

# Model Program Linear dan Daerah Penyelesaian Masalah

Prof. Dr. Djati Kerami



## PENDAHULUAN

---

Di dalam modul pertama ini Anda akan mempelajari penurunan model program linear dari beberapa masalah sederhana. Dengan memperhatikan model program linear yang diturunkan tersebut, Anda akan dapat melihat peubah keputusan yang digunakan dalam model, dan kemudian bagaimana karakteristik umum model program linear. Dengan memperhatikan karakteristik tersebut, akan Anda lihat bahwa peubah bebas (merupakan peubah keputusan dalam masalah) di dalamnya saling berhubungan secara linear. Untuk memahami penyelesaian yang dimungkinkan, selanjutnya Anda akan mempelajari dahulu apa yang disebut dengan daerah penyelesaian khususnya untuk model program linear dengan dua peubah bebas.

Setelah mempelajari modul ini diharapkan mahasiswa memiliki kemampuan untuk:

1. memahami model masalah program linear;
2. menggambarkan grafik daerah penyelesaian, khususnya untuk model program linear dengan 2 peubah.

Secara lebih terinci, setelah selesai mempelajari modul ini diharapkan mahasiswa dapat:

1. mengidentifikasi bahwa suatu masalah berbentuk program linear;
2. menurunkan masalah ke dalam model program linear;
3. mengidentifikasi tujuan penyelesaian masalah, fungsi objektif dan sistem persyaratan yang terdapat dalam model program linear;
4. mampu memahami sistem persyaratan;
5. membedakan sistem persyaratan utama dan persyaratan kepositifan;
6. membuat grafik sistem persyaratan program linear 2 peubah bebas;
7. mengidentifikasi daerah penyelesaian yang terbatas, tak terhingga, dan hampa.

## KEGIATAN BELAJAR 1

## Model Masalah Program Linear

Agar Anda dapat memahami berasal dari mana bentuk model program linear, akan diberikan dahulu masalah sederhana dalam perencanaan produksi. Dengan menurunkan dahulu masalah yang dihadapi ke dalam model matematis, Anda akan lebih memahami karakteristik dari model program linear berikut pengertian-pengertian dasar di dalamnya.

*Contoh 1 (Perencanaan Produksi)*

Suatu perusahaan mebel memproduksi 2 jenis produk, yaitu kursi dan meja. Kedua produk tersebut dibuat melalui proses perakitan dan proses akhir berupa penghalusan dan pengecatan. Dalam sehari, bagian perakitan mempunyai 9 jam kerja, dan bagian akhir mempunyai 8 jam kerja.

Untuk membuat sebuah kursi diperlukan 1 jam perakitan dan 2 jam proses akhir. Sedangkan untuk meja diperlukan waktu 3 jam dan perakitan dan 1 jam proses akhir.

Apabila kedua jenis produk tersebut dijual keuntungan yang diperoleh adalah Rp. 50.000 untuk setiap meja dan Rp. 30.000 untuk setiap kursi.

Masalah yang dihadapi adalah menentukan produksi harian kursi dan meja sedemikian memenuhi waktu kerja yang tersedia dan memperoleh keuntungan maksimum.

*Penyelesaian*

Sebelum kita menurunkan model matematis dari masalah di atas, kita nyatakan dahulu informasi mengenai hubungan keperluan dan ketersediaan bahan baku, serta harga satuan penjualan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1.1.  
Hubungan produk dan bahan baku

	Proses		Satuan keuntungan (puluhan ribu rupiah)
	perakitan	akhir	
Meja	1	2	5
Kursi	3	1	3
Jam kerja tersedia	9	8	

Dengan penyajian informasi dalam bentuk tabel di atas, akan memudahkan kita dalam menurunkan model matematisnya.

### A. Penurunan Model Matematis

Sebelum kita menurunkan model matematisnya, kita lakukan dahulu identifikasi peubah keputusan dalam masalah.

Dari masalah yang kita hadapi di atas, yang akan diputuskan adalah banyaknya kursi dan banyaknya meja.

Dengan memberikan keputusan yang tepat banyaknya kursi dan banyaknya meja, diharapkan kita akan dapat memperoleh keuntungan yang maksimal. Dengan demikian maka banyaknya kursi dan banyaknya meja dapat dianggap sebagai peubah-peubah keputusan dalam masalah perencanaan produksi di atas.

Selanjutnya, cobalah Anda periksa dahulu hubungan informasi yang diberikan sebelumnya dengan baris-baris dan kolom-kolom dalam tabel di atas, serta hubungannya dengan peubah keputusannya. Apabila Anda telah memahaminya, maka Anda akan lebih mudah menurunkan model matematis masalahnya, yaitu sebagai berikut:

Karena peubah keputusannya adalah banyaknya kursi dan banyaknya meja yang akan diproduksi, maka kita misalkan bahwa:

$x$  : banyaknya kursi yang akan diproduksi (dalam sehari)

$y$  : banyaknya meja yang akan diproduksi (dalam sehari)

Dari Tabel 1.1, kita ketahui bahwa untuk membuat sebuah kursi diperlukan 1 jam proses perakitan dan 2 jam proses akhir.

Jadi untuk membuat  $x$  buah kursi diperlukan  $1x$  (jam proses perakitan) dan  $2x$  (jam proses akhir). Untuk membuat sebuah meja diperlukan 3 jam proses perakitan dan 1 jam proses akhir. Jadi untuk membuat  $y$  buah meja diperlukan  $3y$  (jam proses perakitan) dan  $1y$  (proses akhir).

Selanjutnya kita lakukan peninjauan persyaratan dari beberapa segi:

(i) Keterbatasan waktu kerja bagian proses perakitan

Panjang waktu kerja yang digunakan untuk memproduksi  $x$  kursi dan  $y$  meja dalam proses perakitan adalah  $1x + 3y$  (dalam jam). Sedangkan waktu kerja yang tersedia pada bagian perakitan adalah 9 (jam). Tentu saja, waktu yang digunakan tersebut tidak boleh melebihi waktu yang tersedia.

Jadi,

$$1x + 3y \leq 9 \quad \dots (1)$$

(ii) Keterbatasan waktu kerja bagian proses akhir

Panjang waktu kerja yang diperlukan untuk memproduksi  $x$  kursi dan  $y$  meja dalam proses akhir adalah  $2x + 1y$  (dalam jam). Sedangkan waktu kerja yang tersedia pada bagian proses akhir adalah 8 (jam). Di sini juga, waktu yang diperlukan tidak boleh melebihi waktu yang tersedia.

Jadi,

$$20x + 10y \leq 8 \quad \dots (2)$$

(iii) Keuntungan

Keuntungan yang diperoleh dari penjualan 1 buah kursi adalah 5 (dalam puluhan ribu rupiah). Jadi keuntungan yang diperoleh dari  $x$  buah produk 1 adalah  $5x$  (dalam puluhan ribu rupiah). Selanjutnya, yang diperoleh dari penjualan 1 buah meja adalah 3 (dalam puluhan ribu rupiah). Jadi keuntungan yang diperoleh dari  $y$  buah meja adalah 3 (dalam puluhan ribu rupiah).

Dengan demikian maka total keuntungan yang diperoleh dengan menjual  $x$  buah kursi dan  $y$  buah meja adalah  $5x + 3y$  (dalam puluhan ribu rupiah).

Kita ketahui bahwa yang dikehendaki adalah memaksimumkan total keuntungan. Dalam hal ini kita dapat menyatakannya dengan

$$\text{maks. } 5x + 3y \quad \dots (3)$$

iv) Kepositifan banyaknya produksi

Telah kita misalkan bahwa  $x$  dan  $y$  masing-masing adalah banyaknya kursi dan banyaknya meja yang akan diproduksi. Tentu saja  $x$  dan  $y$  tersebut tidak mungkin bernilai negatif. Dengan demikian kita dapat menyatakannya dengan

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \dots (4)$$

Dengan menggabungkan segi peninjauan (i), (ii), (iii) dan (iv) atau penyajian (1) sampai dengan (4), kita memperoleh model matematis masalahnya, yaitu

$$\begin{array}{llll} \text{maks } Z = 5x + 3y & & \dots & \text{(i)} \\ \text{d.s} & & & \\ & x + 3y \leq 9 & \dots & \text{(ii)} \quad \dots \text{ (5)} \\ & 2x + y \leq 8 & \dots & \text{(iii)} \\ & x, y \geq 0 & \dots & \text{(iv)} \end{array}$$

Cobalah kita perhatikan model matematis (5) di atas!

a) Fungsi  $f(x, y) = 5x + y$  disebut dengan fungsi objektif dari masalah.

Disebut demikian karena sesuai dengan tujuan penyelesaian masalah kita yaitu memaksimalkan keuntungan. Dalam hal ini  $5x + 2y$  merupakan keuntungan yang diperoleh dari penjualan  $x$  buah kursi dan  $y$  buah meja.

b) Pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$ ,  $2x + y \leq 8$ ,  $x \geq 0$ , dan  $y \geq 0$  disebut dengan persyaratan (atau sering disebut juga kendala) dari masalah.

Pada penulisan (5), d.s dibaca dengan syarat.

Khususnya persyaratan  $x + 3y \leq 9$  dan  $2x + y \leq 8$ , disebut dengan persyaratan utama (dalam hal ini adalah keterbatasan sumber daya yaitu menyatakan waktu tersedia). Sedangkan persyaratan  $x \geq 0$ , dan  $y \geq 0$  disebut dengan persyaratan kepositifan.

Dikatakan bahwa semua pertaksamaan (ii) sampai dengan (iv) membentuk sistem persyaratan, yang dalam hal ini pertaksamaan (ii) dan (iii) merupakan (sub)sistem persyaratan utama dan (iv) merupakan (sub)sistem persyaratan kepositifan.

Secara deskriptif, masalah yang dinyatakan dalam model matematis (5) dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tentukan  $x, y$ , yang bernilai positif yang memenuhi persyaratan utama masalah (yaitu (ii), (iii)) serta memaksimalkan fungsi objektif (yaitu  $f(x, y)$  pada (i)).

Selanjutnya kita perhatikan satu per satu fungsi yang terlibat dalam (5).

(i) Fungsi objektif:  $5x + 3y$  atau dapat ditulis sebagai  $f(x, y) = 5x + y$ , merupakan fungsi dalam 2 peubah bebas  $x$  dan  $y$ . Fungsi  $f$  ini merupakan fungsi linear.

(ii) Persyaratan  $x+3y \leq 9$  merupakan pertaksamaan yang terbentuk dari persamaan  $x+3y \leq 9$ , yang berupa persamaan linear. Persamaan tersebut yang dapat dinyatakan pula sebagai

$$g_1(x, y) = 9, \text{ dengan } g_1(x, y) = x + 3y$$

Persyaratan  $2x + y = 8$  merupakan pertaksamaan yang terbentuk dari persamaan  $2x + y = 8$ , yang berupa persamaan linear. Persamaan tersebut yang dapat dinyatakan pula sebagai

$$g_1(x, y) = 8, \text{ dengan } g_2(x, y) = 2x + y$$

Dapat kita lihat bahwa  $g_1(x, y)$  dan  $g_2(x, y)$  merupakan fungsi linear.

Dapat kita lihat bahwa semua fungsi yang membentuk model matematis (5) di atas, yaitu  $f(x, y)$ ,  $g_1(x, y)$ , dan  $g_2(x, y)$  merupakan fungsi linear. Oleh karena itu, model matematis (5) tersebut di atas dinamakan dengan model Pemrograman Linear (*Linear Programming*) atau secara singkat disebut dengan model Program Linear.

## 2. Penulisan dalam Bentuk Matriks

Dalam bentuk matriks, model matematis (5) dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Maks. } Z = [5 \ 3] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d.s

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0,$$

Bentuk umum model program linear:

Perhatikan dalam model matematis (5) di atas. Banyaknya peubah bebas yang terlibat di dalamnya hanya 2 (dua), jadi kita dapat menyatakannya dengan  $x$  dan  $y$ .

Dalam hal banyaknya peubah bebas yang terlibat lebih dari 2, maka kita menyatakan peubah bebasnya dengan  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , dengan  $n$ : banyaknya peubah bebas.

Dengan penyajian peubah bebas tersebut, maka model matematis (5) dapat dinyatakan pula sebagai:

maks. $Z = 5x_1 + 3x_2$	.... (i)	... (6)
d.s		
$x_1 + 3x_2 \leq 9$	.... (ii)	
$2x_1 + x_2 \leq 8$	.... (iii)	
$x_1, x_2 \geq 0$	.... (iv)	

Perhatikan bahwa dalam penyajian model program linear dengan 2 peubah bebas (6) di atas,  $x_1$  merupakan  $x$  dan  $x_2$  merupakan  $y$  dalam (5).

**3. Model Umum Masalah Program Linear**

Dengan memperhatikan model matematis (5), kita dapat menyatakan model umum masalah program linear dapat dinyatakan sebagai

maks. $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_mx_m$	... (7)	
d.s		
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m \leq b_1$		
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m \leq b_2$		
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3m}x_m \leq b_3$		
.....		
.....		
$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pm}x_m \leq b_p$		
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \geq 0$		

Dalam bentuk matriks dapat dinyatakan sebagai

$$\text{maks. } Z = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$$

d.s

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_p \end{bmatrix}$$

dan

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \geq 0$$

atau secara singkat ditulis sebagai

maks.  $Z = C' X$

d.s

$AX \leq B$

$X \geq 0$

... (8)

dengan

$$C' \text{ (dibaca tranpos dari C), dengan } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_m \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pm} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa  $C$ ,  $X$ , dan  $B$  merupakan vektor kolom dengan  $p$  buah baris,  $A$  merupakan matriks  $p \times m$  ( $m$  : banyaknya persyaratan,  $m$  : banyaknya peubah bebas). Matriks  $A$  ini berhubungan dengan persyaratan utama dalam sistem persyaratan yang diberikan.

Dengan memperhatikan model umum (8), masalah yang dihadapi adalah menentukan  $X$  yang:

- (a) memenuhi sistem persyaratan  $AX \leq B$ ,  $X \geq 0$  sedemikian sehingga:
- (b) memaksimumkan fungsi objektif  $Z = C'X$ .

Dapat Anda lihat bahwa (a) dapat diartikan sebagai memilih  $X$  di dalam daerah (himpunan titik-titik  $X$ ) yang memenuhi sistem persyaratan yang diberikan. Sedangkan (b) dapat diartikan sebagai: di antara titik-titik  $X$  yang diberikan oleh (a), pilih  $X$  yang membuat fungsi objektif bernilai maksimum. Ini merupakan tujuan yang ingin kita capai.

#### 4. Tujuan dan Jenis Persyaratan

Pada contoh yang diberikan di atas, ke- $m$  buah persyaratan semuanya berupa pertaksamaan ' $\leq$ '. Dalam masalah yang lain, persyaratan yang diperoleh dapat berupa pertaksamaan ' $\geq$ ', dapat pula berupa persamaan '=', atau mungkin pula berupa campuran ' $\leq$ ', ' $\geq$ ', dan '='.

Demikian pula pada masalah lain tujuannya bukan "memaksimumkan" fungsi objektif, tetapi "meminimumkan" fungsi objektif. Hal ini tergantung dari masalah yang dihadapi, memaksimumkan keuntungan (pemerolehan uang, atau manfaat, atau kriteria lain yang sejenis) atukah meminimumkan kerugian (atau biaya, atau risiko, atau kriteria lain yang sejenis). Di sini, dalam hal tujuannya meminimumkan fungsi objektif  $Z$  kita dapat mengubahnya ke dalam bentuk memaksimumkan  $Z$ ,

$$\min. Z = \text{maks. } -Z.$$

Berbagai ragam persyaratan maupun tujuan yang diinginkan terhadap fungsi objektifnya dapat Anda perhatikan pada beberapa contoh di bawah ini, maupun pada Latihan yang akan Anda jumpai kemudian.

##### *Contoh 2* (Perencanaan Investasi)

Perusahaan X menyediakan dana sebesar Rp. 100.000.000 untuk diinvestasikan dalam 3 alternatif jenis investasi, yaitu saham A, saham B, dan reksadana R.

Saham A bernilai Rp. 50.000/saham dan diharapkan dalam setahun dapat memberikan pengembalian sebesar Rp. 10.000/saham (ini diperoleh melalui

dividen tahunan). Walaupun pengembaliannya cukup tinggi, saham A dianggap berisiko tinggi juga. Saham B bernilai Rp. 25.000/saham dan memberikan pengembalian sebesar Rp. 3000/saham. Reksadana R bernilai Rp. 200.000 dengan pengembalian tahunannya sebesar 9%.

Oleh karena investasi saham A berisiko tinggi maka investasinya dibatasi. Perusahaan tersebut memutuskan bahwa investasi untuk saham A adalah paling banyak  $\frac{1}{4}$  dari total investasi. Di samping itu, untuk setiap saham A yang dibeli, perusahaan tersebut akan membeli paling sedikit 3 saham B. Sedangkan untuk reksadana R, perusahaan tersebut paling banyak membeli 250 buah. Di samping itu, diputuskan bahwa investasi total dalam bentuk reksadana paling sedikit nilainya sama dengan separuh investasi dalam bentuk saham.

Masalahnya adalah: Bagaimana kita memberikan saran investasi yang memberikan pengembalian tahunan maksimum kepada perusahaan tersebut?

### *Penyelesaian*

Di sini perubah keputusannya berupa banyaknya jenis alternatif investasi (saham A, saham B, reksadana R).

Misalkan,  $x_1$  = banyaknya saham A yang dibeli  
 $x_2$  = banyaknya saham B yang dibeli  
 $x_3$  = banyaknya reksadana yang dibeli

Kita perhatikan pengembalian tahunan yang diperoleh dari saham A adalah Rp. 10.000/saham, dari saham B adalah Rp. 3000/saham.

Sedangkan pengembalian tahunan dari reksadana adalah 9% dari Rp. 200.000 = Rp. 18.000 untuk setiap reksadana. Jadi pengembalian tahunan yang akan diperoleh untuk semua jenis investasi adalah:

$$Z = 10.000x_1 + 3.000x_2 + 18.000x_3.$$

Selanjutnya, kita perhatikan persyaratan atau kendala yang ada dalam masalah.

(i) Keterbatasan dana unit investasi yaitu Rp.100.000.000.

Jika perusahaan tersebut membeli  $x_1$  buah saham A,  $x_2$  buah saham B, dan  $x_3$  buah reksadana R, maka total investasinya adalah  $50.000x_1 + 25.000x_2 + 200.000x_3$ . Total investasi ini tidak boleh melebihi dana yang tersedia, jadi  $50.000x_1 + 25.000x_2 + 200.000x_3 \leq 100.000.000$ .

(ii) Persyaratan lain:

a. Saham A

Investasi untuk saham A adalah paling banyak  $\frac{1}{4}$  dari total investasi:  
 $50.000 x_1 \leq (0,25)(50.000 x_1 + 25.000 x_2 + 200.000 x_3)$ .

b. Saham B

Untuk setiap saham A yang dibeli, paling sedikit dibeli 3 saham B, dengan perkataan lain banyaknya pembelian saham B adalah 3 kali banyaknya pembelian saham A

$$x_2 \geq 3 x_1$$

c. Reksadana:

Paling banyak dibeli 250 buah reksadana

$$x_3 \leq 250$$

Investasi total reksadana paling sedikit nilainya sama dengan separuh investasi saham

$$200.000 x_3 \geq (0,50)(50.000 x_1 + 25.000 x_2).$$

Jadi, model matematis masalah adalah sebagai berikut

$$\text{maks. } Z = 10.000 x_1 + 3.000 x_2 + 18.000 x_3$$

d.s

$$50.000x_1 + 25.000x_2 + 200.000x_3 \leq 100.000.000$$

$$50.000x_1 \leq (0,25)(50.000x_1 + 25.000 x_2 + 200.000x_3)$$

$$x_2 \geq 3 x_1$$

$$x_3 \leq 250$$

$$200.000 x_3 \geq (0,50)(50.000 x_1 + 25.000 x_2)$$

dengan

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Contoh 3* (Masalah Pemuatan Kargo)

Perusahaan distributor Y mendistribusikan 3 produk (sebut P1, P2, dan P3) ke beberapa tempat pemasaran M. Perusahaan tersebut merencanakan pengiriman produknya ke M menggunakan kendaraan pengangkut (sebutlah truk) Dari observasi sebelumnya diperoleh bahwa tidak ada batasan permintaan produk yang dapat dijual di pasar M, sehingga Y bebas untuk mengirim ketiga produk berapa pun banyaknya. Setiap truk mempunyai kapasitasnya terbatas, ruang 20 meter kubik dan 8.000 kilogram produk.

Volume dan berat tiap produk diberikan pada tabel berikut:

Tabel 1.2.  
Volume dan berat tiap produk

Produk 1	volume (m <sup>3</sup> )	berat (kg)
P1	2	5
P2	4	15
P3	1	2

Satuan keuntungan untuk tiap produk masing-masing adalah Rp. 5.000, Rp. 1.200, dan Rp. 3.000.

Masalahnya adalah bagaimana kita harus menentukan banyaknya tiap produk yang dikirim, sedemikian sehingga memaksimalkan keuntungan dan memenuhi persyaratan kapasitas alat angkut yang digunakan.

*Penyelesaian :*

Memaksimalkan keuntungan, artinya memaksimalkan total keuntungan per pemuatan di dalam truk. Peubah keputusan adalah banyaknya tiap produk yang dikirimkan, dan kendalanya harus memperhatikan batasan kapasitas truk, yaitu volume dan berat.

Kita misalkan,  $x_1$  = banyaknya produk P1 yang akan dimuat

$x_2$  = banyaknya produk P2 yang akan dimuat

$x_3$  = banyaknya produk P3 yang akan dimuat.

Keuntungan yang diperoleh adalah  $5.000x_1 + 1.200x_2 + 3.000x_3$ ,

Kita perhatikan persyaratan kapasitas truk:

(i) volume:

Setiap produk P1 memerlukan ruang bervolume  $2\text{m}^3$ . Sehingga jika dikirim  $x_1$  buah P1 untuk dimuat di truk memerlukan ruang  $2x_1$ . Dengan cara yang sama, untuk P2 memerlukan ruang  $4x_2$ , dan P3 memerlukan  $1x_3$ .

Jadi apabila dikirim  $x_1$  buah P1,  $x_2$  buah P2, dan  $x_3$  buah P3 diperlukan ruang sebesar  $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ , yang harus lebih kecil atau sama dengan ruang yang tersedia yaitu  $20$  (m<sup>3</sup>).

(ii) berat:

Apabila dimuat sebanyak  $x_1$  buah P1,  $x_2$  buah P2, dan  $x_3$  buah P3, total beratnya adalah  $5x_1 + 15x_2 + 2x_3$  yang tidak boleh melebihi kapasitas truk yaitu 8 (ton).

Jadi, model matematis masalahnya adalah sebagai berikut:

$$\text{maks. } Z = 5.000x_1 + 1.200x_2 + 3.000x_3$$

d.s

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200$$

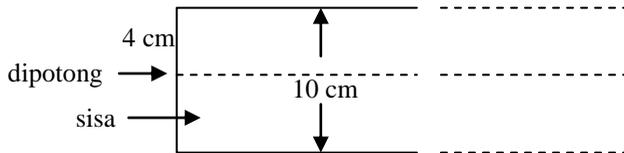
$$5x_1 + 15x_2 + 2x_3 \leq 8$$

dengan

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Contoh 4* (Masalah Pematangan)

Perusahaan pemotongan kertas melayani pembelian kertas gulungan, dengan panjang standar, lebarnya berbeda-beda (sesuai pesanan pembeli). Tersedia sejumlah banyak bahan baku yang digunakan berupa kertas dengan lebar 10 cm. Apabila pembeli memesan kertas dengan lebar 6 cm, maka perusahaan tersebut lebih dulu harus melakukan pemotongan kertas. Sisa kertas dengan lebar 4 cm akan dijual untuk memenuhi pemesanan kertas paling lebar 4 cm (Gambar 1.1). Bila tidak, maka kertas sisa tersebut terpaksa dibuang.



Gambar 1.1.  
Cara pemotongan kertas lebar 4 cm

Dari data pemesanan, diperoleh bahwa banyaknya pesanan untuk kertas lebar 3 cm dan 4 cm masing-masing adalah 100, dan 120 buah pesanan.

Masalah yang dihadapi adalah bagaimana perusahaan tersebut melakukan perencanaan alternatif pemotongan kertas standar, sedemikian

sehingga dapat memenuhi pesanan pembeli dan kertas yang tersisa sesedikit mungkin.

### Penyelesaian

Kita coba dahulu merancang beberapa alternatif pemotongan, dengan lebar kertas sesuai dengan pesanan, yaitu:

Tabel 1.3  
Alternatif pemotongan dan sisa kertas

lebar \ alternatif	1	2	3	banyaknya pesanan
3 cm	0	2	3	100 buah
4 cm	2	1	0	120 buah
sisa	2	0	1	

Dapat Anda lihat pada tabel di atas bahwa apabila kita menggunakan alternatif 1, maka akan diperoleh 2 lembar kertas yang lebarnya 4 cm, dan sisanya adalah lembaran kertas berlebar  $10 - 2(4) = 2$  (cm). Dengan alternatif 2, kita peroleh 2 lembar kertas lebarnya 3 cm dan 1 lembar kertas lebarnya 4 cm, dalam hal ini tidak menghasilkan sisa kertas. Untuk alternatif 3, diperoleh 3 lembar kertas lebar 3 cm, dan menghasilkan sisa kertas berlebar  $10 - 3(3) = 1$  cm.

Dalam masalah ini, peubah keputusannya adalah banyaknya kertas yang dipotong menurut ketiga alternatif pemotongan.

Misal  $x_1$  : banyaknya kertas yang dipotong menggunakan alternatif 1

$x_2$  : banyaknya kertas yang dipotong menggunakan alternatif 2

$x_3$  : banyaknya kertas yang dipotong menggunakan alternatif 3

Yang kita inginkan adalah banyaknya sisa kertas (yang dipotong menggunakan ketiga alternatif) adalah minimum.

Apabila  $x_1$  menyatakan banyaknya kertas yang dipotong menggunakan alternatif 1, maka sisa kertasnya adalah lebar sisa kertas dikalikan  $x_1$  atau  $2x_1$ . Dengan demikian, sisa kertas yang dipotong menggunakan alternatif 2 dan 3 masing-masing adalah  $0 \cdot x_2$  dan  $1x_3$ . Jadi total kertas sisa adalah  $2x_1 + 0 \cdot x_2 + 1x_3$ .

Sedangkan dari persyaratan:

- (i) Banyaknya pesanan kertas lebar 3 cm (yang harus dipenuhi) adalah jumlah banyaknya kertas yang diperoleh menggunakan ketiga alternatif, yaitu :  $0.x_1 + 2x_2 + 3x_3$ .  
Jumlah kertas berlebar 3 cm ini harus memenuhi sebanyak 100 buah.  
Jadi  $0.x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 100$ .

Dengan cara yang sama, untuk persyaratan:

- (ii) Banyaknya pesanan kertas lebar 4 cm untuk memenuhi pesanan sebanyak 120 buah.  
 $2x_1 + 1x_2 + 0.x_3 \geq 120$ .

Jadi, model matematis dari masalah tersebut adalah sebagai berikut:

$$\text{min. } 2x_1 + 0.x_2 + 1x_3$$

d.s

$$0.x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 100$$

$$2x_1 + 1x_2 + 0.x_3 \geq 120$$

dan

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Di samping keempat contoh masalah yang diberikan di atas, masih terdapat banyak sekali contoh masalah lain yang dapat memberikan gambaran kepada Anda bidang penggunaan model program linear. Beberapa di antaranya akan Anda jumpai pada Latihan di bawah ini.

Setelah Anda mempelajari 4 (empat) contoh masalah serta penurunan model program linearnya, cobalah Anda mengerjakan Latihan di bawah ini.



## LATIHAN

---

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Bacalah baik-baik masalah yang diberikan di bawah ini.

- 1) Masalah perencanaan produksi

Suatu mesin produksi bekerja 45 jam/minggu. Mesin ini digunakan untuk memproduksi 3 produk, sebut P1, P2, dan P3. Kemampuan produksi mesin memproduksi P1 adalah sebanyak 50 buah/jam, memproduksi P2 sebanyak 25 buah per jam, dan memproduksi P3

sebanyak 75 buah /jam. Dari hasil observasi bagian pemasaran, diperoleh bahwa permintaan P1 sebanyak 1000 buah/minggu, permintaan P2 sebanyak 500 buah /minggu, dan permintaan maksimum P3 sebanyak 1500 buah /minggu. Satuan keuntungan yang diperoleh dari P1 adalah 4, P2 adalah 12, dan P3 adalah 3 (semuanya dalam ribuan rupiah).

Bagaimana perancangan distribusi produksi mingguan untuk setiap produk agar memberikan keuntungan maksimum?

2) Masalah pengaturan gizi makanan (*Diet problem*)

Seorang penanggung jawab penyedia makanan anak sekolah setiap harinya mempersiapkan menu makan siang di suatu sekolah. Setiap harinya digunakan beberapa makanan dasar yang dikombinasikan untuk dimasak. Penanggung jawab tersebut bertanggung jawab untuk menjamin agar siswa memenuhi kebutuhan minimum dari nutrisi yang diperlukan. Dalam hal ini, kebutuhan minimal kandungan nutrisi yang diperlukan untuk makan siang adalah 10 unit protein, 7 unit vitamin A dan 8 unit zat besi.

Digunakan dua makanan dasar dalam penyusunan menu makan siang (sebut F1 dan F2). Setiap 1 gram) F1 mengandung 2 unit protein, 2 unit vitamin A, dan  $1\frac{1}{3}$  unit zat besi. Setiap 1 gram F2 mengandung 2 unit protein, 1 unit vitamin A, dan 2 unit zat besi.

Harga per gram F1 adalah Rp. 300 dan per gram F2 adalah Rp. 400.

Masalah yang dihadapi: bagaimana menentukan campuran 2 makanan ke dalam makanan siang sedemikian sehingga setiap siswa akan menerima sejumlah nutrisi yang diperlukan dan biaya makan siang yang minimum.

Untuk kedua masalah di atas:

- (i) tetapkan dahulu peubah keputusannya, dan selanjutnya;
- (ii) turunkan model program linearnya.

*Petunjuk Jawaban Latihan*

- 1) Dalam masalah ini peubah keputusannya adalah banyaknya P1, P2, dan P3 yang akan diproduksi setiap minggu.

Jadi, selanjutnya kita misalkan  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ , masing-masing menyatakan banyaknya sebanyak P1, P2, dan P3 yang akan diproduksi/minggu.

Total keuntungan yang diperoleh dengan memproduksi sebanyak  $x_1$  buah P1,  $x_2$  buah P2 dan  $x_3$  buah P3 adalah  $4x_1 + 12x_2 + 3x_3$ . Kita inginkan

agar total keuntungan ini maksimum, jadi kita harus memaksimumkan  $4x_1 + 12x_2 + 3x_3$  (dalam ribuan rupiah).

Selanjutnya, kita perhatikan persyaratan yang harus dipenuhi, yaitu

- (i) Banyaknya permintaan untuk setiap produk  
Untuk P1,  $x_1 \leq 1000$ , untuk P2,  $x_2 \leq 500$ , dan untuk P3,  $x_3 \leq 1500$ .
- (ii) Kapasitas produksi setiap mesin dan jam kerja mesin.

Dalam 1 jam, mesin dapat memproduksi sebanyak 50 buah P1. Waktu yang diperlukan untuk memproduksi  $x_1$  buah P1 adalah  $x_1/50$  (dalam jam). Dengan cara yang sama, diperoleh bahwa waktu untuk memproduksi  $x_2$  adalah  $x_2/25$  (dalam jam), dan untuk memproduksi  $x_3$  diperlukan waktu  $x_3/75$ . Sedangkan, kemampuan kerja mesin 45 jam/minggu. Jadi hubungan antara kemampuan produksi mesin dan jam kerja mesin adalah  $x_1/50 + x_2/25 + x_3/75 \leq 45$

Dengan demikian maka model matematis masalah adalah sebagai berikut:

$$\text{maks. } Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3.$$

d.s

$$\begin{aligned} x_1 & \leq 1000 \\ x_2 & \leq 500 \\ x_3 & \leq 1500. \\ x_1/50 + x_2/25 + x_3/75 & \leq 45 \end{aligned}$$

dan

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 2) Di sini peubah keputusannya adalah banyaknya F1 (dalam gram) dan banyaknya F2(dalam gram) yang akan digunakan.

Misal,  $x_1$ = banyaknya (dalam gram) F1

$x_2$ = banyaknya (dalam gram) F2

Biaya yang diperlukan adalah  $3x_1 + 4x_2$

Persyaratan kandungan nutrisi:

- (i) Protein :  $2x_1 + 2x_2 \geq 10$  atau  $x_1 + x_2 \geq 5$
- (ii) Vitamin A :  $2x_1 + x_2 \geq 7$
- (iii) Zat besi :  $\frac{4}{3}x_1 + 2x_2 \geq 8$  atau  $2x_1 + 3x_2 \geq 12$

Jadi, model matematis masalahnya adalah sebagai berikut:

$$\text{min. } 3x_1 + 4x_2$$

d.s

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

dan

$$x_1, x_2 \geq 0$$



## RANGKUMAN

Anda telah mempelajari bagaimana menyajikan masalah ke dalam model Program Linear. Sebelum menyajikannya, Anda harus memperhatikan dengan seksama masalah yang dihadapi. Lakukan identifikasi dahulu, manakah peubah-peubah keputusan dalam masalah, dan berikan nama-namanya (misalkan,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Periksa juga, banyaknya peubah keputusannya. Selanjutnya, Anda periksa apakah yang menjadi tujuan penyelesaian masalah, memaksimumkan atau meminimumkan. Di sini, cobalah Anda turunkan fungsi objektifnya. Kemudian, lakukan perincian persyaratan-persyaratan (atau kendala-kendala) dalam masalah. Dalam pemeriksaan ini, sekaligus Anda periksa bagaimanakah hubungan antar peubah-peubah keputusannya. Di sini, kita harus menentukan jenis hubungan dalam setiap persyaratan (apakah ' $\geq$ ', ' $\leq$ ', atukah ' $=$ '). Apabila Anda telah menurunkan fungsi objektif dan sistem persyaratan dalam masalah, lakukanlah pemeriksaan ulang, benarkah model program linear yang diperoleh benar-benar menggambarkan masalah yang Anda hadapi.

Proses penurunan model program linear dari masalah yang Anda hadapi haruslah dilakukan dengan seksama. Tentu saja proses ini tidak secara cepat dapat Anda lakukan, karena hal ini memerlukan pengalaman. Oleh karena itu, mulailah dari masalah yang paling sederhana! Setelah beberapa kali Anda dapat menurunkan model program linear dari masalah yang Anda hadapi.

Sebagai pengalaman awal, cobalah Anda mencari literatur-literatur yang berhubungan dengan program linear. Bacalah berbagai contoh penurunan model program linear. Dari membaca contoh masalah ataupun menghadapi sendiri masalah, Anda akan memperoleh tambahan pengalaman, dan akhirnya Anda memahami sekaligus menghayati bagaimana menurunkan model program linear dari masalah.

Apabila Anda telah memahami semua yang telah dijelaskan pada Kegiatan Belajar 1 ini, Anda dapat mengerjakan Tes Formatif 1 di bawah ini.



## TES FORMATIF 1 \_\_\_\_\_

Petunjuk: Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 10, berikanlah jawab

- A. Jika pernyataan 1 dan 2 benar
- B. Jika pernyataan 1 dan 3 benar
- C. Jika pernyataan 2 dan 3 benar
- D. Jika pernyataan 1, 2, dan 3 benar

Untuk soal nomor 1 s/d 4, bacalah dengan seksama masalah berikut ini:

Sebuah pesawat terbang melayani rute penerbangan yang diminati oleh banyak calon penumpang. Kapasitas tempat duduk pesawat tersebut tidak lebih dari 48 orang dan kapasitas bagasi penumpang tidak lebih dari 1440 kg. Terdapat duduk penumpang terdiri dari kelas bisnis dan kelas ekonomi. Harga tiket kelas bisnis dan kelas ekonomi masing-masing adalah Rp. 1.000.000 dan Rp. 500.000. Akan ditentukan banyaknya tempat duduk di setiap kelas agar penjualan tiket memberikan hasil sebanyak-banyaknya.

- 1) Periksalah ketiga pernyataan berikut.
  - 1. Dalam masalah tersebut dianggap bahwa tiket kelas bisnis dan kelas ekonomi selalu terjual habis.
  - 2. Peubah keputusan dari masalah tersebut adalah banyaknya tempat duduk kelas bisnis dan kelas ekonomi.
  - 3. Banyaknya tempat duduk kelas bisnis maupun kelas ekonomi merupakan bilangan positif.
- 2) Periksalah ketiga pernyataan berikut.
  - 1. Masalah di atas bertujuan untuk meminimumkan fungsi objektif.
  - 2. Maksimum kapasitas tempat duduk merupakan persyaratan dalam masalah.
  - 3. Maksimum bagasi penumpang merupakan persyaratan dalam masalah.

- 3) Apabila  $x_1$  dan  $x_2$  masing-masing adalah banyaknya tempat duduk kelas bisnis dan kelas ekonomi, maka ....
1. Persyaratan yang berhubungan dengan kapasitas tempat duduk adalah  $x_1 + x_2 \leq 48$
  2. Persyaratan yang berhubungan dengan kapasitas bagasi penumpang adalah  $60x_1 + 20x_2 \leq 1440$
  3. Fungsi objektifnya adalah  $Z = 500.000 x_1 + 1.000.000 x_2$
- 4) Apabila  $x_1$  dan  $x_2$  masing-masing adalah banyaknya tempat duduk kelas bisnis dan kelas ekonomi, maka model program linear dari masalah tersebut adalah ....
1. maks.  $Z = 1.000.000 x_1 + 500.000 x_2$   
d.s  

$$x_1 + x_2 \leq 48$$

$$60x_1 + 20x_2 \leq 1440$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$
  2. min.  $-1.000.000 x_1 - 500.000 x_2$   
d.s  

$$x_1 + x_2 \leq 48$$

$$60x_1 + 20x_2 \leq 1440$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
  3. maks.  $48x_1 + 1440 x_2$   
d.s  

$$x_1 + x_2 \leq 1.000.000$$

$$60x_1 + 20x_2 \leq 500.000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Untuk Soal Nomor 5 s/d 10, bacalah dengan seksama masalah berikut ini.

Seorang peternak akan membuat makanan untuk beberapa ayam ternaknya. Makanan ayam yang dibuat merupakan campuran dari beras dan jagung yang ditumbuk. Setiap kg beras mengandung 100 gram karbohidrat dan 20 gram vitamin B. Sedangkan setiap kg jagung mengandung 50 gram karbohidrat dan 30 gram vitamin B. Untuk setiap harinya, ayam ternaknya memerlukan paling tidak 200 gram karbohidrat dan 60 gram vitamin B. Apabila harga per kg beras dan kg jagung masing-masing adalah Rp. 3.500 dan Rp. 2.000, maka peternak tersebut ingin menentukan berapa kg beras dan jagung harus dibeli setiap harinya agar biaya pembeliannya sesedikit mungkin tetapi tetap memenuhi kebutuhan nutrisi ayam ternaknya.

- 5) Pada masalah peternak tersebut ....
1. Peubah keputusannya adalah banyaknya beras dan jagung yang dibeli setiap harinya
  2. Tujuan penyelesaiannya adalah meminimumkan biaya pembelian beras dan jagung
  3. Dianggap bahwa nutrisi yang diperlukan ayam hanya karbohidrat dan vitamin B
- 6) Informasi pada masalah tersebut akan lebih mudah disajikan dalam tabel berikut ....

1.

bahan baku (kg) kandungan nutrisi (gr)	beras	jagung	kebutuhan minimum (gr)
	karbohidrat	100	50
vitamin B	20	30	60

2.

kandungan nutrisi (gr) bahan baku (kg)	karbohidrat	vitamin B
	beras	50
jagung	20	30
kebutuhan minimum (gr)	200	60

3.

bahan baku (kg) kandungan nutrisi (gr)	beras	jagung	kebutuhan minimum (gr)
	karbohidrat	100	20
vitamin B	50	30	60

- 7) Apabila fungsi objektifnya adalah  $Z$ , maka tujuan penyelesaian masalahnya adalah ....
1. meminimumkan  $Z$
  2. memaksimumkan  $Z$
  3. memaksimumkan  $-Z$

Untuk Soal No. 8, 9, 10:

Apabila  $x_1$  = banyaknya (dalam kg) beras yang dibeli,  $x_2$  = banyaknya (dalam kg) jagung yang dibeli, maka ....

- 8) 1. Setiap beras mengandung  $100x_1$  (gram) karbohidrat dan  $20x_1$  (gram) vitamin B.  
 2. Setiap  $x_1$  beras mengandung  $100x_1$  (gram) karbohidrat dan  $20x_1$  (gram) vitamin B.  
 3. Setiap  $x_1$  beras mengandung  $100x_1$  (gram) karbohidrat dan  $50x_1$  (gram) vitamin B.
- 9) Periksalah ketiga pernyataan berikut ini.
1. Persyaratan kebutuhan minimum karbohidrat :  $100x_1 + 50x_2 \geq 200$ .
  2. Persyaratan kebutuhan minimum vitamin B :  $20x_1 + 30x_2 \geq 60$ .
  3. Fungsi objektifnya :  $Z = 3500x_1 + 2000x_2$ .

10) Model program linear masalah tersebut adalah ....

1. Min  $3500x_1 + 2000x_2$   
 d.s  
 $100x_1 + 50x_2 \geq 200$   
 $20x_1 + 30x_2 \geq 60$   
 $x_1, x_2 \geq 0$
2. Min  $3500x_1 + 2000x_2$   
 d.s  
 $100x_1 + 20x_2 \geq 200$   
 $50x_1 + 30x_2 \geq 60$   
 $x_1, x_2 \geq 0$
3. Maks  $-3500x_1 - 2000x_2$   
 d.s  
 $100x_1 + 50x_2 \geq 200$   
 $20x_1 + 30x_2 \geq 60$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan : 90 - 100% = baik sekali

80 - 89% = baik

70 - 79% = cukup

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

## KEGIATAN BELAJAR 2

## Daerah Penyelesaian Program Linear

Apabila kita perhatikan kembali persyaratan pada model program linear yang telah kita pelajari pada Kegiatan Belajar 1, persyaratan tersebut berupa pertidaksamaan linear. Setiap pertidaksamaan tersebut membentuk suatu daerah yang *memenuhi* dan daerah lain yang *tidak memenuhi*. Gabungan dari semua persyaratan (sistem persyaratan) tersebut membentuk daerah layak penyelesaian (atau secara singkat disebut daerah penyelesaian) masalah program linear.

Pada Kegiatan Belajar 2 ini akan dipelajari pengertian daerah penyelesaian masalah program linear. Namun sebelum mempelajarinya, Anda akan mempelajari dahulu persamaan dan pertaksamaan linear. Hal ini karena untuk dapat menggambarkan daerah tersebut, kita harus menggambarkan dahulu persamaan linear yang membentuknya, baru kemudian kita dapat menggambarkan daerah yang memenuhi pertaksamaan linear tersebut.

## PERSAMAAN LINEAR DAN PERTAKSAMAAN LINEAR

## 1. Persamaan Linear

Bentuk umum persamaan linear dengan  $n$  buah peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah sebagai berikut:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad \dots (9)$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dan  $b$  merupakan tetapan real.

Dalam hal  $n=2$ , persamaan linearnya berupa

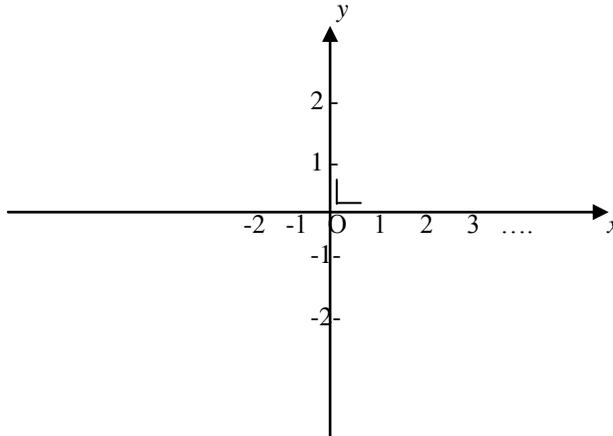
$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad \dots (10)$$

yang sering juga dinyatakan sebagai

$$a_1x + a_2y = b \quad \dots (10a)$$

Dalam hal ini,  $x$  menggantikan  $x_1$  dan  $y$  menggantikan  $x_2$ .

Dalam hal banyaknya peubah bebasnya hanya 2 (yaitu  $x$  dan  $y$ ), kita dapat menggambarannya pada bidang datar dengan menggunakan sistem Koordinat Cartesius, dengan sumbu datar  $x$  dan sumbu tegak  $y$ :



Gambar 1.2.  
Sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  dalam sistem koordinat Cartesius

Posisi suatu titik pada bidang datar dinyatakan koordinatnya, yaitu  $(x,y)$ , dengan  $x$  disebut dengan absis dan  $y$  disebut dengan ordinat.

Dapat kita perhatikan bahwa  $x$  merupakan bilangan real, atau dikatakan bahwa  $x \in \mathbb{R}$ . Demikian juga  $y \in \mathbb{R}$ . Dengan demikian maka  $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ . Dalam hal ini  $(x,y)$  tersebut merupakan pasangan berturut, dengan  $x \in \mathbb{R}$  dan  $y \in \mathbb{R}$ .

Dari peninjauan geometris, kita dapat menyatakan bahwa semua titik  $(x,y)$  pada bidang datar merupakan anggota dari  $\mathbb{R}^2$ . Dalam hal ini, pasangan  $(x,y)$  merupakan titik pada bidang datar.

Dalam penulisan lain, suatu titik tidak dinyatakan sebagai  $(x,y)$ , tetapi dinyatakan sebagai  $(x_1, x_2)$ , yang dalam hal ini  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dengan penulisan demikian, secara lebih luas kita dapat menyatakan titik sebagai  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dengan  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

*Contoh 5*

Cobalah perhatikan persyaratan (ii) dalam model matematis (6) pada Kegiatan Belajar 1 :

$$x + 3y \leq 9$$

Persamaan linearnya adalah:

$$x + 3y = 9 \quad \dots (11)$$

Titik-titik yang terletak pada sumbu datar mempunyai nilai ordinat 0, atau dapat dinyatakan sebagai  $(x,0)$ . Sedangkan titik-titik yang terletak pada sumbu tegak mempunyai nilai absis 0, atau dapat dinyatakan sebagai  $(0,y)$ .

Titik O merupakan titik asal yang berkoordinat  $(0,0)$  atau  $x=0$  dan  $y=0$ . Pada sumbu  $x$ , titik O ini membagi sumbu dalam 2 daerah nilai, di sebelah kirinya berupa titik-titik bernilai negatif dan di sebelah kanannya berupa titik-titik bernilai positif.

Selanjutnya, bagaimanakah menggambarkan persamaan  $x + 3y = 9$  pada bidang datar dalam sistem koordinat Cartesius?

Kita dapat menggambarkan beberapa titik-titik berupa pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi garis tersebut. Ambil misalnya untuk  $x = 1$ ,  $y = (9-1)/3 = 2\frac{2}{3}$ , untuk  $x = 3$ ,  $y = (9-3)/3 = 2$ , dan seterusnya. Apabila titik-titik tersebut telah digambarkan, maka titik tersebut membentuk garis lurus.

Oleh karena itu, untuk kita dapat mengambil 2(dua) titik saja dan selanjutnya kita buat garis lurus yang melalui kedua titik tersebut.

Dalam hal ini, untuk mudahnya kita ambil saja 1 titik pada sumbu  $x$  yaitu  $(x,0)$  dan 1 titik pada sumbu- $y$  yaitu  $(0,y)$ .

Pada sumbu- $x$  : ambil titik  $(x,0)$ .

untuk  $y = 0$ , dengan melakukan substitusi ke dalam (11), kita peroleh

$$x + 3(0) = 9$$

yang memberikan  $x = 9$ . Jadi titik yang diperoleh adalah  $(9,0)$ .

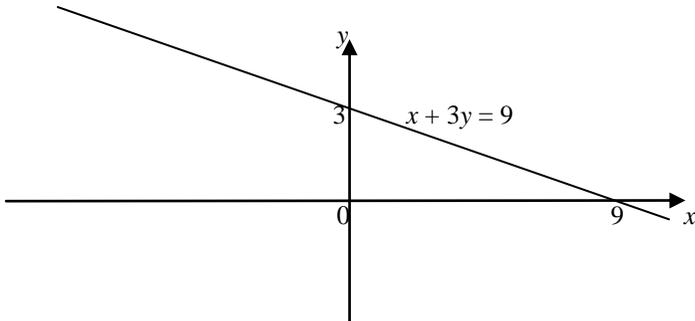
Pada sumbu- $y$  : ambil titik  $(0,y)$

untuk  $x = 0$ , dengan melakukan substitusi ke dalam (11), kita peroleh

$$0 + 3y = 9$$

yang memberikan  $y = 3$ . Jadi titik yang diperoleh adalah  $(0,3)$ .

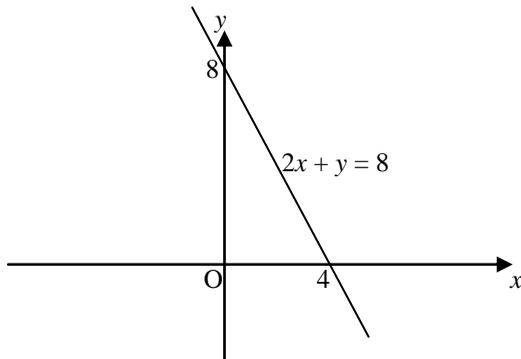
Selanjutnya kita buat garis lurus yang melalui  $(9,0)$  dan  $(0,3)$ , seperti yang diberikan pada Gambar 1.3 di bawah:



Gambar 1.3.  
Grafik garis :  $x + 3y = 9$

Coba kita perhatikan dengan seksama Gambar 1.3 tersebut. Dapat kita lihat bahwa garis  $x + y = 9$  membagi bidang ke dalam 2(dua) daerah, yaitu bidang sebelah kiri-bawah dan bidang sebelah kiri-atas. Dalam hal ini, dikatakan bahwa garis lurus pada bidang datar akan membagi bidang ke dalam 2(dua) buah  $\frac{1}{2}$ -bidang.

Dengan menggunakan cara yang sama, persamaan linear dari (ii) pada (5) yaitu  $2x + y = 8$ , dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.4.  
Grafik  $2x + y = 8$

Dapat Anda perhatikan bahwa suatu persamaan linear  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  merupakan suatu garis lurus pada bidang atau ruang dimensi 2. Garis lurus ini membagi bidang ke dalam 2 buah bidang yang saling asing. Kedua bidang tersebut dinamakan dengan  $\frac{1}{2}$ -bidang.

Dapat diperluas lagi bahwa suatu persamaan linear  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$  merupakan suatu bidang datar pada ruang dimensi 3. Secara lebih luas lagi, suatu persamaan linear  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$  merupakan hiperbidang (*hyperplane*) pada ruang dimensi  $n$ .

### Pertaksamaan Linear

Bentuk umum pertaksamaan linear dengan  $n$  buah peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah sbb:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad \dots (12)$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dan  $b$  merupakan tetapan real.

Tanda pertaksamaan  $\leq$ , dapat pula berupa  $<$ ,  $\geq$ , ataupun  $>$ .

Dalam hal  $n = 2$ , pertaksamaan linearnya berupa

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

atau dinyatakan pula sebagai

$$a_1x + a_2y \leq b$$

### Contoh 6

Sekarang kita perhatikan pertaksamaan

$$x + 3y \leq 9 \quad \dots (13)$$

Persamaan pembentuknya berupa  $x + 3y = 9$  telah kita gambarkan pada Gambar 1.4 di atas.

Telah kita perhatikan sebelumnya bahwa semua pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi persamaan tersebut terletak pada garis yang dibentuk oleh persamaan  $x + 3y = 9$ .

Bagaimanakah halnya dengan gambar pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$  ?

Menyatakan apakah pertaksamaan tersebut?

Coba kita lihat dengan seksama pertaksamaan (13) di atas!

Di sini terdapat:

- (i) pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi pertaksamaan  $x + 3y < 9$   
Misal,  $(1,2)$  atau  $x = 1$  dan  $y = 2$  memenuhi pertaksamaan tersebut, karena  $1 + 3(2) < 9$  (benar).  
Coba Anda cari pasangan  $(x,y)$  yang lain yang memenuhi pertaksamaan!
- (ii) pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi persamaan  $x + 3y = 9$ .

Misal, (3,2) atau  $x = 3$  dan  $y = 2$  memenuhi persamaan tersebut, karena

$$3 + 2(2) = 9 \text{ (benar).}$$

(iii) pasangan  $(x,y)$  yang tidak memenuhi pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$ .

Dalam hal ini, pasangan  $(x,y)$  ini tidak memenuhi pertaksamaan  $x + 3y < 9$  dan tidak pula memenuhi persamaan  $x + 3y = 9$ .

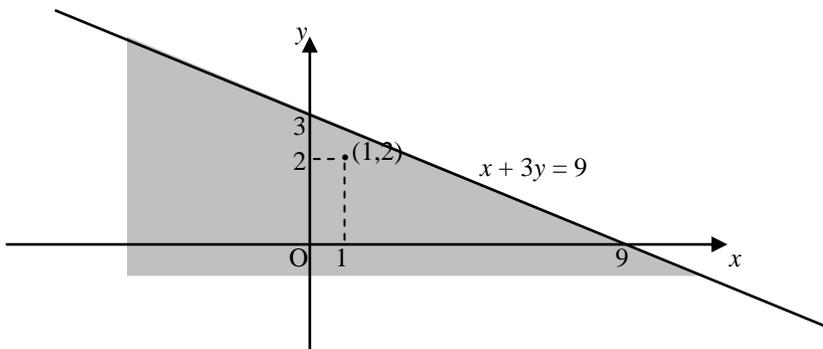
Contoh, (4,2) atau  $x = 4$  dan  $y = 2$  tidak memenuhi pertaksamaan tersebut karena  $4 + 3(2) < 9$  (salah).

Coba Anda cari pasangan  $(x,y)$  yang lain yang memenuhi pertaksamaan tersebut!

Dengan menggambar pada bidang datar menggunakan koordinat Cartesius, kita akan lebih mudah  $(x,y)$  yang memenuhi  $x + 3y \leq 9$ .

Telah kita ketahui sebelumnya bahwa pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi persamaan  $x + 3y = 9$  adalah  $(x,y)$  yang terletak pada garis lurus  $x + 3y = 9$  (Gambar 1. 5).

Selanjutnya pada Gambar 1.5 tersebut kita letakkan titik (1,2).



Gambar 1.5  
Daerah yang memenuhi :  $x + 3y \leq 9$

Kita lihat bahwa titik (1,2) yang memenuhi pertaksamaan  $x + 3y < 9$  terletak sebelah kiri-bawah garis  $x + 3y = 9$ .

Dapat kita periksa bahwa titik-titik lain yang memenuhi pertaksamaan  $x + 3y = 9$  terletak pada pihak atau  $\frac{1}{2}$ -bidang yang sama dengan titik (1,2).

Pada Gambar 1.4,  $\frac{1}{2}$ -bidang yang memenuhi pertaksamaan  $3 + 3y < 9$  dinyatakan sebagai  $\frac{1}{2}$ -bidang yang diarsir.

Sekarang kita kembali kepada pertanyaan sebelumnya, yaitu:

Menyatakan apakah pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$  tersebut?

Setelah kita perhatikan Gambar 1.5 di atas, kita dapat mengetahui bahwa Pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$  menyatakan titik atau pasangan  $(x,y)$  yang memenuhi  $x + 3y \leq 9$  yaitu titik yang terletak pada daerah yang memenuhi pertaksamaan tersebut.

Pada Gambar 1.5 di atas, daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$  adalah daerah yang diarsir, termasuk garis lurus  $x + 3y = 9$  itu sendiri.

*Catatan:*

Untuk memeriksa daerah mana yang memenuhi pertaksamaan, kita mengambil saja titik asal O  $(0,0)$  yang dalam hal ini  $x=0$  dan  $y=0$ .

Kita lihat pada Gambar 1.2 di atas, titik  $(0,0)$  terletak pada  $\frac{1}{2}$ -bidang di sebelah kiri-bawah.

Karena, apabila  $(0,0)$  kita substitusikan ke pertaksamaan  $x + 3y \leq 9$ , maka akan memberikan  $0 + 3(0) \leq 9$  atau  $0 \leq 9$  (benar)

Oleh karena memang benar bahwa  $0 \leq 9$ , maka daerah yang mengandung  $(0,0)$  yaitu daerah di sebelah kiri-bawah merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan.

*Contoh 7*

Kita akan menentukan daerah yang memenuhi pertaksamaan (iii) pada (6), yaitu:

$$2x + y \leq 8$$

Dengan cara seperti yang telah dijelaskan pada Contoh 6, kita lakukan:

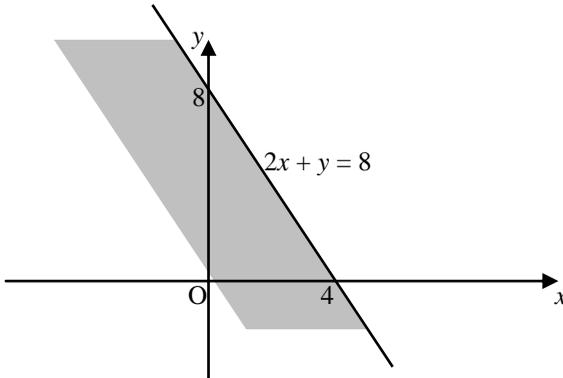
- (i) buat dahulu garis lurus  $2x + y = 8$ .
- (ii) tentukan daerah yang memenuhi  $2x + y \leq 8$ .

Ambil titik  $(0,0)$ . Kita tahu bahwa titik  $(0,0)$  tidak dilalui oleh garis tersebut. Kita periksa apakah  $(0,0)$  terletak pada daerah yang memenuhi atau pada daerah yang tidak memenuhi pertaksamaan.

Substitusikan  $(0,0)$  ke pertaksamaan  $2x + y \leq 8$ :

$$2(0) + 0 \leq 8 \text{ (benar).}$$

Jadi daerah  $\frac{1}{2}$ -bidang yang mengandung  $(0,0)$  yaitu sebelah kiri-bawah merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan (Gambar 1. 6)

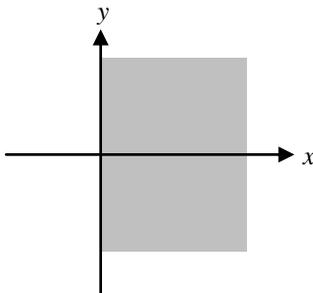


Gambar 1.6  
Daerah yang memenuhi  $2x + y \leq 8$

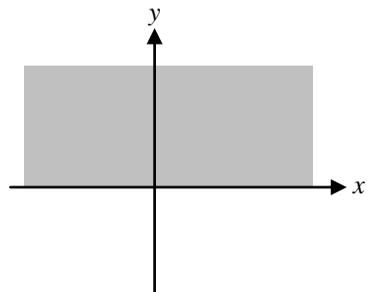
Dapat dilihat pada Gambar 1.6 di atas,  $\frac{1}{2}$ -bidang yang diarsir (daerah sebelah kiri-bawah) termasuk garis  $2x + y = 8$  merupakan daerah yang memenuhi.

*Contoh 8*

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x \geq 0$ , dan juga  $y \geq 0$ , seperti diberikan oleh Gambar 1.7a dan Gambar 1.7b berikut ini.



Gambar 1.7a  
Daerah yang memenuhi  $x \geq 0$



Gambar 1.7b  
Daerah yang memenuhi  $y \geq 0$

Perhatikan bahwa titik  $(0,0)$  dilewati oleh garis  $y = 0$  (sumbu- $x$ ) dan juga garis  $x = 0$  (sumbu- $y$ ). Jadi, untuk menentukan daerah yang memenuhi kita gunakan titik lain.

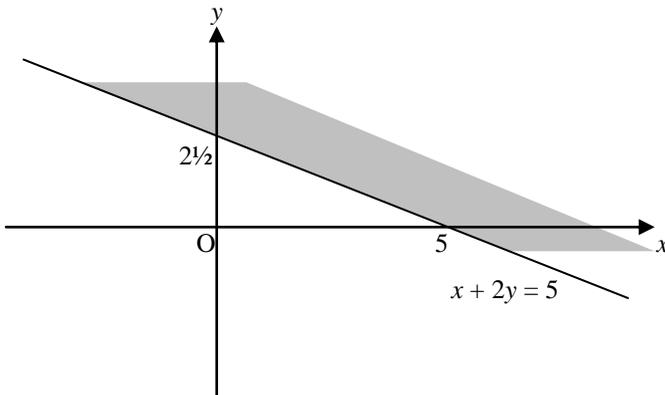
Misalnya pada Gambar 1.7a, titik  $(1,0)$  memenuhi pertaksamaan  $x \geq 0$ . Dengan demikian maka  $\frac{1}{2}$ -bidang yang mengandung  $(1,0)$ , termasuk garis  $x = 0$  (sumbu- $y$ ) merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x \geq 0$ .

### Contoh 9

Kita lihat soal nomor pada Latihan dalam Kegiatan Belajar 1. Kita tentukan daerah yang memenuhi pertaksamaan

$$x + 2y \geq 5$$

Dengan cara seperti yang sama akan diperoleh daerah yang memenuhi merupakan daerah yang diarsir pada Gambar 1.8.



Gambar 1.8

Daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x + 2y \geq 5$

Daerah yang diarsir termasuk garis  $x + 2y = 5$ , merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x + 2y \geq 5$ .

Kita perhatikan bahwa apabila kita mengambil titik  $(0,0)$ , maka substitusi ke dalam pertaksamaan tersebut memberikan  $0 + 2(0) > 5$  (tidak benar). Artinya  $\frac{1}{2}$ -bidang yang mengandung  $(0,0)$  bukan daerah yang memenuhi. Jadi, daerah yang memenuhi adalah  $\frac{1}{2}$ -bidang yang tidak mengandung  $(0,0)$ .

Dapat Anda perhatikan bahwa pertaksamaan linear  $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$  akan membagi bidang ke dalam 2 daerah, yaitu sebuah  $\frac{1}{2}$ -bidang yang memenuhi pertaksamaan dan  $\frac{1}{2}$ -bidang lain yang tidak memenuhi pertaksamaan.

## 2. Daerah Penyelesaian dan Sistem Pertaksamaan

Pada suatu model pemrograman linear, seperti yang telah diperlihatkan pada Kegiatan Belajar 1, persyaratan yang diberikan bukan hanya sebuah pertaksamaan saja, tetapi lebih dari sebuah pertaksamaan. Semua pertaksamaan yang harus dipenuhi oleh suatu model program linear dapat dipandang sebagai satu *sistem pertaksamaan*.

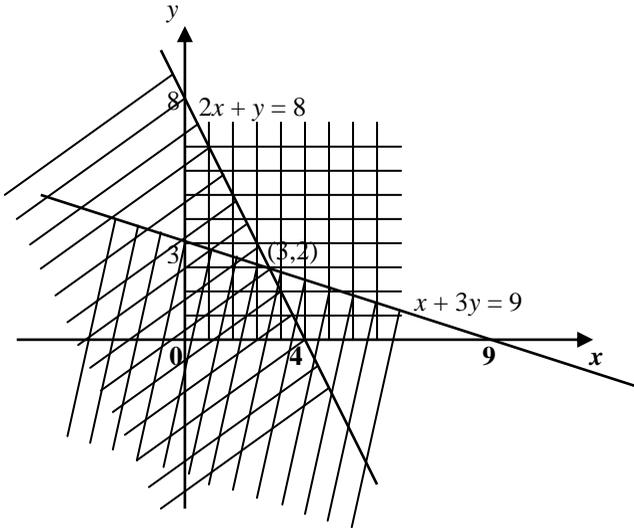
Telah kita ketahui bahwa suatu pertidaksamaan menentukan (membentuk) daerah (himpunan titik-titik) yang memenuhi pertaksamaan tersebut. Suatu sistem pertaksamaan pada masalah pemrograman linear membentuk daerah yang disebut dengan *daerah layak* dari masalah. Daerah layak tersebut merupakan himpunan titik-titik yang dapat dipilih (dengan kriteria tertentu!) menjadi penyelesaian masalah pemrograman linear tersebut. Dengan demikian maka daerah layak tersebut sering dinamakan juga dengan *daerah penyelesaian* masalah.

### Contoh 10

Kita tuliskan lagi persyaratan (ii), (iii), dan (iv) pada (5), sebagai berikut.

$$\begin{aligned}x + 3y &\leq 9 \\2x + y &\leq 8 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

Sistem persyaratan tersebut apabila digambarkan merupakan gabungan dari Gambar 1.5, Gambar 1.6, dan Gambar 1.7a dan 1.7b, seperti diperlihatkan oleh Gambar 1.9 di bawah ini.



Gambar 1.9  
Daerah penyelesaian sistem persyaratan

Pada Gambar 1.9 di atas, titik potong antara garis  $x + 3y = 9$  dan garis  $2x + y = 8$ , dapat diperoleh sebagai berikut:

$$x + 3y = 9 \quad \dots (14)$$

$$2x + y = 8 \quad \dots (15)$$

$$2 \times \text{persamaan (14), memberikan } 2x + 6y = 18 \quad \dots (14a)$$

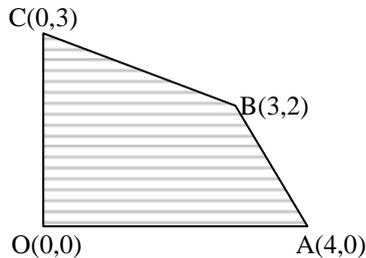
$$1 \times \text{persamaan (15), memberikan } 2x + y = 8 \quad \dots (15a)$$

Pengurangan antara (14a) dan (15a) memberikan  $5y = 10$ , sehingga  $y = 2$

Substitusi  $y=2$  ke dalam (14) memberikan  $x + 3(2) = 9$ , sehingga  $x = 9 - 6 = 3$

Jadi titik potong kedua garis tersebut adalah  $(3, 2)$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.9 di atas.

Untuk lebih memperjelas, kita gambarkan kembali daerah yang memenuhi keempat pertaksamaan sebagai berikut:



Gambar 1.10  
Daerah layak OABC

Daerah yang memenuhi semua kendala, yaitu memenuhi  $x + 3y \leq 9$ ,  $2x + y \leq 8$ ,  $x \geq 0$ , dan  $y \geq 0$  disebut dengan daerah layak dari penyelesaian masalah pemrograman linear (5) pada Kegiatan Belajar 1.

### 3. Poligon

Perhatikan Gambar 1.10 pada Contoh 10 di atas. Daerah yang dalam bidang OABC merupakan daerah dalam segi empat. Daerah tersebut beranggotakan titik-titik di dalam bidang OABC, termasuk titik-titik pada ruas garis penghubung titik-titik puncaknya (yaitu O, A, B, dan C).

Dalam hal yang lebih umum, bidang segi empat tersebut merupakan *poligon* (segi banyak).

Pada Contoh 1 pada Kegiatan Belajar 1 sebelumnya, dapat Anda perhatikan bahwa semua pertaksamaan yang membentuk sistem pertaksamaan, semuanya berupa pertaksamaan jenis ' $\leq$ '. Dengan demikian maka daerah layak yang terbentuk akan berupa poligon (pada bidang datar) atau polihedron (dalam ruang).

### 4. Daerah Hampa

Kadang-kadang daerah penyelesaian (atau daerah layak) yang terbentuk dari sistem pertaksamaan merupakan daerah hampa, artinya tidak ada satu titik pun yang layak untuk dijadikan penyelesaian. Dalam hal ini dikatakan bahwa sistem pertidaksamaan yang diberikan tidak mempunyai penyelesaian yang layak. Keadaan ini disebabkan karena pertaksamaan-pertaksamaan dalam sistem pertaksamaannya tidak dapat dipenuhi secara simultan. Ini biasanya terjadi apabila pertaksamaan-pertaksamaannya (dalam persyaratan utamanya) berjenis campuran (sebagian berjenis ' $\leq$ ' dan sisanya berjenis ' $\geq$ ').

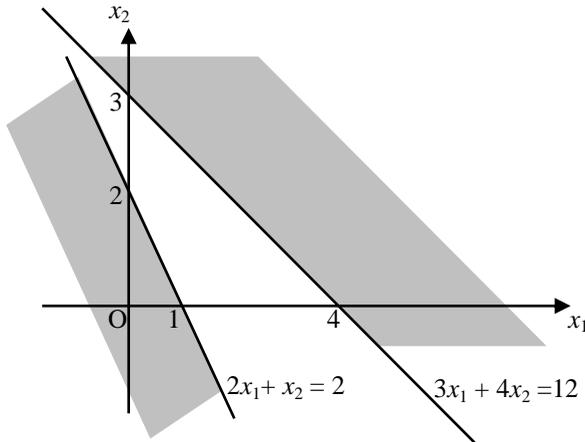
Perhatikan contoh di bawah ini (jelaskan persyaratan utama, persyaratan kepositifan!

*Contoh 11*

Diberikan sistem pertaksamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots (16)$$

Apabila kita gambarkan grafiknya, maka kita peroleh seperti pada Gambar 1.11 berikut ini.



Gambar 1.11.  
Daerah hampa

Dapat kita lihat pada Gambar 1.11 di atas, tidak ada daerah yang memenuhi semua pertaksamaan dalam sistem pertaksamaan (16).

Sebenarnya terdapat daerah yang memenuhi  $2x_1 + x_2 \leq 2$  dan  $3x_1 + 4x_2 \geq 12$ . Tetapi daerah ini tidak memenuhi  $x_1 \geq 0$ . (Coba Anda tunjukkan daerah tersebut!).

**5. Daerah Tak Terbatas**

Apabila kita perhatikan kembali sistem pertaksamaan yang diberikan pada Contoh 10 di atas, maka telah kita peroleh bahwa daerah penyelesaian penyelesaiannya berupa daerah di dalam segi empat OABC (termasuk juga ruas-ruas garis yang membatasinya). Di sini dikatakan bahwa daerah penyelesaiannya berupa daerah yang terbatas. Akan dapat juga terjadi suatu sistem pertaksamaan yang memberikan daerah penyelesaian yang tak terbatas, seperti yang diberikan pada contoh berikut ini:

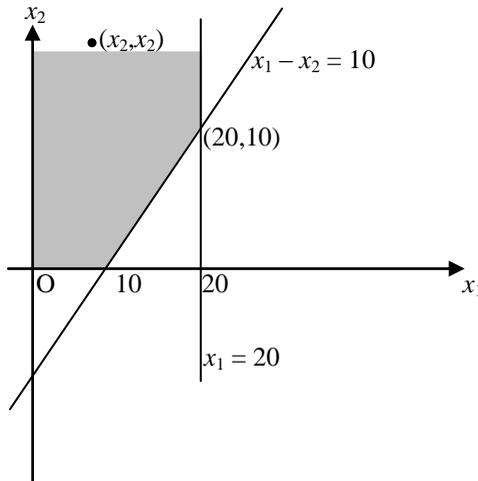
*Contoh 12*

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Daerah penyelesaian dari sistem pertaksamaan di atas merupakan daerah yang diarsir pada Gambar 1.12 berikut ini.



Gambar 1.12  
Daerah tak terbatas

Dapat Anda lihat pada Gambar 1.12 di atas, kita dapat menentukan titik  $(x_1, x_2)$  pada daerah yang diarsir dengan nilai  $x_1$  yang terbatas pada selang  $[0, 10]$ , tetapi dengan nilai  $x_2$  positif yang tidak terbatas berapa pun besarnya.

## 6. Daerah Penyelesaian Pertaksamaan dengan Tiga Peubah Bebas

Penggambaran daerah penyelesaian dengan menggunakan grafik, biasanya dilakukan apabila pertaksamaan-pertaksamaan yang diberikan dalam sistem pertaksamaan berupa pertaksamaan dengan 2(dua) peubah ( $x$  dan  $y$  atau  $x_1$  dan  $x_2$ ), seperti pada contoh-contoh yang diberikan di atas. Dalam hal pertaksamaan dengan 3(tiga) peubah masih dapat dilakukan walaupun sulit, tetapi untuk lebih dari 3(tiga) peubah, penggambaran menggunakan grafik tidak dapat dilakukan.

Berikut ini diberikan contoh daerah penyelesaian dari sistem pertaksamaan dengan 3 peubah.

### *Contoh 13*

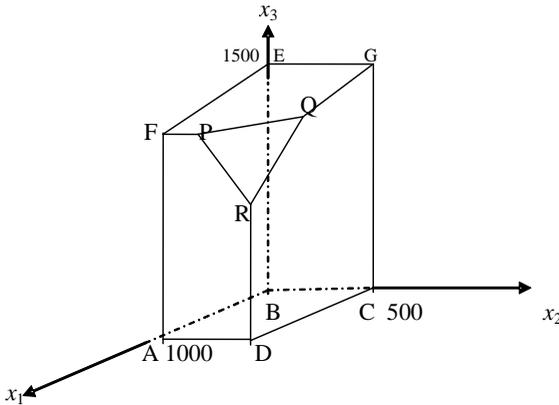
Diberikan sistem pertaksamaan yang merupakan sistem persyaratan pada Soal Nomor 1 pada Latihan dari Kegiatan Belajar 1, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1 & \leq 1000 \\ x_2 & \leq 500 \\ x_3 & \leq 1500. \\ x_1/50 + x_2/25 + x_3/75 & \leq 45 \end{aligned}$$

dan

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Grafik daerah penyelesaian dari sistem pertaksamaan tersebut merupakan daerah dalam ruang yang dibatasi oleh FEGQRP.ABCD diberikan pada Gambar 1.13 berikut ini:



Gambar 1.13  
Daerah layak dalam ruang FEGQR.P.ABCD

Dapat kita perhatikan pada Gambar 1.13 di atas, bahwa:

Titik P merupakan perpotongan bidang  $x_1/50 + x_2/25 + x_3/75 = 45$ , bidang  $x_1 = 1000$ , dan bidang  $x_3 = 1500$ . Jadi,  $1000/50 + x_2/25 + 1500/75 = 45$ , atau  $x_2/25 = 5$ , memberikan  $x_2 = 125$ , sehingga  $P(100,125, 1500)$ . Dengan cara yang sama, diperoleh  $Q(250,500,1500)$ ,  $R(1000,500,375)$ .

Titik-titik puncak lain adalah

$A(1000,0,0)$ ,  $B(0,0,0)$ ,  $C(0,500,0)$ ,  $D(1000,500,0)$ ,  $E(0,0,1500)$ ,  $F(1000,0,1500)$ ,  $G(0,500,1500)$ .



### LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Gambarkan daerah penyelesaian dari sistem pertaksamaan yang diperoleh pada soal nomor 2 pada Latihan dari Kegiatan Belajar 1, yaitu ....

$$x_1 + x_2 \geq 5 \quad \text{(i)}$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7 \quad \text{(ii)}$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12 \quad (\text{iii})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) Gambarkan daerah penyelesaian dari sistem pertaksamaan berikut ini.

$$x + 3y \leq 9$$

$$2x + y \leq 8$$

$$x \leq 2$$

$$x, y \geq 0$$

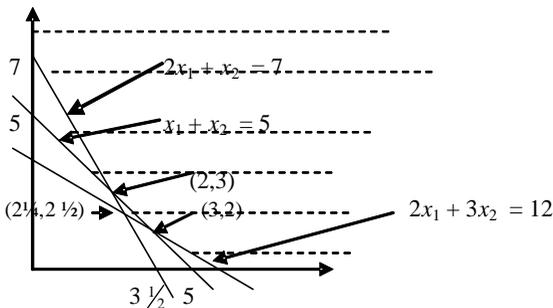
3)  $x_1 - x_2 \leq 5$   
 $x_1 + x_2 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

4)  $x_1 - x_2 \geq 5$   
 $x_1 + x_2 \leq 2$   
 $x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

5)  $x_1 + x_2 \leq 2$   
 $x_1 + x_2 \geq 5$   
 $x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

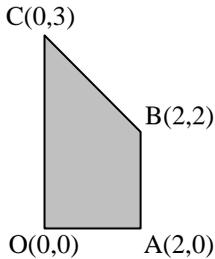
*Petunjuk Jawaban Latihan*

1) Daerah penyelesaian merupakan daerah yang diarsir

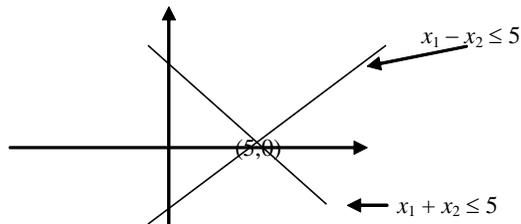


Anda lihat bahwa perpotongan garis (i) dan (ii) adalah  $(2, 3)$ . Perpotongan garis (i) dan (iii) adalah  $(3, 2)$ . Sedangkan perpotongan garis (ii) dan (iii) adalah  $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$ :

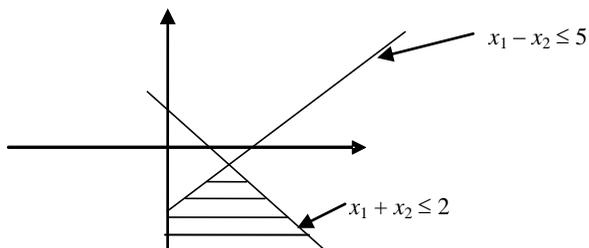
- 2) Sistem pertaksamaan ini adalah sistem pertaksamaan pada Contoh 10 ditambah dengan pertaksamaan  $x \leq 2$ . Daerah penyelesaiannya adalah daerah OABC.



- 3) Dapat kita lihat bahwa perpotongan antara  $x_1 - x_2 = 5$  dan  $x_1 + x_2 = 5$  adalah  $(5,0)$ . Jadi daerah penyelesaiannya adalah  $\{(5,0)\}$ .



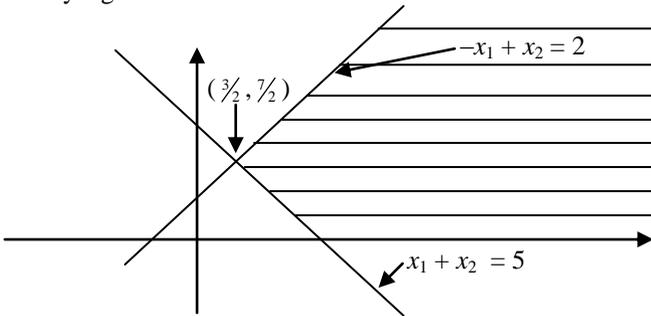
- 4) Dapat kita lihat bahwa  $x_1 - x_2 = 5$  dan  $x_1 + x_2 = 2$  berpotongan di  $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ . Daerah penyelesaian yang memenuhi  $x_1 - x_2 \geq 5$  dan  $x_1 + x_2 \leq 2$  merupakan daerah yang diarsir.



Daerah tersebut terletak di bawah sumbu  $x_1$ . Jadi tidak memenuhi persyaratan kepositifan  $x_2 \geq 0$ .

Dengan demikian maka daerah penyelesaiannya merupakan daerah hampa.

- 5) Daerah penyelesaiannya merupakan daerah yang diarsir, merupakan daerah yang tak terbatas



## RANGKUMAN

Pada Kegiatan Belajar 2 ini, Anda telah mempelajari bagaimana cara menggambarkan daerah penyelesaian dari suatu sistem pertaksamaan linear dengan 2 peubah bebas,  $x_1$  dan  $x_2$ . Untuk dapat menggambarannya, Anda harus menggambarkan satu persatu daerah yang memenuhi satu pertaksamaan dan menandainya (dengan pengarsiran, ataupun tanda lain). Daerah yang memenuhi semua persaksamaan dalam sistem pertaksamaan yang diberikan akan merupakan daerah penyelesaian sistem pertaksamaan tersebut. Daerah penyelesaian sistem pertaksamaan dapat berupa daerah terbatas, daerah hampa, atau daerah tak terbatas.

Tentu saja untuk dapat menggambarkan daerah penyelesaian tersebut, Anda harus dapat menggambarkan dahulu satu persamaan garis dalam sumbu koordinat cartesian dan selanjutnya mengidentifikasi daerah yang memenuhi.

Apabila Anda telah memahaminya, Anda lebih mudah dalam mempelajari metode grafik yang (salah satu metode untuk menyelesaikan masalah program linear) yang akan diberikan pada modul

selanjutnya. Akan tetapi akan lebih baik jika Anda mengerjakan dahulu Tes Formatif 2 berikut ini.

Apabila Anda telah memahami materi yang diberikan pada Kegiatan Belajar 2 ini dan telah mengerjakan Latihan, Anda dapat mengerjakan Tes Formatif 2 berikut ini.

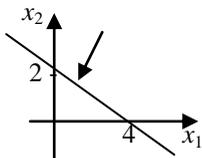


**TES FORMATIF 2** \_\_\_\_\_

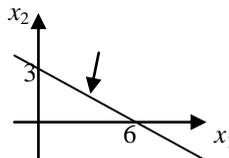
Petunjuk: Untuk Soal Nomor 1 sampai dengan Nomor 10, berikanlah jawab

- A. Jika pernyataan 1 dan 2 benar
- B. Jika pernyataan 1 dan 3 benar
- C. Jika pernyataan 2 dan 3 benar
- D. Jika pernyataan 1, 2, dan 3 benar

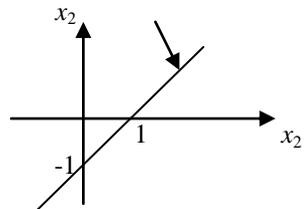
1) Diberikan 3(tiga) buah gambar garis yang menyatakan persamaan linear sebagai berikut.



(a)



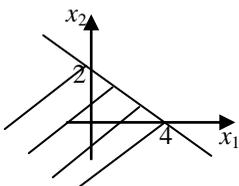
(b)



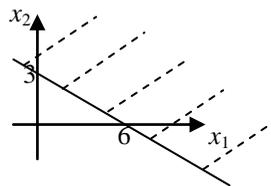
(c)

- 1. (a) merupakan gambar  $2x_1 + x_2 = 4$ .
- 2. (b) merupakan gambar  $x_1 + 3x_2 = 6$ .
- 3. (c) merupakan gambar  $x_1 - x_2 = 1$ .

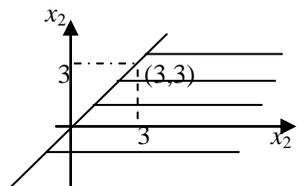
2) Diberikan d3 (tiga) buah daerah (diarsir) yang memenuhi suatu pertaksamaan adalah ....



(a)



(b)

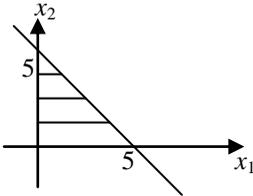


(c)

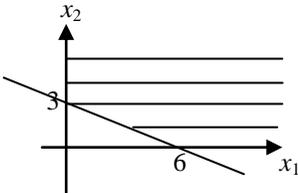
1. (a) merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x_1 + x_2 \leq 4$
2. (b) merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x_1 + 3x_2 \geq 6$
3. (c) merupakan daerah yang memenuhi pertaksamaan  $x_1 - x_2 \leq 0$

3) Periksalah ketiga pernyataan berikut.

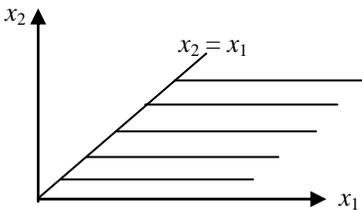
1. Daerah diarsir memenuhi sistem pertaksamaan  $x_1 + x_2 \leq 5$ ,  
 $x_1, x_2 \geq 0$



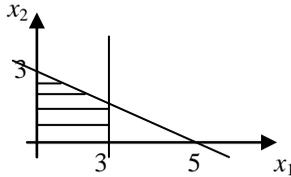
2. Daerah diarsir memenuhi sistem pertaksamaan  $x_1 + 2x_2 \leq 6$ ,  
 $x_1, x_2 \geq 0$



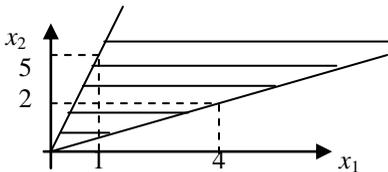
3. Daerah diarsir memenuhi sistem pertaksamaan  $x_1 - x_2 \geq 0$ ,  
 $x_1, x_2 \geq 0$



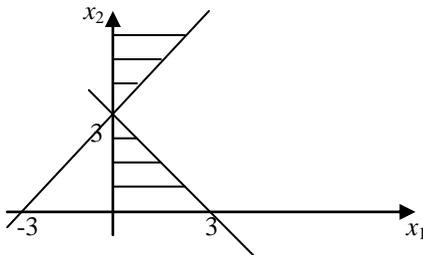
- 4) Diberikan daerah diarsir yang dibentuk suatu sistem pertaksamaan linear adalah ....



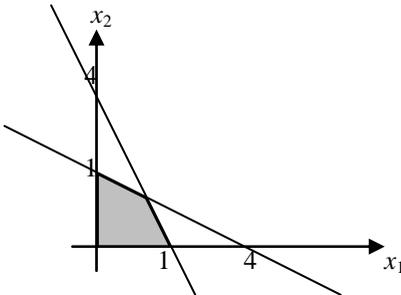
1. sistem pertaksamaan yang membentuk adalah  $3x_1 + 5x_2 \leq 15, x_1 \leq 3, x_1, x_2 \geq 0$
  2. daerah tersebut merupakan daerah yang terbatas
  3. Titik puncak daerah tersebut adalah  $(0,0), (3,0), (3, 6/5)$  dan  $(0,3)$
- 5) Diberikan daerah diarsir yang dibentuk suatu sistem pertaksamaan linear adalah ....



1. sistem pertaksamaan yang membentuk adalah  $5x_1 - x_2 \geq 0, 2x_1 - x_2 \leq 0, x_1, x_2 \geq 0$ .
  2. daerah tersebut merupakan daerah terbatas
  3. Titik puncak daerah tersebut adalah  $(0,0)$
- 6) Diberikan daerah yang dibentuk suatu sistem pertaksamaan linear adalah ....



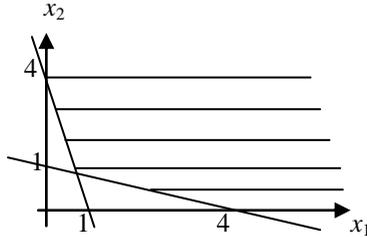
1. daerah diarsir yang terletak bagian atas merupakan daerah yang dibentuk oleh  
 $x_1 + x_2 \leq 3$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$ .
  2. daerah diarsir yang terletak bagian bawah merupakan daerah yang dibentuk oleh  
 $x_1 + x_2 \leq 3$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$ .
  3. Daerah yang dibentuk oleh sistem pertaksamaan  
 $x_1 + x_2 \leq 3$ ,  $x_1 + x_2 \leq 3$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$  merupakan daerah hampa
- 7) Diberikan sistem pertaksamaan  $x_1 + 3x_2 \leq 15$ ,  $2x_1 + x_2 \leq 10$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$
1. Daerah yang memenuhi adalah daerah dalam suatu poligon
  2. Titik-titik puncak daerah yang memenuhi adalah  $(0,0)$ ,  $(5,0)$ ,  $(3,4)$ , dan  $(0,5)$
  3. Daerah yang memenuhi merupakan daerah yang terbatas
- 8) Diberikan sistem pertaksamaan  $x_1 - x_2 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 1$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$
1. Titik  $(2,0)$  terletak di dalam daerah yang memenuhi
  2. Daerah yang memenuhi mempunyai titik puncak  $(1,1)$
  3. Daerah yang memenuhi merupakan daerah tak terbatas
- 9) Diberikan sistem pertaksamaan  $4x_1 + x_2 \leq 4$ ,  $x_1 + 4x_2 \leq 4$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$
1. Daerah yang memenuhi adalah



2. Titik  $(1,1)$  terletak di dalam daerah yang memenuhi
3. Titik puncak daerah yang memenuhi adalah  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(4/5, 4/5)$ , dan  $(0,1)$

10) Diberikan sistem pertaksamaan  $4x_1 + x_2 \geq 4$ ,  $x_1 + 4x_2 \geq 4$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$

1. Daerah yang memenuhi adalah



2. Titik (1,1) terletak di dalam daerah yang memenuhi
3. Titik puncak daerah yang memenuhi adalah (0,0), (1,0), (0,1)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

- Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali  
 80 - 89% = baik  
 70 - 79% = cukup  
 < 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

## Kunci Jawaban Tes Formatif

### *Tes Formatif 1*

- 1) D
- 2) C (1 salah, seharusnya memaksimumkan fungsi objektif).
- 3) A (3 salah, seharusnya  $Z = 1.000.000 x_1 + 500.000 x_2$ ).
- 4) A (2 sama dengan 1, benar, 3 salah).
- 5) D
- 6) C (3 salah, 1 dan 2 sama saja).
- 7) B (2 salah).
- 8) A (3 salah).
- 9) D
- 10) B (2 salah).

### *Tes Formatif 2*

- 1) C (1 salah, seharusnya merupakan grafik  $x_1 + 2x_2 = 4$ ).
- 2) A (3 salah, karena unit  $(3,0)$ ,  $3 - 0 \leq 0$  (salah),  $(3,0)$  tidak memenuhi).
- 3) B (2 salah, seharusnya memenuhi sistem pertaksamaan  $x_1 + 2x_2 \geq 6$ ,  $x_1, x_2 \geq 0$ ).
- 4) D
- 5) B (2 salah, seharusnya daerah tak terbatas).
- 6) A (3 salah, daerah penyelesaiannya adalah  $(0,3)$ ).
- 7) D
- 8) C (1 salah).
- 9) B (2 salah).
- 10) A (3 salah, seharusnya,  $(0,4)$ ,  $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ ,  $(4,0)$ ).

## Daftar Pustaka

- Anderson M.Q, Lievano R.J., Kent. (1986). *Quantitative Management – An Introduction*, 2ed, Publ Co.
- Frederick Hillier dan Gerald J. Lieberman. (1995). *Introduction to Operation Research*.
- Hamdy A Taha. (1997). *Operation Research: An Introduction*, 6<sup>th</sup> ed., Prentice Hall.
- Nesa Wu dan Richard Coppins. (1981). *Linear Programming and Extension*. Mac Graw-Hill.
- Robert Faure, Gauthier Villars, dan Dunod. (1972). *Element de la Recherche Operationelle*.
- Saul I. Gass. (1985). *Linear Programming: Methods & Applications*, 5<sup>th</sup> ed., NY: McGraw-Hill, Dover Publications, 2003.