan Harun maka kita memerlukan Ridwan, jika dan hanya jika, kita memerlukan Ahmad atau Harun dan kita tidak memerlukan Ridwan”. Jika perusahaan menerima lebih dari satu orang, siapakah yang diterima?

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) p, q, r, dan s berturut-turut menyajikan “esok sore hujan”, “Wulan menjumpaiku”, “Wulan akan kuajak melihat film”, dan “Wulan akan kuajak makan di restoran”.
   $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$
2) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3) (a) Jika fungsi f tidak kontinu di a maka $f(a)$ tidak ada atau $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
   (b) Jika fungsi f tidak kontinu di a maka f tidak terdiferensial di a.

Tes Formatif 2

1) $p \Leftrightarrow q \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
   $\equiv [\sim p \wedge (\sim q \vee p)] \vee [q \wedge (\sim q \vee p)]$
   $\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p)] \vee [(q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)]$
   $\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee \mathbf{C}] \vee [\mathbf{C} \vee (p \wedge q)] \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
2) (a) $\equiv \sim [(q \wedge \sim p) \vee q] \vee (p \vee q) \equiv [(\sim q \vee p) \wedge \sim q] \vee p \vee q$
   $\equiv \sim q \vee p \vee q \equiv p \vee \mathbf{U} \equiv p$
   (b) $\equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee [\sim p \vee r) \wedge q] \equiv [q \wedge (p \vee r)] \vee [q \wedge \sim (p \vee r)]$
   $\equiv [\{q \wedge (p \vee r)\} \vee q] \wedge [q \wedge (p \vee r)] \vee [\sim (p \vee r)]$
   $\equiv q \wedge [q \vee \{\sim (p \vee r)\}] \wedge [(p \vee r) \vee \{\sim (p \vee r)\}]$
   $\equiv q \wedge \mathbf{U} \equiv q$
3) (a) $\equiv [(\sim p \Rightarrow \mathbf{C}) \Rightarrow p] \equiv [(p \vee \mathbf{C}) \Rightarrow p] \equiv p \Rightarrow p \equiv (\sim p \vee p) \equiv \mathbf{U}$
   (b) $\equiv [(p \vee p) \Rightarrow p] \equiv p \Rightarrow p \equiv \mathbf{U}$
   (c) $\equiv [\{(p \vee q) \wedge \mathbf{U}\} \Rightarrow (\sim p \vee q)] \equiv [(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \vee q)]$
   $\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \equiv [\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee q] \equiv \sim p \vee q$
   bukan **U** dan juga bukan **C**.
   (d) $\equiv [\{(\sim p \vee q) \vee \sim p\} \Rightarrow (\sim p \vee q)] \equiv [\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)]$
   $\equiv p \vee \sim p \vee q \equiv \mathbf{U} \vee q \equiv \mathbf{U}$

4) p menyajikan "P memecahkan kaca jendela", q untuk "Q memecahkan kaca jendela", r untuk "R memecahkan kaca jendela", dan s untuk "S memecahkan kaca jendela".
Pengakuan mereka adalah: $q, \sim q, \sim r, p$

(a) Terdapat tiga di antara mereka berdusta.
Jadi salah satu dari 4 bentuk pernyataan berikut harus benar.
(1) $q \wedge q \wedge r \wedge \sim p$ (3) $\sim q \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim p$
(2) $\sim q \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim p$ (4) $\sim q \wedge q \wedge r \wedge p$
Dengan demikian (1) $\vee$ (2) $\vee$ (3) $\vee$ (4) benar.

$$(q \wedge r \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge r \wedge \sim p) \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{C}$$
$$\equiv [q \vee (\sim q \wedge r \wedge \sim p)] \wedge [(r \wedge \sim p) \vee \{(r \wedge \sim p) \wedge q\}]$$
$$\equiv [\mathbf{U} \wedge \{q \vee (r \wedge \sim p)\}] \wedge (r \wedge \sim p)$$
$$\equiv \{q \vee (r \wedge \sim p)\} \wedge (r \wedge \sim p) \equiv r \wedge \sim p$$

Jadi $r \wedge \sim p$ harus benar sehingga r benar dan p salah.

Terbukti R yang memecahkan kaca jendela.

(b) Tepat satu tersangka berdusta.
Jadi disjungsi:

$$(\sim q \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge p) \vee (q \wedge q \wedge \sim r \wedge p) \vee (q \wedge \sim q \wedge r \wedge p) \vee$$
$$(q \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim p\} \quad \text{benar.}$$

$$(\sim q \wedge \sim r \wedge p) \vee (q \wedge \sim r \wedge p) \vee \mathrm{C} \vee \mathrm{C} \equiv (\sim r \wedge p) \wedge (\sim q \vee q)$$
$$\equiv (\sim r \wedge p) \wedge \mathrm{U}$$
$$\equiv (\sim r \wedge p)$$

Jadi $p \wedge \sim r$ harus benar sehingga p benar dan r salah.

5) "Perusahaan memerlukan Akhmad" *misal* untuk p,
"Perusahaan memerlukan Harun" *misal* untuk q, dan
"Perusahaan memerlukan Ridwan" *misal* untuk r.
Perusahaan mengumumkan: $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim r]$

Tentu saja pengumuman ini harus benar, jadi bentuk pernyataan majemuk bikondisional ini harus benar. Karena yang diterima lebih dari satu orang, maka kombinasi nilai untuk p, q, dan r yang ditinjau harus paling sedikit ada dua nilai B.

p	q	r	$\sim r$	$q \Rightarrow r$	$p \vee q$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \wedge \sim r$	$s \Leftrightarrow t$
B	B	B	S	B	B	B	S	S
B	B	S	B	S	B	S	B	S
B	S	B	S	B	B	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S	S	B

Dari tabel tampak bahwa paling sedikit dua nilai B dalam kombinasi yang diberikan kepada *p*, *q*, dan *r* bikondisional hanya benar untuk nilai pada baris ke-4. Jadi yang diterima lamarannya adalah Harun dan Ridwan, dan lamaran Akhmad ditolak.

Daftar Pustaka

Bartle, Robert G. dan Sherbert, Donald R. (1992). *Introduction To Real Analysis.* Edisi Kedua.

Burton, David M. (1980). *Elementary Number Theory*.

Campbell, H.G. dan Spencer, R.E. (1974). *Finite Mathematics*.

Iglewics, Boris dan Stoyle, Judith. (1973). *An Introduction To Mathematical Reasoning.*

Rudin, Walter. (1976). *Priciples of Mathematical Analysis.* Edisi Ketiga.