MODUL 1

Pengertian Keanggotaan dalam Himpunan

Maman A. Djauhari

PENDAHULUAN

Sebelum Anda memulai mempelajari modul ini, coba Anda renungkan kembali pengertian himpunan yang telah Anda kenal hingga saat ini. Di setiap mata kuliah yang telah Anda ikuti, sadar atau tidak, Anda selalu berhubungan dengan himpunan. Yang dimaksud himpunan dalam mata-mata kuliah yang lain, bukanlah himpunan kabur (fuzzy set). Pengertian himpunan kabur merupakan perluasan dari pengertian himpunan yang biasa Anda telah kenal itu. Untuk membedakan kedua pengertian himpunan tersebut, maka himpunan yang Anda kenal dalam mata-mata kuliah yang lain, selanjutnya kita sebut himpunan sederhana (crisp set). Yang menjadi pokok bahasan dalam modul ini adalah pengertian himpunan bagian kabur. Untuk lebih memudahkan pembahasan, pokok bahasan itu dibagi dalam dua sub-pokok bahasan. Yang pertama tentang definisi-definisi dan konsep-konsep dasar dalam teori himpunan sederhana. Yang kedua adalah tentang konsep himpunan bagian kabur.

Setelah mempelajari pokok bahasan ini dengan baik, secara umum Anda diharapkan dapat memahami pengertian himpunan bagian kabur. Sasaran yang lebih rinci dari pokok bahasan ini adalah sebagai berikut. Apabila Anda telah selesai mempelajari materi sub-pokok bahasan pertama, maka Anda diharapkan dapat:

1. menggunakan fungsi karakteristik untuk menyatakan keanggotaan dalam himpunan sederhana;
2. menggunakan hasil kali Boole dalam membentuk irisan dua himpunan sederhana;
3. menggunakan jumlah Boole dalam membentuk gabungan dua himpunan sederhana;

4. melakukan operasi-operasi antar himpunan bagian sederhana, dengan menggunakan fungsi karakteristik, hasil kali dan jumlah Boole.

Selanjutnya, apabila Anda telah selesai mempelajari sub-pokok bahasan kedua, maka Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan fungsi keanggotaan yang merupakan perluasan dari fungsi karakteristik;
2. menjelaskan himpunan bagian kabur;
3. menjelaskan dan mencari derajat keanggotaan dalam himpunan bagian kabur;
4. melakukan operasi-operasi antar himpunan bagian kabur dengan menggunakan fungsi keanggotaan;
5. mencari atau menentukan himpunan bagian sederhana yang paling dekat dengan suatu himpunan bagian kabur.

KEGIATAN BELAJAR 1

Keanggotaan dalam Himpunan Sederhana

Misalkan N adalah himpunan semua bilangan asli. Jadi,

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Bila kita memandang himpunan bilangan bulat Z sebagai himpunan semestanya (*univers*), maka N memiliki ciri:

1. $N \subset Z$.
2. Setiap bilangan bulat x di Z hanya memiliki satu di antara 2 kemungkinan berikut;
   $x \in Z$ atau $x \notin Z$.

Ciri yang kedua adalah ciri yang karakteristik dari himpunan yang telah Anda kenal, yang selanjutnya dinamakan himpunan sederhana. Dinamakan demikian, karena berlaku pilihan ”*either . . . or*” (dalam ungkapan lain ”*take it or leave it*”) dan tak ada pilihan lain. Ini adalah inti dari logika madzhab Aristoteles yang telah berpuluh-puluh abad menguasai pemikiran para ilmuwan. Cikal bakal teori himpunan kabur sudah muncul pada jurnal IEEE pada tahun 1921. Namun baru tahun 1960-an, melalui pemikiran Lotfi Zadeh, teori ini berkembang hingga kini telah menjangkau berbagai bidang ilmu. Selain itu, agar dapat dibedakan dengan pengertian himpunan kabur (himpunan yang memang tidak sederhana dalam pengertian terdapat banyak sekali pilihan yang mungkin) yang menjadi topik mata kuliah ini. Perhatikanlah contoh-contoh berikut untuk memperjelas ciri karakteristik tersebut di atas.

Contoh 1
Misalkan B himpunan semua nama bulan pada kalender Masehi yang terdiri atas 30 hari. Maka:

1. Nama-nama bulan berikut ini, merupakan anggota dari B; April, Juni, September, dan November.
2. Nama-nama bulan selain tersebut di atas bukanlah anggota dari B.

Setiap nama bulan hanya memiliki satu di antara 2 kemungkinan berikut; anggota B atau bukan anggota B.

Contoh 2

Misalkan M himpunan mahasiswa UT yang mendaftar di UPBJJ Banda Aceh. Maka setiap mahasiswa UT mungkin anggota M, mungkin bukan anggota M. Tidak ada kemungkinan lain.

Himpunan-himpunan seperti pada kedua contoh di atas itulah yang selanjutnya kita sebut himpunan sederhana. Lain halnya jika Anda perhatikan himpunan K berikut.

Misalkan K himpunan semua jenis sayuran berwarna hijau. Jelas wortel dan lobak bukanlah anggota K menurut logika madzhab Aristoteles (teori himpunan sederhana). Di antara anggota K dapat kita sebutkan antara lain; kangkung, bayam, buncis, dan daun singkong. Akan tetapi apakah hijaunya kangkung, hijaunya bayam dan yang lain-lainnya sama semuanya? Belum tentu (atau bahkan tidak sama). Setiap anggota K memiliki derajat kehijauan yang tertentu dan tidak perlu sama dengan derajat kehijauan anggota lainnya. Dengan kata lain, setiap anggota K memiliki derajat keanggotaan tertentu. Inilah yang menghantarkan kita kepada konsep himpunan kabur. Ini pulalah yang membedakan himpunan kabur dengan himpunan sederhana. Pada himpunan sederhana, hanya ada dua kemungkinan derajat keanggotaan, yakni "YA atau TIDAK" atau "0 atau 1". Suatu objek x memiliki derajat keanggotaan 0 bila x bukan anggota himpunan. Derajat keanggotaannya adalah 1 bila x adalah anggota himpunan. Melalui pengertian derajat keanggotaan itulah kita akan memulai membahas himpunan sederhana.

A. FUNGSI KARAKTERISTIK

Misalkan E suatu himpunan sederhana dan A suatu himpunan bagiannya. Pernyataan ini ditulis dengan lambang $A \subset E$. Untuk menyatakan keanggotaan, biasanya digunakan simbul $\in$. Jadi,

$x \in A$ menyatakan x adalah anggota A

$x \notin A$ menyatakan x bukan anggota A

Pengertian keanggotaan ini dapat juga dinyatakan melalui konsep <u>fungsi karakteristik</u> μ_A di mana harga $\mu_A(x)$ menyatakan apakah x merupakan anggota A atau bukan. Fungsi ini adalah fungsi dari E pada himpunan {0, 1} yang memenuhi sifat,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{bila } x \in A \\ 0, \text{bila } x \notin A \end{cases}$$

Contoh 3

Diketahui himpunan sederhana $E = \{a, b, c, d, e\}$.

a. Jika $A = \{b, c, e\}$, tentukanlah fungsi karakteristik μ_A.
b. Carilah himpunan B, jika fungsi karakteristik μ_B memenuhi

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x = a, b, d, e \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Penyelesaian

a. Karena $A = \{b, c, e\}$ maka fungsi karakteristik μ_A berbentuk sebagai berikut.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x = b, c, e \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

b. Fungsi karakteristik μ_B menunjukkan bahwa $B = \{a, b, d, e\}$.

Pengamatan pada kedua contoh di atas ini membawa kita kepada kesimpulan berikut.

$A \subseteq E$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) \leq \mu_E(x)$ untuk setiap x.

Catatan.

Himpunan-himpunan sederhana E, A dan B tersebut pada contoh di atas dapat pula dituliskan sebagai berikut.

$E = \{(a|1), (b|1), (c|1), (d|1), (e|1)\}$
$A = \{(a|0), (b|1), (c|1), (d|0), (e|1)\}$
$B = \{(a|1), (b|1), (c|0), (d|1), (e|1)\}$

di mana bilangan 0 dan 1 yang ditulis di belakang tanda "|" menunjukkan derajat keanggotaan dari objek yang berada di depan tanda "|". Jadi, $(a|1)$ menyatakan bahwa a adalah anggota himpunan E dan B. Demikian pula, $\{(d|0)$ menyatakan bahwa d bukan anggota A. Cara penulisan inilah yang akan menghantarkan kita kepada pembicaraan tentang himpunan kabur.

Untuk selanjutnya, suatu himpunan akan kita tuliskan dalam bentuk-bentuk seperti tersebut di atas. Sekarang marilah kita bahas tentang penggunaan fungsi karakteristik dalam menyatakan hasil operasi dua himpunan sederhana.

B. KOMPLEMEN

Misalkan E himpunan semesta dan $A \subset E$. Komplemen dari A ditulis A^c.

Jadi $A \cup A^c = E$ dan $A \cap A^c = \varnothing$. Jika $x \in A$, maka $x \notin A^c$ dan sebaliknya jika $x \in A^c$, maka $x \notin A$. Oleh karena itu,

$\mu_A(x) = 1$ jika dan hanya jika $\mu_{A^c}(x) = 0$

atau

$\mu_A(x) = 0$ jika dan hanya jika $\mu_{A^c}(x) = 1$.

Contoh 4

Misalkan $E = \{a, b, c, d, e\}$ dan $A = \{b, c, e\}$ seperti pada *Contoh 3*. Tentukanlah μ_{A^c} dan A^c.

Penyelesaian

Karena $A = \{b, c, e\}$, maka

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x = b, c, e \\ 0, \text{untuk } x = a, d \end{cases}$$

Akibatnya,

$$\mu_{A^c}(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x = a, d \\ 0, \text{untuk } x = b, c, e \end{cases}$$

dan $A^c = \{a, d\}$, atau $A^c = \{(a|1), (b|0), (c|0), (d|1), (e|0)\}$.

Berdasarkan uraian dan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ untuk setiap x

C. IRISAN DAN GABUNGAN

Perhatikanlah irisan dan gabungan dua himpunan $A \cap B$ dan $A \cup B$. Kita tahu bahwa,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x \in A \\ 0, \text{untuk } x \notin A \end{cases} \quad \text{dan} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x \in B \\ 0, \text{untuk } x \notin B \end{cases}$$

Mengingat bahwa,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1, \text{untuk } x \in A\cap B \\ 0, \text{untuk } x \notin A\cap B \end{cases}$$

maka fungsi karakteristik $\mu_{A\cap B}$ dari $A \cap B$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Artinya, $\mu_{A\cap B}(x)$ adalah yang terkecil di antara $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$. Untuk menyingkat, kita dapat pula menuliskan sebagai berikut,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$$

di mana operasi $\bullet$ menyatakan <u>hasil kali Boole</u> (lihat Pengantar Matematika Modern). Cara kerja operasi $\bullet$ ini diberikan pada tabel berikut,

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

Dengan cara yang sama, fungsi karakteristik $\mu_{A\cup B}$ dari gabungan $A \cup B$ dapat dinyatakan oleh,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Artinya, $\mu_{A\cup B}(x)$ adalah yang terbesar di antara $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$. Fungsi karakteristik dari A ∪ B dapat pula ditulis sebagai berikut,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$$

di mana operasi $*$ menyatakan jumlah Boole (lihat Pengantar Matematika Modern). Cara kerja operasi $*$ ini diberikan pada tabel berikut,

$*$	0	1
0	0	1
1	1	1

Kalau kita perhatikan kedua operasi $\bullet$ dan $*$, maka akan diperoleh hubungan,

$$\mu_A(x) * \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \{\mu_A(x) \bullet \mu_B(x)\}$$

Contoh 5

Diketahui $E = \{v, w, x, y, z\}$ dan dua himpunan bagiannya A dan B berikut.
$A = \{(v|0), (w|1), (x|1), (y|0), (z|1)\}$
$B = \{(v|1), (w|0), (x|1), (y|0), (z|1)\}$

Tentukanlah:

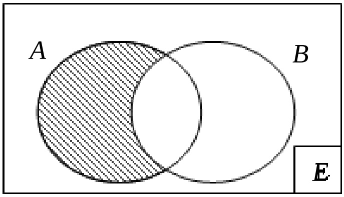
a. $A \cap B$
b. $(A \cap B)^c$
c. $A \cup B$
d. $(A \cup B)^c$

Penyelesaian

a. $A \cap B = \{(v|0 \bullet 1), (w|1 \bullet 0), (x|1 \bullet 1), (y|0 \bullet 0), (z|1 \bullet 1)\} = \{(v|0), (w|0), (x|1), (y|0), (z|1)\}$ atau $A \cap B = \{x, z\}$
b. Berdasarkan hasil pada butir a, maka:
$(A \cap B)^c = \{(v|1), (w|1), (x|0), (y|1), (z|0)\}$ atau $(A \cap B)^c = \{v, w, y\}$
c. $A \cup B = \{(v|0 * 1), (w|1 * 0), (x|1 * 1), (y|0 * 0), (z|1 * 1)\} = \{(v|1), (w|1), (x|1), (y|0), (z|1)\}$ atau $A \cup B = \{v, w, x, z\}$
d. Berdasarkan hasil pada butir c, maka:
$(A \cup B)^c = \{(v|0), (w|0), (x|0), (y|1), (z|0)\}$ atau $(A \cup B)^c = \{y\}$.

D. SELISIH DAN JUMLAH DISJONGTIF

Selisih dua himpunan *A* dan *B* ditulis $A - B = A \cap B^{c}$ (lihat daerah yang diarsir pada gambar berikut).



Himpunan $A - B$ dapat dinyatakan oleh,

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap B^c}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B^c}(x)\}$$

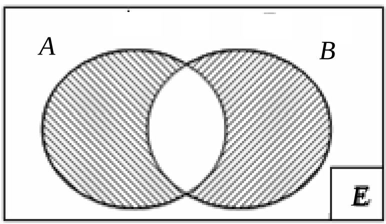
atau,

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_{B^c}(x).$$

Selanjutnya jumlah disjongtif antara dua himpunan *A* dan *B*, ditulis $A \oplus B$, didefinisikan oleh,

$$A \oplus B = \left(A \cap B^c\right) \cup \left(A^c \cap B\right)$$

Himpunan ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram Venn berikut.



Jadi himpunan $A \oplus B$ dapat dinyatakan oleh

$$\begin{aligned}\mu_{A\oplus B}(x) &= \mu_{(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)}(x) \\ &= \text{maks}\{\mu_{A\cap B^c}(x), \mu_{A^c\cap B}(x)\} \\ &= \text{maks}\{\mu_{A-B}(x), \mu_{B-A}(x)\}\end{aligned}$$

atau,

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \mu_{A-B}(x) * \mu_{B-A}(x)$$
$$= \left\{\mu_A(x) \bullet \mu_{B^c}(x)\right\} * \left\{\mu_{A^c}(x) \bullet \mu_B(x)\right\}$$

Catatan.
Dalam beberapa literatur, jumlah disjongtif kadang-kadang disebut beda simetris (*symetric difference*).

Contoh 6
Misalkan $E = \{v, w, x, y, z\}$ dan
$A = \{(v|0), (w|1), (x|1), (y|0), (z|1)\}$
$B = \{(v|1), (w|0), (x|1), (y|0), (z|1)\}$
Tentukanlah:

a. $A - B$
b. $B - A$
c. $A \oplus B$

Penyelesaian

a. Karena $B^c = \{(v|0), (w|1), (x|0), (y|1), (z|0)\}$, maka:
$A - B = \{(v|0 \bullet 0), (w|1 \bullet 1), (x|1 \bullet 0), (y|0 \bullet 1), (z|1 \bullet 0)\}$
$= \{(v|0), (w|1), (x|0), (y|0), (z|0)\}$

b. Karena $A^c = \{(v|1), (w|0), (x|0), (y|1), (z|0)\}$, maka:
$B - A = \{(v|1 \bullet 1), (w|0 \bullet 0), (x|1 \bullet 0), (y|0 \bullet 1), (z|1 \bullet 0)\}$
$= \{(v|1), (w|0), (x|0), (y|0), (z|0)\}$

c. Berdasarkan hasil pada butir a dan butir b, maka:
$A \oplus B = \left(A \cap B^c\right) \cup \left(A^c \cap B\right) = (A - B) \cup (B - A)$
$= \{(v|0 * 1), (w|1 * 0), (x|0 * 0), (y|0 * 0), (z|0 * 0)\}$
$= \{(v|1), (w|1), (x|0), (y|0), (z|0)\}$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jelaskan apakah berlaku kesamaan berikut?
   a. $\mu_A(x) \bullet \{1 - \mu_B(x)\} = \mu_A(x) - \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$
   b. $\mu_{A \oplus B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x) - 2\mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$

2) Misalkan $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Jika,
   $A = \{(a|0), (b|0), (c|1), (d|1), (e|0), (f|1)\}$ dan
   $B = \{(a|1), (b|1), (c|1), (d|1), (e|0), (f|0)\}$
   tentukanlah:
   a. $A \cap B$
   b. $(A \cup B)^c$
   c. $A - B^c$
   d. $A \oplus B$

3) Diketahui: $E = \{x, y, z, t, u\}$. Jika,
   A = $\{(x|1), (y|0), (z|1), (t|0), (u|1)\}$
   $B = \{(x|1), (y|1), (z|0), (t|0), (u|1)\}$, dan
   $C = \{(x|0), (y|1), (z|0), (t|1), (u|1)\}$
   tentukanlah:
   a. $A \cap B \cap C$
   b. $A \cup B \cup C$
   c. $A - (B \cup C)$
   d. $A - (B \oplus C)$
   e. $(B \oplus C) - A^c$

Petunjuk Jawaban Latihan

Dalam menyelesaikan soal-soal latihan ini, gunakanlah definisi-definisi tentang: fungsi karakteristik, hasil kali Boole, jumlah Boole, irisan dan gabungan dua himpunan, serta jumlah disjongtif dua himpunan.

RANGKUMAN

Misalkan E himpunan semesta, A dan B dua buah himpunan bagiannya.

1) Fungsi karakteristik μ_A adalah fungsi dari E pada himpunan {0, 1}. Jadi,

   $\mu_A : E \to \{0,1\}$

   dan bersifat $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{bila } x \in A \\ 0, \text{bila } x \notin A \end{cases}$

2) $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$

3) $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

   $= \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$

   Operasi $\bullet$ adalah hasil kali Boole.

4) $\mu_{A \cup B}(x) = \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

   $= \mu_A(x) * \mu_B(x)$

   Operasi $*$ adalah jumlah Boole.

5) $\mu_{A \cap B^c}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B^c}(x)\}$

   $= \mu_A(x) \bullet \mu_{B^c}(x) = \mu_A(x) \bullet \{1 - \mu_B(x)\}$

6) $\mu_{A \oplus B}(x) = \mu_{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)}(x)$ maks $\{\mu_{A-B}(x), \mu_{B-A}(x)\}$

   $= \mu_{A-B}(x) * \mu_{B-A}(x)$

   Operasi $*$ disebut jumlah disjongtif.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Diketahui himpunan semesta E = {a, b, c, d, e, f, g} dan 3 buah himpunan bagian
P, Q dan R sebagai berikut.
P = {(a |0), (b |1), (c |1), (d |1), (e |0), (f |1), (g |0)}
Q = {(a |1), (b |1), (c |0), (d |0), (e |1), (f |0), (g |0)}
R = {(a |1), (b |0), (c |0), (d |1), (e |0), (f |0), (g |0)}

Maka:

1) $P \cap Q =$
   A. $\{(a\,|0), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|0), (g\,|0)\}$
   B. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|0), (f\,|0), (g\,|0)\}$
   C. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|0)\}$
   D. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|1)\}$

2) $P \cup Q^c =$
   A. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|1)\}$
   B. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|1)\}$
   C. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|0), (g\,|0\}$
   D. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|0), (g\,|0)\}$

3) $\left(P \cap Q^c\right) \cup R =$
   A. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|0), (g\,|0)\}$
   B. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|0)\}$
   C. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|0)\}$
   D. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|0), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|0)\}$

4) $\left(P \cap Q\right)^c \cup R^c =$
   A. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|1)\}$
   B. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|1), (e\,|1), (f\,|0), (g\,|0)\}$
   C. $\{(a\,|0), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|1)\}$
   D. $\{(a\,|0), (b\,|0), (c\,|0), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|0), (g\,|0)\}$

5) $(P \cup Q) - R =$
   A. $\{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|0)\}$
   B. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|1), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|0)\}$
   C. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|1)\}$
   D. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|0), (e\,|0), (f\,|0), (g\,|1)\}$

6) $(P \cup Q)^c \cap R$ =

A. E

B. $\varnothing$

C. $\{(a\,|1), (b\,|1), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|1)\}$

D. $\{(a\,|0), (b\,|0), (c\,|0), (d\,|0), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|0)\}$

7) $P \oplus Q$ =

A. E

B. $\varnothing$

C. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|0), (d\,|1), (e\,|0), (f\,|1), (g\,|0)\}$

D. $\{(a\,|1), (b\,|0), (c\,|1), (d\,|1), (e\,|1), (f\,|1), (g\,|0)\}$

8) $\mu_{(P \oplus R)^c}(x)$ =

A. 0 untuk $x = a$ dan b

B. 0 untuk $x = a$ dan 1 untuk $x = b$

C. 1 untuk $x = a$ dan 0 untuk $x = b$

D. 1 untuk $x = a$ dan b

9) $\mu_{(P \oplus Q^c) \cup R}(x)$ =

A. 0 untuk $x = a$ dan d

B. 0 untuk $x = a$ dan 1 untuk $x = d$

C. 1 untuk $x = a$ dan 0 untuk $x = d$

D. 1 untuk $x = a$ dan d

10) $\mu_{Q \oplus R}(x)$ =

A. 0 untuk $x = b$ dan e

B. 0 untuk $x = b$ dan 1 untuk $x = e$

C. 1 untuk $x = b$ dan 0 untuk $x = e$

D. 1 untuk $x = b$ dan e

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Konsep Himpunan Bagian Kabur

Marilah kita mulai dengan sebuah contoh. Misalkan himpunan semesta $E = \{a, b, c, d, e\}$ dan A himpunan bagian sederhana dari E. Setiap anggota dari E hanya memiliki satu kemungkinan di antara 2 kemungkinan berikut. Ia anggota A atau ia bukan anggota A. Fungsi karakteristiknya berharga 0 atau 1. Bayangkan sekarang apabila fungsi karakteristik itu bukan hanya berharga 0 atau 1, akan tetapi dapat berharga berapa saja mulai dari 0 sampai dengan 1. Jadi, harga fungsi karakteristik itu terletak dalam interval tutup [0, 1]. Dalam hal demikian, suatu elemen $x \in E$ dapat dikatakan:

a. bukan anggota A, jika $\mu_A(x) = 0$

b. anggota A dengan derajat keanggotaan yang rendah, jika $\mu_A(x) \approx 0$

c. anggota A dengan derajat keanggotaan yang tinggi, jika $\mu_A(x) \approx 1$

d. anggota A seutuhnya, jika $\mu_A(x) = 1$

Setelah Anda memperhatikan contoh di atas, sekarang coba Anda perhatikan konsep matematik yang didefinisikan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\underset{\sim}{A} = \{(a|0{,}2), (b|0), (c|0{,}3), (d|1), (e|0{,}8)\}$$

di mana bilangan antara tanda ”|” dan ”)” menyatakan harga fungsi karakteristik pada elemen yang berada di depan tanda ”|”. Himpunan A yang dinyatakan melalui konsep matematik tersebut di atas, dinamakan himpunan bagian kabur dari E. Untuk selanjutnya kita tuliskan: $\underset{\sim}{A} \subset E$ (di bawah huruf ”A” ada tanda *tilde* ”~” untuk menunjukkan bahwa A adalah suatu himpunan kabur). Agar kita dapat membedakan himpunan bagian kabur dengan himpunan bagian sederhana, maka pengertian keanggotaan pada himpunan bagian kabur diberi simbol sebagai berikut.

$$x \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{\in} \underset{\sim}{A}$$

Artinya, x terkandung dalam $\underset{\sim}{A}$ dengan derajat keanggotaan sebesar $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$.

Contoh 1
Perhatikan kembali himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A}$ di atas;

$$\underset{\sim}{A} = \{(a|0{,}2), (b|0), (c|0{,}3), (d|1), (e|0{,}8)\}$$

Maka:
$a \underset{0,2}{\in} \underset{\sim}{A}$; $b \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A}$; $c \underset{0,3}{\in} \underset{\sim}{A}$; $d \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A}$; dan $e \underset{0,8}{\in} \underset{\sim}{A}$

Catatan.
Tanda $\underset{1}{\in}$ (di bawah tanda ”∈” ada bilangan yang menunjukkan derajat keanggotaan) ekivalen dengan $\in$. Sedangkan tanda $\underset{0}{\in}$ ekivalen dengan $\notin$. Oleh karena itu pada contoh di atas dapat kita tuliskan $b \notin \underset{\sim}{A}$ dan $d \in \underset{\sim}{A}$.

Himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A}$ pada contoh di atas dapat pula ditulis dalam bentuk

$$\underset{\sim}{A} = \{(x|\, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in E\}$$

di mana $\mu_{\underset{\sim}{A}}(a) = 0{,}2$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(b) = 0$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(c) = 0{,}3$; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(d) = 1$, dan $\mu_{\underset{\sim}{A}}(e) = 0{,}8$. Pada himpunan kabur $\underset{\sim}{A}$ tersebut tersirat makna bahwa $\underset{\sim}{A}$ mengandung;
(i) sedikit *a*
(ii) tidak mengandung *b*
(iii) agak banyak *c*
(iv) *d* secara utuh
(v) banyak *e*

Berdasarkan uraian dan contoh di atas, sekarang kita definisikan secara formal apa yang dinamakan himpunan bagian kabur. Untuk itu kita sepakati dahulu bahwa himpunan semesta selalu merupakan himpunan sederhana.

Definisi
Misalkan *E* himpunan semesta. Himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A}$ dari *E* adalah himpunan yang berbentuk,

$$\{(x|\, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in E\}$$

atau $\{x| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ = derajat keanggotaan x, $x \in E\}$ di mana $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan dari x dalam $\underset{\sim}{A}$.

Catatan. Fungsi $\mu_{\underset{\sim}{A}}: E \to [0, 1]$ dinamakan fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{A}$.

Hal khusus, yaitu bila daerah nilai dari $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ adalah himpunan {0, 1}. Dalam hal ini, maka himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A}$ menjadi himpunan bagian tak kabur atau himpunan bagian sederhana. Oleh karena itulah, himpunan bagian sederhana selalu merupakan hal khusus dari himpunan bagian kabur.

Contoh 2

Misalkan R himpunan bilangan real dan $a \in R$. Maka himpunan

$$\underset{\sim}{A} = \{x \mid x \in R \text{ dan } x \text{ hampir sama dengan } a\}$$

adalah himpunan bagian kabur dari R, karena x bisa berharga berapa saja di sekitar a.

Contoh 3

Misalkan U himpunan mahasiswa UT. Kita tuliskan $\underset{\sim}{B} = \{x \mid x \in U$, x berprestasi baik$\}$ atau B adalah himpunan mahasiswa UT yang berprestasi baik. Maka B adalah himpunan bagian kabur dari U, karena x bisa berharga berapa saja di sekitar (misalnya) 9.

Contoh 4

Misalkan M himpunan mahasiswa Indonesia dan $\underset{\sim}{C} = \{x|x \in M$, x berbadan tegap$\}$. Jadi, C adalah himpunan mahasiswa Indonesia yang berbadan tegap. Maka jelas, $\underset{\sim}{C}$ adalah himpunan bagian kabur dari M, karena x bisa berharga berapa saja di sekitar suatu nilai yang menunjukkan ketegapan.

Mulai sekarang Anda perlu membedakan lambang untuk himpunan bagian sederhana dan lambang untuk himpunan bagian kabur. Untuk selanjutnya, himpunan bagian sederhana akan diberi lambang huruf besar A, B, C, . . . dan sebagainya, tanpa ada tanda tambahan apa-apa di bawahnya. Sedangkan himpunan bagian kabur akan diberi lambang huruf besar A, B, C, .

. . dengan diberi tambahan lambang ”~” (*tilde*) di bawahnya seperti berikut; $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, . . . dan sebagainya.

Berikut ini akan Anda temukan beberapa contoh lagi tentang himpunan bagian kabur beserta dengan derajat keanggotaannya.

Contoh 5

Misalkan $E = \{a, b, c, d, e\}$ dan $\underset{\sim}{A} \subset E$. Tentukanlah $\underset{\sim}{A}$, jika

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0;\text{ untuk } x = a, d, f \\ 0{,}5;\text{ untuk } x = c, e \\ 1;\text{ untuk } x = b \end{cases}$$

Penyelesaian

$\underset{\sim}{A} = \{(a\,|0), (b\,|1), (c\,|0{,}5), (d\,|0), (e\,|0{,}5), (f\,|0)\}$

Pada contoh ini, keanggotan dalam himpunan kabur $\underset{\sim}{A}$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A} \text{ atau } a \notin \underset{\sim}{A}; \qquad b \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A} \text{ atau } b \in \underset{\sim}{A}; \qquad c \underset{0,5}{\in} \underset{\sim}{A};$$

$$d \notin \underset{\sim}{A}; \quad e \underset{0,5}{\in} \underset{\sim}{A}; \text{ dan } f \notin \underset{\sim}{A}$$

Contoh 6

Misalkan $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan $\underset{\sim}{A} \subset E$. Jika

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \frac{|5 - x|}{5} \text{ untuk setiap } x \text{ di } E,$$

tentukanlah $\underset{\sim}{A}$.

Penyelesaian

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(0) = 1$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(1) = 0{,}8$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(2) = 0{,}6$;

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(3) = 0{,}4$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(4) = 0{,}2$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(5) = 0$;

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(6) = 0{,}2$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(7) = 0{,}4$; $\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(8) = 0{,}6$; dan $\mu_{\underset{\sim}{A}}(9) = 0{,}8$.

Ini berarti,

$0 \in \underset{\sim}{A}$; $1 \underset{0,8}{\in} \underset{\sim}{A}$; $2 \underset{0,6}{\in} \underset{\sim}{A}$; $3 \underset{0,4}{\in} \underset{\sim}{A}$; $4 \underset{0,2}{\in} \underset{\sim}{A}$;

$5 \notin \underset{\sim}{A}$; $6 \underset{0,2}{\in} \underset{\sim}{A}$; $7 \underset{0,4}{\in} \underset{\sim}{A}$; $8 \underset{0,6}{\in} \underset{\sim}{A}$;dan $9 \underset{0,8}{\in} \underset{\sim}{A}$.

Jadi,

$\underset{\sim}{A}$ = {(0|1), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0), (6|0,2), (7|0,4), (8|0,6), (9|0,8)}.

Contoh 7

Misalkan E ={x | x real dengan $0 \leq x \leq 3$} dan $\underset{\sim}{A} \subset E$. Diketahui fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{A}$ diberikan oleh,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}\displaystyle\int_0^x t^2 dt \text{ untuk } x \in E \\ 0, \text{untuk } x \notin E \end{cases}$$

Hitunglah derajat keanggotaan x dalam $\underset{\sim}{A}$, jika

a. $x = 2$
b. $x = 1$
c. $x = 4$

Penyelesaian

a. $2 \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}(2)}{\in} \underset{\sim}{A}$ dengan derajat keanggotaannya sebesar,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(2) = \frac{3}{8}\int_0^2 t^2 dt = \frac{1}{8}\, t^3 \Big|_0^2 = 1$$

b. $1 \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}(1)}{\in} \underset{\sim}{A}$ dengan derajat keanggotaannya sebesar,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(1) = \frac{3}{8}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{8} t^3 \Big|_0^1 = 0{,}125$$

c. $4 \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}(4)}{\in} \underset{\sim}{A}$ dengan derajat keanggotaannya sebesar,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(4) = 0, \text{ sebab } 4 \notin E.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Berikanlah 5 (lima) buah contoh himpunan bagian kabur yang Anda temui sehari-hari.
2) Bilamanakah himpunan bagian kabur menjadi himpunan bagian sederhana?
3) Misalkan N himpunan bilangan bulat non-negatif,

   $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

   dan $\underset{\sim}{A} \subset N$ terdiri atas semua bilangan bulat yang kecil-kecil dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ didefinisikan oleh,

   $$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{5-x}{5}; \text{untuk } x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0; \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

   Bilangan bulat manakah yang dikatakan kecil?
   Tentukanlah $\underset{\sim}{A}$!
   Hitung derajat keanggotaan dari 2 dalam $\underset{\sim}{A}$!
4) Misalkan R^+ himpunan bilangan real non-negatif dan $\underset{\sim}{A} \subset R^+$ dengan fungsi keanggotaannya didefinisikan sebagai berikut,

   $$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \int_0^x e^{-t}\, dt .$$

   Hitunglah derajat keanggotaan x dalam $\underset{\sim}{A}$, jika:

   $x = 1$

   $x = 1{,}5$

   $x = 2$

Petunjuk Jawaban Latihan

Gunakanlah definisi tentang: himpunan bagian kabur, fungsi keanggotaan. Untuk nomor 1, Anda dianjurkan mengamati himpunan apa saja yang dideskripsikan secara kualitatif. Umpamanya, himpunan buah-buahan yang

berwarna merah. Untuk nomor 2, gunakanlah definisi himpunan bagian kabur dan himpunan bagian sederhana ditinjau dari fungsi keanggotaannya.
Nomor 3 sudah cukup jelas.
Untuk nomor 4, gunakan fakta bahwa:

(i) $\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1.$

(ii) Hasil hitungan, cukup sampai 2 angka dibelakang koma.

RANGKUMAN

1. Himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A}$ dari E adalah himpunan yang berbentuk, $\{(x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in E\}$ atau $\{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ = derajat keanggotaan x, $x \in E\}$
2. Fungsi $\mu_{\underset{\sim}{A}}: \ E \to [0,1]$ dinamakan fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{A}$, dan $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ disebut derajat keanggotaan x dalam $\underset{\sim}{A}$.
3. Elemen x dalam $\underset{\sim}{A}$ yang memiliki derajat keanggotaan $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ ditulis $x \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{\in} \underset{\sim}{A}$.
4. Lambang $\underset{1}{\in}$ ekivalen dengan $\in$. Sedangkan lambang $\underset{0}{\in}$ ekivalen dengan $\notin$.
5. Jika E merupakan himpunan hingga, $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, maka himpunan bagian kabur $\underset{\sim}{A} \subset E$ dapat dituliskan dalam bentuk berikut:
$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1 \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)), (x_2 \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)), \ldots, (x_n \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n))\}$$
6. $\underset{\sim}{A} \subset E$ jika dan hanya jika $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_E(x)$ untuk setiap $x \in E$.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Misalkan $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\underset{\sim}{P} \subset E$, dan $\underset{\sim}{Q} \subset E$. Fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{P}$ dan dalam $\underset{\sim}{Q}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu_{\underset{\sim}{P}}(x) = \begin{cases} 0;\text{ untuk } x = e, f \\ 0,4;\text{ untuk } x = a, c, d \\ 1;\text{ untuk } x = b \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}}(x) = \begin{cases} 0;\text{ untuk } x = c \\ 0,2;\text{ untuk } x = b, e, f \\ 0,5;\text{ untuk } x = a \\ 1;\text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Maka

1) $\mu_{\underset{\sim}{P}}(d)$ dan $\mu_{\underset{\sim}{P}}(f)$ masing-masing berharga ….

A. 0,4
B. 0 dan 0,4
C. 0,4 dan 0
D. 0

2) Derajat keanggotaan a dalam $\underset{\sim}{P}$ adalah ….

A. 0,4
B. 0
C. 0,5
D. 1

3) Derajat keanggotaan b dalam $\underset{\sim}{Q}$ adalah ….

A. 0,2
B. 0,4
C. 0,5
D. 1

4) $\underset{\sim}{P}$ =

A. {(a |0,4), (b |0,4), (c |0,4), (d |0,4), (e |0), (f |0)}
B. {(a |0,5), (b |0,2), (c |0), (d |0,4), (e |0), (f |0)}
C. {(a |0), (b |0,5), (c |0,4), (d |1), (e |0), (f |0,2)}
D. {(a |1), (b |0,4), (c |0), (d |0), (e |0), (f |0,2)}

5) $\underset{\sim}{Q}$ =

A. {(a |0), (b |0,2), (c |0,4), (d |1), (e |0), (f |0,2)}
B. {(a |1), (b |0,2), (c |0), (d |0,4), (e |0), (f |0)}
C. {(a |0,4), (b |0,2), (c |0,4), (d |0,4), (e |0,2), (f |0)}
D. {(a |0,5), (b |0,2), (c |0), (d |1), (e |0,2), (f |0,2)}

II. Misalkan Z himpunan bilangan bulat dan $\underset{\sim}{P} \subset Z$. Fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{P}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu_{\underset{\sim}{P}}(x) = \begin{cases} \dfrac{|5-|x||}{5}; \text{untuk } |x| \leq 5, x \in Z \\ 0; \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Maka,

6) $\mu_{\underset{\sim}{P}}(5)$ =

A. 1
B. 0,9
C. 0,1
D. 0

7) $\mu_{\underset{\sim}{P}}(-4)$ =

A. 1
B. 0,8
C. 0,2
D. 0

8) Derajat keanggotaan dari $x = -2$ dalam $\underset{\sim}{P}$ adalah

A. 0,4
B. 0,6
C. 0,8
D. 0,2

9) $\underset{\sim}{P}$ =

A. {(1|0,2), (2|0,4), (3|0,6), (4|0,8), (5|1)}
B. {(-5|0), (-4|0,2), (-3|0,4), (-2|0,6), (-1|0,8), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0)}
C. {(-5|0), (-4|0,2), (-3|0,4), (-2|0,6), (-1|0,8), (0|1), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0)}
D. {(-5|0), (-4|0,2), (-3|0,4), (-2|0,6), (-1|0,8), (0|1)}

III. *R* adalah himpunan bilangan real dan $\underset{\sim}{U} \subset R$. Fungsi keanggotaan dalam $\underset{\sim}{U}$ didefinisikan oleh,

$$\mu_{\underset{\sim}{U}}(x) = \begin{cases} 2\int_0^x t\,dt \text{ untuk } 0 \le x < 1 \\ 0; \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Maka,

10) $\mu_{\underset{\sim}{U}}(0,5)$ =

A. 0,1
B. 0,25
C. 0,5
D. 0,75

11) Derajat keanggotaan dari x = 0,8 dalam $\underset{\sim}{U}$ adalah,

A. 0,64
B. 0,48
C. 0,36
D. 0,28

12. Derajat keanggotaan dari x = 1 dalam $\underset{\sim}{U}$ adalah,

A. 1
B. 0,65
C. 0,35
D. 0

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1		*Tes Formatif 2*	
1)	B	1)	C
2)	A	2)	A
3)	C	3)	A
4)	A	4)	A
5)	A	5)	D
6)	B	6)	D
7)	D	7)	C
8)	B	8)	B
9)	D	9)	C
10)	D	10)	B
		11)	A
		12)	D

Daftar Pustaka

Caillez dan Pages (1976). *Introduction a l' Analyse des Donnees,* SMASH, Paris.

Djauhari M.A. (1994). A Fuzzy Relation Approach in the Detection fo Influential Subsets, *Proceedings Islamic Countries Conference on Statisticas IV* (ICCS IV), Vol. 8, p. 423 – 428, Lahore.

Djauhari M.A (1996). A Necessary and Sufficient Condition for the Uniqueness of Minimum Soanning Tree, *Proceedings Institut Teknologi Bandung,* Vol. 29, No. ½, p. 11 – 18.

Gray J.B dan Ling R.F. (1984)./ k-klustering as a detection tool for influential subsets in regression. *Technometrics*, Vol.26,No.4.

Hakim D. M. (2003). Optimasi Kualitas Citra Dijital Foto Udara dengan Metode Samar-Fungsi 'S' untuk Meningkatkan Interpretabilitas, *Disertasi Program Doktor,* Institut Teknologi Bandung.