MODUL 1

Aljabar 1

Drs. H. Karso, M.Pd.

PENDAHULUAN

Modul yang sekarang Anda pelajari adalah modul yang pertama dari mata kuliah Materi Kurikuler Matematika SMA. Materi-materi yang disajikan dalam modul ini menyangkut konsep-konsep dasar dalam Aljabar yang berhubungan dengan konsep-konsep persamaan dan pertidaksamaan. Konsep-konsep ini merupakan prasyarat dalam mempelajari konsep-konsep matematika lainnya. Selain itu, dalam modul ini dimuat materi-materi pendalaman untuk menambah wawasan dalam pembelajaran matematika. Kondisi ini tentunya diperlukan untuk memantapkan pemahaman matematika lainnya maupun sebagai bekal menjalani pembelajaran matematika di sekolah.

Secara garis besarnya bahasan dalam modul ini terbagi menjadi dua bagian kegiatan belajar. Bagian *pertama*, mendiskusikan konsep-konsep fungsi, persamaan dan fungsi kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, sistem persamaan linear dan pertidaksamaan dua variabel. Pada kegiatan belajar *kedua*, dibahas pertidaksamaan dua variabel dan program linear.

Perlu pula diketahui bahwa secara umum setelah Anda mempelajari modul ini diharapkan dapat menjelaskan konsep-konsep persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, fungsi kuadrat, sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, serta program linear. Untuk menunjang kemampuan-kemampuan tersebut di antaranya diperlukan beberapa kompetensi khusus berikut ini.

1. Menyelesaikan masalah dalam matematika atau bidang lainnya yang penyelesaiannya menggunakan persamaan, pertidaksamaan kuadrat dan fungsi kuadrat.
2. Menjelaskan konsep-konsep persamaan kuadrat dan pertidaksamaan kuadrat serta fungsi kuadrat dengan menggunakan pendekatan dan atau media/alat peraga yang sesuai.

3. Menganalisis kesalahan yang biasa dilakukan oleh guru atau siswa (jika ada) dalam memahami konsep persamaan kuadrat dan pertidaksamaan kuadrat serta fungsi kuadrat.
4. Menyelesaikan masalah dalam matematika atau bidang lainnya yang penyelesaiannya menggunakan sistem persamaan linear, pertidaksamaan linear, dan program linear.
5. Menjelaskan sistem persamaan linear, pertidaksamaan linear, dan program linear dengan menggunakan pendekatan dan atau media/alat peraga yang sesuai.
6. Menganalisis kesalahan yang biasa dilakukan oleh guru atau siswa (jika ada) dalam memahami konsep persamaan linear, pertidaksamaan linear, dan program linear.

Adapun susunan materi dalam modul ini terbagi menjadi dua kegiatan belajar pokok, yaitu sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Fungsi, Fungsi Kuadrat, Persamaan Kuadrat, dan Pertidaksamaan Kuadrat.

Kegiatan Belajar 2: Sistem Persamaan Linear dan Pertidaksamaan Linear serta Program Linear.

Petunjuk Belajar

Untuk dapat memahami modul ini dengan baik serta mencapai kompetensi yang diharapkan, gunakanlah strategi belajar berikut.

1. Sebelum membaca modul ini, cermati terlebih dahulu glosarium pada akhir modul yang memuat istilah-istilah khusus yang digunakan dalam modul ini.
2. Baca materi modul dengan saksama, tambahkan catatan pinggir, berupa tanda tanya, pertanyaan, konsep lain yang relevan sesuai dengan pemikiran yang muncul.
3. Cermati dan kerjakan soal-soal latihan dan tes formatif seoptimal mungkin, serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk membuat penilaian tentang kemampuan pemahaman Anda.
4. Buatlah catatan khusus hasil diskusi dalam tutorial untuk digunakan dalam pembuatan tugas dan ujian akhir.
5. Usahakan Anda mempelajari beberapa buku sumber penunjang lainnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

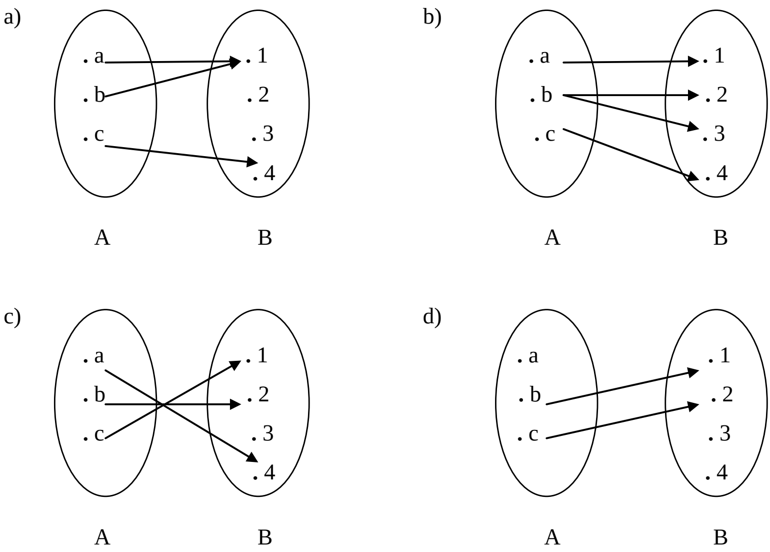
Fungsi, Fungsi Kuadrat, Persamaan Kuadrat, dan Pertidaksamaan Kuadrat

A. KONSEP FUNGSI

Perlu Anda ketahui bahwa pengetahuan yang mendalam tentang fungsi dan berbagai sifatnya akan sangat membantu dalam mempelajari konsep-konsep lainnya dalam matematika, terutama dalam belajar kalkulus. Tentunya kita dapat melihat bahwa semua topik sentral dalam kalkulus melibatkan fungsi sebagai objeknya. Khusus dalam kesempatan ini akan diperkenalkan konsep fungsi dengan dua cara, yaitu sebagai pemetaan dan sebagai himpunan pasangan terurut.

1. Pengertian Fungsi

Perhatikan empat buah relasi yang ditunjukkan dengan diagram panah seperti berikut ini.



Gambar 1.1.
Diagram a, b, dan c merupakan Fungsi, sedangkan d Bukan Fungsi

Suatu fungsi dapat dikatakan sebagai hal yang khusus dari suatu relasi. Oleh karena itu, seperti halnya relasi bahwa untuk mendefinisikan suatu fungsi diperlukan tiga hal, yaitu sebagai berikut.

a. Himpunan A
b. Himpunan B
c. Suatu kalimat terbuka f, yang juga disebut **aturan** yang mengaitkan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu elemen tunggal $y \in B$.

Kemudian untuk mempersatukan tiga hal di atas, kita sering menulis dengan notasi:

$$f : A \to B \text{ atau } y = f(x)$$

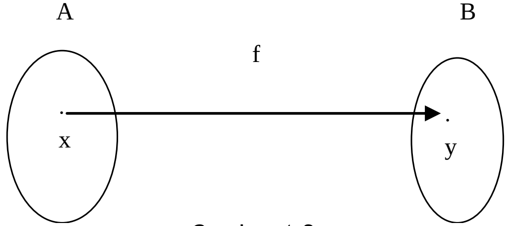
Hal yang berarti bahwa f memetakan setiap unsur di A ke B dengan aturan $y = f(x)$. Di sini x dinamakan **peubah (variabel) bebas** atau prapeta dan y nilainya tergantung pada x dinamakan **peubah tak bebas** atau peta. Karena itulah, nama lain untuk suatu fungsi adalah **pemetaan**.

Pada definisi fungsi di atas, himpunan A dinamakan **daerah definisi fungsi**, dan himpunan semua unsur yang merupakan pasangan dari unsur di A dinamakan **daerah nilai fungsi** yang bisa sama dengan himpunan B, tetapi bisa pula merupakan himpunan bagian dari B. Himpunan B dinamakan **kodomain** atau daerah kawan, sedangkan istilah lain yang digunakan untuk daerah definisi adalah **domain**, **daerah asal**, **wilayah** atau **ranah;** sedangkan untuk daerah nilai digunakan istilah **daerah hasil**, **jelajah** atau **range**.

Dari definisi, daerah kawan, dan daerah nilai fungsi f berturut-turut ditulis dengan lambang:

$$D_f = A,\ K_f = B \text{ dan } R_f = \{f(x): x \in A\} \subseteq K_f$$

Fungsi $f : A \to B$, $y = f(x)$ dapat digambarkan dengan diagram panah seperti berikut.



Gambar 1.2.

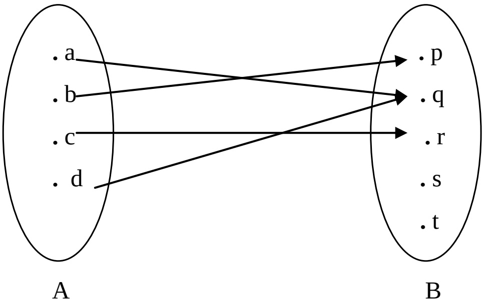
x = peubah bebas = variabel bebas = prapeta = bahan
f = kalimat terbuka = aturan = mesin = cara membuat
y = peubah tak bebas = variabel tak bebas = peta = bayangan = hasil

Untuk lebih jelasnya lagi, kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1.1

Aturan f dilambangkan dengan anak panah yang berpangkal pada elemen di himpunan A, sedangkan ujung anak panah tersebut elemen-elemen di B. Dari diagram panah pada Gambar 1.3 kita lihat bahwa f(a) = q, f(b) = p, f(c) = r dan f(d) = q. Sedang dalam bentuk pasangan terurut dapat kita tulis adalah:

f = {(a , q), (b, p), (c , r), (d , q)}.



Gambar 1.3

Contoh 1.2

Misalkan A himpunan Negara di dunia dan B himpunan ibu kota Negara di dunia, kemudian f adalah kalimat "y ibu kota x" sehingga $y \in B$, $x \in A$ dan y = f(x) adalah sebuah fungsi. Misalnya, f(Indonesia) = Jakarta.

Contoh 1.3

Misalkan A dan B adalah himpunan bilangan real dengan kalimat terbuka "y sama dengan x^2" atau "$y = x^2$" yang sering ditulis dalam bentuk $y = f(x) = x^2$, sedangkan x^2 dalam fungsi ini disebut peta dari x.

Dari contoh di atas, kita dapat menentukan domain, kodomain, dan rangenya berturut-turut adalah:

$$D_f = \{a , b , c, d\} = A$$

$$K_f = \{p , q , r , s , t\} = B$$

$$R_f = (p , q , r\} \subseteq B.$$

2. Sifat-sifat Fungsi

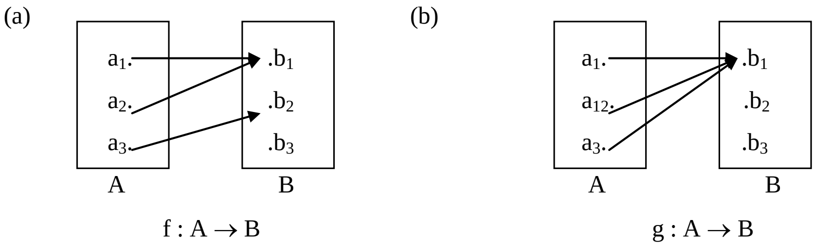
Dalam kesempatan bahasan ini kita akan melihat beberapa sifat fungsi dengan memperhatikan hubungan unsur-unsur yang ada pada domain, kodomain, dan rangenya.

a. Fungsi ke dalam (fungsi into)

Jika $f : A \rightarrow B$ dan $R_f \subset K_f$ ($R_f \subset B$) maka f dinamakan fungsi ke dalam (into). Ini berarti ada unsur $b \in B$ yang tidak merupakan peta (bayangan) dari unsur $a \in A$.

Contoh 1.4

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan dua buah fungsi into yang disajikan dengan diagram panah seperti berikut ini.



Gambar 1.4

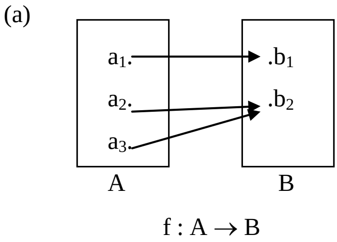
Pada contoh di atas, ada anggota B yang tidak mendapat pasangan dari anggota A sehingga $R_f \subset K_f$ dan $R_g \subset K_g$, sebagai akibatnya fungsi f maupun g merupakan fungsi ke dalam (into).

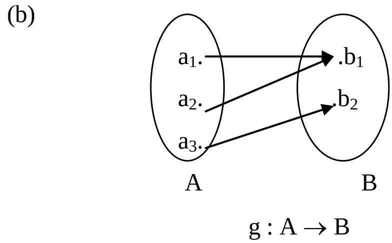
b. Fungsi onto (fungsi kepada atau fungsi ke atas atau fungsi surjektif)

Jika $f : A \rightarrow B$ dan $R_f = K_f$ maka f dinamakan fungsi kepada atau fungsi surjektif. Ini berarti setiap $b \in B$ adalah bayangan dari paling sedikit satu elemen $a \in A$.

Contoh 1.5

Kita perhatikan dua buah contoh fungsi kepada yang disajikan dalam diagram panah berikut.





Gambar 1.5

Dari kedua contoh di atas jelas bahwa semua unsur di B mendapat pasangan dari setiap unsur di A. Dengan kata lain $R_f = K_f = B$, berarti fungsi f adalah fungsi kepada atau surjektif.

c. *Fungsi 1-1 (fungsi satu-satu atau fungsi injektif)*

Kita perhatikan fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan $f(x) = 2x$. Misalkan $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) = 2a_1$ dan $f(a_2) = 2a_2$ yang berarti $f(a_1) \neq f(a_2)$. Jadi, untuk x yang berbeda menghasilkan nilai y yang berbeda. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi satu-satu.

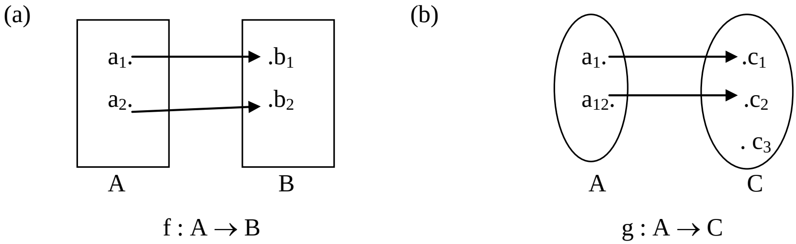
Secara sederhana dapat didefinisikan bahwa jika $f : A \rightarrow B$ dengan $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ menghasilkan $f(a_1) \neq f(a_2)$ maka f dinamakan fungsi 1-1 (injektif) dari A ke B. Dengan kata lain f adalah fungsi 1-1 jika $f(a_1) = f(a_2)$, mengakibatkan $a_1 = a_2$.

Contoh 1.6

Misalkan kita akan memeriksa, apakah $f(x) = 3x + 2$ bersifat satu-satu. Kita ambil x_1 dan x_2 adalah sebarang bilangan real dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) = 3x_1 + 2$ dan $f(x_2) = 3x_2 + 2$. Karena $3x_1 \neq 3x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ sehingga f adalah fungsi satu-satu.

d. *Fungsi bijektif (korespondensi satu-satu)*

Sekarang kita perhatikan dua buah contoh fungsi satu-satu seperti yang ditunjukkan oleh diagram panah berikut (Gambar 1.6).



Gambar 1.6

Dari kedua diagram panah di atas (Gambar 1.6), jelas bahwa fungsi f dan fungsi g kedua-duanya adalah fungsi satu-satu, sebab setiap $a_1 \neq a_2$, mengakibatkan $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Fungsi f adalah fungsi onto, sebab $R_f = K_f = B$ sedangkan fungsi g adalah fungsi into sebab $R_g \subset K_g = C$. Hal ini berarti fungsi f adalah fungsi satu-satu onto sedangkan fungsi g adalah satu-satu into.

Selanjutnya didefinisikan bahwa suatu fungsi $f : A \to B$ disebut **fungsi bijektif (korespondensi satu-satu)** jika dan hanya jika f adalah fungsi satu-satu (injektif) dan onto (surjektif). Jadi, pada contoh di atas f adalah fungsi bijektif, sebab f injektif dan surjektif. Namun, g bukan fungsi bijektif, sebab g adalah injektif tidak surjektif, tetapi g adalah injektif into.

B. GRAFIK FUNGSI ALJABAR DAN FUNGSI KUADRAT

Konsep fungsi ini telah kita jumpai dalam pembelajaran matematika pada jenjang-jenjang sebelumnya maupun dalam pembelajaran matematika sekolah. Berikut ini kita pelajari beberapa fungsi.

1. Fungsi Aljabar

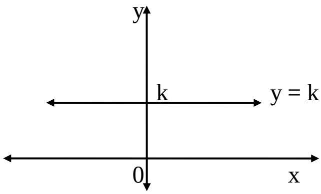
Sekarang kita perhatikan beberapa contoh fungsi seperti berikut ini.

Contoh 1.7

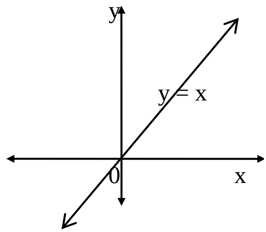
a. Fungsi rasional bulat, seperti $y = f(x) = 2x^2 + 7x + 5$.
b. Fungsi pangkat rasional, seperti $f(x) = x^3$.
c. Fungsi irasional, seperti $f(x) = \sqrt{x+1}$.
d. Fungsi rasional pecah, seperti $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^2 + 6x + 4}$.

Beberapa contoh fungsi seperti yang telah disebutkan di atas, termasuk ke dalam fungsi elementer yang disebut fungsi aljabar. Untuk lebih memahami konsep fungsi aljabar ini, kita perhatikan dua buah fungsi yang paling sederhana, yaitu sebagai berikut.

a. Fungsi konstan $y = k$, k konstan.
b. Fungsi identitas $y = x$.



Gambar 1.7



Gambar 1.8

Jenis fungsi elementer yang lainnya adalah fungsi transenden, yaitu fungsi yang tidak dapat dinyatakan secara aljabar. Semua jenis fungsi di luar fungsi aljabar, dinamakan fungsi transenden. Ada beberapa jenis fungsi transenden, di antaranya beberapa contoh berikut.

Contoh 1.8

a. Fungsi eksponen, seperti $y = f(x) = 3^x$.
b. Fungsi logaritma, seperti $y = \log x$.
c. Fungsi goneometri, seperti $y = \cos 2x + 3$.
d. Fungsi hiperbolik, seperti $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

2. Fungsi Kuadrat

Fungsi polinom dengan pangkat variabel bebasnya paling tinggi berderajat dua dinamakan fungsi kuadrat, yang didefinisikan dalam bentuk umum:

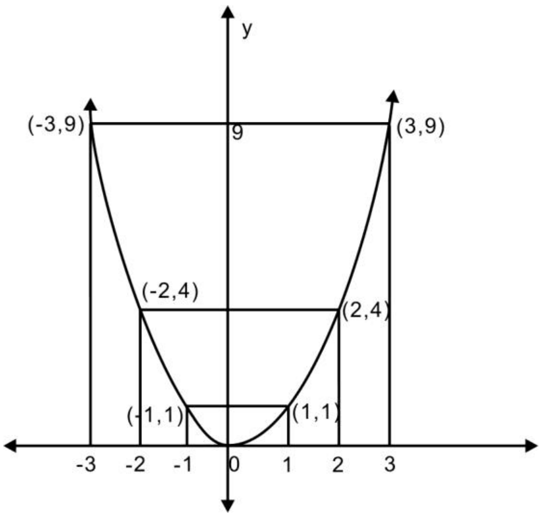
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Jika $a = 1$, $b = c = 0$ maka kita mempunyai fungsi kuadrat yang paling sederhana, yaitu $f(x) = x^2$. Kita dapat menentukan beberapa anggota f dengan mengambil beberapa harga x seperti pada tabel berikut ini:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y = f(x)	…	9	4	1	0	1	4	9	…

Dari tabel tersebut beberapa anggota f itu di antaranya (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), dan (3, 9). Selanjutnya, perhatikan jika (a, b) $\in$ f maka (-a, b) $\in$ f, artinya dua absis yang berlawanan memberikan koordinat yang sama. Ini menyebabkan grafik fungsi kuadrat simetrik terhadap sumbu y.

Jika x $\in$ R dan D_f = R maka fungsi itu memuat tak hingga banyaknya pasangan terurut (x, y) = (x, x^2) yang tentu saja tidak dapat kita sajikan semuanya pada sebuah tabel. Untuk keperluan menggambarkan fungsi kuadrat tersebut kita pilih saja beberapa pasangan terurut yang kita sajikan pada sebuah tabel. Kemudian titik-titik yang melukiskan pasangan-pasangan terurut itu kita hubungkan satu sama lainnya dengan kurva yang mulus. Kurva terjadi adalah grafik fungsi y = f(x) = x^2 (Gambar 1.9) yang dinamakan parabola.



Gambar 1.9

Sekarang kita kembali lagi ke bentuk baku atau ke bentuk umum fungsi kuadrat:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dengan a, b, c $\in$ R dan a $\neq$ 0 dan D_f = R atau dengan melengkapkan kuadrat kita dapatkan bentuk ekuivalennya seperti berikut.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\ \left\{x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\ \left\{x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

$$= a\left\{x + \frac{b}{2a}\right\}^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Pada bentuk kuadrat ini, bilangan real D = b^2 – 4ac dinamakan **Diskriminan fungsi kuadrat** sehingga fungsi kuadrat dapat ditulis seperti berikut.

$$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

Berdasarkan pada bentuk ini maka

a. Daerah hasil fungsi kuadrat adalah:

$R_f = \left[\frac{-D}{4a}, +\infty\right)$, a > 0 atau $R_f = \left[-\infty, \frac{-D}{4a}\right)$, a < 0

b. f(x) > 0, $\forall$ x $\in$ R $\Leftrightarrow$ a > 0 dan b > 0 (definit positif)
f(x) < 0, $\forall$ x $\in$ R $\Leftrightarrow$ a < 0 dan b < 0 (definit negatif)

c. Sumbu simetri fungsi kuadrat
Garis x = $\frac{-b}{2a}$ dinamakan sumbu simetri grafik fungsi kuadrat
y = f(x) = ax^2 + bx + c dengan a, b, c $\in$ R a $\neq$ 0.

d. Nilai ekstrim = $\frac{-D}{4a}$ untuk x = $\frac{-b}{2a}$ dengan titik ekstrim $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$.

e. Jika a > 0 maka nilai ekstrimnya minimum dan
Jika a < 0 maka nilai ekstrimnya maksimum

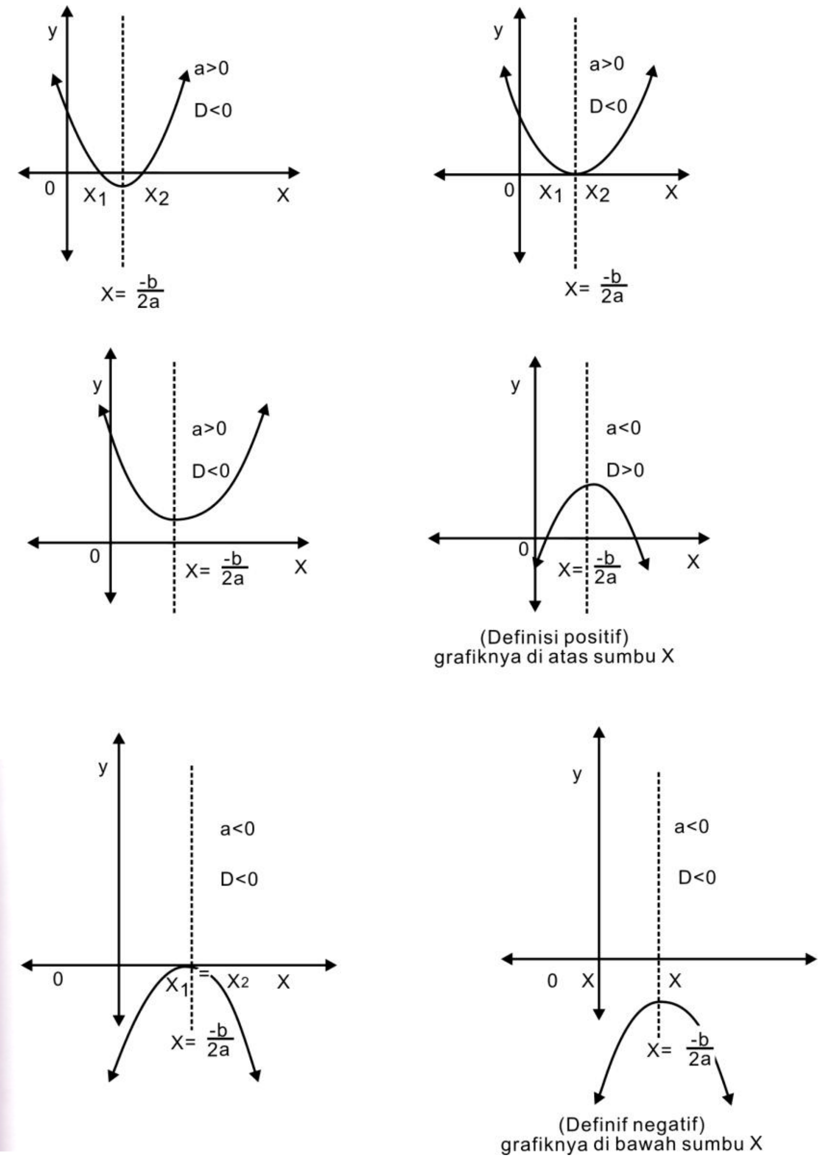
f. Grafik fungsi kuadrat berupa parabola, dan akan terbuka ke atas jika a > 0 serta akan terbuka ke bawah jika a < 0.

g. Jika D > 0 maka parabola memotong sumbu x di titik (x_1, 0) dan (x_2, 0) untuk $x_1 \neq x_2$ untuk $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$. Di sini $x_1 > x_2$ bila a > 0, dan $x_1 < x_2$ bila a < 0.

h. Jika D = 0 maka parabolanya menyinggung sumbu x di titik ($\frac{-b}{2a}$, 0).

i. D < 0 maka parabolanya di atas sumbu x, dan untuk a > 0 (definit positif), dan di bawah sumbu x untuk a , 0 (definit negatif).

Pada Gambar 1.10 berikut diperlihatkan grafik fungsi kuadrat untuk semua kasus yang mungkin.



Gambar 1.10

Untuk lebih memahaminya lagi, kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1.9

Misalkan diketahui fungsi $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ dengan $D_f = R$, dan kita akan menentukan

a. Nilai ekstrim dan jenisnya.
b. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
c. Sketsa grafiknya.
d. Daerah hasilnya (R_f).

Adapun caranya sebagai berikut:
a = 2, b = -6, dan c = 5.

a. Sumbu simetrinya: $x = \dfrac{-b}{2a} \Leftrightarrow \dfrac{-(-6)}{(2)(2)} = \dfrac{6}{4} = 1\dfrac{1}{2}$

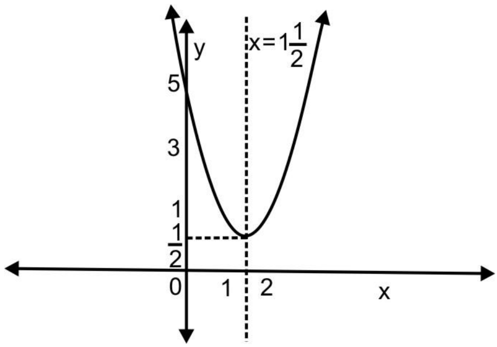
Nilai ekstrim $f\left(1\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(1\dfrac{1}{2}\right)^2 - 6\left(1\dfrac{1}{2}\right) + 5$

$$= 4\frac{1}{2} - 9 + 5$$

$$= \frac{1}{2}$$

b. Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika f(x) = 0
$2x^2 - 6x + 5 = 0$
Kita periksa diskriminan (D) dari persamaan tersebut:
$D = (-6)^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$
Oleh karena D = -4 < 0 maka tidak ada $x \in R$ yang memenuhi persamaan sehingga grafik fungsi tersebut tidak memotong sumbu x. Dengan kata lain, grafik tersebut di atas sumbu x.
Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika x = 0
$f(0) = 2(0)^2 - 6(0) + 5 = 5$
sehingga diperoleh titik (0 , 5)

c. Sketsa grafiknya (Gambar 1.11)



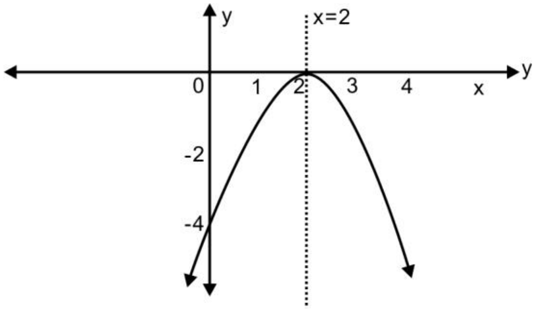
Gambar 1.11

d. Oleh karena nilai ekstrim fungsi f adalah $\frac{1}{2}$ dengan titik balik minimum $\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ maka daerah hasil fungsi f atau $R_f = \left\{y : y \geq \frac{1}{2}, y \in R\right\}$

Contoh 1.10

Misalkan akan membuat sketsa grafik f(x) = $-x^2 + 4x - 4$ dengan D_f = R. Adapun caranya adalah sebagai berikut:

a. Sumbu simetrinya adalah $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$
b. Nilai ekstrim f adalah f(2) = $-2^2 + 4(2) - 4 = 0$, titik balik maksimum dari f adalah (2, 0).
c. Titik potong grafik fungsi dengan sumbu x jika f(x) = 0 $\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4$ $\Leftrightarrow -(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, diperoleh titik (2, 0).
d. Titik potong dengan sumbu y, x = 0 maka f(0) = $-(0)^2 + 4(0) - 4 = -4$, diperoleh titik (0, -4).
e. Daerah hasilnya atau R_f = {y: y $\leq$ 0, y $\in$ R (perhatikan grafiknya (Gambar 1.12) dan lihat titik ekstrimnya).



Gambar 1.12

C. PERSAMAAN KUADRAT

Persamaan yang berbentuk:

$ax^2 + bx + c = 0$ …………………………………………….................. (1.1)

dengan $a \neq 0$, a, b, c $\in$ R, dinamakan **persamaan berderajat dua** atau **persamaan kuadrat.**

Setiap persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk (1.1) dengan menggunakan transformasi elementer adalah ekuivalen dengan suatu persamaan kuadrat. Bentuk persamaan (1.1) disebut **bentuk standar persamaan kuadrat**.

Dalil yang berikut ini adalah penting untuk menyelesaikan suatu persamaan kuadrat.

1. Jika P(x), Q(x), dan R(x) bentuk-bentuk akar dalam x maka untuk setiap nilai x, yang mana P(x), Q(x) dan R(x) real, kalimat terbuka P(x) = R(x) adalah ekuivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut.
   A. $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$
   B. $P(x) . R(x) = Q(x) . R(x)$
   C. $\dfrac{P(x)}{R(x)} = \dfrac{Q(x)}{R(x)}$ untuk $\{ x \in x : R(x) \neq 0 \}$

2. Jika a, b $\in$ R maka a . b = 0 jika dan hanya jika a= 0 atau b = 0 atau dua-duanya nol.

Contoh 1.11
Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2)$$

Penyelesaian:
karena $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$ maka persamaan:

$$(x + 3)(x - 5) = 0.$$

Menurut teorema 2 ini adalah benar jika dan hanya jika:

$$x + 3 = 0 \text{ atau } x - 5 = 0.$$

Ini adalah ekuivalen dengan:

$$x = -3 \text{ atau } x = 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya { -3, 5 }.
Sekarang kita perhatikan persamaan:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.3)$$

Persamaan (1.3) ini ekuivalen dengan :

$$(x - 3)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.4)$$

Dikarenakan satu-satunya nilai x yang memenuhi persamaan (1.4) adalah 3 maka ini adalah satu-satunya anggota penyelesaian dari persamaan (1.3).

Namun, berdasarkan alasan tertentu (teori persamaan) bahwa setiap persamaan kuadrat selalu mempunyai dua jawaban. Persamaan kuadrat yang mempunyai satu jawab dikatakan mempunyai **jawab kembar**. Artinya, jawaban itu dihitung dua kali atau mempunyai jawaban yang sama.

Sekarang kita tinjau bentuk persamaan kuadrat yang istimewa, misalnya:

$$x^2 - a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.5)$$

dengan a > 0. Karena persamaan (1.5) ini ekuivalen dengan persamaan:

$$x^2 = a,$$

berarti x adalah akar pangkat dua dari a atau $x = \pm\sqrt{a}$. Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan (1.5) adalah { $\sqrt{a}$, - $\sqrt{a}$ }.

Selanjutnya, kita tinjau persamaan kuadrat dalam bentuk seperti berikut.

$$x^2 + 2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.6)$$

yang tentunya persamaan (1.6) ini ekuivalen dengan persamaan:

$$x^2 = -2.$$

Karena tidak ada $x \in R$ yang kuadratnya adalah bilangan negatif maka himpunan penyelesaian persamaan (1.6) adalah himpunan kosong atau HP = { }.

Persamaan (6) ini bukan tidak mempunyai penyelesaian, tetapi mempunyai penyelesaian yang imajiner, yaitu dua jawab **kompleks sekawan**. Dengan kata lain persamaan (6) dikatakan tidak mempunyai penyelesaian yang real. Himpunan penyelesaian untuk persamaan (6) adalah $\{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$, dengan $i = \sqrt{-1}$ atau $i^2 = -1$.

Akhirnya, sekarang kita tinjau bentuk standar persamaan kuadrat:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in R,$$

persamaan ini ekivalen dengan persamaan:

$$ax^2 + bx = -c.$$

yang seterusnya dapat kita tulis sebagai berikut.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Dari sini didapat :

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Jadi, HP} = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

Bilangan yang dinyatakan dalam bentuk $b^2 - 4ac$ dinamakan <u>diskriminan</u> dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, dan biasanya disingkat dengan D. Adapun himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat ini berlaku sifat-sifat yang berikut.

1. Jika $D > 0$ maka ada dua penyelesaian real yang berbeda.
2. Jika $D = 0$ maka ada satu jawab real (jawab kembar).
3. Jika $D < 0$ maka ada dua jawab kompleks yang sekawan (tidak mempunyai jawaban yang real).

   Jika a, b, c adalah bilangan-bilangan rasional maka berlakulah yang berikut ini:

4. Jika $D \geq 0$ dan D adalah kuadrat sebuah bilangan rasional maka penyelesaiannya rasional.
5. Jika $D > 0$ dan D bukan kuadrat sebuah bilangan rasional maka penyelesaiannya irasional.

D. PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu bentuk pertidaksamaan yang memuat variabel dengan derajat tertinggi dua.

Contoh 1.12

1. $2x^2 + 3x - 5 > 0$
2. $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dapat dilakukan dengan beberapa cara. Dalam cara yang pertama ini kita akan menyelesaikan persamaan kuadrat dengan bantuan sifat-sifat sebagai berikut.

1. Jika P(x), Q(x), dan R(x) adalah ungkapan-ungkapan dalam x maka untuk semua harga-harga x, P(x), Q(x), dan R(x) yang real, kalimat terbuka $P(x) < Q(x)$ adalah ekuivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut:
   A. $P(x) + R(x) < Q(x) + R(x)$

   $$\left.\begin{array}{l} \text{B. } P(x) \,.\, R(x) < Q(x) \,.\, R(x) \\ \text{C. } \dfrac{P(x)}{R(x)} < \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{ x : R(x) > 0 \}$$

   $$\left.\begin{array}{l} \text{D. } P(x) \,.\, R(x) > Q(x) \,.\, R(x) \\ \text{E. } \dfrac{P(x)}{R(x)} > \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{ x : R(x) < 0 \}$$

   demikian pula untuk kalimat terbuka $P(x) \leq Q(x)$ adalah ekuivalen dengan kalimat-kalimat terbuka dari bentuk A sampai bentuk E dengan mengganti < (atau >) dengan ≤ (atau ≥) dengan syarat yang sama pula, yaitu $R(x) > 0$ dan $R(x) < 0$ seperti di atas.
2. Jika hasil kali dua bilangan adalah positif maka bilangan-bilangan itu dua-duanya positif atau dua-duanya negatif.
3. Jika hasil kali dua bilangan adalah negatif maka dua bilangan berlawanan tandanya (yang satu positif dan yang satunya lagi negatif).

Langkah-langkah pertama dalam menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat adalah memfaktorkan ruas kirinya setelah ruas kanannya disamakan dengan nol.

Contoh 1.13
Carilah himpunan penyelesaian dari $x^2 - 4x - 12 < 0$

Penyelesaian:
$x^2 - 4x - 12 < 0$
$(x-6)(x+2) < 0$

Oleh karena hasil kali dari (x − 6) dengan (x + 2) adalah negatif maka kedua faktor ini berlainan tandanya dengan kemungkinan-kemungkinannya sebagai berikut:

$(x-6) > 0$ dan $(x+2) < 0$ .... (1)

atau $(x-6) < 0$ dan $(x+2) > 0$ .... (2)

1. ekuivalen dengan $x > 6$ dan $x < -2$
   $\Leftrightarrow \{\ \}$
2. ekuivalen dengan $x < 6$ dan $x > -2$
   $\Leftrightarrow -2 < x < 6$

Jadi, (1) digabung (2) didapatkan himpunan penyelesaiannya, yaitu:
$HP = \{x : -2 < x < 6, x \in R\}$

Contoh 1.14
Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x^2 + 3x - 5 > 0$

Penyelesaian:
$2x^2 + 3x - 5 > 0$

$2x^2 - 2x + 5x - 5 > 0$

$2x(x-1) + 5(x-1) > 0$

$(2x+5)(x-1) > 0$

$(2x+5) > 0$ dan $(x-1) > 0$....................(1)

atau

$$\left(2x+5\right)<0 \text{ dan } \left(x-1\right)<0 \text{....................}(2)$$

1. ekuivalen dengan $x>-2\frac{1}{2}$ dan $x>1$

   $\Leftrightarrow x>1$

2. ekuivalen dengan $x<-2\frac{1}{2}$ dan $x<1$

   $\Leftrightarrow x<-2\frac{1}{2}$

Dari (1) dan (2) didapatkan HP = $\left\{x:-2\frac{1}{2}<x \text{ atau } x>1, x\in R\right\}$

Selain dengan menggunakan kedua sifat bilangan ada pula cara lain untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat yaitu dengan cara grafik. Cara grafik ini dipakai dalam buku paket matematika SLTP karena sebelumnya telah dibahas fungsi kuadrat beserta grafiknya. Dalam kesempatan sekarang pun kita akan mencoba menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan menggunakan grafik.

Contoh 1.15

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x^2 + 3x – 5 > 0$

Penyelesaian:

Grafik $y = 2x^2 + 3x – 5 = 0$ merupakan parabola

Jika $y = 0$ maka $2x^2 + 3x – 5 = 0$

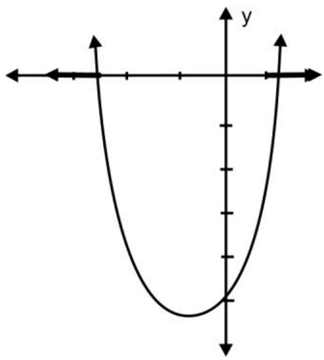
$(2x + 5)(x – 1) = 0$

$x = -2\frac{1}{2}$ atau $x = 1$

Jadi, grafik memotong sumbu x di titik $(-2\frac{1}{2}, 0)$ dan $(1, 0)$.

Jika $x = 0$ maka $y = -5$

Jadi, grafik memotong sumbu y di titik $(0,-5)$.



Gambar 1.13

Koordinat x atau absis titik pada bagian grafik yang terletak di atas sumbu x, merupakan anggota himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x^2 + 3x - 5 > 0$, yaitu HP = { $x/x < -2\frac{1}{2}$ atau $x > 1$}

Contoh 1.16

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 4x - 12 \le 0$

Penyelesaian:

Grafik y : $x^2 - 4x - 12 = 0$

Jika y = 0 maka $x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x + 2)(x - 6) = 0$

$x = -2$ atau $x = 6$

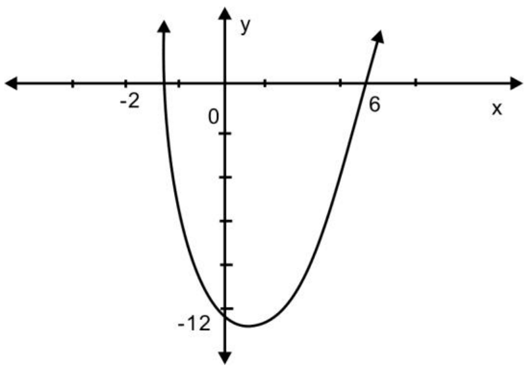
titik potong dengan sumbu x : (-2,0) dan (6,0)

jika x = 0 maka y = -12

titik potong dengan sumbu y (0,-12).

Dari sketsa grafik (Gambar 1.13) tampak himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 4x - 12 \le 0$ adalah titik-titik pada bagian grafik yang ada di bawah sumbu x, yaitu:

$$HP = \{ x : -2 \le x \le 6 \}$$



Gambar 1.14

E. PENDEKATAN DAN PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA DARI MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN DAN ATAU FUNGSI KUADRAT

Dalam bahasan berikut ini kita akan mencoba melihat permasalahan-permasalahan yang model matematikanya dapat diselesaikan dengan persamaan kuadrat atau fungsi kuadrat. Sekaligus pula memperlihatkan penggunaan pendekatan yang sesuai dalam menjelaskan konsep termasuk menyelesaikan masalahnya. Hal ini tentunya sejalan dengan tujuan dari mata kuliah Materi Kurikuler Matematika ini.

Salah satu pendekatan yang dipandang sesuai dengan kemampuan mengaitkan materi persamaan kuadrat dengan situasi dunia nyata siswa dalam bentuk model matematikanya adalah pendekatan CTL (*Contextual Teaching and Learning*). Dengan pendekatan CTL diharapkan akan dapat membantu guru mengaitkan materi yang diajarkan (persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, dan fungsi kuadrat) dengan situasi dunia nyata siswa dan mendorong siswa membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penerapannya dalam kehidupan mereka sehari-hari.

Pembelajaran berbasis CTL melibatkan tujuh komponen utama pembelajaran produktif, yakni konstruktivisme (*constructivism*), bertanya (*questioning*), menemukan (*inquiry*), masyarakat belajar (*learning community*), pemodelan (*modeling*), refleksi (*reflection*), dan penilaian sebenarnya (*authentic assessment*). Selain itu, menurut Depdiknas (2002), dalam pembelajaran kontekstual siswa dituntut untuk memiliki kemampuan berpikir kritis dan terlibat penuh dalam proses pembelajaran yang efektif, sedangkan guru mengupayakan dan bertanggung jawab atas terjadinya proses pembelajaran yang efektif tersebut.

Contoh 1.17
Pak Badu mempunyai kebun yang berbentuk persegi panjang dengan luas 600 m^2, sedangkan kelilingnya 100 m. Tentukan ukuran panjang dan lebar kebun Pak Badu tersebut.

Penyelesaian:
Misal panjang kebun milik Pak Badu adalah p dan lebar kebun l.

$$\begin{aligned} \text{Keliling kebun} = 2p + 2l &= 100 \\ 2(p + l) &= 100 \\ p + l &= 50 \\ p &= 50 - l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas kebun} = p \times l &= 600 \\ (50 - l) \times l &= 600 \\ 50l - l^2 &= 600 \\ l^2 - 50l + 600 &= 0 \\ (l - 30)(l - 20) &= 0 \\ l = 30 \quad \text{atau} \quad l &= 20 \\ p = 50 - 30 = 20 \text{ atau } p &= 50 - 20 = 30 \end{aligned}$$

Jadi ukuran kebun Pak Badu 30m × 20m.

Contoh 1.18
Jika sebuah peluru ditembakkan ke atas dari permukaan tanah dengan kecepatan 50 meter per detik (50m/dt). Tentukanlah:

1. Selang (interval) waktu peluru berada pada ketinggian tidak kurang dari 120m.
2. Waktu ketika peluru itu mencapai permukaan tanah kembali.

Penyelesaian:
Ketinggian benda yang bergerak vertikal dinyatakan dalam

$h = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$.

Dengan t = waktu
v_0 = kecepatan awal
h_0 = tinggi awal
a = percepatan = 10 m/dt^2 (percepatan gravitasi bumi).

1. Ketinggian peluru tidak kurang dari 120 m maka $h \geq 120$.

   Model matematika: $h = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$.

   Variabel: v_0 = kecepatan awal = 50m/ dt
   h_0 = tinggi awal = 0
   a = percepatan gravitasi bumi = = 10 m/ dt^2.

   Pertidaksamaan:
   $$-\frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0 \geq 120.$$
   $$-5t^2 + 50t + 0 \geq 120.$$
   $$t^2 - 10t + 24 \leq 0$$
   $$(t-4)(t-6) \leq 0$$
   $$4 \leq t \leq 6$$
   Jadi, peluru berada pada ketinggian tidak kurang dari 120 untuk $4 \leq t \leq 6$ detik.

2. Ketika peluru mencapai tanah kembali maka $h = 0$.

   Model matematika: $h = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$

   Variabel: v_0 = kecepatan awal = 50m/dt
   $h_0 = 0$

   Persamaan:
   $$-\frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0 = 0.$$
   $$-5t^2 + 50t = 0\ .$$
   $$t^2 - 10t = 0$$
   $$t(t-10) = 0$$
   $$t = 0 \text{ atau } t = 10.$$
   Jadi, peluru mencapai tanah kembali 10 menit sejak ditembakkan.

F. KEMUNGKINAN KESALAHAN KONSEP DALAM PEMBELAJARAN PERSAMAAN KUADRAT, PERTIDAKSAMAAN KUADRAT, DAN FUNGSI KUADRAT

Pada kesempatan ini kita akan menganalisis beberapa kemungkinan terjadinya miskonsepsi dan alternatif cara mengatasinya untuk beberapa materi yang baru saja kita bahas. Namun, tentu saja hal ini bukan berarti mutlak terjadi dalam setiap pembelajaran untuk topik-topik tersebut, di sini kita hanya ingin untuk lebih hati-hati dalam pemahaman materi-materi tersebut khususnya bagi para siswa yang pemula. Selain itu, tentunya masih ada pula kekeliruan-kekeliruan dalam pemahaman konsep yang berkaitan dengan topik-topik dalam modul ini sesuai dengan pengalaman kita masing-masing. Dalam kesempatan sekarang ini hanya akan diutarakan beberapa contoh saja, di antaranya konsep-konsep seperti berikut.

1. Konsep persamaan kuadrat yang dipermasalahkan dalam tulisan ini bukannya untuk dipelajari materinya karena materinya jelas sudah dikuasai oleh para pembaca. Hal yang penulis ingin mintakan perhatian dari para pembaca adalah metodologinya. Walaupun nampaknya tidaklah banyak berbeda dengan metode, model atau pendekatan yang dipakai oleh para guru matematika di lapangan, akan tetapi penulis anggap perlu adanya penjelasan mengenai hal-hal berikut yang dipandang sebagai salah satu kesalahan konsep dalam pembelajaran persamaan kuadrat di sekolah. Misalnya ketika menyelesaikan persamaan kuadrat:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Setelah persamaan kuadrat ini ditulis menjadi bentuk faktorisasi:

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

biasanya para siswa segera menulisnya menjadi bentuk berikut:

$$x - 4 = 0 \qquad\qquad x + 3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$x_1 = 4 \qquad\qquad x_2 = -3$$

Namun, kalau mereka ditanya, mengapa (1) menyimpulkan atau ekuivalen dengan (2), pada umumnya mereka tidak dapat menjawabnya. Mereka tidak tahu bahwa dasarnya adalah teorema (2). Mereka hanya dilatih menyelesaikan soal tetapi kurang diberi pengertian, kurang tertarik menjawab pertanyaan-pertanyaan, seperti ”mengapa demikian?” atau ”dari mana?”. Akibatnya, mereka mengerjakan sesuatu tanpa

mengetahui apa yang sebenarnya mereka kerjakan, mereka bekerja tidak didasarkan pada konsep yang menjadi alasan pekerjaannya.
Seandainya kita bekerja lebih teliti lagi, artinya sesuai dengan dalil (teorema-teorema) yang kebenarannya berlaku umum maka (2) seharusnya ditulis sebagai berikut:

$$x - 4 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 3 = 0$$

Sesuai dengan dalil yang dipakai, istilah "atau" di sini bersifat inklusif yang dalam logika matematika dilambangkan dengan "$\vee$" ("atau" dalam arti salah satu atau dua-duanya).
Mungkin di antara kita ada yang menganggap hal ini tidak begitu penting, namun penulis beranggapan bahwa pemakaian istilah "atau" dengan istilah "dan" perlu dijelaskan, seperti Anda lihat dalam pelajaran logika matematika.

2. Kadang-kadang persamaan kuadrat tidak disajikan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, misalnya disajikan dalam bentuk:
(1) $3x^2 = x + 10$
(2) $x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{3-2x}{x}$
Untuk mengecek apakah persamaan (1) itu dapat diselesaikan dengan memfaktorkan maka persamaan itu kita tulis dalam bentuk:
$$3x^2 - x - 10 = 0$$

Pada persamaan (2), setiap ruas diubah sedemikian rupa sehingga tidak merupakan pecahan. Hal ini dicapai dengan mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang tidak nol atau bentuk yang sesuai yang tidak mungkin nol. Pengali yang sesuai itu ialah KPK (Kelipatan persekutuan terkecil) dari penyebut-penyebutnya. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan persamaan (2):

$$x + \frac{3}{x} = \frac{3-2x}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$x^2 + 3 = 3 - 2x \qquad \text{(Kedua ruas dikalikan dengan x)}$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \ \text{ atau } x_2 = -2.$$

Pada contoh di atas kita mengalikan kedua ruas dengan x. Dalam hal ini, kita harus hati-hati, masalahnya belum dapat diketahui apakah persamaan (i) dan (ii) ekuivalen. Pada umumnya, para siswa menganggap persamaan (i) dan (ii) adalah ekuivalen sehingga penyelesaian-penyelesaian persamaan (ii) juga merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan (i). Di sinilah letaknya miskonsepsi yang sering terjadi pada para siswa di sekolah. Dalam hal ini, kita perlu melakukan pengecekan penyelesaian-penyelesaian persamaan (ii) terhadap persamaan (i), yaitu sebagai berikut.

Pengecekan: Untuk x = 0 ruas kiri (i) menjadi $0 + \frac{3}{0}$ dan ini tidak mempunyai arti, sebab pembagian dengan nol tidak didefinisikan. Selanjutnya untuk x = -2, ruas kiri (i) menjadi $-2 + \frac{3}{-2} = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ dan ruas kanannya menjadi $\frac{3+4}{-2} = \frac{-7}{2}$ pula. Jadi x = -2 adalah penyelesaian.

Himpunan penyelesaian (i) adalah {-2} yang merupakan himpunan bagian dari himpunan penyelesaian (ii), yaitu {0, -2}.

Jadi jika kedua ruas suatu persamaan dikalikan dengan suatu bentuk yang mengandung variabel maka persamaan baru tidak selalu ekuivalen dengan persamaan semula. Sebagai akibatnya penyelesaian-penyelesaian persamaan yang baru harus dicek untuk menentukan mana yang merupakan penyelesaian dari persamaan yang semula. Ingat teorema berikut:

a. Jika u(x) dan v(x) ungkapan-ungkapan dalam x maka HP = u(x) = v(x) adalah himpunan bagian dari HP = $\{u(x)\}^2 = \{v(x)\}^2$.
b. Jika a = b maka $a^2 = b^2$, tetapi jika $a^2 = b^2$ belum tentu a = b.

3. Pada umumnya, para siswa di sekolah sering mengalami kesulitan ketika diminta menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat yang grafik fungsi kuadratnya definit positif atau definit negatif. Sebagai akibatnya pada mereka sering terjadi kesalahan konsep dalam menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan kuadrat yang demikian. Misalnya, ketika mereka menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat seperti berikut ini.

(1) $2x^2 - x + 1 < 0$
(2) $2x^2 - x + 1 > 0$

Pada umumnya, para siswa menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat ini dengan memisalkan menjadi persamaan kuadrat $2x^2 - x + 1 = 0$, dan bentuk ini tak dapat diuraikan atas faktor-faktornya karena diskriminan (1) negatif, yaitu $D = 1 - 8 = -7 < 0$. Dengan menggunakan rumus kuadratis pun tetap mengalami kesulitan karena $D < 0$. Sebagai akibat dari tidak menemukan harga x yang real, mereka menyimpulkan bahwa himpunan penyelesaian persamaan (1) maupun (2) adalah ϕ, yaitu tidak ada harga x yang memenuhi pertidaksamaan (1) maupun (2). Dalam menyelesaikan pertidaksamaan (1) maupun (2) diperlukan kehati-hatian, ketelitian dan pengertian konsep fungsi kuadrat dan grafiknya. Mereka lupa bahwa $y = f(x) = 2x^2 - x + 1$ dengan $D < 0$ dan $a = 2 > 0$ maka grafik $y = f(x) = 2x^2 - x + 1$ adalah definit positif. Dengan kata lain, $y = f(x) = 2x^2 - x + 1$ selalu positif untuk tiap-tiap nilai variabel x. Jadi, persamaan kuadrat $2x^2 - x + 1 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian atau tak ada x yang memenuhi pertidaksamaan kuadrat (1) $2x^2 - x + 1 < 0$ atau HP = ϕ.

Untuk pertidaksamaan kuadrat (2) $2x^2 - x + 1 > 0$ mempunyai HP = $\{x: x \in R\}$ karena grafik fungsi kuadrat g $f(x) = 2x^2 - x + 1$ definit positif, yaitu selalu di atas sumbu x sehingga memang benar untuk setiap x (variabel bebas) selalu ada $y = f(x)$ (variabel terikat) positif.

Demikianlah sedikit catatan sekadar contoh bagaimana pentingnya ketelitian, logika pemahaman, dan pengertian terhadap dalil-dalil sebagai bekal dalam menyelesaikan permasalahan persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, dan fungsi kuadrat. Tentunya masih banyak hal-hal yang menyebabkan para peserta didik kita mengalami miskonsepsi ketika berhadapan dengan bahasan-bahasan tersebut dan di sini tak dapat diuraikan semuanya.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2 + 1$
   a) Hitunglah f(2) dan f(-3)
   b) Jika f(a) = 50. Carilah a.
2) Jika $A = \{x: -3 \leq x \leq 2, x \in R\}$ dan $f : A \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$
   a) Tentukan daerah hasilnya
   b) Lukis grafik f
3) Tentukan akar-akar dari persamaan kuadrat: $x^2 - 4x + 8 = 0$!
4) Jika uang sebesar M rupiah diinvestasikan dengan bunga majemuk r persen per tahun maka pada akhir tahun ke n jumlah uang akan menjadi $A = M(1 + r)^n$. Amir hendak menginvestasikan uangnya sebesar Rp10.000.000,00. Jika pada akhir tahun kedua uang tersebut menjadi lebih besar dari Rp12.000.000,00, lebih besar dari berapakah bunga yang dikenakan?
5) Didefinisikan x = 5

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x^2 - 5x &= 25 - 5x \\ x(x-5) &= -5(x-5) \\ x &= -5 \\ 5 &= -5 \end{aligned}$$

   Jelaskan di manakah letak kesalahan yang terjadi (miskonsepsi)?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $f(x) = x^2 + 1$
   a) $f(2) = 2^2 + 1 = 5$
      $f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$
   b) $f(a) = 50$
      $f(a) = a^2 + 1$
      $a^2 + 1 = 50$
      $a = \pm 7$

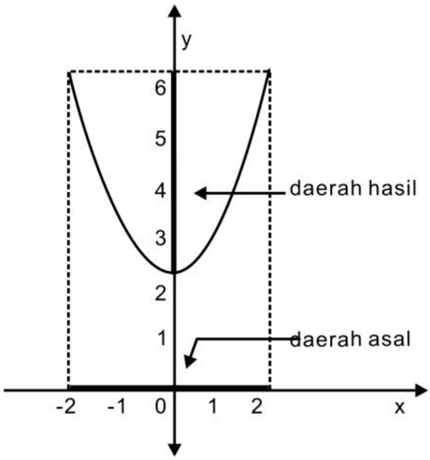
2) a) $f(x) = x^2 + 2$

$f(-2) = f(2) = 6$

$f(0) = 2$

$R_f = \{y : 3 \le y \le 6, y \in R\}$

b)



3) Bentuk persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 8 = 0$ tidak dapat difaktorkan. Nilai diskriminannya:

$D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8$

$= 16 - 32$

$= -16 < 0$

Sebagai akibatnya persamaan kuadrat ini tidak mempunyai akar yang nyata (real) atau akar-akarnya imajiner (khayal).

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$x_1 = \dfrac{4+4i}{2}$ atau $x_2 = \dfrac{4-4i}{2}$

$= 2 + 2i$ $= 2 - 2i$

Akar-akarnya imajiner juga disebut mempunyai 2 akar kompleks yang berlainan.

4) Model matematika: $A = M(1 + r)^2$ (Rumus bunga majemuk)

Variabel-variabelnya: M = modal = 10.000.000

A = modal + hasil investasi > 12.000.000

N = jumlah tahun = 2

Pertidaksamaan:

$$12.000.000 < 10.000.000(1 + r)^2$$
$$6 < 5(1 + r)^2$$
$$6 < 5(1 + 2r + r^2)$$
$$5r^2 + 10r - 1 > 0$$

Dengan bantuan penggunaan rumus kuadratis, diperoleh nilai-nilai kritis:

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{100+20}}{10} = -1 \pm \frac{1}{5}\sqrt{30}$$

$$r = -1 + \frac{1}{5}\sqrt{30} = 0,095 \quad \text{atau} \quad r = -1 - \frac{1}{5}\sqrt{30} = -2,095$$

Jadi nilai r yang memenuhi adalah $r < -2,095$ atau $r > 0,095$.

Ambil nilai r yang positif. Dengan demikian, bunga yang dikenakan adalah $r > 0,095$ atau $r > 9,5\%$.

5) Dalam baris akhir, kita dapatkan $5 = -5$, dan ini adalah suatu kejanggalan atau suatu hal yang tidak mungkin. Hal ini berarti kita tidak melakukan suatu kesalahan.

Kesalahan ini pada dasarnya adalah akibat kita salah dalam menggunakan suatu operasi. Dari definisi bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$.

Kita mengetahui bahwa membagi dengan bilangan nol tidak diperbolehkan.

Dalam langkah: $x(x - 5) = -5(x - 5)$ ke $x = -5$, dilakukan dengan membagi kedua ruas persamaan oleh $x - 5$. Padahal diketahui (didefinisikan) $x = 5$, berarti $x - 5$ akan sama dengan nol. Jadi, tidak boleh kedua ruas persamaan kita bagi dengan $x - 5$.

RANGKUMAN

1. Konsep Fungsi (Pengertian fungsi)
   Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota dari B, dan ditulis $f : A \to B$.
2. Daerah-daerah fungsi
   Jika fungsi $f : A \to B$ maka:
   D_f = Domain = Daerah asal = $\{x : x \in A, (x , y) \in f\}$.

R_f = Range = Daerah nilai = Daerah hasil = $\{y: y \in B, (x , y) \in f\} = f(A)$

K_f = Kodomain = Daerah kawan = B, dengan $f(A) \subseteq B$

3. Sifat-sifat Fungsi
   a. Jika $f : A \to B$ dan $f(A) \subset B$ maka f dinamakan fungsi into (fungsi ke dalam).
   b. Jika $f : A \to B$ dan $f(A) = B$ maka f dinamakan fungsi onto (fungsi kepada = fungsi ke atas = surjektif).
   c. Jika $f : A \to B$, dan $\forall\ a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$, berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$ maka f dinamakan fungsi satu-satu (injektif).
   d. Jika $f : A \to B$ dan f adalah fungsi injektif dan sekaligus fungsi surjektif maka f dinamakan fungsi bijektif (korespondensi satu-satu).
4. Fungsi Aljabar

   Fungsi aljabar adalah fungsi yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar terhadap fungsi konstanta y = k dan fungsi identitas y = x. Operasi aljabar yang dilakukan, meliputi penjumlahan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan penarikan akar. Fungsi elementer yang tidak termasuk fungsi aljabar dinamakan fungsi transenden.
5. Fungsi Kuadrat

   Fungsi kuadrat adalah fungsi yang didefinisikan dalam bentuk umum $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berupa parabola
6. Persamaan Kuadrat

   Persamaan yang berbentuk: $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, $a, b, c \in R$, dinamakan persamaan berderajat dua atau persamaan kuadrat.

   Setiap persamaan yang ditulis dalam bentuk seperti di atas dengan menggunakan transformasi elementer adalah ekuivalen dengan suatu persamaan kuadrat. Bentuk persamaan di atas disebut bentuk standar persamaan kuadrat.
7. Sifat-sifat Persamaan
   1. Jika P(x), Q(x), dan R(x) bentuk-bentuk akar dalam x maka untuk setiap nilai x, yang mana P(x), Q(x) dan R(x) real, kalimat terbuka P(x) = R(x) adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut:

      A. $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$

      B. $P(x) . R(x) = Q(x) . R(x)$

      C. $\dfrac{P(x)}{R(x)} = \dfrac{Q(x)}{R(x)}, R(x) \neq 0$

2. Jika a, b $\in$ R maka a . b = 0 jika dan hanya jika a= 0 atau b = 0 atau dua-duanya nol (buktinya tidak diberikan).

8. Pertidaksamaan Kuadrat

   Pertidaksamaan kuadrat adalah bentuk pertidaksamaan dengan derajat variabel tertingginya dua. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dapat dengan metode grafik dan dapat pula dengan bantuan hasil kali dua bilangan yang hasilnya positif dan hasilnya negatif.

9. Sifat-sifat Pertidaksamaan

   Jika P(x), Q(x), dan R(x) adalah ungkapan-ungkapan dalam x maka untuk semua harga-harga x, P(x), Q(x), dan R(x) yang real, kalimat terbuka P(x) < Q(x) adalah ekuivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut:

   A. P(x) + R(x) < Q(x) + R(x)

   $$\left.\begin{array}{l} \text{B. } P(x) \,.\, R(x) < Q(x) \,.\, R(x) \\ \text{C. } \dfrac{P(x)}{R(x)} < \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{ x : R(x) > 0 \}$$

   $$\left.\begin{array}{l} \text{D. } P(x) \,.\, R(x) > Q(x) \,.\, R(x) \\ \text{E. } \dfrac{P(x)}{R(x)} > \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{ x : R(x) < 0 \}$$

10. Pendekatan Penyelesaian Model Matematika

    Salah satu model pendekatan untuk pembelajaran masalah yang berkaitan dengan persamaan dan atau fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat adalah pendekatan *Contextual Teaching and Learning* (CTL) yang meliputi tujuh komponen pembelajaran produktif, yaitu konstruktivisme (*constructivism*), bertanya (*questioning*), menemukan (*inquiry*), masyarakat belajar (*learning community*), pemodelan (*modeling*), refleksi (*reflection*), dan penilaian sebenarnya (*authentic assessment*).

11. Kemungkinan Kesalahan konsep dalam Pembelajaran Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

    Terjadinya miskonsepsi dalam pembelajaran persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat, dan fungsi kuadrat di antaranya pemahaman dalil

    a) a . b = 0 jika dan hanya jika a = 0 atau b = 0
    b) P(x) = Q(x) adalah ekuivalen dengan P(x) . R(x) = Q(x) . R(x) dan

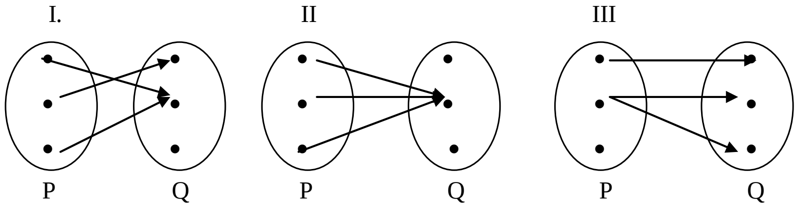
    $$\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)} \quad \text{dengan } R(x) \neq 0.$$

c) P = U(x) = V(x) adalah himpunan bagian dari HP = $\{U(x)\}^2$ = $\{V(x)\}^2$.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

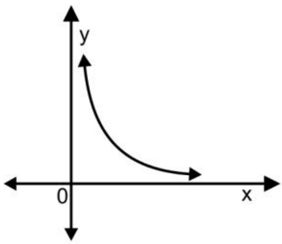
1) Manakah di antara diagram pada I, I, dan III yang merupakan fungsi dari P ke Q?



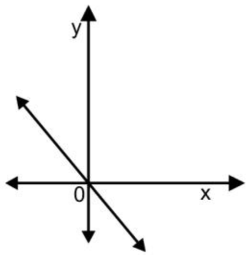
A. I saja
B. I dan II saja
C. I dan III saja
D. I, II, dan III

2) Grafik yang tidak mewakili fungsi y = f(x) adalah ....

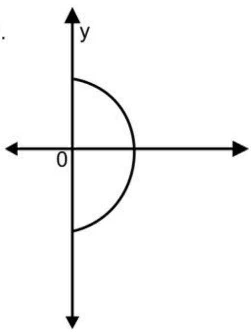
A.



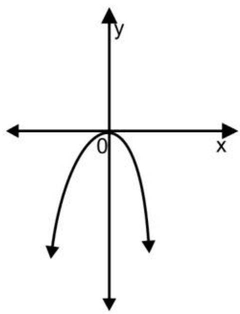
C.



B.



D.



3) Di antara fungsi berikut yang merupakan contoh fungsi aljabar adalah ....
   A. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$
   B. $F(x) = \sin 2x + 1$
   C. 2^{x+1}
   D. $f(x) = {}^3\log x$

4) Pernyataan yang salah tentang fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$ untuk $D_f = \{x: -1 \le x \le 5, x \in R\}$.
   A. $R_f = \{y: -1 \le y \le 8, y \in R\}$
   B. Titik (2, -1) adalah titik puncak atau titik balik maksimum
   C. Titik potong dengan sumbu x berturut-turut (1, 0) dan (3, 0)
   D. Grafiknya simetri terhadap garis x = 2

5) Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|5x - 3| = |3x + 5|$ adalah ....
   A. $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$
   B. $\left\{\frac{3}{5}, 5\right\}$
   C. $\left\{\frac{1}{4}, 5\right\}$
   D. $\left\{\frac{3}{5}, 4\right\}$

6) Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 5x + 6 < 0$, $x \in R$ adalah ....
   A. $\{x : 2 < x \text{ atau } x > 3, x \in R\}$
   B. $\{x : x < 2 \text{ atau } x > 3, x \in R\}$
   C. $\{x : x \in R\}$
   D. $\{x : 2 < x < 3,\ x \in R\}$

7) Jika selisih dua kuadrat suatu bilangan dengan tiga kali bilangan itu sama dengan 35 maka bilangan itu adalah ....

A. $3\frac{1}{2}$ atau -5

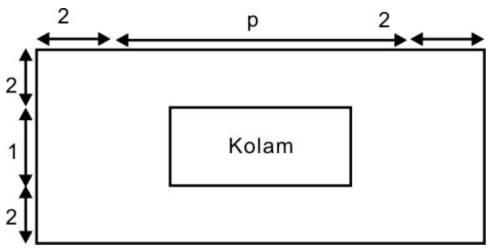
B. $-3\frac{1}{2}$ atau -5

C. $3\frac{1}{2}$ atau 5

D. $-3\frac{1}{2}$ atau 5

8) Nilai k agar banyaknya titik potong sumbu x dengan fungsi kuadrat $f(x) = (k - 3)x^2 + kx + 4$ hanya sebuah ....
A. -4 atau 12
B. 4 atau 12
C. 4 atau -12
D. -4 atau -12

9) Sebuah taman berbentuk persegi panjang. Di dalamnya terdapat kolam. Panjang kolam adalah 3m lebih panjang daripada lebarnya dan memiliki luas $130m^2$. Di sekeliling kolam ditanami bunga dengan jarak ke sisi kolam 2m. Ukuran panjang dan lebar taman tersebut berturut-turut adalah ....



A. 13 m dan 10 m
B. 17 m dan 13 m
C. 17 m dan 14 m
D. 13 m dan 9 m

10) Di antara pernyataan berikut yang benar adalah ....
I. Jika x = 5 maka $x^2 = 25$
II. x = 5 jika dan hanya jika $x^2 = 25$
III. $x - 5 = 0$ jika hanya jika x = 5
IV. $x - 5 = 0$ jika dan hanya jika $x^2 = 25$
A. I dan III
B. I dan II

C. II dan III
D. II dan IV

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sistem Persamaan Linear dan Pertidaksamaan Linear, serta Program Linear

A. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

1. Sistem Persamaan Linear dan Penyelesaiannya

Tentunya telah kita ketahui pengertian persamaan linear baik dalam satu variabel ($ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$), dua variabel ($ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$) maupun persamaan linear dalam n variabel $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b = 0$ dengan variabel-variabelnya $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$ dan konstanta-konstanta $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dan $b \in R$. Demikian pula dengan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan linear baik secara aljabar maupun secara geometri telah kita pelajari dalam mata kuliah lainnya.

Sebuah himpunan terbatas dari suatu persamaan linear dalam variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$ disebut **sistem persamaan linear**. Urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, s_3, ... , s_n$ disebut suatu **penyelesaian** dari sistem persamaan linear. Jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, ..., x_n = s_n$ adalah penyelesaian untuk setiap persamaan linear dalam sistem tersebut. Sebagai contoh, kita perhatikan sistem persamaan linear dari dua persamaan dalam dua variabel

Contoh 1.19

$$2x - 3y = 12 \quad .... \quad (1)$$
$$x + y = 1 \quad .... \quad (2)$$

yang mempunyai penyelesaian $x = 3$ dan $y = -2$ atau $(3 , -2)$ karena pasangan bilangan ini memenuhi sistem tersebut, artinya memenuhi persamaan (1) dan persamaan (2). Sedangkan harga-harga $x = 2$ dan $y = -1$ bukanlah penyelesaian-penyelesaian dari sistem persamaan tersebut karena pasangan bilangan $(2 , -1)$ hanya memenuhi persamaan (2), tetapi tidak memenuhi persamaan (1).

Jadi, sebuah penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear, haruslah memenuhi setiap persamaan linear dalam sistem tersebut.

Sebarang sistem dari m persamaan linear dalam n variabel dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)
\end{array}$$

dengan x_1, x_2, x_3, ... , x_n adalah variabel-variabel yang tidak diketahui, sedangkan indeks-indeks dari a dan b menyatakan konstanta. Jika b_1, b_2, b_3, ... , b_n konstanta-konstanta yang tidak nol semuanya maka sistem persamaan linear disebut **sistem persamaan linear nonhomogen**. Jika konstanta-konstanta $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$ maka sistem persamaan linearnya disebut **sistem persamaan linear homogen**.

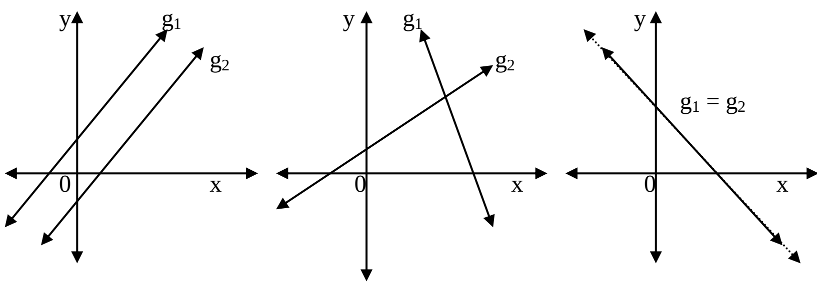
2. Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel dan Penyelesaiannya

Sebagaimana telah kita ketahui bahwa sebuah persamaan linear dengan sebuah variabel dapat digambarkan sebagai grafik sebuah garis lurus. Dengan demikian, suatu sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel, grafiknya dapat digambarkan sebagai dua garis lurus yang terletak pada bidang koordinat.

Sekarang kita tinjau bentuk umum sistem persamaan linear (SPL) yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel, dan misalkan variabel-variabelnya x dan y, yaitu:

$$\begin{array}{ll}
a_1x + b_1y = c_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\
a_2x + b_2y = c_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)
\end{array}$$

dengan a_1, b_1 tidak sekaligus kedua-duanya nol, demikian pula a_2, b_2 tidak kedua-duanya nol.



Gambar 1.15

a. Garis g_1 mungkin sejajar dengan garis g_2, dalam kasus ini tidak ada perpotongannya dan sebagai konsekuensinya tidak ada penyelesaian untuk sistem tersebut.
b. Garis g_1 mungkin berpotongan dengan garis g_2 di satu titik, dalam hal ini maka sistem tersebut hanya mempunyai (tepat mempunyai) satu penyelesaian.
c. Garis g_1 mungkin berimpit dengan garis g_2, dalam kasus ini ada tak hingga banyaknya titik potong, dan sebagai konsekuensinya maka tak terhingga banyaknya penyelesaian untuk sistem tersebut.

Sejalan dengan kemungkinan-kemungkinan dari grafik dan penyelesaian sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel maka tentunya ada tiga syarat untuk ketiga kemungkinan tersebut. Untuk lebih jelasnya kita tinjau bentuk-bentuk berikut ini.

3. Sistem Dua Persamaan Linear dengan Dua Variabel dengan Tepat Satu Penyelesaian

Kita perhatikan kembali SPL yang terdiri dari dua persamaan dengan dua variabel dalam bentuk umum berikut ini.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Misalkan sistem tersebut mempunyai tepat satu penyelesaian dan tentunya akan berpotongan di satu titik, katakanlah titik potongnya (x_0, y_0). Oleh karena titik (x_0, y_0) adalah titik potongnya maka akan memenuhi kedua persamaan garis dari sistem tersebut, yaitu:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dengan menggunakan metode substitusi, kita selesaikan salah satu persamaan dalam salah satu variabelnya, misalnya persamaan (2) kita selesaikan dalam x_0 sehingga didapatkan:

$$x_0 = \frac{-b_2}{a_2}y_0 + \frac{c_2}{a_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nilai x_0 dari persamaan (3) kita selesaikan pada persamaan (1), untuk mendapatkan y_0, yaitu:

$$a_1\left(\frac{-b_2}{a_2}y_0+\frac{c_2}{a_2}\right)+b_1y_0=c_1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-b_2}{a_2}y_0+\frac{c_2}{a_2}+\frac{b_1}{a_1}y_0=\frac{c_1}{a_1}$$

$$\Leftrightarrow\ y_0=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

Nilai y_0 pada (4) disubstitusikan ke persamaan (3) untuk mendapat x_0, yaitu:

$$x_0=\frac{-b_2}{a_2}\left(\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+\frac{c_2}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow\ x_0=\frac{-b_2\left(a_1c_2-a_2c_1\right)+c_2\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}{a_2\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

Nilai x_0 dan y_0 ini dapat pula ditulis dalam bentuk determinan (ingat determinan ordo 2), yaitu:

$$x_o=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

$$y_o=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_y}{D}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

Jelas bahwa nilai penyebut, yaitu $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ karena pembagian dengan nol tidak terdefinisi. Jadi syarat sistem dua persamaan linear dengan dua variabel di atas akan tepat mempunyai satu penyelesaian haruslah $D \neq 0$,

Contoh 1.20

Selesaikanlah sistem persamaan linear berikut:

$3x + y = 17$ .... (1)

$4x - 3y = 14$ .... (2)

Penyelesaian:

Cara I: Cara yang pertama kita akan menyelesaikannya dengan bantuan determinan seperti dalam rumus (6) dan (7) di atas, yaitu:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 14 & -3 \end{vmatrix} = -51 - 14 = -65$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 68 = -26$$

$$x = \frac{-65}{-13} = 5 \text{ dan } y = \frac{-26}{-13} = 2.$$

Cara II: Cara yang kedua dengan metode substitusi, yaitu kita memilih salah satu persamaan, dan nyatakanlah sebuah variabelnya dalam variabel kedua. Langkah berikutnya substitusi variabel yang pertama tadi ke dalam persamaan yang kedua. Secara lengkapnya adalah:

$3x + y = 17$ .... (1)

$4x - 3y = 14$ .... (2)

Dari persamaan (1), $y = 17 - 3x$

Substitusi $(17 - 3x)$ untuk y dalam persamaan (2),

$4x - 3(17 - 3x) = 14$

$\Leftrightarrow$ $13x = 65$

$\Leftrightarrow$ $x = 5$

Substitusikan $x = 5$ dalam persamaan (1)

$3(5) + y = 17$

$\Leftrightarrow$ $y = 2$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 5$ dan $y = 2$

Cara III: Cara yang ketiga penyelesaian persamaan dengan cara penjumlahan atau pengurangan. Cara ini untuk **mengeliminasi** salah satu variabelnya dari dua persamaan tersebut tidak selalu dapat dieliminasi salah satu variabelnya dengan cara langsung, misalnya dari contoh soal di atas.

$3x + y = 17$ .... (1)

$4x - 3y = 14$ .... (2)

Di sini penjumlahan atau pengurangan tidak dapat mengeliminasi salah satu variabelnya. Dalam hal ini kedua ruas persamaan (1) kita kalikan dengan 3.

$$\begin{array}{l} 9x + 3y = 51 \\ \underline{4x - 3y = 14 \quad +} \\ 13x \qquad = 65 \\ \qquad x = 5 \end{array}$$

Substitusikan x = 5 untuk mendapatkan y dalam salah satu persamaan, misalnya dalam persamaan (1).

$$\begin{array}{l} 3 \,.\, 5 + y = 17 \\ \qquad y = 2. \end{array}$$

4. Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel dengan Tidak Mempunyai Penyelesaian

Sekarang kita perhatikan lagi sistem dua persamaan linear dengan dua variabel dalam bentuk umum, yaitu

$a_1x + b_1y = c_1$ .... (1)

$a_2x + b_2y = c_2$ .... (2)

Jika persamaan linear (1) dan (2) grafiknya dua buah garis yang sejajar maka kedua garis itu tidak mempunyai titik potong sehingga sistem tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Sedangkan kita telah mengetahui dalam geometri analitik bahwa syarat dua garis sejajar haruslah gradiennya (koefisien arahnya) sama, berarti harus $m_1 = \frac{-a_1}{b_1}$ sama dengan $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$ dengan $c_1 \neq c_2$, atau $\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$ atau $a_1b_2 = a_2b_1$ dengan $c_1 \neq c_2$.

Sedangkan jika ditinjau dari penyelesaian dengan cara determinan seperti (6) dan persamaan (7) di atas, yaitu.

$$x_0 = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y_0 = \frac{D_y}{D}$$

maka x_0 dan y_0 tidak mungkin ada jika dan hanya jika D = 0 dengan $D_x \neq 0$, dan $D_y \neq 0$.

Contoh 1.21
Selesaikanlah sistem persamaan linear berikut ini:

$$3x + \ \ y = 1$$
$$6x + 2y = 3$$

Akan kita selesaikan seperti berikut:
Cara I:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$$

Oleh karena D = 0 maka sistem tersebut tidak mempunyai penyelesaian atau himpunan penyelesaiannya kosong (HP = ϕ).

5. **Sistem Dua Persamaan Linear dengan Dua Variabel dengan Tak Hingga Banyaknya Penyelesaian**
Masih memperhatikan sistem dua persamaan linear dengan dua variabel:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Telah pula kita bahas di muka jika kedua garis grafik dari sistem persamaan di atas berimpit akan mempunyai titik potong yang tak hingga banyaknya, dengan kata lain sistem mempunyai banyak penyelesaian.

Syarat kedua garis grafik dari persamaan-persamaan dalam sistem itu berimpit maka saling sejajar, yaitu gradiennya sama juga harus mempunyai titik potong sumbu yang sama. Hal ini berarti $m_1 = \frac{-a_1}{b_1} = m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$ dan $n_1 = \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ atau dapat pula ditulis dalam bentuk lain, yaitu: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$.

Kondisi syarat berimpit atau tak hingga banyak penyelesaian dari sistem di atas dapat pula ditentukan dengan memperhatikan syarat determinan pada persamaan (6) dan persamaan (7) di atas, yaitu tentunya haruslah $D = D_x = D_y = 0$.

Contoh 1.22

Selesaikanlah sistem persamaan linear berikut ini:

$2x + y = 1$ .... (1)

$4x + 2y = 2$ .... (2)

Penyelesaian:

karena $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$

$2 : 4 = 1 : 2 = 1 : 2$

maka sistem mempunyai banyak penyelesaian. Adapun himpunan penyelesaiannya didapat dengan cara menyelesaikan salah satu persamaan dari dua persamaan yang ekuivalen dalam sistem tersebut. Misalnya, kita selesaikan dari persamaan (1), sebab (1) = (2).

$2x + y = 1$

$\Leftrightarrow y = 1 - 2x$

misal $x = t$ maka $y = 1 - 2t$

HP = $\{(x , y): x = t, y = 1 - 2t, t \in R\}$

Atau dapat pula kita memilih sebuah harga t untuk mengganti y, yaitu:

$2x + y = 1$

$x = \frac{1-t}{2}$

misal $y = t$ maka $x = \frac{1-t}{2}$ sehingga

HP = $\{(x , y): x = \frac{1-t}{2}, y = t, t \in R\}$.

B. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Sebelum membicarakan topik program linear (*Linear Programming*) dalam kegiatan belajar mendatang maka sebagai prasyaratnya akan kita bahas sistem pertidaksamaan. Dalam menyelesaikan program linear akan sering dihadapkan pada himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan-pertidaksamaan. Pembahasan sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel ini sangat ditunjang oleh materi prasyarat yang sudah kita bahas, yaitu tentang persamaan linear dengan dua variabel dan penyelesaiannya.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan beberapa contoh berikut ini.

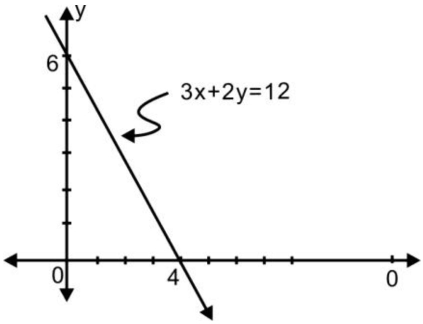
Contoh 1.23

Misalkan akan ditunjukkan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

$$3x + 2y \leq 12 \text{ dengan } x, y \in R.$$

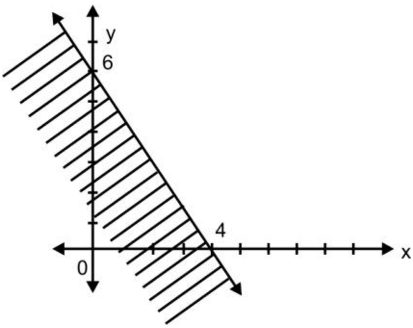
Kita perhatikan langkah-langkah penyelesaiannya:

1. Gambarlah garis dengan persamaan $3x + 2y = 12$.

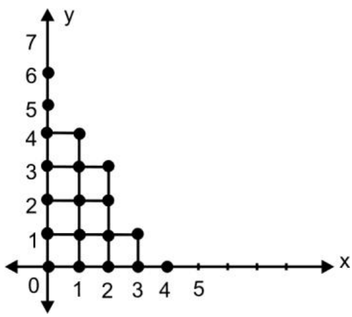


Gambar 1.16

2. Ambil sebarang titik yang terletak di luar garis $3x + 2y = 12$ jika titik itu memenuhi $3x + 2y \leq 12$ maka daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah atau bidang di mana titik itu berada. Untuk memudahkannya kita arsir daerah (bidang) yang menjadi himpunan penyelesaian itu. Misalkan, kita ambil titik (0 , 0) dan substitusikan:
   $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \leq 12 \Leftrightarrow 0 \leq 12$. Jadi, daerah yang diarsir adalah daerah yang memenuhi titik (0, 0) yaitu seperti ditunjukkan oleh Gambar 1.17.



Gambar 1.17



Gambar 1.18

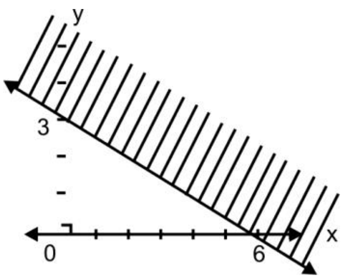
Jika pada Contoh 1.23: $3x + 2y \leq 12$ untuk $x, y \in C$ dengan C himpunan bilangan cacah maka grafiknya seperti ditunjukkan oleh Gambar 1.18.

Contoh 1.24

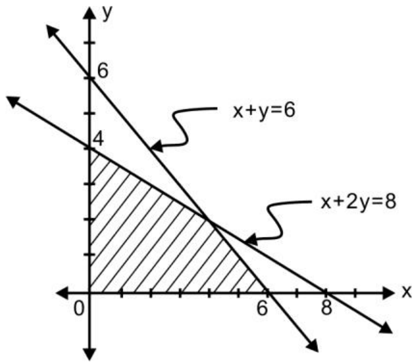
Arsirlah daerah dalam sistem koordinat Cartesius yang merupakan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x + 2y \geq 6$.

Penyelesaian:

Gambar grafik garis $x + 2y = 6$. Substitusikan titik (0 , 0): $0 + 2 \cdot 0 \geq 15$ (tidak memenuhi). Jadi, daerah yang diarsir adalah daerah yang tidak memuat titik (0 , 0) (Gambar 1.19).



Gambar 1.19



Gambar 1.20

Contoh 1.25

Tunjukkan pada diagram Cartesius himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut dengan $x , y \in R$.

$x + 2y \leq 8$

$x + y \leq 6$

$x \geq 0, y \geq 0$

Penyelesaian:

Himpunan penyelesaiannya ialah irisan dari masing-masing penyelesaian pertidaksamaan. Daerah arsiran merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan yang diketahui. (Gambar 1.20).

C. PROGRAM LINEAR

1. Pengertian Program Linear

Program linear merupakan bagian dari matematika terapan dan berasal dari dua patah kata, yaitu ”program” dan ”linear”. Program, artinya perencanaan, sedangkan yang dimaksudkan dengan linear adalah model matematika berupa himpunan dari pertidaksamaan-pertidaksamaan linear.

Selain dari pengertian di atas, program linear adalah suatu program atau perencanaan yang mempersoalkan masalah optimasi. Masalah optimasi adalah masalah yang berkaitan dengan tujuan untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi linear dengan variabel-variabelnya harus memenuhi persyaratan-persyaratan tertentu. Persyaratan-persyaratan variabel dari suatu fungsi linear dalam masalah optimasi ini dinyatakan dalam bentuk himpunan pertidaksamaan dalam suatu sistem pertidaksamaan linear.

Karena itulah, masalah atau persoalan dinamakan persoalan program linear, bila memenuhi beberapa ketentuan berikut.

a. Tujuan (objektif) persoalan yang akan dicapai harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linear $ax + by = c$. Fungsi linear ini dikenal sebagai fungsi tujuan (fungsi objektif).
b. Harus ada alternatif penyelesaian. Penyelesaiannya harus membuat nilai fungsi tujuan menjadi optimum (keuntungan yang maksimum, pengeluaran biaya yang minimum).
c. Adanya sumber-sumber yang tersedia dalam jumlah yang terbatas, seperti modal terbatas, bahan mentah terbatas, kemampuan dan kapasitas mesin terbatas, jumlah tenaga kerja terbatas. Pembatas-pembatas dari sumber yang tersedia ini harus dinyatakan dalam bentuk pertidaksamaan linear.

Perlu pula diketahui bahwa masalah optimasi ini (maksimum atau minimum) biasanya ditemukan pada saat-saat tertentu, misalnya:

a. Menentukan kombinasi beberapa macam barang yang akan diproduksi oleh suatu produser.
b. Menentukan kombinasi beberapa macam barang yang akan dijual.
c. Menentukan kombinasi beberapa campuran bahan mentah.
d. Menentukan jadwal pengangkutan yang paling baik.

Program linear ini mulai diperkenalkan dan dipakai sekitar lima puluh tahun yang lalu. Semula teknik ini dipakai untuk merencanakan masalah logistik pada Angkatan Udara Amerika Serikat. Saat ini program linear dipergunakan oleh berbagai pihak seperti para ilmuwan, para pengusaha maupun para teknokrat. Skope pemakaiannya pun bertambah luas sampai kepada pemecahan masalah produksi, alokasi waktu, transportasi, kapasitas mesin, tenaga kerja.

2. Model Matematika

Dalam setiap kali kita menyelesaikan persoalan program linear selalu melibatkan model matematika yang terdiri dari persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linear. Oleh karena itulah, sebelum kita membicarakan penyelesaian suatu masalah program linear, kita harus dapat menyusun model matematikanya. Yang dimaksud dengan model matematika atau bentuk matematika ialah suatu hasil penerjemahan bentuk sehari-hari menjadi bentuk matematika.

Dalam kehidupan sehari-hari atau dalam perhitungan-perhitungan, sering kali kita dihadapkan pada masalah yang harus dicari pemecahannya. Cara pemecahan masalah bermacam-macam, tergantung pada masalah yang dihadapi. Meskipun cara-cara itu berbeda pada umumnya mereka mempunyai empat langkah pokok metode pemecahan masalah. Keempat langkah tersebut adalah sebagai berikut.

a. Identifikasi masalah. Dalam tahap ini, kita harus mengerti masalah yang ditanyakan dan menyatakannya atau memisalkan dengan suatu variabel.
b. Abstraksi. Maksud dari abstraksi di sini adalah menentukan model matematika yang melukiskan hubungannya antara variabel-variabel.
c. Penyelesaian perhitungan.
d. Berdasarkan model-model matematika pada tahap (2), dihitung nilai-nilai variabel yang bersangkutan.
e. Interpretasi. Nilai variabel yang diperoleh dari perhitungan dalam tahap (3), diartikan (diinterpretasikan) kembali ke dalam masalah yang ditanyakan.

Contoh 1.26

Seorang penjual beras mempunyai 24 kg beras jenis A dan 25 kg jenis B. Ia ingin memperoleh campuran beras, yang akan dijualnya per kantong. Untuk tiap kantong campuran I, diperlukan 4 kg beras A dan 1 kg beras B.

Untuk tiap kantong campuran II, diperlukan 1 kg beras A dan 5 kg beras B. Harga tiap kantong, Rp1.500,00 untuk campuran I dan Rp1000,00 untuk campuran II. Berapa kantong masing-masing campuran dapat dibuat agar ia dapat menjualnya dengan jumlah harga sebesar-besarnya, dan berapa harga penjualan itu?

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini, kita ikuti keempat langkah pokok seperti yang telah diuraikan lebih dahulu.

a. Identifikasi masalah: Di sini yang ditanyakan adalah banyaknya kantong tiap jenis campuran. Jadi, di sini kita misalkan ada x campuran I dan y campuran II dan harga jual seluruhnya f(x , y).
b. Abstraksi. Untuk abstraksi ini, harus dicari suatu model matematika yang menyatakan hubungan-hubungan antara x dan y. Agar lebih mudah model matematika di sini kita susun dalam sebuah matriks.

Daftar 1

Jenis Campuran				
Jenis Beras	**I (x kantong)**	**II (y kantong)**	**Beras yang Diperlukan**	**Beras yang Tersedia**
A	4 x kg	1y kg	(4x + 1y)kg	24
B	1 x kg	5y kg	(1x + 5y)kg	25

Keterangan: Untuk 1 kantong campuran I diperlukan 4 kg jenis A dan 1 kg jenis B. Jadi, untuk x kantong campuran I diperlukan: 4x kg jenis A dan 1x kg jenis B. Dengan cara yang sama akan diperoleh bilangan-bilangan untuk campuran II sehingga dapat disusun matriks seperti di atas.

Sekarang bagaimana model matematikanya? Kita cari hubungan-hubungan antara x dan y. Untuk mencari hubungan ini, lihat dua kolom sebelah kanan. Beras yang diperlukan tentu tidak melebihi beras yang tersedia, karena harga tiap kantong untuk tiap jenis diketahui maka harga keseluruhan f(x , y) dapat dicari:

(1) $4x + y \leq 24$
(2) $x + 5y \leq 25$
(3) $f(x, y) = 1500x + 1000y$

Contoh 1.27

Seorang petani memerlukan zat kimia A, B, dan C berturut-turut sebanyak 20 kg, 18 kg, dan 12 kg untuk memupuk kebun sayurnya. Pupuk cair setiap labu mengandung zat kimia A, B, dan C berturut-turut 1 kg, 2 kg, dan 3 kg. Pupuk kering setiap kantong mengandung zat kimia A, B, dan C berturut-turut 5 kg, 3 kg, dan 1 kg. Apabila satu labu pupuk cair harganya Rp1000,00 dan satu kantong pupuk kering Rp1.500,00, berapa labu pupuk cair dan berapa kantong pupuk kering harus ia beli agar harganya paling murah tetapi memenuhi keperluan?

Seperti pada contoh di atas, kita dapat membuat tabel untuk satu labu pupuk cair dan satu kantong pupuk kering serta harga pembeliannya.

	Pupuk Cair	**Pupuk Kering**	**Zat Kimia yang Dipakai**
Zat A	1 kg	5 kg	(1 + 5) kg
Zat B	2 kg	3 kg	(2 + 3) kg
Zat C	3 kg	1 kg	(3 + 1) kg

Harga pembelian pupuk = Rp1.000,00 + Rp1.500,00

Selanjutnya, kalau si petani memakai pupuk sebanyak x labu pupuk cair dan y kantong pupuk kering maka tabel di atas berubah menjadi,

	Pupuk Cair	**Pupuk Kering**	**Zat Kimia yang Diperlukan**	**Zat Kimia yang Harus Dipenuhi**
Zat A	x kg	5y kg	(x + 5y) kg	20 kg
Zat B	2x kg	3y kg	(2x + 3y) kg	18 kg
Zat C	3x kg	y kg	(3x + y) kg	12 kg

Harga pembelian pupuk = x . Rp1.000,00 + y . Rp1.500,00

Dengan memperhatikan persyaratan tersebut maka kita peroleh tiga pertidaksamaan linear dan sebuah fungsi linear, yakni:

$$x + 5y \geq 20$$

$$2x + 3y \geq 18$$

$$3x + y \geq 12$$

$$f(x, y) = 1000x + 1500y$$

3. Nilai Optimum suatu Model matematika

Sesuai dengan tujuan dari program linear bahwa kita harus mencari nilai yang optimum dari suatu fungsi linear yang terdapat pada suatu program linear. Mencari nilai yang optimum ini bisa memaksimumkan dan bisa pula meminimumkan tergantung pada persoalan program linearnya, sedangkan yang dimaksud dengan mencari nilai optimum adalah mencari satu titik atau lebih, yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian dari suatu model matematika sehingga fungsi linearnya mencapai nilai yang optimum. Jika pasangan (x , y) yang dioptimumkan ini tunggal maka ia pasti berada pada salah satu titik sudut himpunan penyelesaiannya. Hal ini memudahkan kita dalam menyelesaikan persoalan program linear karena kita tinggal memilih titik sudut mana yang mengakibatkan fungsi tujuan optimum.

Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.28

Selesaikan program linear dari Contoh 1.26 dengan model matematika berikut.

$4x + y \leq 24$ .... (1)

$x + 5y \leq 25$ .... (2)

$f(x, y) = 1500x + 1000y$ .... (3)

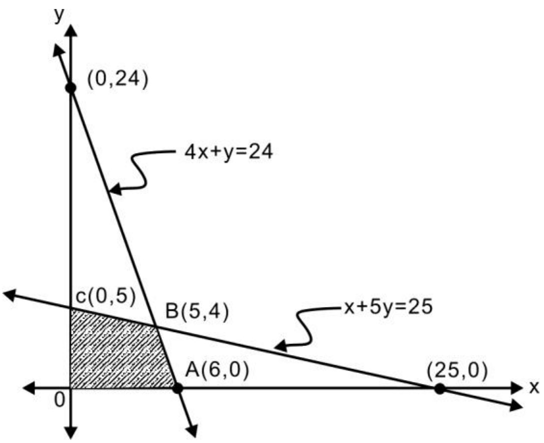
Penyelesaian:

Gambar garis $4x + y = 24 \text{ dan } x + 5y = 25$.

Tentukan titik-titik potong antar garis tersebut dan titik-titik potongnya dengan sumbu x dan sumbu y.

Selanjutnya, diperoleh daerah yang memenuhi syarat (1) dan (2).

Daerah penyelesaian disebut bidang konveks (Perhatikan gambar)



Gambar 1.21

Ditentukan titik (x, y) sehingga f(x, y) mencapai maksimum

A. (6, 0) $\rightarrow$ f(6, 0) = 1500 x 6 + 1000 x 0 = 9000
B. (5, 4) $\rightarrow$ f(5, 4) = 1500 x 5 + 1000 x 4 = 11.500
C. (0, 5) $\rightarrow$ f(0, 5) = 1500 x 0 + 1000 x 5 = 5000

Tampak bahwa yang memenuhi syarat f(x , y) maksimum adalah titik (5, 4). Jadi, pedagang itu harus membuat 5 kantong beras campuran 1 dan 4 kantong beras campuran II, dengan demikian harga penjualan seluruhnya adalah f(x, y) = Rp. 11.500,00.

Contoh 1.29

Kita ambil lagi persoalan program linear Contoh 1.27, dengan model matematikanya berikut akan mencari nilai minimum f(x , y).

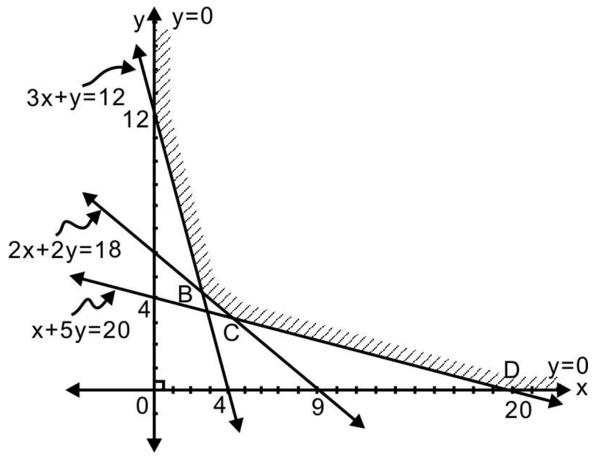
$x + 5y \geq 20$
$2x + 3y \geq 18$
$3x + y \geq 12$
$x \geq 0, \quad y \geq 0$
$f(x , y) = 1000x + 1500y$

Penyelesaian:

Gambar garis-garis x + 5y = 20, 2x + 3y = 18, 3x + y = 12.

Tentukan titik-titik potong ketiga garis tersebut. Selanjutnya tentukan daerah konveks yang memenuhi syarat-syarat pertidaksamaan. Dengan memeriksa nilai-nilai fungsi pada titik-titik sudut bidang konveks akan diperoleh fungsi yang bernilai minimum.

Titik Sudut (x , y)	Nilai Fungsi Tujuan f(x , y)
A(0 , 12)	f = (1000 × 0) + (1500 × 12) = 18.000
B$\left(2\frac{4}{7}, 4\frac{2}{7}\right)$	f = $(1000 \times 2\frac{4}{7}) + (1500 \times 4\frac{2}{7}) = 9000$
C$\left(4\frac{2}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$	f = $(1000 \times 4\frac{2}{7}) + (1500 \times 3\frac{1}{7}) = 9000$
D(20, 0)	f = (1000 × 20) + (1500 × 0) = 20.000



Gambar 1.22

Dari nilai-nilai fungsi tujuan f(x , y) dapat kita simpulkan bahwa yang paling sedikit agar kebutuhan dipenuhi ialah pada titik B dan C, yaitu Rp9000,00.

Semua titik pada segmen BC akan menghasilkan f(x , y) = 9000, sehingga kita boleh memilih titik (3, 4) untuk memperoleh solusi minimum, yaitu 3 × Rp1000,00 + 4 × Rp1500,00 = Rp9000,00.

4. Penggunaan Garis Selidik ax + by = k

Cara lain untuk penyelesaian program linear adalah dengan menggunakan ”garis selidik” yang persamaannya ax + by = k, dengan a, b, dan k, bilangan riil dan a, b bergantung pada bentuk f(x , y).

Contoh 1.30

Selesaikan program linier berikut dengan menggunakan garis selidik:

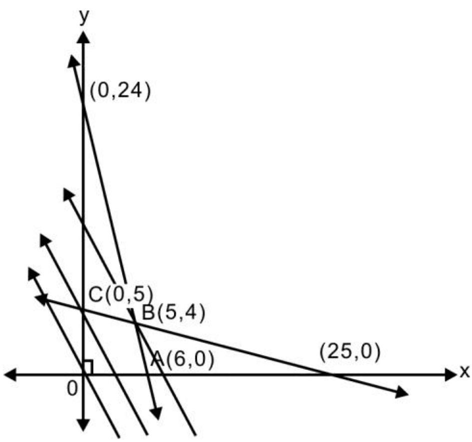
(1) $4x + y \le 24$

(2) $x + 5y \le 25$

(3) $f(x , y) = 1500x + 1000y$

Penyelesaian:

$f(x , y) = 1500x + 1000y$ atau $f(x , y) = 500(3x + 2y)$. Jadi, model garis selidik yang dipilih adalah garis $3x + 2y = k_i$ adalah sejajar sesamanya.



Gambar 1.23

Masalah yang kita hadapi sekarang adalah memilih (x , y) sehingga f(x , y) mencapai maksimum dan f(x , y) akan maksimum jika (3x + 2y) maksimum pula. Ini berarti harus dipilih k_i maksimum. Untuk memilih kemungkinan k_i yang memenuhi syarat, kita gambarkan beberapa garis $3x + 2y = k_i$ (Gambar 1.23).

Misal dipilih garis $3x + 2y = k_i$ yang melalui (0 , 0), (2 , 0) dan titik B(5 , 4). Agar dicapai k_i yang maksimum maka harus dipilih garis $3x + 2y = k_i$ yang memotong daerah OABC dan berada paling kanan.

Ini berarti nilai $(3x + 2y)_{maks}$ dicapai untuk x = 5 dan y = 4. Jadi, agar pedagang itu dapat menjual berasnya dengan harga sebesar-besarnya ia harus membuat 5 kantong beras campuran I dan 4 kantong beras campuran II, dengan jumlah harga seluruhnya 5 × Rp1.500,00 + 4 × Rp1000,00 = Rp11.500,00.

D. KEMUNGKINAN TERJADINYA MISKONSEPSI DAN CARA MENGATASINYA

Dalam kesempatan ini akan dilihat beberapa kemungkinan terjadinya miskonsepsi dan alternatif cara mengatasinya. Selain itu, tentunya masih ada pula kekeliruan-kekeliruan dalam pemahaman konsep yang berkaitan dengan topik-topik dalam modul ini sesuai dengan pengalaman kita masing-masing. Dalam kesempatan sekarang ini hanya akan diutarakan beberapa contoh saja, di antaranya konsep-konsep seperti berikut ini.

1. Dalam menentukan penyelesaian suatu sistem persamaan linear berbeda dengan menentukan satu penyelesaian persamaan linear karena adanya pengertian sistem yang harus ada saling keterkaitan dari anggota-anggotanya. Misalnya, kita perhatikan contoh sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan dengan tiga variabel seperti berikut:

   $$4x - y + 3z = -1$$
   $$3x + y + 9z = -4$$

   Salah satu penyelesaian dari sistem di atas adalah x = 1, y = 2, z = -1 karena nilai-nilai ini memenuhi kedua persamaan yang menjadi anggota dari sistem tersebut, sedangkan x = 1, y = 8, dan z = 1 bukanlah sebuah penyelesaian karena nilai-nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama.
2. Dalam menentukan daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan diperlukan adanya penyajian tentang daerah arsiran. Dalam materi bahasan kita sekarang ini daerah

himpunan penyelesaian atau bidang konveks diberi tanda dengan arsiran, sedangkan dalam bahasan-bahasan lain ada pula yang sebaliknya, daerah arsiran merupakan daerah yang bukan himpunan penyelesaiannya. Supaya tidak terjadi miskonsepsi perlu adanya ketegasan dan kekonsistenan dalam perjanjian yang kita pilih.

E. ALTERNATIF TAHAPAN SAJIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL SERTA PROGRAM LINEAR

Ada beberapa catatan yang perlu kita ketahui dalam alternatif tahapan sajian yang berkaitan dengan telaah materi sistem persamaan dan pertidaksamaan serta program linear ini, di antaranya berikut ini.

1. Sebagaimana kita ketahui bahwa tidak ada satu pun metode, teknik atau pendekatan mengajar yang terbaik yang dapat diterapkan untuk semua materi matematika dengan semua kondisi dan kemampuan siswa yang berbeda-beda. Oleh karenanya untuk materi sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear dua variabel serta program linear ini pun tidak akan diharuskan menggunakan suatu pendekatan yang khusus. Namun, khusus untuk materi sistem dua persamaan linear dengan dua variabel supaya lebih konkret dalam mencari himpunan penyelesaian sebaiknya didahului dengan penggambaran grafiknya. Sebagaimana diketahui bahwa HP sistem tersebut ada yang tepat satu penyelesaian, ada tidak mempunyai penyelesaian, dan ada yang mempunyai banyak penyelesaian. Hal ini sejalan berturut-turut dengan dua garis yang saling berpotongan di satu titik, dua garis yang sejajar, dan dua garis yang berimpit.
2. Dalam menentukan bidang konveks dari suatu model matematika yang berbentuk sistem pertidaksamaan linear, sebaiknya diawali dengan contoh menggambar grafik himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan. Setelah itu, baru dibuatkan irisannya dalam gambar yang terpisah. Oleh karena itu, sebaiknya daerah arsiran menunjukkan daerah himpunan penyelesaian.
3. Ada baiknya pula, sebagai langkah awal pembahasan suatu materi seperti program linear ini dimulai dengan penjelasan istilah, latar belakangnya, kegunaan-kegunaannya, dan karakteristik-karakteristik umumnya yang mengarahkan pada pokok bahasan.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut minimum dengan dua cara yang berbeda
   $2x + 4y - 7 = 0$
   $4x - 3y - 3 = 0$
2) Gambarlah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berikut
   $x + 2y \geq 12$
   $x - y \leq -2$
   $y \leq 8$
   $y \geq 4$
   $x \geq 0, y \geq 0$
   $x , y \in R$
3) Untuk membuat suatu jenis kue diperlukan terigu 200 gram dan mentega 25 gram. Untuk jenis kue lainnya diperlukan terigu 100 gram dan mentega 50 gram. Misalkan kita ingin membuat kue sebanyak mungkin, tetapi kita hanya mempunyai terigu 4 kg dan mentega 1,2 kg, sedangkan bahan-bahan lainnya cukup. Buatlah model matematika dari persoalan keseharian di atas.
4) Tentukanlah nilai optimum dari persoalan program linear pada soal nomor 3) di atas.
5) Dengan menggunakan garis selidik, tentukanlah nilai maksimum dari $x +2y$ yang memenuhi $x + 3y \leq 9$, $2x + y \leq 8$, $x \geq 0$, $y \leq 0$ dengan $x,y \in R$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $2x + 4y - 7 = 0$ .... (1)
   $4x - 3y - 3 = 0$ .... (2)
   Penyelesaian:
   Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear ini, kita dapat melakukannya dengan berbagai cara, yaitu dengan cara determinan, dengan eliminasi, dan dengan cara substitusi. Misalkan kita selesaikan dengan eliminasi.

$$\begin{array}{l} (1) \times 3 \Rightarrow 6x + 12y - 21 = 0 \\ \underline{(2) \times 4 \Rightarrow 16x - 12y - 12 = 0} \quad + \\ \qquad 22x \qquad - 33 = 0 \\ \qquad\qquad x = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

(1) $2x + 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow 3 + 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Jadi, HP = $\{(1\frac{1}{2}, 1)\}$ cara lainnya dipersilakan untuk mencobanya.

2) Akan menggambarkan grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut:

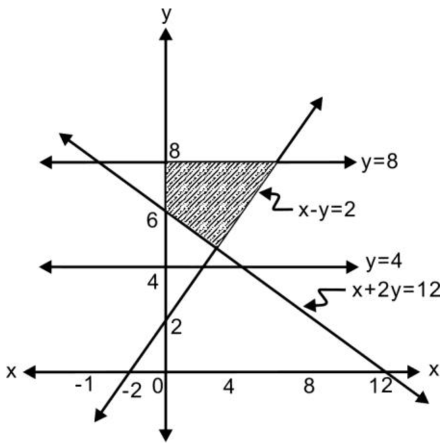
$x + 2y \geq 12$
$x - y \leq -2$
$y \leq 8$
$y \geq 4$
$x \geq 0, y \geq 0$
$x, y \in R$

Caranya seperti berikut:

Syarat $x + 2y \geq 12$ menunjukkan bidangnya berada di sebelah kiri atas garis $x + 2y = 12$.

Syarat $x - y \leq -2$ menunjukkan bidangnya berada di sebelah kiri atas garis $x - y = -2$.

Syarat $y \leq 8$ menunjukkan bidangnya berada di sebelah bawah garis $y = 8$.



Gambar 1.24

3) Untuk membuat model matematika, kita lihat kembali data dari persoalan tadi yang dapat disingkat seperti berikut.

Bahan	Kue Jenis I	Kue Jenis II	Bahan yang Dipakai	Bahan yang Tersedia
Terigu	200 gram	100 gram	(200 + 100) gram	4 kg = 4000 gram
Mentega	25 gram	50 gram	(25 + 50) gram	1,2 kg = 1200 gram

Andaikan banyaknya kue jenis I adalah x dan banyaknya kue jenis II adalah y maka banyaknya terigu yang dipergunakan (200x + 100y) gram. Namun, terigu yang terdiri dari 4000 gram maka didapatlah hubungan:
$200x + 100y \leq 4000$ atau $2x + y \leq 40$ .... (1)
Demikian pula dengan modelnya karena diperlukan (25x + 50y) gram, sedangkan yang tersedia mentega 1200 gram maka berlaku hubungan
$25x + 50y \leq 1200$ atau $x + 2y \leq 48$ .... (2)
di lain pihak, tidak mungkin kita membuat kue negatif atau tidak selesai sehingga jelas x dan y haruslah anggota bilangan cacah maka didapatkan
$x \geq 0$ .... (3)
$y \geq 0$ .... (4)
Soalnya sekarang mencari x dan y, sedemikian hingga x + y menjadi sebesar (sebanyak) mungkin, yaitu memaksimumkan x + y atau memaksimumkan f(x , y) = x + y dengan syarat (1) sampai dengan (4). Jadi, bentuk matematika atau model matematika dari persoalan program linear di atas adalah sebagai berikut:
(1) $2x + y \leq 40$
(2) $x + 2y \leq 48$
(3) $x \geq 0$
(4) $y \geq 0$
(5) $f(x , y) = x + y$

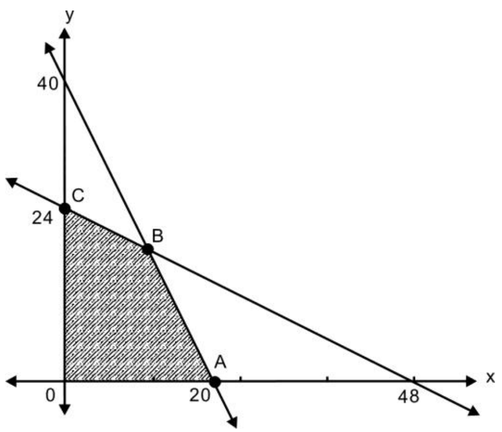
4) Kita akan menyelesaikan soal nomor 3) di atas. Pertama-tama kita cari himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dalam model matematika di atas
(1) $2x + y \leq 40$
(2) $x + 2y \leq 48$
(3) $x \geq 0$
(4) $y \geq 0$
(5) $f(x , y) = x + y$
$x, y \in R$.

Syarat $2x + y \leq 40$ merupakan bidang di sebelah kanan garis $2x + y = 40$
Syarat $x + 2y \leq 48$ merupakan bidang di sebelah kanan garis $x + 2y = 48$
Syarat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ merupakan bidang harus ada di kuadrant I
Gambar grafik $2x + y = 40$, $x + 2y = 48$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ karena irisannya dapat terlihat pada Gambar 1.25 yang merupakan daerah himpunan penyelesaian, yaitu bidang konveks OABC.
Titik A(20 , 0), C(0 , 24), dan B dicari sebagai berikut.

$$\begin{array}{lll} (1) & x\,2 \Rightarrow & 4x + 2y = 80 \\ (2) & x\,1 \Rightarrow & x + 2y = 48 \\ & & 3x \quad\;\; = 32 \\ & & x \quad\;\;\; = 10\frac{2}{3} \end{array}$$

$$y = 40 - 2x = 40 - \frac{64}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

$$\therefore B\left(10\frac{2}{3}, 18\frac{2}{3}\right).$$



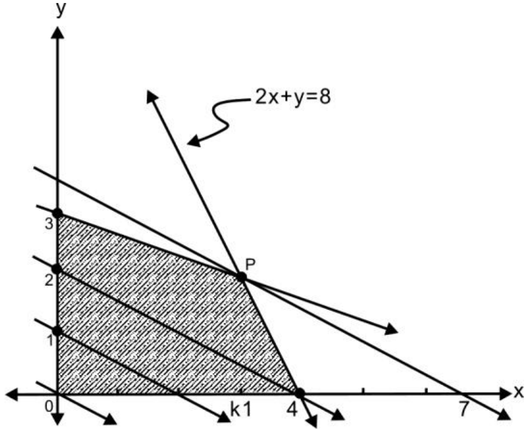
Gambar 1.25

Kemudian kita mencari titik-titik anggota himpunan penyelesaian dengan x, y $\in$ C dan memberikan penyelesaian yang optimum untuk fungsi tujuan f(x , y) = x + y. Kita akan menyelidiki titik-titik pada atau dekat dengan batas-batas bidang konveks OABC, khususnya di titik-titik puncak (titik-titik sudut). Namun, perlu kita ingat bahwa karena koordinat titik B belum merupakan bilangan bulat maka perlu memperhatikan beberapa titik yang dekat dengan titik B dan masih berada pada bidang konveks.

Titik (x , y)	Nilai Fungsi Tujuan f(x , y)
O(0 , 0)	F(x , y) = 0 + 0 = 0
C(0 , 24)	= 0 + 24 = 24
(5 , 21)	= 5 + 21 = 26
B ≈ (11 , 18)	= 11 + 18 = 29
(12 , 15)	= 12 + 15 = 27
(15 , 10)	= 15 + 10 = 25
A(20 , 0)	= 20 + 0 = 20

Jadi, penyelesaian optimumnya adalah x = 11, y = 18, dan x = 10, y = 19 sehingga nilai optimum dari f(x , y) = x + y adalah 29. Berarti dengan membuat 11 kue jenis I dan 18 kue jenis II, atau 10 kue jenis I dan 19 kue jenis II, kita akan menggunakan bahan-bahan yang tersedia sebaik-baiknya.

5) Daerah yang diarsir pada Gambar 1.26 adalah himpunan penyelesaian (bidang konveks) dari sistem pertidaksamaan:
$x + 3y \leq 9$, $2x + y \leq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ dengan x, y $\in$ R. Untuk menentukan nilai maksimum dari bentuk linear seperti x + 2y dengan syarat di atas, perhatikan jenis-jenis yang sejajar dengan garis x + 2y = k dengan k $\in$ R. Pada Gambar 1.26 dibuat beberapa garis untuk k = 0, k = 2, k = 4, dan k = 7, yaitu garis-garis sejajar.
$k_0 \equiv x + 2y = 0$
$k_1 \equiv x + 2y = 2$
$k_2 \equiv x + 2y = 4$
$k_3 \equiv x + 2y = 7$
Jika kita perhatikan ternyata jika k makin besar maka garis-garis selidik makin jauh dari titik pangkal.
Menyelidiki sifat-sifat beberapa garis
a) k = 0 memberikan garis yang melalui titik pangkal, yaitu x + 2y = 0, yang memberikan nilai minimum nol dari x + 2y.
b) k = 2, garis x + 2y memotong daerah penyelesaian yang mungkin menjadi suatu bagian segitiga, di mana x + 2y kurang atau sama dengan 2.



Gambar 1.26

c) Untuk mencari nilai optimum dari x + 2y, kita harus menggambar suatu garis yang sejajar dengan garis x + 2y = 0, melalui P di titik terujung dari daerah penyelesaian yang mungkin. Garis yang dicari adalah x + 2y = 7. Jadi nilai maksimum dari x + 2y adalah 7.

RANGKUMAN

1. Bentuk umum sistem dua persamaan linear dua variabel adalah:
   $a_1x + b_1y = c_1$
   $a_2x + b_2y = c_2$
   dengan a_1, b_1 tidak serentak nol dan a_2, b_2 juga tidak serentak nol. Grafik himpunan penyelesaian sistem ini ada tiga kemungkinan, yaitu dua garis berpotongan di satu titik (tepat satu penyelesaian), dua garis sejajar (tidak mempunyai penyelesaian), dan dua garis berimpit (mempunyai banyak penyelesaian). Untuk menyelesaikan sistem ini dapat dilakukan dengan berbagai cara, di antaranya dengan determinan, dengan eliminasi, dan dengan cara substitusi.
2. Grafik himpunan penyelesaian dari satu sistem pertidaksamaan linear dalam dua variabel merupakan daerah (bidang) konveks yang merupakan himpunan semua titik-titik (x , y) yang memenuhi pertidaksamaan-pertidaksamaan dalam sistem tersebut. Dengan kata lain, bidang konveks ini merupakan irisan dari himpunan-himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear dalam sistem tersebut.

3. Program linear adalah suatu cara untuk menyelesaikan suatu persoalan tertentu dalam bentuk model matematika yang terdiri dari pertidaksamaan-pertidaksamaan linear yang mempunyai banyak penyelesaian. Dari semua penyelesaian yang mungkin, akan didapat satu atau lebih hasil yang paling baik (penyelesaian optimum, yaitu maksimum atau minimum).
4. Menyelesaikan persoalan program linear dengan dua variabel.
   a. Terjemahkan soalnya ke dalam bahasa matematika dan bentuklah model matematika yang terdiri atas sistem pertidaksamaan, dan bentuk objektif ax + by yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan.
   b. Perlihatkan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan pada diagram Cartesius. Titik-titik di dalam atau pada batas poligon memberikan penyelesaian yang mungkin.
   c. Pilihlah titik yang memberikan penyelesaian yang paling baik dengan menyelidiki titik-titik di dalam daerah penyelesaian yang memberikan nilai maksimum (minimum) kepada fungsi objektif, atau dengan menggunakan garis selidik.
   d. Titik-titik optimum, untuk x, y $\in$ R selalu terletak di titik-titik sudut atau pada sisi daerah yang mungkin. Apabila memilih x, y $\in$ C sebagai titik optimum maka tidak selalu (x , y) terdapat pada titik sudut bidang konveks tetapi dekat dengan titik sudut $\left(x', y'\right) \in R$ di mana $f\left(x', y'\right)$ optimum.

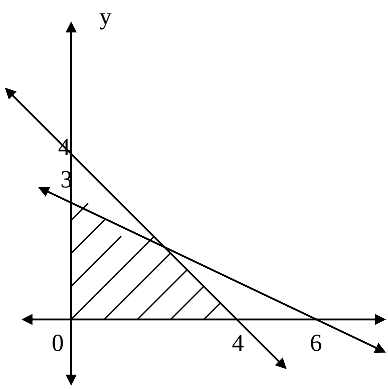
TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear:
   5x + 2y = 19 .... (1)
   2x + 7y = 25 .... (2) adalah ....
   A. {(3 , 2)}
   B. {(-3 , 2)}
   C. {(2 , 3)}
   D. {(2 , -3)}

2) Salah satu harga a dan b supaya sistem persamaan berikut
$ax + 2y = 4$
$2x + by = 1$
tidak mempunyai penyelesaian adalah ....
A. $a = 8, b = \frac{1}{2}$
B. $a = 2, b = -2$
C. $a = -16, b = \frac{1}{4}$
D. $a = -1, b = -4$

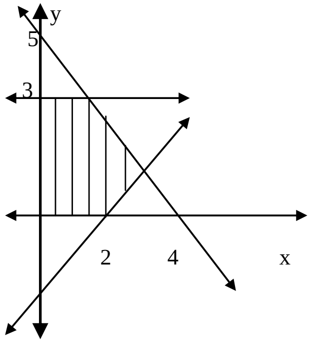
3) Daerah arsiran dari gambar di samping merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan adalah ....
A. $x - y \leq 4$
$x + 2y \leq 6$
$x \geq 0, y \geq 0$
B. $x + y \leq 4$
$x - 2y \leq 6$
$x \geq 0, y \geq 0$
C. $x + y \leq 4$
$x + 2y \leq 6$
$x \geq 0, y \geq 0$
D. $x + y \leq 4$
$x + 2y \geq 6$
$x \geq 0, y \geq 0$



4) Gambar berikut menunjukkan himpunan titik-titik yang merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $1 \leq x \leq 6$ dan $1 \leq y \leq 6$ untuk $x, y \in B$ (bilangan bulat). Di antara pernyataan berikut yang benar adalah ....
A. (1 , 2) adalah titik minimum dari $x + y$
B. {(1 , 6), (2 , 5), (3 , 4)} adalah himpunan penyelesaian dari $x + y = 7$
C. (6 , 6) adalah titik maksimum dari $x + y$
D. Titik (0 , 0) adalah titik minimum dari $x - y$ dan (6 , 6) adalah titik maksimumnya

5) Bidang konveks yang diarsir berikut merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear adalah ....

A. $2x - 3y \leq 4$, $5x + 4y \leq 20$, $y \leq 3$, $x \geq 0$
B. $2x + 3y \leq 4$, $5x + 4y \leq 20$, $y \leq 3$, $x \geq 0$
C. $2x - 3y \leq 4$, $5x - 4y \leq 20$, $y \leq 3$, $x \geq 0$
D. $2x + 3y \leq 4$, $5x - 4y \leq 20$, $y \leq 3$, $x \geq 0$



6) Pemilik perusahaan swasta mempunyai 3 jenis bahan mentah. Misalnya, bahan mentah I, II, dan III masing-masing tersedia 100 satuan 160 satuan, dan 280 satuan. Dari ketiga bahan mentah itu akan dibuat 2 macam barang produksi, yaitu barang A dan B. Satu satuan barang A memerlukan barang mentah I, II, dan III masing-masing sebesar 2, 2, dan 6 satuan. Satu satuan barang B, memerlukan bahan mentah 2, 4, dan 4 satuan. Jika barang A dan B dijual dan masing-masing laku Rp8.000,00 dan Rp6.000,00 per satuan, berapa besar jumlah produksi barang A dan B agar jumlah hasil penjualan maksimum dan jumlah bahan mentah yang dipergunakan tidak melebihi persediaan yang ada. Model matematika dari persoalan di atas adalah ....

A. $x + y \geq 50$, $x + 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 140$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, dengan $x, y \in C$
B. $x + y \geq 50$, $x + 2y \leq 80$, $3x + 2y \leq 140$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, dengan $x, y \in C$
C. $x + y \leq 50$, $x + 2y \geq 80$, $3x + 2y \geq 140$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, dengan $x, y \in C$
D. $x + y \leq 50$, $x + 2y \leq 80$, $3x + 2y \leq 140$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, dengan $x, y \in C$

7) Fungsi objektif dari persoalan linear pada soal nomor 6) di atas adalah ....

A. minimum $f(x, y) = 6000x + 8000y$
B. minimum $f(x, y) = 6000x - 8000y$
C. maksimum $f(x, y) = 8000x + 6000y$
D. maksimum $f(x, y) = 8000x - 6000y$

8) Nilai optimum dari persoalan program linear pada soal nomor 6 dan nomor 7) di atas adalah ....
   A. 240.000
   B. 340.000
   C. 368.000
   D. 380.000

9) Nilai maksimum dari $40x + 60y$ yang memenuhi $2x + y \leq 60$, $x + 2y \leq 80$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, dengan $x, y \in C$ adalah ....
   A. 2400
   B. 2500
   C. 2600
   D. 2700

10) Garis selidik untuk nilai maksimum dari $3x + 2y$ memenuhi $x + y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, untuk $x, y \in R$ adalah ....
   A. $3x + 2y = 10$
   B. $3x + 2y = 18$
   C. $3x + 2y = 15$
   D. $3x + 2y = 12$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

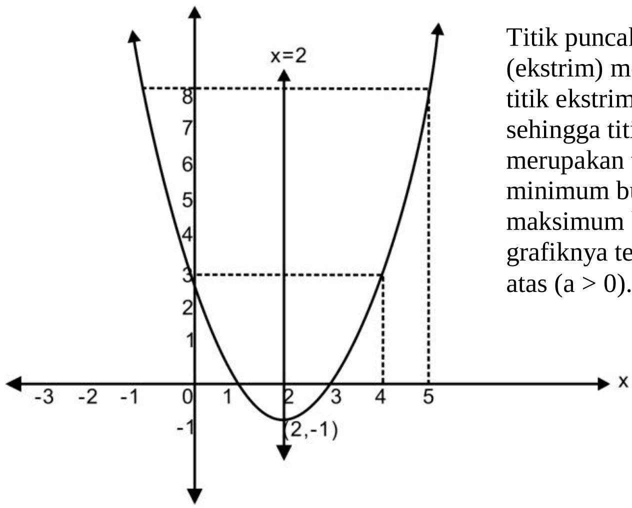
Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B. Sebab setiap anggota P = D_f dipetakan dengan tepat pada suatu anggota Q = R_f.
2) B. Sebab untuk suatu harga x didapat dua harga y, berarti satu unsur di daerah asal dipetakan pada dua unsur yang berbeda di daerah hasil.
3) A. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ adalah salah satu contoh fungsi aljabar, yaitu fungsi rasional bulat, sedangkan yang lainnya adalah contoh-contoh dari fungsi transenden, yaitu fungsi trigonometri (B), fungsi eksponen (C), dan fungsi logaritma (D).
4) B. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
   a) Titik potong dengan sumbu diperoleh dari f(x) = 0
      $x^2 - 4x + 3 = 0$
      $(x - 1)(x - 3) = 0$
      x = 1 atau x = 3
      Titik potong tersebut adalah (1 , 0) dan (3 , 0).
   b) Titik potong dengan sumbu y diperoleh dari x = 0
   c) $f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$
      Titik potong dengan sumbu y adalah (0 , 3).
   d) Koordinat titik puncaknya $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ = (2 , -1).
   e) Karena a = 1 > 0 maka grafiknya terbuka ke atas.
   f) Persamaan sumbu simetrinya x = $\frac{-b}{2a}$ = 2.
   g) Grafiknya
      $R_f = \{y : 1 \leq y \leq 8, y \in R\}$.



Titik puncaknya (ekstrim) merupakan titik ekstrim minimum sehingga titik (2,-1) merupakan titik balik minimum bukan maksimum karena grafiknya terbuka ke atas (a > 0).

5) A. $|5x-3| = |3x+5|$

$|5x-3|^2 = |3x+5|^2$

$(5x - 3)^2 = (3x + 5)^2$

$(5x - 3)^2 - (3x + 5)^2 = 0$

$(25x^2 - 30x + 9) - (9x^2 + 30x + 25) = 0$

$16x^2 - 60x - 16 = 0$

$4x^2 - 16x + x - 4 = 0$

$4x^2 - 15x - 4 = 0$

$(4x - 1)(x - 4) = 0$

$4x - 1 = 0$ atau $x - 4 = 0$

$x = \frac{1}{4}$ atau $x = 4$

HP = $\{\frac{1}{4}, 4\}$

6) D. $x^2 - 5x - 6 < 0$

$(x - 3)(x - 2) < 0$

(1) $(x - 3 < 0$ dan $(x - 2) > 0$

(2) $(x - 3) > 0$ dan $(x - 2) < 0$

Dari (1) $x < 3$ dan $x > 2$ maka $2 < x < 3$

Dari (2) $x > 3$ dan $x < 2$
kosong
Jadi, HP = $\{x : 2 < x < 3, x \in R\}$

7) D. Misalkan bilangan itu adalah x maka diperoleh model matematika dalam bentuk persamaan kuadrat $2x^2 - 3x = 35$.
Bilangan yang akan dicari merupakan akar-akar persamaan kuadrat tersebut.
Dengan demikian, kita peroleh:
$2x^2 - 3x - 35 = 0$.
$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 10x - 35 = 0$
$\Leftrightarrow (2x + 7) - 5(2x + 7) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)(2x + 7) = 0$
X = 5 atau x = $-3\frac{1}{2}$

8) B. $f(x) = (k - 3)x^2 + kx + 4$
Diskriminannya: D = 0
$k^2 - 16k + 48 = 0$
$\Leftrightarrow (k - 4)(k - 12) = 0$
$\Leftrightarrow k = 4$ atau $k = 12$.

9) C. Model matematika: luas kolam = panjang $\times$ lebar = 130
Variabel: p = panjang kolam
q = lebar kolam
P + 4 = panjang taman
L + 4 = lebar taman
karena panjang kolam adalah 3 m lebihnya daripada lebar kolam maka
Persamaan: $pq = 130$
$\Leftrightarrow (q + 3)\,q = 130$
$\Leftrightarrow q^2 + 3q - 130 = 0$
$\Leftrightarrow (q + 13)(q - 10) = 0$
q = -13 (ditolak atau q = 10 (diterima).
Jadi, diperoleh q = 10 m dan p = 10 + 3 = 13 m.
Dengan demikian, ukuran taman adalah:
p + 4 = 13 + 4 = 17m (ukuran panjang taman)
q + 4 = 10 + 4 = 14m (ukuran lebar taman).

10) A. I. Jika $x = 5$ maka $x^2 = 25$
Dalam hal ini, tidak berarti tak ada harga x dari yang menyebabkan $x^2 = 25$, sebab kita mengetahui bahwa: $(-5)^2 = 25$.
Jadi, pernyataan $x = -5 \rightarrow x^2 = 25$ adalah benar pula.
II. $x - 5 = 0$ maka $x = 5$

Tes Formatif 2

1) C.
$$\begin{array}{ll|l} (1)\ 5x + 3y = 19 & \times & 7 \Rightarrow 35x + 21y = 133 \\ (2)\ 2x + 7y = 25 & \times & 3 \Rightarrow \underline{\ \ 6x + 21y = 75\ \ -} \\ & & \quad\ 29x \qquad = 58 \\ & & \qquad\qquad x = 2 \end{array}$$
(1) $5x + 3y = 19$ $\quad 3y = 19 - 10$
$x = 2$ $\quad y = 3$
HP = $\{(2, 3)\}$

2) D. $ax + 2y = 4$
$2x + by = 1$
Syarat tidak mempunyai penyelesaian:
$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \neq c_1 : c_2$
$a : 2 = 2 : b \neq 4 : 1$
$ab = 4$

a	...	-2	-1	0	1	2	...
b	**...**	**-2**	**-4**	**ϕ**	**4**	**2**	**...**

Salah satu dari penyelesaian $a = -1$, $b = -4$.

3) C. Garis melalui titik (4 , 0) dan (0 , 4) adalah $x + y = 4$
Garis melalui titik (6 , 0) dan (0 , 3) adalah $x + 2y = 6$
Bidang yang ditunjukkan di sebelah kiri $x + y = 4$ adalah penyelesaian dari $x + y \leq 4$ dan bidang di sebelah kiri $x + 2y = 6$ adalah penyelesaian dari $x + 2y \leq 6$. Karena $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ berarti bidangnya terletak di kuadran 1. Jadi, himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh daerah yang diarsir.

4) C. Karena $1 \leq x \leq 6$, dengan $x, y \in B$ maka nilai x dan y terbesar adalah 6 sehingga titik (6 , 6) adalah titik maksimum dari $x + y$.

5) A. Syarat $2x - 3y \leq 4$ ditunjukkan pada daerah bidang di sebelah kiri atas garis $2x - 3y = 4$. Syarat $5x + 4y \leq 20$ ditunjukkan pada daerah bidang di sebelah kiri bawah garis $5x + 4y = 20$. Syarat $y \leq 3$ ditunjukkan pada daerah bidang di sebelah bawah garis $y = 3$. Syarat

$x \geq 0$ ditunjukkan pada daerah bidang di sebelah kanan sumbu y. Irisan dari kesemuanya ditunjukkan pada daerah arsiran.

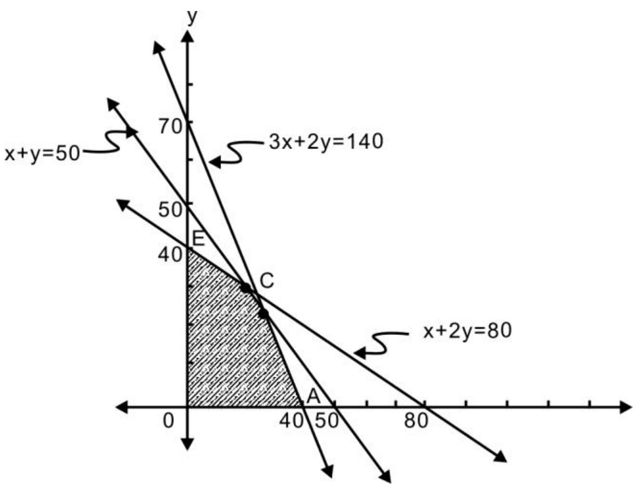
6) D.

Bahan	Barang A(x)	Barang B(x)	Persediaan
Jenis I	2	2	100
Jenis II	2	4	160
Jenis III	6	4	280

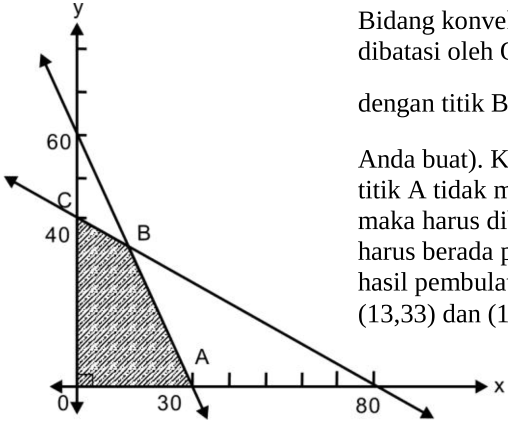
Dari tabel kita dapatkan model matematikanya
$x + y \leq 50$, $x + 2y \leq 80$, $3x + 2y \leq 140$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

7) C. Karena yang ditanyakan adalah besar jumlah produksi barang A dan B dengan harga jualnya masing-masing Rp8000,00 dan Rp6000,00 maka fungsi tujuannya adalah memaksimumkan $f(x , y) = 8000x + 6000y$.

8) D. Nilai optimum dari persoalan program linear untuk himpunan penyelesaian dari model matematikanya, yaitu bidang konveks OABCDE dengan A(50 , 0), B(40 , 10), D(20 , 30), dan E(0, 40) (dipersilakan untuk dicoba membuat grafiknya). Jadi, nilai maksimum $f(x , y) = (40 \times 8000) + (10 \times 6000) = 380.000$.



9) B. Kita misalkan $x, y \in R$ dan bidang konveksnya dapat ditentukan dengan menggambar garis-garis $2x + y = 60$, $x + 2y = 80$, $x = 0$ dan $y = 0$.

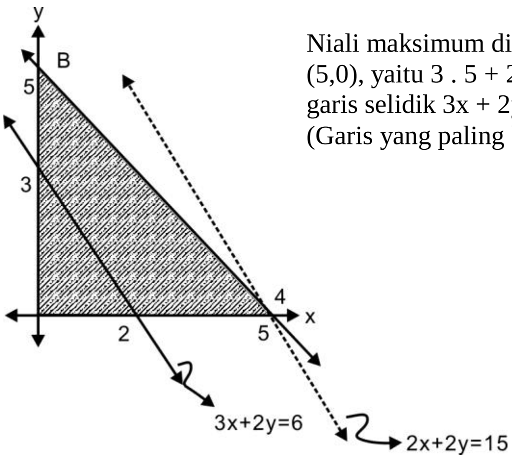


Bidang konveksnya adalah bidang yang dibatasi oleh OABC (daerah arsiran) dengan titik B $\left(13\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}\right)$. (Silakan Anda buat). Karena absis dan ordinat titik A tidak merupakan bilangan cacah maka harus dibulatkan tetapi masih harus berada pada bidang konveks. Dari hasil pembulatan didapat titik-titik (13,33) dan (14,32).

Titik	Nilai 40x + 60y
A(30 , 0)	40 . 30 + 60 . 0 = 1200
B ≈ (13 , 33)	40 . 13 + 60 . 33 = 2500
B ≈ (14 , 32)	40 . 14 + 60 . 32 = 2480
C(0 , 40)	40 . 0 + 60 . 40 = 2400

Jadi, nilai maksimum dari 40x + 60y = 2500 terjadi pada titik sekitar titik B, yaitu titik (13, 33).

10) C. Kita tentukan dalam bidang konveks yang memenuhi $x + y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$.



Niali maksimum dicapai pada titik (5,0), yaitu 3 . 5 + 2 . 0 = 15 dengan garis selidik 3x + 2y = 15.
(Garis yang paling kanan)

Glosarium

Bidang (daerah) konveks	:	himpunan semua titik-titik (x,y) yang merupakan irisan dari himpunan-himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear dalam sistem tersebut (grafik himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidak-samaan linear dalam dua variabel).
Bilangan khayal	:	*imaginar number*, yaitu bilangan yang tidak real (tidak nyata).
Bilangan real	:	gabungan dari himpunan bilangan rasional dan bilangan irasional.
Daerah hasil (*range*)	:	himpunan yang merupakan bayangan atau peta dalam suatu fungsi atau relasi.
Definit negatif	:	grafik fungsi kuadrat (parabola) yang terbuka ke bawah dan berada di bawah sumbu x (tidak memotong sumbu x).
Definit positif	:	grafik fungsi kuadrat (parabola) yang terbuka ke atas dan berada di atas sumbu x (tidak memotong sumbu x).
Domain, daerah asal atau daerah definisi	:	himpunan yang merupakan prapeta atau himpunan asal dari suatu fungsi.
Fungsi bijektif, korespondensi satu-satu	:	fungsi yang berpasangan satu-satu sehingga merupakan fungsi satu-satu (injektif) dan kepada (surjektif).
Fungsi injektif, fungsi satu-satu	:	fungsi yang setiap anggota daerah asal yang berbeda berpasangan dengan anggota daerah hasil yang berbeda.
Fungsi into, fungsi ke dalam	:	fungsi yang daerah hasilnya merupakan bagian dari daerah kawannya.
Fungsi kuadrat, fungsi berderajat dua	:	fungsi polinom dengan derajat variabel tertingginya adalah dua dan grafiknya berupa parabola.
Fungsi onto (surjektif), fungsi kepada	:	fungsi yang daerah hasilnya sama dengan daerah kawannya.
Fungsi polinom, fungsi	:	fungsi dalam bentuk suku banyak berderajat

suku banyak		n dengan suku konstanta tidak nol.
Kodomain, daerah kawan	:	himpunan yang memuat semua daerah hasil.
Model matematika	:	suatu hasil penerjemahan bentuk sehari-hari menjadi bentuk matematika sehingga persoalan keseharian dapat diselesaikan secara matematis.
Program linear	:	perencanaan yang melibatkan himpunan pertidaksamaan-pertidaksamaan linear.
Sistem persamaan linear	:	sebuah himpunan terbatas dari beberapa persamaan linear.
Sistem persamaan linear homogen	:	sistem persamaan linear yang suku-suku konstantanya nol semua.
Sistem persamaan linear nonhomogen	:	sistem persamaan linear yang suku-suku konstantanya tidak semuanya nol.
Teori, dalil	:	kebenaran yang berlaku secara umum dan dapat dibuktikan secara deduktif.
Titik ekstrim	:	titik tertinggi atau terbawah adalah titik yang paling atas atau paling bawah dalam grafik fungsi kuadrat.

Daftar Pustaka

Abdul Kodir, dkk. (1979). *Matematika untuk SMA*. Jakarta: Depdikbud.

Andi Hakim Nasution, dkk. (1994). *Matematika 1 untuk Sekolah Menengah Umum Kelas 1*. Jakarta: Balai Pustaka.

__________. *Matematika 2 untuk Sekolah Menengah Umum Kelas 2*. Jakarta: Balai Pustaka.

Bunarso Tanuatmodjo, dkk. (1977). *Matematika Jilid 1*. Bandung: BPG Tertulis. Depdikbud.

Hadle, G. (1963). *Linear Programming*. USA: Addison Waley Publishing Co. Inc.

Karso. (1997). *Buku Materi Pokok 3: Telaah Materi Persamaan, Pertidaksamaan, dan Program Linear*. Jakarta: Depdikbud, FKIP-UT.

_________. (1997). *Telaah Materi Kurikuler Matematika SMU: Telaah Materi Fungsi dan Komposisinya*. Jakarta: Depdikbud FKIP-UT.

_________. (2003). *Pengantar Dasar Matematika*. Cetakan keempat. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka Depdiknas.

K. Martono. (1992). *Kalkulus 1 Sistem Bilangan Real dan Fungsi*. Bandung: Jurusan Matematika FMIPA-ITB.

Lilik Hendrajaya dan Ismail (1975). *Matematika untuk SLA dan Sederajat*. Bandung: Ganeca Science Book Leries.

Ruseffendi, E.T. (1989). *Dasar-dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Srinath, L. S. (1975). *Linear Programming-Principle and Cases*. New Delhi: EWP.

Utari Sumarmo. (1988–1999). *Matematika PGSMT Jilid 2 Aljabar*. Bandung: PPPG Tertulis.

Walter Fleming and Dell Verberg. (1982). *Algebra and Trigonometry*. New Jersey: Prentice Hal Inc.

Walter Van Stigt. (1979). *Success in Mathematics*. London: John Murray Publishing Ltd.