MODUL 1

Bilangan Real

Drs. Soemoenar

PENDAHULUAN

Semesta pembicaraan Kalkulus adalah himpunan bilangan real. Jadi jika akan belajar kalkulus harus paham terlebih dahulu tentang bilangan real. Bagaimanakah struktur himpunan bilangan real dan sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh bilangan real.

Modul ini menyajikan kajian tentang Bilangan Real. Kajian Bilangan Real mengutamakan empat cakupan sebagai berikut.

1. Sistem bilangan real.
2. Ketaksamaan.
3. Harga mutlak.
4. Sistem koordinat siku-siku.

Kajian sistem bilangan real memberikan kemampuan membedakan himpunan bilangan asli, himpunan bilangan cacah, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan irasional, dan himpunan bilangan real. Kajian ketaksamaan memberikan kemampuan menggunakan notasi interval dengan benar, dan menyelesaikan pertaksamaan. Kajian harga mutlak memberikan kemampuan menyelesaikan persamaan mutlak dan menyelesaikan pertaksamaan mutlak.

Setelah mempelajari/mengkaji modul ini, secara umum Anda diharapkan dapat menggunakan konsep dalam sistem bilangan real untuk menyelesaikan permasalahan matematika dan kehidupan sehari-hari.

Kemampuan umum yang disebut di atas dirinci lebih lanjut menjadi tujuan instruksional khusus sebagai berikut. Setelah belajar modul ini, diharapkan Anda dapat:

1. membedakan macam-macam interval;
2. menyelesaikan permasalahan pertaksamaan linear;
3. menyelesaikan permasalahan pertaksamaan kuadrat;

4. menyelesaikan permasalahan pertaksamaan polinom;
5. menyelesaikan permasalahan pertaksamaan pecahan;
6. menyelesaikan permasalahan pertaksamaan mutlak;
7. menyelesaikan permasalahan persamaan mutlak;
8. menggambar grafik persamaan linear;
9. menggambar grafik parabola;
10. menggambar grafik lingkaran;
11. menggambar grafik hiperbol.

Modul ini disajikan dalam dua kegiatan belajar, yaitu sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Bilangan Real, menyajikan struktur himpunan bilangan real. sifat-sifat bilangan real, sifat-sifat ketaksamaan, notasi interval, definisi dan dalil-dalil harga mutlak. Disajikan juga contoh-contoh menyelesaikan pertaksamaan linear, pertaksamaan kuadrat, pertaksamaan polinom, pertaksamaan pecahan, persamaan mutlak, dan pertaksamaan mutlak.

Kegiatan Belajar 2: Sistem Koordinat Siku-siku, menyajikan sistem koordinat siku-siku, menggambar grafik persamaan linear, persamaan kuadrat, persamaan lingkaran, dan persamaan hiperbol.

Belajar modul ini sebaiknya dilakukan dalam bentuk belajar kelompok. Kelompok belajar yang dibentuk beranggotakan tidak terlalu banyak. Tiga atau empat anggota sudah cukup. Salah seorang bertindak sebagai ketua kelompok dengan kewajiban menjaga keharmonisan belajar dan membuat rencana belajar. Ada baiknya contoh soal dijadikan soal latihan. Ini penting untuk membangkitkan dan memupuk rasa percaya diri. Hal-hal yang tidak dimengerti dicatat untuk diajukan sebagai pertanyaan pada waktu tutorial. Soal latihan didiskusikan jawabnya sebelum dicocokkan dengan kunci jawaban latihan.

Selamat belajar, semoga berhasil!

KEGIATAN BELAJAR 1

Bilangan Real

A. SISTEM BILANGAN REAL

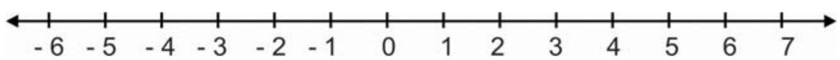
Bilangan yang mula-mula dikenal adalah ***bilangan asli*** 1, 2, 3, 4, 5, ... Himpunan bilangan Asli diberi simbol N, dan ditulis:

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Bilangan Asli juga dikenal sebagai ***bilangan bulat positif***, bilangan –1, –2, –3, –4, . . . dinamai ***bilangan bulat negatif***. Bilangan bulat positif, bilangan 0 (nol), dan bilangan bulat negatif bersama-sama membentuk himpunan ***bilangan bulat*** yang diberi simbol Z, dan ditulis:

$$Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Adakalanya karena suatu keperluan anggota himpunan bilangan bulat dikaitkan dengan sebuah titik pada sebuah garis yang kemudian dikenal sebagai ***garis bilangan.***



Gambar 1.1.
Garis Bilangan

Setelah sebuah titik ditetapkan mewakili bilangan 0 maka titik yang mewakili bilangan 1 adalah titik yang berjarak satu satuan di sebelah kanan titik yang mewakili bilangan 0. Selanjutnya titik-titik di sebelah kanan 0 yang berjarak dua satuan, tiga satuan, empat satuan, dan seterusnya berturut-turut mewakili bilangan-bilangan 2, 3, 4, ... Titik yang berjarak satu satuan di sebelah kiri titik yang mewakili bilangan 0 adalah titik yang mewakili bilangan –1. Demikian seterusnya titik-titik di sebelah kiri 0 yang berjarak dua satuan, tiga satuan, empat satuan, dan seterusnya mewakili bilangan –2, –3, –4, ...

Karena perkembangan kemampuan berhitung manusia, himpunan bilangan bulat saja tidak memadai. Adakalanya di dalam pengukuran panjang didapat hasil yang berbentuk, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{3}{2}, \frac{17}{5}$, atau $\frac{9}{4}$. Jadi, diperlukan bilangan yang merupakan hasil bagi dari dua bilangan bulat. Bilangan yang terbentuk sebagai $\frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat, dan $n \neq 0$ dinamai ***bilangan rasional***. Sesuai dengan definisi bilangan rasional tersebut, bilangan bulat dan bilangan pecah bersama-sama membentuk himpunan bilangan rasional. Himpunan bilangan rasional diberi simbol dengan huruf Q. Himpunan bilangan rasional tidak mungkin lagi dituliskan dalam bentuk tabulasi.

Bilangan $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat $\frac{m}{n}$, jadi $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional, dan disebut ***bilangan irasional***.

Cara mudah membedakan bilangan rasional dengan bilangan irasional ialah dengan cara menuliskan bentuk desimal bilangan tersebut dengan menggunakan kalkulator.

Bilangan rasional:

2 : 3 = 0, 666 666 666 . . .

13 : 11 = 1, 18 18 18 18 . . .

17 : 3 = 5, 666 666 666 . . .

125 : 999 = 0, 125 125 125 . . .

Ternyata bilangan rasional dihitung dengan kalkulator menghasilkan pecahan desimal berulang. Artinya, di dalam bentuk pecahan desimal tersebut ada beberapa angka yang berulang kali muncul secara teratur.

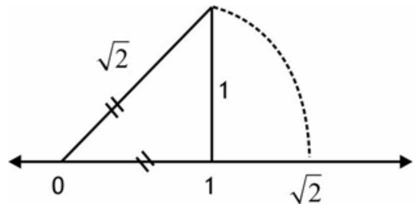
Bilangan irasional.

$\sqrt{2}$ = 1,414 213 562 . . .

$\sqrt{5}$ = 2,36 067 977 . . .

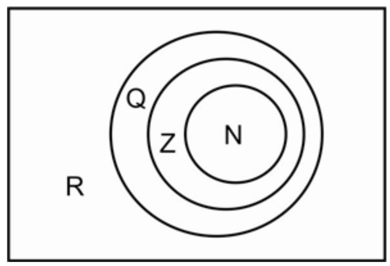
Ternyata bilangan irasional jika dihitung dengan kalkulator menghasilkan bilangan desimal yang tidak berulang.

Bilangan irasional dapat juga digunakan sebagai hasil pengukuran panjang ruas garis (seperti pada Gambar 1.2), dengan demikian bilangan irasional dapat juga diwakili oleh sebuah titik pada garis bilangan seperti gambar di bawah ini.



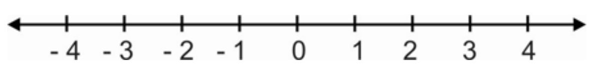
Gambar 1.2.
Bilangan Irasional $\sqrt{2}$

Gabungan himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional disebut himpunan bilangan ***real*** yang diberi simbol dengan huruf R. Dengan diagram Venn himpunan bilangan real, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan bulat, dan himpunan bilangan asli di gambarkan sebagai berikut.



Gambar 1.3.
Diagram Venn Relasi antara Himpunan Bilangan

Terdapat korespondensi satu-satu antara bilangan real dengan titik pada garis bilangan. Artinya, untuk setiap bilangan real yang disebut dapat ditunjuk sebuah titik pada garis bilangan yang mewakilinya. Sebaliknya, untuk setiap titik yang ditunjuk pada garis bilangan dapat disebut bilangan real yang diwakilinya.



Gambar 1.4.
Garis Bilangan

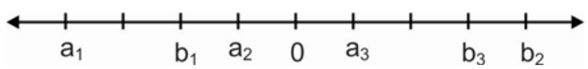
Jika terdapat beberapa bilangan real kita dapat menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan membagi yang biasa disebut ***pengerjaan (operasi) hitung*** bilangan.

Jika a, b, dan c adalah bilangan real sebarang maka memiliki sifat sebagai berikut.

1. $a + b = b + a$ (sifat komutatif penjumlahan).
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (sifat asosiatif penjumlahan).
3. Terdapat bilangan 0 dengan sifat $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Untuk setiap bilangan a terdapat penyelesaian khusus persamaan $a + x = 0$ yang diberi simbol $–a$.
5. $ab = ba$ (sifat komutatif perkalian).
6. $a (bc) = (ab) c$ (sifat asosiatif perkalian).
7. Terdapat bilangan 1 dengan sifat $a . 1 = 1 . a = a$.
8. Untuk bilangan $a \neq 0$ terdapat penyelesaian khusus untuk $ax = 1$ yang diberi simbol a^{-1}.
9. $a(b + c) = ab + ac$ (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan).
10. $ab = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ atau $b = 0$.
11. $(–a)(–b) = ab$ dan $(–a)b = a(–b) = –ab$.

B. KETAKSAMAAN

Dua bilangan real a dan b ditulis $a < b$ (dibaca, a kurang dari b) atau $b > a$ (dibaca, b lebih dari a) jika $b – a$ bertanda positif. Jika $a < b$ mempunyai arti bahwa letak titik yang mewakili b pada garis bilangan terletak di sebelah kanan titik yang mewakili bilangan a.



Gambar 1.5.
Garis Bilangan

$a_1 < b_1$; $a_2 < b_2$; $a_3 < b_3$

Simbol < dan > dinamai simbol ***ketaksamaan*** yang memiliki sifat:

1. Jika $a \neq 0$ maka berlaku salah satu hubungan $a < b$, $a > b$, atau $a = b$.
2. Jika $a < b$, dan $b < c$ maka $a < c$.

3. Jika a < b dan c adalah bilangan real maka a + c < b + c.
4. Jika a < b dan c > 0 maka ac < bc.
5. Jika a < b, dan c < 0 maka ac > bc.
6. Tidak ada bilangan a sehingga a < a.
7. Jika 0 < a < b maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.
8. Jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.
9. Jika a > 0, b > 0 maka a < b jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Kita dapat menuliskan kesamaan dan ketaksamaan dengan satu simbol "$\leq$" atau "$\geq$". Jika ditulis "$a \leq b$" dibaca, "a kurang dari atau sama dengan b". Jika ditulis "$a \geq b$" dibaca, "a lebih dari atau sama dengan b". Jika ditulis "$a < b \leq c$" dibaca b lebih dari a dan b kurang dari atau sama dengan c". Pernyataan "$a < b$" dinamai ketaksamaan sedang "$a < b \leq c$" dinamai ***ketaksamaan ganda***.

1. Interval

Himpunan semua bilangan real di antara dua bilangan real tertentu dinamai ***interval***. Himpunan $\{x \mid 1 < x < 6\}$ adalah interval dengan ujung-ujung interval 1 dan 6. Kedua ujung interval bukan anggota interval maka interval tersebut dinamai ***interval terbuka*** dan ditulis (1, 6). Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar 1.6. Jika ujung-ujung interval menjadi anggota maka interval tersebut dinamai ***interval tertutup***. Misal dalam bentuk himpunan $\{x \mid 1 < x < 6\}$, ditulis [1, 6]. Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar 1.7.

Gambar 1.6.
Interval $\{x \mid 1 < x \leq 6\}$

Gambar 1.7.
Interval $\{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$

Interval $\{x \mid -2 \leq x < 5\}$ dinamai ***interval tertutup di kiri dan terbuka di kanan*** dan ditulis $[-2, 5)$. Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar 1.7. Interval $\{x \mid -5 < x \leq -1\}$ dinamai ***interval terbuka di kiri dan tertutup di kanan*** dan ditulis $(-5, -1]$. Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar 1.8.

Gambar 1.8.
Interval $\{x \mid -2 \le x < 5\}$

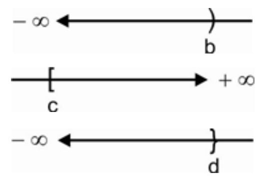
Gambar 1.9.
Interval $\{x \mid -5 < x \le -1\}$

Jika ujung interval adalah $+\infty$ atau $-\infty$ maka interval tersebut dinamai ***interval takhingga,*** misalnya interval $\{x \mid x > a\}$ ditulis $(a, +\infty)$ dan digambarkan 

$\{x \mid x < b\}$ ditulis $(-\infty, b)$

$\{x \mid x \ge c\}$ ditulis $[c, +\infty)$

$\{x \mid x \le d\}$ ditulis $(-\infty, d]$



Gambar 1.10.
Interval Takhingga

Simbol $+\infty$ menunjukkan bahwa nilai x menanjak menjadi besar sekali melampaui bilangan positif besar mana pun, dan simbol $-\infty$ menunjukkan bahwa nilai x merosot menjadi kecil sekali melampaui bilangan negatif kecil mana pun.

Himpunan bilangan real disajikan dalam bentuk interval sebagai $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ atau $(-\infty, +\infty)$.

Interval dapat digunakan sebagai himpunan penyelesaian pertaksamaan.

2. Pertaksamaan

Menyelesaikan pertaksamaan harus selalu ingat sifat-sifat ketaksamaan. Terutama sifat No. 3, 4, dan 5.

Contoh 1.1:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$2 - 3x < 5x + 6$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{lll} & 2 - 3x < 5x + 6 & \\ \Leftrightarrow & 2 - 3x - 2 < 5x + 6 - 2 & \text{sifat 3} \\ \Leftrightarrow & -3x < 5x + 4 & \\ \Leftrightarrow & -3x - 5x < 5x + 4 - 5x & \text{sifat 3} \\ \Leftrightarrow & -8x < 4 & \\ \Leftrightarrow & x > -\frac{1}{2} & \text{sifat 5} \end{array}$$

Himpunan penyelesaian $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Contoh 1.2:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$4 \leq 2x - 1 \leq 7$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{lll} & 4 \leq 2x - 1 \leq 7 & \\ \Leftrightarrow & 4 + 1 \leq 2x \leq 7 + 1 & \text{sifat 3} \\ \Leftrightarrow & 5 \leq 2x \leq 8 & \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{2} \leq x \leq 4 & \text{sifat 4} \end{array}$$

Himpunan penyelesaian $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$.

Contoh 1.3:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$x^2 - 6x < -8$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{lll} & x^2 - 6x < -8 & \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 8 < -8 + 8 & \text{sifat 3} \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 8 < 0 & \end{array}$$

Pertaksamaan yang akan diselesaikan merupakan pertaksamaan kuadrat. Cara menyelesaikannya memerlukan cara khusus.

a. Tentukanlah titik pemisah
   Titik pemisah adalah akar-akar $x^2 - 6x + 8 = 0$.

   $\Leftrightarrow$ $(x - 2)(x - 4) = 0$

   $\Leftrightarrow$ $x = 2$ atau $x = 4$

b. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan

   Oleh titik pemisah garis bilangan dipisahkan menjadi tiga daerah interval, yaitu $(-\infty, 2), (2, 4)$, dan $(4, +\infty)$. Selanjutnya, diselidiki tanda setiap daerah interval dengan cara menentukan titik uji.

c. Dipilih titik uji $x = 0$ yang terletak di daerah interval $(-\infty, 2)$.
   $x = 0$ disubstitusikan ke $x^2 - 6x + 8$ didapat 8 yang merupakan bilangan positif. Berarti interval $(-\infty, 2)$ bertanda positif. Daerah interval lainnya diberi tanda berseling + dan –.

d. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif sesuai dengan tanda soal yang harus diselesaikan. Pertaksamaan yang harus diselesaikan $x^2 - 6x + 8 < 0$. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif, yaitu (2, 4).

Contoh 1.4:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$(x + 5)(x + 2)^2(x - 1) > 0$

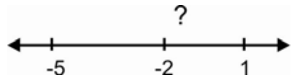
Penyelesaian:

1. Tentukanlah titik pemisah

   $(x + 5)(x + 2)2(x - 1) = 0$

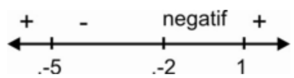
   $\Leftrightarrow$ $x = -5;\ x = -2;\ x = -2,$ atau $x = 1$

2. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan



Garis bilangan dipisahkan oleh titik-titik pemisah menjadi empat daerah interval, yaitu $(-\infty,-5)$, $(-5, -2)$, $(-2, 1)$, dan $(1,+\infty)$. Di titik $x = -2$ ada dua titik yang berimpit.

3. Dipilih titik uji yang terletak pada interval $(-2, 1)$, yaitu titik $x = 0$
$x = 0$ disubstitusikan ke $(x + 5)(x + 2)^2(x - 1)$ didapat -20 yang merupakan bilangan negatif. Berarti interval $(-2, 1)$ bertanda negatif. Interval yang lain diberi tanda berseling + dan –. Tetapi ingat bahwa titik $x = -2$ adalah titik rangkap dua sehingga interval $(-5, -2)$ bertanda negatif juga.



4. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda positif,

yaitu $(-\infty,-5)$ atau $(1, +\infty)$.

Contoh 1.5:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan

$$\frac{x}{x-2} \le 5$$

Penyelesaian:

$$\frac{x}{x-2} \le 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-2} - 5 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5(x-2)}{x-2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5x+10}{x-2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+10}{x-2} \le 0$$

Tanda dari hasil bagi bilangan bertanda sama dengan tanda dari hasil kali bilangan. Jadi menyelesaikan pertaksamaan $\frac{-4x + 10}{x - 2} \leq 0$ sama dengan menyelesaikan pertaksamaan $(-4x + 10)(x - 2) \leq 0$, untuk $(x - 2) \neq 0$.

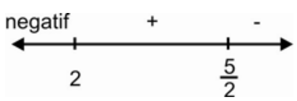
1. Tentukanlah titik pemisah
   $(-4x + 10)(x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ atau $x = 2$.

2. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan

   Garis bilangan dipisahkan oleh titik-titik pemisah menjadi tiga daerah interval, yaitu $(-\infty, 2], [2, \frac{5}{2}]$, dan $[\frac{5}{2} +\infty)$.

3. Dipilih titik uji yang terletak di daerah interval $(-\infty, 2)$, yaitu titik $x = 0$
   $x = 0$ disubstitusikan ke $(-4x + 10)(x - 2)$ didapat -20 merupakan bilangan negatif. Jadi interval $(-\infty, 2)$ bertanda negatif. Interval yang lain diberi tanda berseling + dan $-$.

4. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif. Ujung interval $x = \frac{5}{2}$ termasuk, tetapi ujung interval $x = 2$ tidak termasuk karena untuk $x = 2$ menyebabkan penyebut dari pecahan $\frac{-4x + 10}{x - 2}$ bernilai nol sehingga pecahan tersebut kehilangan arti. Jadi, himpunan penyelesaian adalah $(-\infty, 2]$ atau $[\frac{5}{2}, +\infty)$.

   Catatan:
   Soal ini dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{x}{x-2} \le 5$$

Ruas kiri dan ruas kanan dikalikan dengan $(x - 2)^2$, Tanda ketaksamaan tidak berubah.

$x(x - 2) \le 5(x - 2)^2$

$x^2 - 2x \le 5x^2 - 20x + 20$

$-4x^2 + 18x - 20 \le 0$

$(-4x + 10)(x - 2) \le 0.$

Selanjutnya diselesaikan seperti di atas.

C. HARGA MUTLAK

Harga mutlak bilangan real a ditulis $|a|$.

Definisi 1.1:

$|x| = x,$ untuk $x \ge 0$

$|x| = -x,$ untuk $x < 0$

Contoh:

$|4| = 4 \quad |-7| = -(-7) = 7 \quad |5-9| = |-4| = -(-4) = 4$

Dari definisi harga mutlak di atas dapat disimpulkan bahwa harga mutlak suatu bilangan adalah bilangan positif atau nol.

Di bawah ini disajikan beberapa dalil tentang sifat mutlak bilangan real.

Dalil 1.1:

$|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, untuk $a > 0$

Bukti:

Bukti dalil ini terdiri atas dua bagian, yaitu:
Jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$, untuk $a > 0$, dan
Jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$, untuk $a > 0$.

Bagian 1:
Akan dibuktikan jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$, untuk $a > 0$. Untuk membuktikannya perlu ditinjau dua kemungkinan, yaitu untuk $x \geq 0$ dan untuk $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$
   Menurut definisi $|x| = x$, jadi jika $x < a$ maka $|x| < a$. Terbukti.
2. Untuk $x < 0$
   Menurut definisi $|x| = -x$, jadi jika $-a < x$ maka $a > -x$ dengan demikian $|x| < a$.
   Terbukti.

Terbuktilah bagian 1: Jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$.

Bagian 2:
Akan dibuktikan jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$, untuk $a > 0$. Seperti pembuktian pada bagian 1, di sini ditinjau juga untuk dua kemungkinan, yaitu untuk $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$.
   Menurut definisi $|x| = x$, jadi jika $|x| < a$ maka $x < a$ untuk $a > 0$. Jika berlaku untuk $a > 0$ maka berlaku juga untuk $-a < 0$. Jadi, berlaku untuk $-a < 0 < x < a$ atau $-a < x < a$.
2. Untuk $x < 0$
   Menurut definisi $|x| = -x$, jadi jika $|x| < a$ maka $-x < a$. Tetapi karena $x < 0$ maka $-x > 0$ sehingga $-a < 0 < -x < a$ atau $-a < -x < a$ atau $a > x > -a$.

Terbuktilah bagian 2, jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$ untuk $a > 0$.

Maka lengkaplah pembuktian dalil:

$|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ untuk $a > 0$.

Akibat:

Sebagai akibat dalil 1.1 di atas.

$|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, untuk $a > 0$.

Dalil 1.2:

$|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Bukti:

Bukti terdiri atas dua bagian, yaitu:

Jika $x > a$ atau $x < -a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$, dan

Jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Bagian 1:
Akan dibuktikan, jika $x > a$ atau $x < -a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$. Ditinjau untuk harga $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$
   Menurut definisi $|x| = x$ jadi jika $x > a$ maka $|x| > a$. Terbukti.
2. Untuk $x < 0$
   Menurut definisi $|x| = -x$ jadi jika $x < -a$ maka $-x > a$ dengan demikian $|x| > a$.
   Terbukti.

Terbuktilah jika $x > a$ atau $x < a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$.

Bagian 2:
Akan dibuktikan jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$. Ditinjau untuk harga $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$
   Menurut definisi $|x| = x$ jadi jika $|x| > a$ maka $x > a$. Terbukti.
2. Untuk $x < 0$
   Menurut definisi $|x| = -x$ jadi jika $|x| > a$ maka $-x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$.
   Terbukti.

Terbuktilah jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$.
Maka lengkaplah pembuktian dalil:

$|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$.

Akibat:

Sebagai akibat dalil 1.2 di atas.
$|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq a$, untuk $a > 0$.

Contoh 1.6:

Selesaikanlah

$| 3x + 2 | = 5$

Penyelesaian:

$| 3x + 2 | = 5$

Menurut definisi

$| 3x + 2 | = 3x + 2$ untuk $(3x + 2) \geq 0$

$| 3x + 2 | = -(3x + 2)$ untuk $(3x + 2) < 0$

Untuk $(3x + 2) \geq 0$

$$\begin{aligned} &|3x+2| = 5 \\ &\Leftrightarrow 3x + 2 = 5 \\ &\Leftrightarrow 3x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Untuk $(3x + 2) < 0$

$$\begin{aligned} &|3x+2| = 5 \\ &\Leftrightarrow -(3x+2) = 5 \\ &\Leftrightarrow -3x - 2 = 5 \\ &\Leftrightarrow -3x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Jawab: $x = 1$ atau $x = -\frac{7}{3}$.

Contoh 1.7:

Tentukanlah himpunan penyelesaian:

$|x - 5| < 4$

Penyelesaian:

Menurut dalil, $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ untuk $a > 0$.
Jadi, $|x - 5| < 4$ jika dan hanya jika:

$-4 < (x-5) < 4$

$-4 < (x-5) < 4$

$\Leftrightarrow 1 < x < 9$

Himpunan penyelesaian $\{x \mid 1 < x < 9\}$.

Contoh 1.8:

Tentukanlah himpunan penyelesaian:

$|3x + 2| > 5$

Penyelesaian:

Menurut dalil $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < a$.
Jadi, $|3x + 2| > 5$ jika dan hanya jika $(3x + 2) > 5$ atau $(3x + 2) < -5$.
Untuk $3x + 2 > 5$

$\Leftrightarrow 3x > 3$

$\Leftrightarrow x > 1$

Untuk $3x + 2 < -5$

$\Leftrightarrow 3x < -7$

$\Leftrightarrow x < -\frac{7}{3}$.

Himpunan penyelesaian $\{x \mid 1 < x\}$ atau $\left\{x \mid x < -\frac{7}{3}\right\}$.

1. Akar Kuadrat

Penyelesaian $x^2 = 9$ adalah $x = \pm\sqrt{9}$ atau $x = \pm 3$. Jelaslah bahwa $\sqrt{9} = 3$ bukan ± 3. Jadi, simbol $\sqrt{a}$, untuk $a \geq 0$ adalah akar tak negatif dari a yang disebut ***akar kuadrat utama*** dari a.

Secara umum, ditulis $\sqrt{x^2} = |x|$

Dalil 1.3:

Jika a dan b adalah bilangan real maka:
$|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$

Bukti:

$$\begin{aligned} |a \,.\, b| &= \sqrt{(a\,.\,b)^2} \\ &= \sqrt{a^2\,.\,b^2} \\ &= \sqrt{a^2}\,.\sqrt{b^2} \end{aligned}$$

$|a \,.\, b| = |a|.|b|$

Dalil 1.4:

Jika a dan b adalah bilangan real dan b $\neq$ 0 maka:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Bukti:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$$

$$= = \frac{|a|}{|b|}$$

Dalil 1.5:

Jika a dan b adalah bilangan real maka:

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

Menurut definisi

$|a| = a$ untuk $a \geq 0$, berarti $a = |a|$ dan $|a| \geq 0$.

$|a| = -a$ untuk $a < 0$, berarti $a = -|a|$ dan $-|a| < 0$.

Maka untuk setiap bilangan real a dan b berlaku hubungan:

$-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$

Dari dua ketaksamaan ini dapat dibentuk ketaksamaan:

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Akibat dalil 1 menyebutkan
$|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, jadi sesuai dengan akibat dalil 1 didapat kesimpulan $|a + b| \leq |a| + |b|$. Terbukti.

Akibat:

Jika a dan b adalah bilangan real sebarang maka:

$| a - b| \leq | a | + | b |$

Bukti:

$| a - b | = | a + (-b)|$

Karena $| a + (-b) | \leq | a | + |(-b)|$ maka
$| a - b | \leq | a | + |(-b)|$
$| a - b | \leq | a | + | b |$.

Akibat

Jika a dan b adalah bilangan real sebarang maka:

$| a | - | b | \leq | a - b |$

Bukti:

$| a | = | a - b + b |$

$| a | = | (a - b) + b |$

Karena $| (a - b) + b| \leq | a - b | + | b |$ maka:

$| a | \leq | a - b | + | b |$

Jika ruas kiri dan ruas kanan dikurangi dengan $|b|$ maka:

$| a | - | b | \leq | a - b |$

Dalil 1.6:

$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Bukti:

Bukti terdiri atas dua bagian, yaitu:
jika $|a| < |b|$ maka $a^2 < b^2$, dan
jika $a^2 < b^2$ maka $|a| < |b|$.

Bagian 1
$|a| < |b|$
$|a|\ |a| < |b|\ |a|$ dan $|a|\ |b| < |b|\ |b|$

$|a|^2 < |a|\,|b|$ dan $|a|\,|b| < |b|^2$
$|a|^2 < |b|^2$
$a^2 < b^2$. Terbukti.

Bagian 2
$a^2 < b^2$
$|a|^2 < |b|^2$
$|a|^2 - |b|^2 < 0$
$(|a| - |b|)(|a| + |b|) < 0$. Karena $|a| + |b| > 0$ maka:
$|a| - |b| < 0$
$|a| < |b|$. Terbukti.

Maka lengkaplah bukti dalil

$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Contoh 1.9:

Tentukanlah himpunan penyelesaian:

$|x - 2| < 3|x + 7|$

Penyelesaian:

$$|x-2| < 3|x+7|$$
$$\Leftrightarrow |x-2| < |3x+21|$$

Menurut dalil 1.6

$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$

Jadi $|x - 2| < |3x + 21|$ jika dan hanya jika $(x - 2)^2 < (3x + 21)^2$

$$(x-2)^2 < (3x+21)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 9x^2 + 126x + 441$$
$$\Leftrightarrow 8x^2 + 130x + 437 > 0$$
$$\Leftrightarrow (4x + 19)(2x + 23) > 0$$

1. Tentukanlah titik pemisah:

$$(4x + 19)(2x + 23) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{19}{4} \text{ atau } x = -\frac{23}{2}.$$

2. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan

Garis bilangan dipisahkan oleh titik-titik pemisah menjadi tiga daerah interval, yaitu $\left(-\infty,-\frac{23}{2}\right)$, $\left(-\frac{23}{2},-\frac{19}{4}\right)$, dan $\left(-\frac{19}{4},+\infty\right)$.

3. Titik uji dipilih titik yang terletak di daerah interval $\left(-\frac{19}{4},+\infty\right)$, yaitu titik x = 0.
x = 0 disubstitusikan ke (4x + 19)(2x + 23) didapat 437 suatu bilangan positif. Jadi interval $\left(-\frac{19}{4},+\infty\right)$ bertanda positif. Daerah interval yang lain diberi tanda berseling + dan –.

4. Himpunan penyelesaian adalah daerah interval yang bertanda positif, yaitu $\left(-\infty,-\frac{23}{2}\right)$ atau $\left(-\frac{19}{4},+\infty\right)$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

1) $2 + 3x < 5x + 8$
2) $4 < 3x - 2 \leq 10$
3) $x^2 - 5x > -6$
4) $(x - 3)^2 (x + 2)(x - 6) < 0$
5) $\frac{x}{x-3} < 4$
6) $|x + 4| < 7$

7) $|9 - 2x| \geq |4x|$

Selesaikanlah:

8) $|3x - 8| = 4$

9) $|x - 2| = |3 - 2x|$

10) $\left|\dfrac{3x + 8}{3x - 3}\right| = 4$

Petunjuk Jawaban Latihan

Di bawah ini disajikan kunci jawaban dan petunjuk penyelesaian soal latihan.

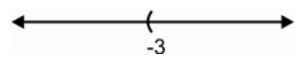
1) $2 + 3x < 5x + 8$

$\Leftrightarrow 3x - 5x < 8 - 2$

$\Leftrightarrow -2x < 6$

$\Leftrightarrow x > -3$

Jawab: $(-3, +\infty)$.



2) $4 + 2 < 3x \leq 10 + 2$

$\Leftrightarrow 6 < 3x < 12$

$\Leftrightarrow 2 < x < 4$

Jawab: (2, 4).

3) $x^2 - 5x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) > 0.$

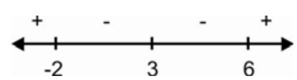
Titik pemisah $x = 2$ atau $x = 3$.

Setelah diuji dengan titik uji $x = 0$ diperoleh seperti gambar di samping.

Jawab: $(-\infty, 2)$ atau $(3, +\infty)$.

4) $(x - 3)^2 (x + 2)(x - 6) < 0$

Jawab: $(-2, 3)$ atau $(3, 6)$.



5) $\dfrac{x}{x - 3} - 4 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3x + 12}{x - 3} < 0$

Ekuivalen dengan $(-3x + 12)(x - 3) < 0$

dan $x \neq 3$,

atau $\frac{x}{x-3}.(x-3)^2 < 4.(x-3)^2$

$\Leftrightarrow$ $x(x-3) < 4(x-3)^2$

$x(x-3) - 4(x-3)^2 < 0$

$(x-3)(x-4(x-3)) < 0$

$(x-3)(-3x+12) < 0$

$(-3x+12)(x-3) < 0$

Jawab: $(-\infty, 3)$ atau $(4, +\infty)$

6) $|x+4| < 7$ jika dan hanya jika $-7 < x + 4 < 7$

$-7 < x + 4 < 7$

$-11 < x < 3$

Jawab: $(-11, 3)$.

7) Gunakanlah Dalil 1.6.

$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$

$|9 - 2x| \geq |4x|$ jika dan hanya jika $(9-2x)^2 \geq (4x)^2$

$\Leftrightarrow (9-2x)^2 \geq (4x)^2$

$\Leftrightarrow 81 - 36x + 4x^2 \geq 16x^2$

$\Leftrightarrow -12x^2 - 36x + 81 \geq 0$

$\Leftrightarrow 12x^2 + 36x - 81 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 27 \leq 0$

$\Leftrightarrow (2x+9)(2x-3) \leq 0$

Titik pemisah $x = -\frac{9}{2}$ atau $x = \frac{3}{2}$.

Setelah diuji dengan titik uji diperoleh:

$\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Jawab: $\left[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

8) Menurut definisi $|3x - 8| = 4$

$3x - 8 = 4$ atau $-(3x-8) = 4$

$3x - 8 = 4$ untuk $(3x - 8) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x = 12$

$\Leftrightarrow x = 4$.

$-(3x-8) = 4$ untuk $(3x-8) < 0$
$\Leftrightarrow -3x = -4$
$x = \dfrac{4}{3}$

Jawab: $x = 4$ atau $x = \dfrac{4}{3}$.

9) Menurut definisi $|x-2| = |3-2x|$
$x-2 = 3-2x$ atau $-(x-2) = 3-2x$
$x-2 = 3-2x$ untuk $(x-2) \geq 0$
$\Leftrightarrow 3x = 5$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$
$-(x-2) = 3-2x$ untuk $(x-2) < 0$
$\Leftrightarrow x = 1$.

Jawab: $x = 1$ atau $x = \dfrac{5}{3}$.

10) Gunakan $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ sehingga $\left|\dfrac{3x+8}{3x-3}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3x+8}{3x-3}\right| = 4$
$\Leftrightarrow |3x+8| = 4\,|3x-3|$

Jawab: $x = 4$ atau $x = \dfrac{4}{11}$.

RANGKUMAN

Apa yang sudah dipelajari, disajikan ulang dalam bentuk rangkuman sebagai berikut.

A. Bilangan Real
Sifat bilangan real.
Jika a, b, dan c adalah bilangan real sebarang maka memiliki sifat sebagai berikut.
1. $a + b = b + a$ (sifat komutatif penjumlahan).
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (sifat asosiatif penjumlahan).
3. Terdapat bilangan 0 dengan sifat $a + 0 = 0 + a = a$.

4. Untuk setiap bilangan a terdapat penyelesaian khusus persamaan $a + x = 0$ yang diberi simbol $-a$.
5. $ab = ba$ (sifat komutatif perkalian).
6. $a (bc) = (ab) c$ (sifat asosiatif perkalian).
7. Terdapat bilangan 1 dengan sifat $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
8. Untuk setiap bilangan $a \neq 0$ terdapat penyelesaian khusus persamaan $ax = 1$ yang diberi simbol a^{-1}.
9. $a(b + c) = ab + ac$ (sifat distributif).
10. $ab = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ atau $b = 0$.
11. $(-a)(-b) = ab$ dan $(-a)b = a(-b) = -ab$.

B. Ketaksamaan

Simbol < dan > dinamai simbol ketaksamaan yang memiliki sifat:

1. Jika $a \neq 0$ maka berlaku salah satu hubungan $a < b$, $a > b$, atau $a = b$.
2. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.
3. Jika $a < b$ dan c bilangan real maka $a + c < b + c$.
4. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.
5. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.
6. Tidak ada bilangan a sehingga $a < a$.
7. Jika $0 < a < b$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.
8. Jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$
9. Jika $a > 0$, $b > 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

C. Harga Mutlak

Definisi:

$|x| = x$, untuk $x \geq 0$
$|x| = -x$, untuk $x < 0$

Dalil 1.1

$|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, untuk $a > 0$.

Dalil 1.2

$|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Dalil 1.3

Jika a dan b bilangan real maka $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Dalil 1.4

Jika a dan b bilangan real dan $b \neq 0$ maka $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Dalil 1.5
Jika a dan b bilangan real maka $|a + b| < |a| + |b|$

Dalil 1.6
$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Himpunan penyelesaian $13 \geq 2x - 3 \geq 5$ adalah ….
   A. $(4, 8)$
   B. $[4, 8)$
   C. $(4, 8]$
   D. $[4, 8]$

2) Himpunan penyelesaian $4x^2 + 9x < 9$ adalah ….
   A. $\left(-3, \frac{3}{4}\right)$
   B. $\left[-3, \frac{3}{4}\right)$
   C. $\left(-3, \frac{3}{4}\right]$
   D. $\left\{-3, \frac{3}{4}\right]$

3) Himpunan penyelesaian $|3x - 4| \leq 2$ adalah ….
   A. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
   B. $(2, +\infty)$
   C. $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$
   D. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

4) Himpunan penyelesaian $|3x| > |6 - 3x|$ adalah ….
   A. $(1, +\infty)$
   B. $(-\infty, 1)$
   C. $[1, +\infty)$
   D. $(-\infty, 1]$

5) Himpunan penyelesaian $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| \le 4$ adalah ….
   A. $\left(-\infty, \dfrac{10}{9}\right]$
   B. $[2, +\infty)$
   C. $\left(-\infty, \dfrac{10}{9}\right]$ atau $[2, +\infty)$
   D. $\left[\dfrac{10}{9}, 2\right]$

6) Himpunan penyelesaian $\dfrac{x}{x-3} \le 3$ adalah ….
   A. $[2, 3]$
   B. $(-\infty, 2)$
   C. $[3, +\infty)$
   D. $(-\infty, 3)$ atau $\left[\dfrac{9}{2}, +\infty\right)$

7) Himpunan penyelesaian $|x + 4| > 5$ adalah ….
   A. $(-\infty, -9)$
   B. $(-\infty, -9)$ atau $(1, +\infty)$
   C. $(1, +\infty)$
   D. $(-\infty, -9]$ atau $[1, +\infty)$

8) Penyelesaian $|x + 3| = |6 - 2x|$ adalah ….
   A. $x = 1$ atau $x = 9$
   B. $x = -1$ atau $x = 9$
   C. $x = -1$ atau $x = -9$
   D. $x = 1$ atau $x = -9$

9) Penyelesaian $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$ adalah ….

A. $x = 3$ atau $x = -\frac{4}{3}$

B. $x = \frac{4}{3}$ atau $x = -3$

C. $x = \frac{4}{3}$ atau $x = 3$

D. $x = -\frac{4}{3}$ atau $x = -3$

10) Penyelesaian $|3x - 4| = 2$ adalah ….

A. $x = 2$ atau $x = \frac{2}{3}$

B. $x = -2$ atau $x = \frac{2}{3}$

C. $x = -2$ atau $x = -\frac{2}{3}$

D. $x = 2$ atau $x = -\frac{2}{3}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

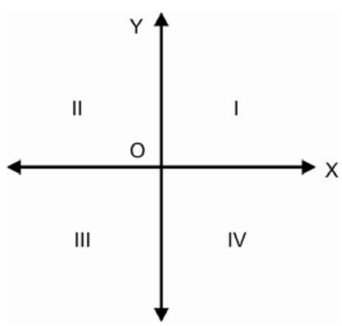
KEGIATAN BELAJAR 2

Sistem Koordinat Siku-siku

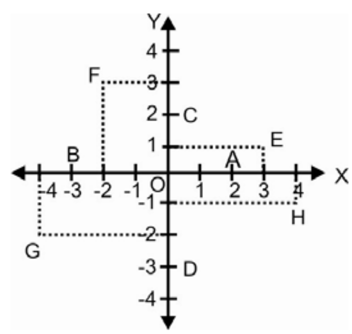
Sistem koordinat siku-siku diperlukan untuk menyajikan interpretasi geometris dari bangun-bangun aljabar. Pasangan berurutan (x, y) diberi arti sebagai koordinat sebuah titik. Persamaan linear $y = ax + b$ digambarkan oleh sebuah garis lurus. Persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memiliki parabola sebagai grafiknya, dan masih banyak lagi persamaan–persamaan aljabar yang dapat dibuat grafiknya, di antaranya berupa lingkaran, elips, hiperbola, dan garis lengkung lainnya.

A. SISTEM KOORDINAT SIKU-SIKU

Sistem koordinat siku-siku terdiri atas dua garis bilangan real yang saling berpotongan tegak lurus di titik O. Garis bilangan yang mendatar dinamai ***sumbu X*** dan garis bilangan yang tegak dinamai ***sumbu Y***. Titik potong O dinamai ***titik asal.*** Sumbu X di sebelah kanan titik O adalah sumbu X positif, dan di sebelah kiri titik O adalah sumbu X negatif. Sumbu Y di sebelah atas titik O adalah sumbu Y positif, dan di sebelah bawah titik O adalah sumbu Y negatif.



Gambar 1.11.
Kuadran dalam Sistem Koordinat



Gambar 1.12.
Letak Koordinat Titik-titik

Sumbu X dan Y yang berpotongan membagi bidang datar menjadi empat daerah yang berturut-turut dinamai ***kuadran I, kuadran II, kuadran III***, dan

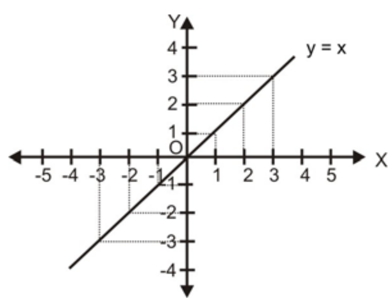
kuadran IV. Kuadran I adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu X positif dan sumbu Y positif seperti diperlihatkan pada Gambar 1.11. Sebuah titik yang berjarak a terhadap sumbu X dan berjarak b terhadap sumbu Y ditulis P(a, b). Dikatakan koordinat titik P adalah (a, b), a adalah koordinat x yang disebut ***absis***, dan b adalah koordinat y yang disebut ***ordinat.*** Pada Gambar 1.12 digambarkan titik-titik A(2, 0), B(–3, 0), C(0, 2), D(0, –3), E(3, 1), F(–2, 3), G(–4, –2), dan H(4, –1).

Sistem koordinat siku-siku juga dikenal sebagai ***sistem koordinat Kartesius***, diberi nama Kartesius sesuai dengan nama penciptanya yang bernama Rene Decartes.

B. GAMBAR GRAFIK PERSAMAAN

Persamaan dalam x dan y mempunyai pasangan berurutan (x, y) sebagai pasangan penyelesaian dari persamaan tersebut. Jika pasangan berurutan (x, y) diberi arti sebagai koordinat sebuah titik maka himpunan pasangan berurutan tersebut akan membentuk himpunan titik yang berupa kurva yang disebut ***grafik dari persamaan.***

Misalnya persamaan y = x. Persamaan ini memiliki pasangan berurutan (–3, –3), (–2, –2), (–1, –1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), dan (3, 3) yang merupakan sebagian dari penyelesaiannya. Jika pasangan berurutan tersebut diberi arti sebagai koordinat titik maka akan tergambarlah beberapa titik. Jika semua pasangan berurutan penyelesaian persamaan y = x untuk x semua bilangan real digambarkan sebagai titik maka akan didapat himpunan titik yang berupa garis lurus. Garis lurus ini dinamai grafik persamaan y = x, dan y = x dinamai ***persamaan grafik*** garis lurus seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.13.



Gambar 1.13.
Grafik Garis y = x

Untuk menggambar grafik suatu persamaan perlu digambar beberapa titik penting, di antaranya titik potong kurva dengan sumbu X, dan titik potong kurva dengan sumbu Y.

Contoh 1.10:

Gambarlah grafik persamaan y = 2x.

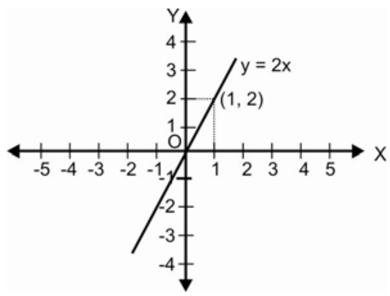
Penyelesaian:

Pasangan nilai x dan y yang memenuhi persamaan y = 2x

x	0	1	2
y	0	2	4

Titik-titik (0, 0), (1, 2), dan (2, 4)

Gambar grafik.



Gambar 1.14.
Grafik y = 2x

Contoh 1.11:

Gambarlah grafik $y = x^2$

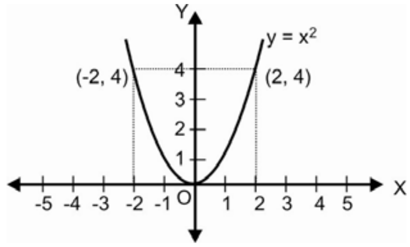
Penyelesaian:

Pasangan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = x^2$

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Titik-titik (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), dan (2, 4)

Gambar grafik



Gambar 1.15.
Grafik $y = x^2$

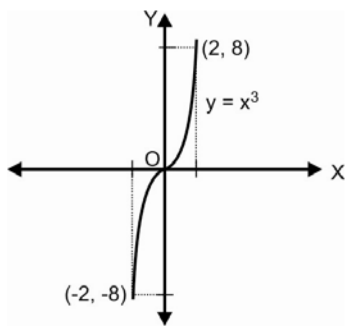
Gambar grafik $y = x^2$ dinamai ***parabola.***

Contoh 1.12:
Gambarlah grafik $y = x^3$

Penyelesaian:
Pasangan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = x^3$

x	–2	0	2
y	–8	0	8

Titik-titik (–2, –8), (0, 0), dan (2, 8).
Gambar grafik



Gambar 1.16.
Grafik $y = x^3$

Contoh 1.13:

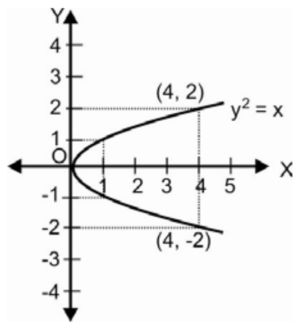
Gambarlah grafik persamaan $y^2 = x$.

Penyelesaian:

Pasangan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y^2 = x$.

x	4	1	0	1	4
y	–2	–1	0	1	2

Titik-titik (4, –2), (1, –1), (0, 0), (1, 1), dan (4, 2).
Gambar grafik



Gambar 1.17.
Grafik $y^2 = x$

Contoh 1.14:

Gambarlah grafik persamaan $y = x + 2$.

Penyelesaian:

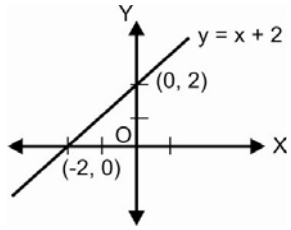
Titik potong grafik dengan sumbu x $\rightarrow$ y = 0

$$x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -2$$
$$\rightarrow \quad (-2, 0)$$

Titik potong grafik dengan sumbu y $\rightarrow$ x = 0

$y = 2 \rightarrow (0, 2)$

Gambar grafik



Gambar 1.18.
Grafik y = x + 2

Contoh 1.15:

Gambarlah grafik persamaan $y = -x^2 + 4x - 3$.

Penyelesaian:

Titik potong grafik dengan sumbu x $\rightarrow$ y = 0.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \text{ atau } x = 1$$

$\rightarrow$ (1, 0) dan (3, 0).

Titik potong grafik dengan sumbu y $\rightarrow$ x = 0.

y = –3 $\rightarrow$ (0, –3).

Persamaan sumbu simetri

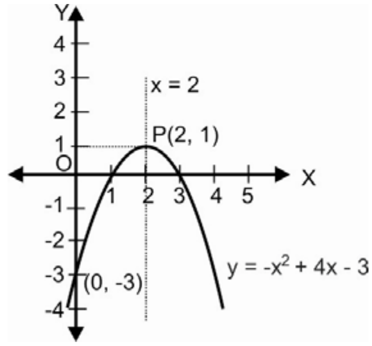
$$x = -\frac{b}{2a}$$
$$x = 2$$

Koordinat titik puncak $P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= 16 - 12 = 4 \;\rightarrow \frac{-D}{4a} = 1$$

P(2, 1).

Gambar grafik.



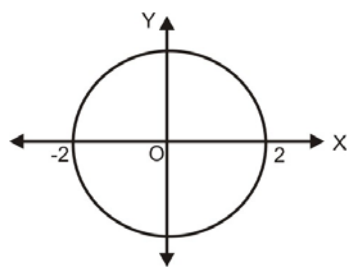
Gambar 1.19.
Grafik $y = -x^2 + 4x - 3$

Contoh 1.16:

Gambarlah grafik persamaan $x^2 + y^2 = 4$

Penyelesaian:

Persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ adalah persamaan umum lingkaran dengan titik pusat (a, b) dan jari-jari R. Jadi $x^2 + y^2 = 4$ adalah persamaan lingkaran dengan titik pusat (0, 0) dan jari-jari 2.



Gambar 1.20.
Grafik $x^2 + y^2 = 4$

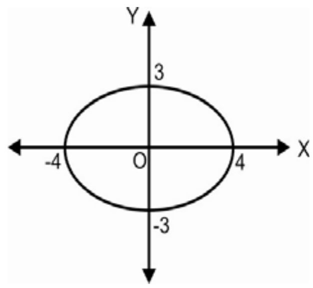
Contoh 1.17:

Gambarlah grafik persamaan $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Penyelesaian:

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ adalah persamaan elips dengan setengah sumbu panjang 4, setengah sumbu pendek 3, dan titik pusat (0, 0).

Gambar grafik



Gambar 1.21.
Grafik $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

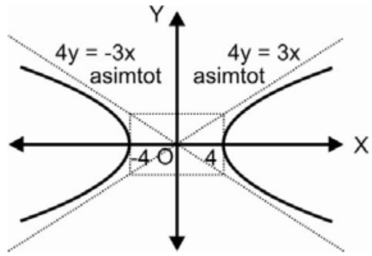
Contoh 1.18:

Gambarlah grafik persamaan $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Penyelesaian:

Persamaan $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ adalah persamaan hiperbola dengan sumbu X sebagai sumbu real. Koordinat titik puncak (–4, 0) dan (4, 0). Dan garis $y=\frac{3}{4}x$ dan garis $y=-\frac{3}{4}x$ sebagai asimtot.

Gambar grafik



Gambar 1.22.
Grafik $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Contoh 1.19:

Gambarlah grafik persamaan $y = x^2 - 4x + 4$ dan persamaan $y = -x + 4$ dalam satu susunan sumbu koordinat.

Penyelesaian:

1. $y = x^2 - 4x + 4$

   Titik potong grafik dengan sumbu x $\rightarrow$ y = 0

   $x^2 - 4x + 4 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad (x - 2)^2 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad x = 2$

   $\rightarrow$ (2, 0).

   Titik potong grafik dengan sumbu y $\rightarrow$ x = 0

   y = 4 $\rightarrow$ (0, 4).

   Persamaan sumbu simetri:

   $x = -\frac{b}{2a}$

   $x = 2$

   Koordinat titik puncak $P = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$.

$D = b^2 - 4ac$

$D = 0 \rightarrow P(2, 0)$

2. $y = -x + 4$
   Titik potong grafik dengan sumbu X $\rightarrow y = 0$

   $-x + 4 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \rightarrow (4,0)$

   Titik potong grafik dengan sumbu Y $\rightarrow x = 0$

   $y = 4 \rightarrow (0, 4)$.

3. Koordinat titik potong antara dua grafik

$$\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 4 \\ \underline{y = -x + 4} \quad - \\ 0 = x^2 - 3x \\ \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 3. \end{array}$$

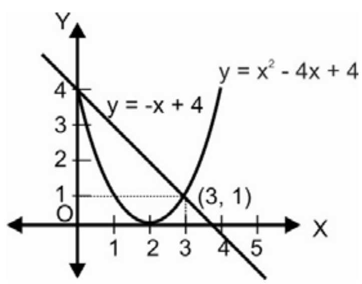
   Untuk $x = 0 \rightarrow y = -x + 4$

   $y = 4 \rightarrow (0, 4)$.

   Untuk $x = 3 \rightarrow y = -x + 4$

   $y = 1 \rightarrow (3, 1)$.

4. Gambar grafik



Gambar 1.23.
Grafik $y = x^2 - 4x + 4$ dan $y = -x + 4$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Gambarlah grafik persamaan berikut.

1) $y = -x$.
2) $y = x + 2$.
3) $y = -x - 2$.
4) $y = x^2 - 4x$.
5) $x = -y^2 + 4$.
6) $y = -x^2 - 4x - 3$.
7) $x = y^2 - 4y$.
8) $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4$ dalam satu susunan sumbu koordinat.
9) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.
10) $y = x^3 + 1$.

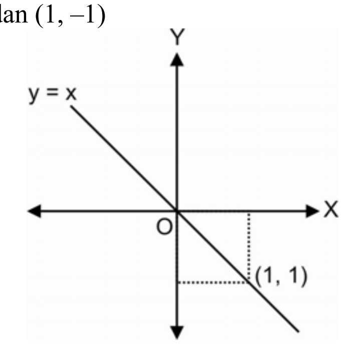
Petunjuk Jawaban Latihan

Di bawah ini disajikan kunci jawaban dan petunjuk penyelesaian soal latihan.

1) Pasangan nilai x dan y

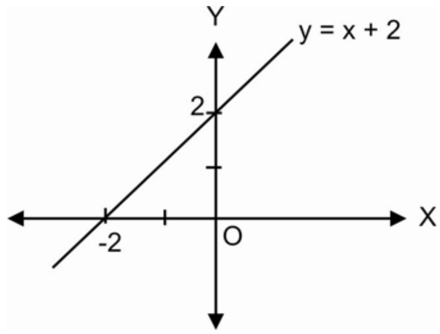
x	0	1
y	0	–1

Titik-titik (0, 0) dan (1, –1)



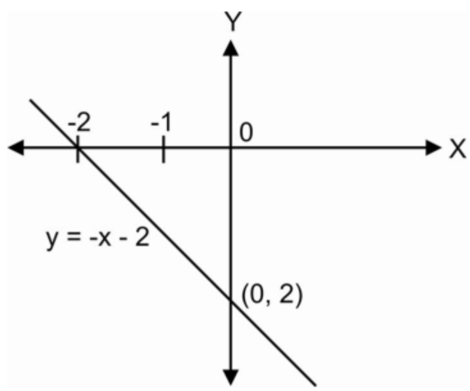
Gambar 1.24.
Grafik y = –x

2) Titik potong grafik dengan sumbu X → (–2, 0).
   Titik potong grafik dengan sumbu Y → (0, 2).



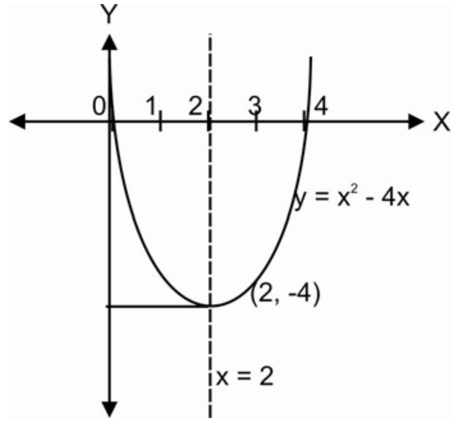
Gambar 1.25.
Grafik y = x + 2

3) Titik potong grafik dengan sumbu X → (–2, 0).
   Titik potong grafik dengan sumbu Y → ((0, –2).



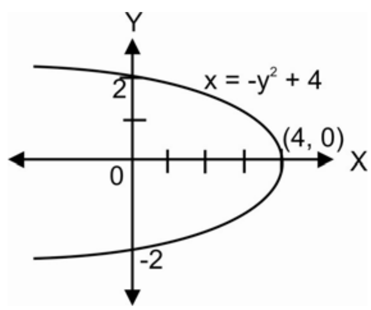
Gambar 1.26.
Grafik y = –x – 2

4) Lakukanlah langkah-langkah menggambar parabola:



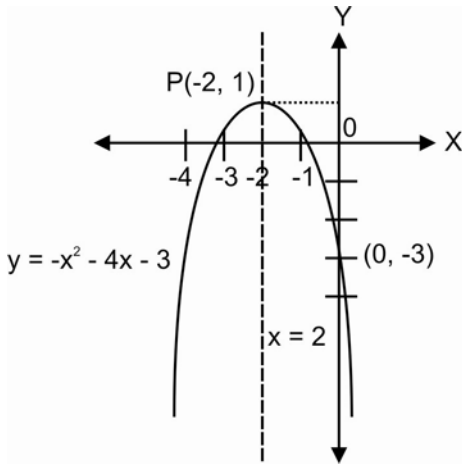
Gambar 1.27.
Grafik $y = x^2 - 4x$

5) Lakukanlah langkah-langkah menggambar grafik parabola.
Sumbu simetri $y = \frac{-b}{2a}$ dan koordinat titik puncak $P\left(\frac{-D}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$



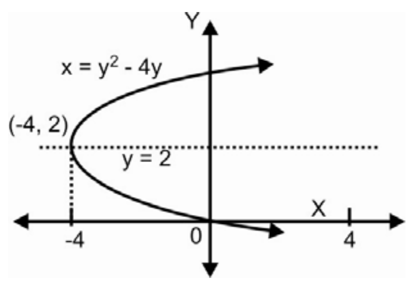
Gambar 1.28.
Grafik $x = -y^2 + 4$

6) Lakukanlah langkah-langkah menggambar grafik parabola.



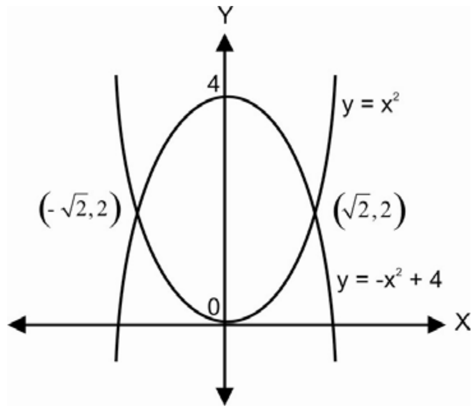
Gambar 1.29.
Grafik $y = -x^2 - 4x - 3$

7) Gambar grafik $x = y^2 - 4y$ adalah parabola dengan persamaan sumbu simetri $y = -\dfrac{b}{2a}$ yang sejajar dengan sumbu X. Koordinat titik puncak $P\left(\dfrac{-D}{4a}, -\dfrac{b}{2a}\right)$.



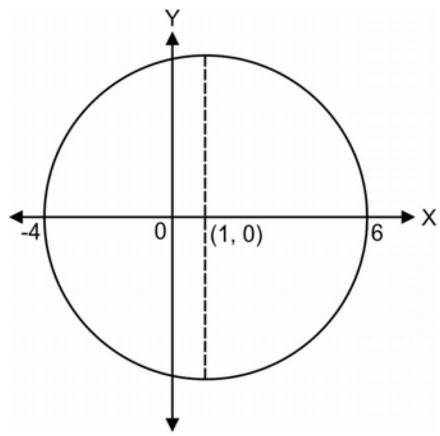
Gambar 1.30.
Grafik $x = y^2 - 4y$

8) $y = x^2$ adalah persamaan parabola yang terbuka ke atas dan $y = -x^2 + 4$ adalah persamaan parabola yang terbuka ke bawah, Koordinat titik potong antara dua parabola adalah $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$ dan $\left(\sqrt{2}, 2\right)$



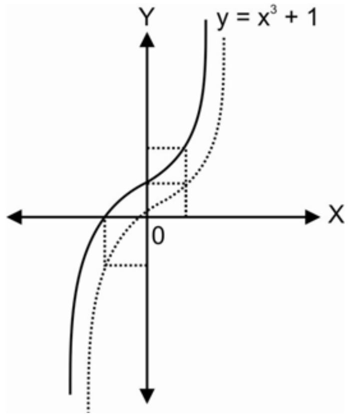
Gambar 1.31.
Grafik $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4$

9) Persamaan $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ adalah persamaan lingkaran dengan titik pusat (1, 0) dan jari-jari lingkaran 5.



Gambar 1.32.
Grafik $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

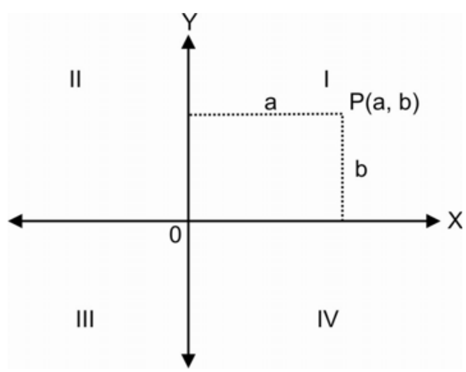
10) Gambar grafik $y = x^3 + 1$ dapat diperoleh dengan cara menggeser gambar grafik $y = x^3$ ke atas satu satuan.



Gambar 1.33.
Grafik $y = x^3 + 1$

RANGKUMAN

A. Sistem Koordinat Siku-siku



Gambar 1.34.
Sistem Koordinat Siku-siku

Sistem koordinat siku-siku terdiri atas dua garis bilangan yang saling berpotongan tegak lurus di titik O. Garis bilangan yang mendatar disebut ***sumbu X*** dan garis bilangan yang tegak disebut ***sumbu Y***. Oleh sumbu X dan sumbu Y yang berpotongan bidang terbagi menjadi empat bagian. Bagian bidang yang dibatasi oleh sumbu X positif dan sumbu Y positif disebut ***kuadran I*** Selanjutnya sesuai dengan arah putar berlawanan arah putar jarum jam bagian yang lain disebut ***kuadran II, kuadran III***, dan ***kuadran IV***. Sebuah titik P yang berjarak a terhadap sumbu Y, dan berjarak b terhadap sumbu X ditulis P(a, b) dan dikatakan bahwa titik P memiliki koordinat (a, b).

B. Gambar Grafik Persamaan
Setiap persamaan dalam peubah x dan y mempunyai pasangan berurutan (x, y) sebagai penyelesaian persamaan tersebut. Jika pasangan berurutan diberi interpretasi sebagai koordinat sebuah titik, untuk nilai x semua bilangan real maka himpunan pasangan berurutan penyelesaian persamaan tersebut akan menggambarkan sebuah kurva yang disebut sebagai gambar ***grafik persamaan***.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Gambar grafik persamaan $y = -x^2 - 4x$
   A. adalah parabola terbuka ke atas
   B. melalui titik (0, 0)
   C. mempunyai sumbu simetri sejajar dengan sumbu X
   D. mempunyai titik puncak di bawah sumbu X

2) Gambar grafik persamaan $x = y^2 + 4$
   A. mempunyai sumbu simetri sejajar sumbu Y
   B. tidak memotong sumbu X
   C. tidak memotong sumbu Y
   D. melalui titik (0, 0)

3) Gambar grafik persamaan $y = -x^2 + 4$ dan gambar grafik persamaan $y = -x + 2$.
   A. tidak saling berpotongan
   B. berpotongan di sebuah titik
   C. berpotongan di titik (–2, 0) dan (1, 3)
   D. berpotongan di titik (2, 0) dan (–1, 3)

4) Gambar grafik persamaan $x^2 - 4x + y^2 = 12$ adalah ….
   A. lingkaran dengan titik pusat (2, 0) dan jari-jari 4
   B. lingkaran dengan titik pusat (0, 2) dan jari-jari 4
   C. lingkaran dengan titik pusat (0, 2) dan jari-jari $\sqrt{12}$
   D. lingkaran dengan titik pusat (2, 0) dan jari-jari $\sqrt{12}$

5) Gambar grafik $y = x^2 + 4$ didapat dengan menggeser grafik $y = x^2$
   A. empat satuan ke bawah
   B. empat satuan ke kanan
   C. empat satuan ke kiri
   D. empat satuan ke atas

6) Persamaan $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$` adalah persamaan elips dengan ….
   A. sumbu panjang 6 dan sumbu pendek 4
   B. titik pusat (3, 2)
   C. sumbu panjang 3 dan sumbu pendek 2
   D. titik pusat (6, 4)

7) Grafik persamaan $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ adalah hiperbola dengan ….
   A. titik puncak (0, –2) dan (0, 2)
   B. sumbu X sebagai sumbu real
   C. asimtot garis $y = -\frac{3}{2}x$ dan $y = \frac{3}{2}x$
   D. titik pusat (3, 2)

8) Persamaan sumbu simetri grafik persamaan $y = x^2 - 6x$ adalah ….
   A. $y = 3x$
   B. $x = 3y$
   C. $y = 3$
   D. $x = 3$

9) Koordinat titik puncak grafik $x = y^2 + 4y + 4$ adalah ….
   A. (2, 0)
   B. (0, 2)
   C. (0, –2)
   D. (–2, 0)

10) Koordinat titik pusat grafik persamaan $x^2 + y^2 + 4y = 20$ adalah ….
   A. (–2, 0)
   B. (0, –2)
   C. (2, 0)
   D. (0, 2)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

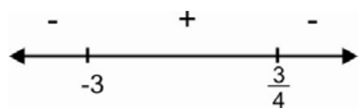
1) D. [4, 8].

$13 \geq 2x - 3 \geq 5$

$\Leftrightarrow\ 16 \geq 2x \geq 8$

$\Leftrightarrow\ 8 \geq x \geq 4$

2) A. $\left(-3, \dfrac{3}{4}\right)$.



$4x^2 + 9x - 9 < 0$

$(4x - 3)(x + 3) < 0$

3) C. $\left[\dfrac{2}{3}, 2\right]$. Menurut Dalil 1.1: $|3x - 4| \leq 2$ jika dan hanya jika

$-2 \leq (3x - 4) \leq 2$

$-2 \leq 3x - 4 \leq 2$

$\Leftrightarrow 2 \leq 3x \leq 6$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{3} \leq x \leq 2$

4) A. $(1, +\infty)$. Menurut dalil 1.6: $|3x| > |6 - 3x|$ jika dan hanya jika

$(3x)^2 > (6 - 3x)^2$

$(3x)^2 > (6 - 3x)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 > 36 - 36x + 9x^2$

$\Leftrightarrow 36(1 - x) < 0$

$x > 1$.

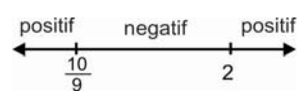
5) C. $\left(-\infty, \dfrac{9}{10}\right]$ atau $[2, +\infty)$. Menurut dalil 1.4: $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| = \dfrac{|x+2|}{|2x-3|}$ jadi

$|x + 2| \leq |8x - 12|$.

Menurut dalil 1.6: $|x + 2| \leq |8x - 12|$ jika dan hanya jika

$(x + 2)^2 \leq (8x - 12)^2$

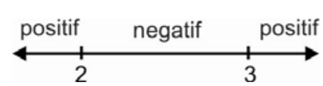
$(9x - 10)(7x - 14) \geq 0$



6) D. $(-\infty, 3)$ atau $\left[\dfrac{9}{2}, +\infty\right)$. Ruas kiri dan ruas kanan dikalikan $(x-3)^2$

didapat

$(2x - 9)(x - 3) \geq 0$, untuk $x \neq 3$



7) B. $(-\infty, -9)$ atau $(1, +\infty)$. Menurut Dalil 1.2: $|x + 4| > 5$ jika dan hanya jika $(x + 4) > 5$ atau $(x + 4) < -5$.

8) A. $x = 1$ atau $x = 9$. $|x + 3| = |6 - 2x|$ ekuivalen dengan $(x + 3) = (6 - 2x)$ atau $-(x + 3) = (6 - 2x)$.

9) C. $x = 3$ atau $x = \frac{4}{3}$. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$ ekuivalen dengan $|x + 2| = 5|x - 2|$.

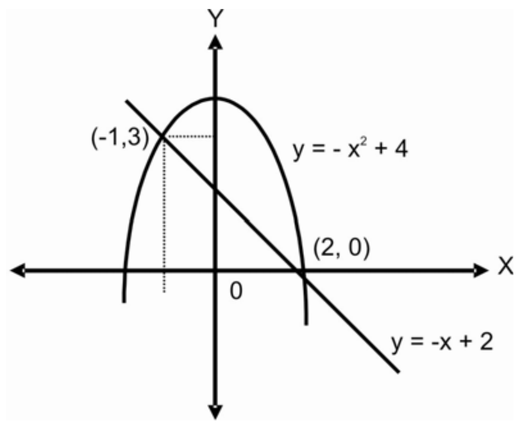
10) A. $x = 2$ atau $x = \frac{2}{3}$. $|3x - 4| = 2$ ekuivalen dengan $(3x - 4) = 2$ atau $-(3x - 4) = 2$.

Tes Formatif 2

1) B. Persamaan grafik $y = -x^2 - 4x$. Ruas kanan tidak memuat bilangan konstan maka grafik melalui titik (0, 0) sumbu simetri $x = -2$.

2) C. Persamaan grafik $x = y^2 + 4$. Untuk $x = 0$ maka $y^2 + 4 = 0$ tidak memiliki penyelesaian yang berarti grafik tidak memotong sumbu y. Grafik memotong sumbu x di (4, 0).

3) D. Gambar grafik $y = -x^2 + 4$ dan $y = x + 2$



Gambar 1.35.
Grafik $y = -x^2 + 4$ dan $y = -x + 2$

4) A. Persamaan $x^2 - 4x + y^2 = 12$ dapat ditulis sebagai $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ yang merupakan persamaan lingkaran dengan koordinat titik pusat (2, 0) dan jari-jari 4.

5) D. Gambar grafik $y = x^2 + 4$ didapat dari gambar grafik $y = x^2$ dengan menggeser 4 satuan ke atas.

6) A. Persamaan $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ adalah persamaan elips dengan sumbu panjang 3 dan sumbu pendek 2.

7) B. Persamaan $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ jika $x = 0$ maka $-y^2 = 4$ tidak memiliki penyelesaian. Berarti hiperbola tidak memotong sumbu Y. Jadi, sumbu real adalah sumbu X, sedangkan sumbu Y sumbu imaginer.

8) D. Sumbu simetri grafik parabola $y = x^2 - 6x$ adalah $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 3$.

9) C. Koordinat titik puncak parabola $x = y^2 + 4y + 4$ adalah:
$P\left(\frac{-D}{4a}, \frac{-b}{2a}\right) \Rightarrow P(0, 2)$.

10) B. Persamaan $x^2 + y^2 + 4y = 20$ dapat ditulis sebagai $x^2 + (y + 2)^2 = 24$ yang merupakan persamaan lingkaran dengan titik pusat $(0, -2)$.

Glosarium

Absis	:	Jarak sebuah titik terhadap sumbu y.
Akar kuadrat utama	:	Akar kuadrat utama dari $x^2 = 9$, $x = 3$.
Bilangan asli	:	Anggota himpunan {1, 2, 3, , 4, . . .}
Bilangan bulat	:	Anggota himpunan {. . . , –3 , –2, –1 , 0 , 1, 2, 3, . . .}.
Bilangan irasional	:	Misalnya $\sqrt{2}$
Bilangan rasional	:	Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{n}$ dengan m dan n bilangan bulat dan $n \neq 0$.
Garis bilangan	:	Garis lurus yang titik-titiknya mewakili bilangan real.
Grafik persamaan	:	Kurva yang merupakan himpunan titik-titik yang koordinatnya adalah pasangan berurutan yang memenuhi suatu persamaan.
Interval takhingga	:	Interval yang ujung-ujungnya $-\infty$ atau $+\infty$
Interval tertutup	:	Interval yang ujung-ujungnya anggota interval.
Interval terbuka	:	Interval yang ujung-ujungnya bukan anggota interval.
Ketaksamaan	:	Hubungan yang memuat tanda ketaksamaan.
Kuadran	:	Seperempat bagian bidang yang terbagi oleh sumbu x dan sumbu y.
Ordinat	:	Jarak titik terhadap sumbu x.
Pengerjaan hitung	:	Pekerjaan menambah, mengurang, mengalikan, membagi, memangkatkan, dan menarik akar.

Rumus

1. Definisi:

   $|x| = x$ untuk $x \geq 0$

   $|x| = -x$ untuk $x > 0$

2. Dalil 1.1:

   $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ untuk $a > 0$

   $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$ untuk $a > 0$

   Dalil 1.2:

   $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$ untuk $a > 0$

   $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$ untuk $a > 0$.

   Dalil 1.3:

   $|a \, . \, b| = |a| \, . \, |b|$

   Dalil 1.4:

   $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

   Dalil 1.5:

   $|a + b| \leq |a| + |b|$

   Dalil 1.6:

   $|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$

3. Parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$ memiliki sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan koordinat titik puncak $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

4. Parabola dengan persamaan $x = ay^2 + by + c$ memiliki sumbu simetri $y = \frac{-b}{2a}$ dan koordinat titik puncak $P\left(\frac{-D}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$.

Daftar Pustaka

Ayres Jr. Frank., Lea Prasetio, M.Sc., Dra. (1994). *Kalkulus.* Seri Buku Schaum. Jakarta: Erlangga.

Edwin J. Purcell., I Njoman Susila, dkk. (1989). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jilid 1 dan 2. Jakarta: Erlangga.

Leithold, Louis. (1981). *The Calculus With Analytic Geometry*. New York: Harper & Row, Publisher.