MODUL 1

Teori Himpunan

Drs. Sukirman, M.Pd.

PENDAHULUAN

Modul ini memuat pembahasan teori himpunan dan himpunan bilangan bulat. Teori himpunan memuat notasi himpunan, relasi dan operasi dua himpunan atau lebih. Sedangkan himpunan bilangan bulat memuat relasi keterbagian, Faktor Persekutuan terBesar (FPB), Kelipatan Persekutuan terKecil (KPK) dan sifat-sifatnya. Struktur Aljabar atau sering juga dinamakan Aljabar Abstrak pada dasarnya merupakan pengembangan dari sistem bilangan bulat yang sebagian besar telah dipelajari dalam Teori Bilangan. Oleh karena itu, untuk mempelajari materi dalam Struktur Aljabar ini, Anda telah menguasai materi Teori Bilangan sebagai materi prasyaratnya.

Setelah mempelajari materi dalam modul ini Anda diharapkan dapat menjelaskan pengertian himpunan, relasi dan operasi himpunan serta sifat-sifatnya, konsep-konsep relasi keterbagian pada bilangan-bilangan bulat, FPB, KPK, dan sifat-sifatnya serta dapat menerapkannya dalam Struktur Aljabar. Secara rinci, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan mampu:

1. menuliskan notasi himpunan;
2. menentukan relasi dua himpunan atau lebih;
3. menjelaskan operasi dua himpunan dan sifat-sifatnya;
4. menjelaskan konsep relasi keterbagian, FPB dan KPK;
5. menentukan sifat-sifat relasi keterbagian pada bilangan bulat;
6. menentukan sifat-sifat FPB dan KPK dari bilangan-bilangan bulat;
7. menghitung FPB dan KPK dari bilangan-bilangan bulat;
8. menentukan hubungan FPB, KPK dan hasilkali dari dua bilangan bulat.

Kompetensi-kompetensi tersebut sangat penting bagi guru maupun calon guru, karena banyak topik-topik di SLTP dan SMA/SMK yang berkaitan dengan konsep dan prinsip FPB dan KPK bilangan-bilangan bulat, bahkan banyak sekali penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, konsep-konsep tersebut akan senantiasa digunakan dalam pembahasan topik-topik berikutnya.

Dalam modul ini disajikan uraian materi dan contoh, latihan memecahkan soal dan diakhiri dengan tes formatif dalam setiap kegiatan belajar. Modul ini terdiri dari 2 Kegiatan Belajar, yaitu:

KB 1. Teori Himpunan yang memuat Notasi Himpunan, Relasi Himpunan dan Operasi Himpunan beserta sifat-sifatnya.

KB 2. Himpunan Bilangan Bulat I yang memuat Relasi Keterbagian, Faktor Persekutuan terBesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan terKecil (KPK).

Selamat belajar, semoga Anda sukses!

KEGIATAN BELAJAR 1

Teori Himpunan

A. NOTASI HIMPUNAN

Himpunan yang dibahas di sini adalah suatu kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dari himpunan didefinisikan dengan jelas, maksudnya adalah suatu objek dapat ditentukan dengan pasti termasuk dalam himpunan tersebut atau tidak termasuk dalam himpunan tersebut. Objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut anggota (elemen) dari himpunan itu. Sebagai contoh, *himpunan wanita cantik.* Himpunan ini objeknya tidak terdefinisi dengan jelas, karena kriteria wanita cantik tidak jelas. Tetapi, *himpunan wanita yang pernah menjadi presiden Republik Indonesia*, merupakan himpunan yang objeknya terdefinisi dengan jelas. Kita dapat memilah wanita mana yang pernah menjadi presiden Republik Indonesia dan wanita mana yang belum pernah menjadi presiden Republik Indonesia. Kata-kata lain, seperti *gugus, kumpulan, kelas, koleksi, keluarga* merupakan sinonim dari kata himpunan.

Pada umumnya himpunan disimbolkan dengan huruf kapital A, B, C, . . . dan elemen-elemennya disimbulkan huruf alfabet kecil a, b, c, ... Notasi "$a \in A$" dibaca "a elemen/anggota dari A" dan "$d \notin B$" dibaca "d bukan anggota/elemen dari B"

Himpunan mungkin saja beranggotakan himpunan-himpunan. Himpunan seperti ini biasa disebut keluarga/koleksi dari himpunan-himpunan. Misalnya, himpunan dari tim-tim sepak bola di Indonesia merupakan himpunan yang anggota-anggotanya adalah tim-tim kesebelasan sepak bola yang ada di Indonesia. Tentu saja, seorang pemain dari suatu tim kesebelasan bukan menjadi anggota dari keluarga/koleksi tersebut.

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan dua cara, yaitu:
1. dengan cara daftar (tabulasi);
2. dengan notasi pembentuk himpunan.

Cara pertama, dengan cara daftar (tabulasi), yaitu mendaftar/ menuliskan anggota-anggotanya di antara kurung kurawal buka dan kurung kurawal tutup, dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh 1.1

a. P = {2, 3, 5, 7} adalah himpunan empat bilangan prima pertama, atau himpunan bilangan prima satu angka. Dalam mendaftar anggota-anggotanya, *urutan anggota-anggotanya tidak perlu diperhatikan* sehingga himpunan tersebut dapat pula dinyatakan dengan {3, 5, 2, 7}, {7, 3, 5, 2}, {5, 2, 7, 3}, { 5, 7, 3, 2} dan sebagainya.

b. Dalam matematika, suatu himpunan dapat hanya mempunyai satu anggota dan biasa disebut *singleton*, misalnya : D = {April}, yaitu himpunan semua nama bulan yang diawali dengan huruf A; E = {10}, ialah himpunan yang anggotanya hanya satu bilangan, yaitu 10.

c. Bahkan dalam matematika terdapat suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota, yang biasa disebut *himpunan kosong* dan diberi simbul { } atau Ø. Misalnya, himpunan bilangan asli yang kuadratnya sama dengan 5, himpunan lembu yang berkaki seribu, himpunan bilangan asli yang kurang dari 1, dan sebagainya. Ingat bahwa {0} dan {Ø} masing-masing bukan himpunan kosong, tetapi himpunan-himpunan itu masing-masing mempunyai satu anggota.

d. Apabila suatu himpunan mempunyai banyak anggota maka kita dapat menuliskan tiga atau empat anggota dan diikuti dengan tiga titik. Tiga atau empat anggota yang dituliskan tersebut harus dapat memberi petunjuk untuk menentukan anggota-anggota berikutnya.
   Misalnya, C = {0, 1, 2, 3, . . . } adalah himpunan semua bilangan cacah.
   A = {1, 2, 3, 4, . . . }adalah himpunan semua bilangan asli. Tetapi, jika kita hanya menuliskan {1, 2, 3, . . . } maka himpunan ini mempunyai dua kemungkinan, yaitu {1, 2, 3, 4, 5, . . . } atau {1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . }. Penulisan seperti itu harus kita hindari, agar tidak membingungkan.
   B = {. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . . } adalah himpunan semua bilangan bulat.

Cara kedua, menyatakan himpunan dengan *notasi pembentuk himpunan*, yaitu dengan menuliskan satu huruf sebarang sebagai peubah anggota dan syarat keanggotaannya serta tanda garis tegak di antara peubah dan syarat keanggotaan, yang semua tulisan itu berada di antara kurung kurawal buka dan kurung kurawal tutup. Syarat keanggotaan ini harus terdefinisi dengan jelas, artinya sesuatu objek harus dapat ditentukan dengan pasti, sebagai anggota himpunan itu atau tidak. Di SLTP dan SMA/SMK, cara kedua ini dapat pula hanya dituliskan syarat keanggotaannya di antara kurung kurawal buka dan kurung kurawal tutup.

Contoh 1.2

a. $A = \{x \mid x$ bilangan asli$\}$ dibaca "himpunan semua x sedemikian hingga x bilangan asli. Tanda "|" dibaca "sedemikian hingga". Atau dapat pula dituliskan sebagai $A = \{$bilangan asli$\}$.
   $D = \{x \mid x < 101$ dan x bilangan asli$\}$ atau {bilangan asli kurang dari 101} adalah himpunan semua bilangan asli yang kurang dari 101. Apabila diketahui bahwa A adalah himpunan semua bilangan asli maka himpunan D tersebut dapat dituliskan lebih singkat menjadi $D = \{x \in A \mid x < 101\}$
b. Apabila B adalah himpunan semua bilangan bulat, yaitu $B = \{x \mid x$ bilangan bulat$\}$ maka G, yaitu himpunan semua bilangan bulat yang gasal, dapat ditulis sebagai $G = \{x \mid x = 2n + 1$ dan $n \in B\}$ atau lebih singkat menjadi $G = \{2n + 1 \mid n \in B\}$ atau dapat juga dituliskan sebagai $G = \{2n + 1 \mid n$ bilangan bulat$\}$
c. L adalah himpunan semua bilangan bulat kelipatan 5, dapat ditulis sebagai $L = \{5m \mid m$ bilangan bulat$\}$. Atau $L = \{5\,n \mid n \in B\}$, jika $B = \{x \mid x$ bilangan bulat$\}$.
d. Pada bidang koordinat Cartesius, misalnya X adalah himpunan semua titik pada sumbu x maka $X = \{(x,y) \mid y = 0$ dan $x, y \in R\}$ dengan $R = \{x \mid x$ bilangan real$\}$. T adalah himpunan semua titik pada garis dengan persamaan $y = 2\,x + 4$ ditulis sebagai $T = \{(x,y) \mid y = 2\,x + 4$ dan $x, y \in R\}$.

B. HUBUNGAN DUA HIMPUNAN

Dua himpunan kemungkinan mempunyai hubungan : (1) himpunan yang satu merupakan himpunan bagian dari yang lain, (2) dua himpunan itu sama, (3) dua himpunan tersebut ekuivalen, atau (4) dua himpunan itu saling asing (saling lepas). Berikut ini akan dibahas tiap-tiap hubungan dua himpunan tersebut.

1. Himpunan Bagian (Subset)

Misalkan $A = \{1, 5\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Perhatikan bahwa 1 dan 5 masing-masing merupakan anggota dari himpunan A dan juga merupakan anggota dari himpunan B. Dapat dikatakan bahwa setiap anggota dari himpunan A merupakan anggota dari himpunan B pula. Hal seperti ini dikatakan bahwa himpunan A merupakan *himpunan bagian* dari himpunan B. Pengertian himpunan bagian ini secara formal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1.

Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B (ditulis $A \subset B$) jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B. Atau dapat ditulis sebagai

$$A \subset B \text{ jhj } \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Contoh 1.3

a. Apabila A = {x | x bilangan asli} dan P = {2, 3, 5, 7, . . .}, yaitu himpunan semua bilangan prima maka $P \subset A$. Dan jika B = {x | x bilangan bulat} maka $A \subset B$ dan $P \subset B$.
b. Benarkah bahwa $A \subset A$, untuk setiap himpunan A ?
Memperhatikan definisi 1.1 maka setiap anggota dari himpunan A mesti merupakan anggota dari himpunan A. Sehingga pastilah benar bahwa $A \subset A$. Selanjutnya dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian tak sejati (*improper subset*) dari A
c. Benarkah bahwa $\emptyset \subset A$, untuk setiap himpunan A ?
Menurut definisi 1.1, $\emptyset \subset A$ jika dan hanya jika $\forall x,\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$.
Karena $x \in \emptyset$ adalah suatu pernyataan yang bernilai salah, sebab Ø adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota satupun maka kalimat implikasi $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ bernilai benar, sebab pendahulu/antesedennya bernilai salah. Sehingga kalimat "$\forall x,\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" bernilai benar, dengan demikian $\emptyset \subset A$ benar.
Seperti juga pada contoh 1.3.b, Ø merupakan himpunan bagian tak sejati dari A. Himpunan bagian dari A, selain Ø dan A (jika ada) disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari A. Selanjutnya dalam buku ini, jika tidak ada keterangan apa-apa maka yang dimaksud kata-kata "himpunan bagian" adalah mencakup himpunan bagian sejati maupun himpunan bagian tak sejati.
d. Semua himpunan bagian dari {a, b, c} adalah { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c} dan {a, b, c}. Jadi, banyaknya himpunan bagian dari {a, b, c} adalah 8. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari {a, b, c, d}?

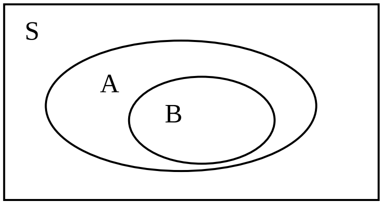
$A \subset B$ dapat pula dibaca “A termuat dalam B” yang sama artinya dengan “ B memuat A” yang diberi simbol dengan “ $B \supset A$” (B is a superset of A). Apabila A bukan himpunan bagian dari B, atau A tidak termuat dalam B, disimbolkan dengan $A \not\subset B$.

Dalam suatu pembicaraan atau pembahasan, kadang-kadang kita harus membatasi diri, agar pembicaraan atau pembahasan kita terfokus pada permasalahan yang dibahas. Dalam pembahasan himpunan, kita perlu menetapkan suatu himpunan yang anggota-anggota atau himpunan bagian-himpunan bagiannya merupakan sumber pembahasan. Himpunan seperti ini disebut *Himpunan Semesta* atau *Semesta Pembicaraan* (*Universal Set*), yang biasa diberi lambang dengan huruf S atau U. Himpunan semesta yang ditetapkan tergantung pada permasalahan yang sedang dibahas. Misalnya, dalam suatu keadaan mungkin himpunan semestanya adalah himpunan semua bilangan rasional sebagai himpunan semesta, dalam keadaan lain mungkin himpunan semua orang di Yogyakarta, himpunan semua segitiga, himpunan semua segi empat, atau himpunan semua titik pada suatu bidang datar, dan sebagainya.

Suatu himpunan dapat digambarkan dalam suatu diagram yang biasa disebut *diagram Venn-Euler* atau ada yang hanya menyebut diagram Venn saja. Himpunan semesta biasa digambarkan sebagai persegi panjang dan himpunan bagian-himpunan bagiannya digambarkan sebagai kurva-kurva tertutup sederhana.

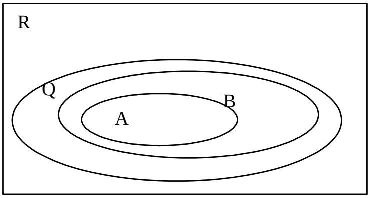
Contoh 1.4

a. Jika S = {1, 2, 3, 4, 5, . . . , 10} sebagai himpunan semesta, A = {1, 3, 5, 7, 9} dan B = { 3, 5, 7}, maka diagram Venn dari himpunan-himpunan ini tampak pada Gambar 1.1 berikut ini.



Gambar 1.1

b. Jika A = {x | x bilangan asli}, B = {y | y bilangan bulat}, Q = {x | x bilangan rasional} dan R = {y | y bilangan real} maka kita dapat menetapkan R sebagai himpunan semesta. Kita dapat pula memilih K = {t | t bilangan kompleks} sebagai himpunan semesta. Pemilihan himpunan semesta tergantung pada permasalahan yang dihadapi, tetapi harus diingat bahwa himpunan-himpunan pada permasalahan yang dihadapi harus merupakan himpunan bagian-himpunan bagian dari himpunan semesta yang dipilih. Jika kita dihadapkan himpunan-himpunan A, B, Q dan R seperti di atas maka kita tidak boleh memilih A, B, atau Q sebagai himpunan semestanya. Apabila R sebagai himpunan semesta maka diagram Venn dari himpunan-himpunan A, B, dan Q terlihat pada Gambar 1.2 berikut ini.



Gambar 1.2

c. Himpunan penyelesaian dari persamaan $2x^2 + 5x - 3 = 0$, apabila $x \in A$, dengan A = {x | x bilangan asli } adalah { }. Dalam permasalahan ini, A sebagai himpunan semesta. Tetapi, apabila dalam permasalahan tersebut B = {x | x bilangan bulat} sebagai himpunan semestanya maka himpunan penyelesaian dari persamaan itu adalah {-3}. Dan jika Q = {x | x bilangan rasional} sebagai himpunan semestanya maka himpunan penyelesaian dari persamaan itu adalah $\left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$.

Pada contoh di atas, kita telah menuliskan semua himpunan bagian dari A = {a, b, c}. Himpunan dari semua himpunan bagian dari A disebut himpunan kuasa A (power set of A) dan disimbolkan dengan 2^A. Jadi

$$2^A = \{ X \mid X \subset A\}.$$

Jika A = {a, b, c} maka 2^A = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, A}. Banyaknya anggota himpunan A diberi simbol n(A), banyaknya anggota himpunan 2^A diberi simbol $n(2^A)$. Tampak di sini, jika n(A) = 3 maka $n(2^A) = 8$.

Apabila banyaknya anggota suatu himpunan adalah berhingga maka himpunan itu disebut *himpunan berhingga* (finite set). Dan apabila banyaknya anggota suatu himpunan adalah takhingga maka himpunan itu disebut *himpunan takhingga* (infinite set).

2. Dua Himpunan Sama

Definisi 1.2

Dua himpunan A dan B dikatakan sama (ditulis A = B) jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B, dan setiap anggota B merupakan anggota A pula. Atau dapat ditulis

$$A = B \text{ jhj } (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \ \& \ (\forall y, y \in B \Rightarrow y \in A)$$

Atau ditulis lebih singkat menjadi

$$A = B \text{ jhj } A \subset B \ \& \ B \subset A$$

Jika A tidak sama dengan B (ditulis $A \neq B$)

Contoh 1.5

a. Jika A = {x |x bilangan asli} dan B = {y | y bilangan bulat positif} maka A = B.
b. Jika P = {1, 2} dan K = {x | x^2 - 3x + 2 = 0 dan x bilangan real} maka P = K.

3. Dua Himpunan Ekuivalen

Dua himpunan berhingga A dan B dengan n(A) = n(B), yaitu banyaknya anggota A sama dengan banyaknya anggota B maka dikatakan bahwa himpunan A ekuivalen dengan himpunan B (ditulis A ~ B). Misalnya, A = {1, 3, 5, 7, 9} dan B = {a, b, c, d, e} adalah dua himpunan yang ekuivalen, yaitu A ~ B. Apabila himpunan M sama dengan himpunan N maka M ~ N, tetapi tidak sebaliknya. Perhatikan bahwa ketentuan tersebut hanya dikhususkan untuk himpunan-himpunan yang berhingga saja. Untuk himpunan-himpunan takhingga maupun berhingga A dan B dikatakan ekuivalen, jika ada suatu korespondensi satu-satu dari A ke B atau sebaliknya.

Misalnya, A = himpunan semua bilangan asli dan B = himpunan semua bilangan genap adalah dua himpunan yang ekuivalen. Hal ini ditunjukkan dengan memasangkan setiap elemen A dengan elemen B dengan aturan sebagai berikut.

f : A → B yang didefinisikan oleh

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jika } n = 1 \\ \frac{1}{2} n, & \text{jika } n \text{ genap} \\ -\frac{1}{2}(n-1), & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

4. Dua Himpunan Lepas (Saling Asing)

Dua himpunan yang tidak kosong A dan B dikatakan saling asing/lepas (ditulis A//B) dan dibaca A lepas dengan B jika dan hanya jika dua himpunan itu tidak mempunyai anggota persekutuan, atau setiap anggota A bukan anggota B dan setiap anggota B bukan anggota A.

Contoh 1.6

a. Jika A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = { 7, 8, 9, 10} maka A // B.
b. Jika M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan N = {x | x^2 = 3 dan x bilangan asli} maka M tidak lepas dengan N.

C. OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN

Apabila diketahui dua himpunan atau lebih, kita dapat membentuk himpunan baru dengan mengoperasikan himpunan-himpunan yang diketahui tersebut. Operasi-operasi pada himpunan-himpunan adalah irisan ($\cap$), gabungan ($\cup$), komplemen (^{c}), selisih (-) dan perkalian Cartesius (x).

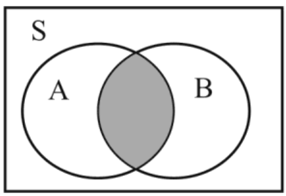
1. Irisan Dua Himpunan

Definisi 1.3 :

Irisan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cap B$ dibaca A irisan B) adalah himpunan semua anggota persekutuan himpunan A dan himpunan B, atau dengan kata lain, himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua anggota himpunan A yang sekaligus sebagai anggota B.

Atau dapat ditulis sebagai $A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$

Memperhatikan definisi di atas dan sifat komutatif dari konjungsi maka dapat disimpulkan bahwa $A \cap B = B \cap A$. Dengan kata lain, operasi irisan pada himpunan-himpunan bersifat komutatif. Secara formal sifat komutatif irisan pada himpunan ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 1.3

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\} \\
&= \{x \mid x \in B \;\&\; x \in A\} \quad \text{sifat komutatif konjungsi} \\
&= B \cap A
\end{aligned}
$$

Memperhatikan definisi irisan tersebut dan mengingat sifat asosiatif konjungsi maka dapat disimpulkan bahwa operasi irisan pada himpunan juga bersifat asosiatif, yaitu

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Memperhatikan definisi irisan pada himpunan itu pula, kita dapat menarik kesimpulan bahwa $A \cap B$ termuat baik dalam A maupun B, yaitu :

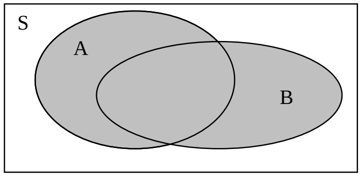
$$(A \cap B) \subset A \quad \text{dan} \quad (A \cap B) \subset B$$

2. Gabungan Dua Himpunan

Definisi 1.4 :

Gabungan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cup B$ dan dibaca A gabungan B) adalah himpunan yang anggotanya semua anggota himpunan A atau himpunan B. Atau dapat ditulis sebagai berikut.

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}$



Gambar 1.4

Dari definisi gabungan dua himpunan tersebut dan mengingat sifat komutatif disjungsi maka dapat disimpulkan bahwa operasi gabungan pada himpunan-himpunan bersifat komutatif, yaitu :

$$A \cup B = B \cup A$$

Demikian pula, dengan memperhatikan definisi gabungan tersebut dan mengingat sifat asosiatif disjungsi maka dapat disimpulkan bahwa operasi gabungan pada himpunan-himpunan juga bersifat asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= \{ x \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C\} \\ &= \{ x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} \\ &= \{ x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} \quad \text{sifat asosiatif disjungsi} \\ &= \{ x \mid x \in A \vee x \in (B \cup C)\} \\ &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sifat asosiatif gabungan himpunan.

Dari definisi gabungan itu pula dapat disimpulkan bahwa baik himpunan A maupun himpunan B masing masing termuat dalam $A \cup B$, yaitu :

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{dan} \quad B \subset (A \cup B)$$

Teorema 1.1 : (Sifat distributif)

a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bukti **:**

a. Untuk membuktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ maka kita harus menunjukkan dua hal, yaitu:

(i) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan

(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Ambil sebarang $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \ \& \ (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \ \& \ x \in B) \vee (x \in A \ \& \ x \in C)$ (sifat distributif konjungsi terhadap dijungsi)

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Jadi $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ …………..(i)

Ambil sebarang $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow y \in (A \cap B) \vee y \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (y \in A \ \& \ y \in B) \vee (y \in A \ \& \ y \in C)$

$\Rightarrow y \in A \ \& \ (y \in B \vee y \in C)$ (sifat distributif konjungsi terhadap dijungsi)

$\Rightarrow y \in A \ \& \ y \in B \cup C$

$\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$

Jadi, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ ……………(ii)

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

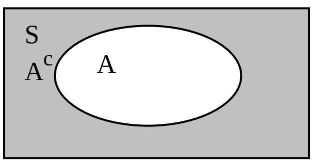
Bukti untuk teorema 1.1.b diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

3. Komplemen Suatu Himpunan

Definisi 1.5:

Misalkan S adalah suatu himpunan semesta maka komplemen dari himpunan A (ditulis A^c dibaca A komplemen) adalah himpunan dari semua anggota himpunan semesta S yang bukan merupakan anggota A. Atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$A^c = \{x \mid x \in S \ \& \ x \notin A\}$$



Gambar 1.5

Contoh 1.7

a. Misalkan B = {x | x bilangan bulat} sebagai himpunan semesta. Jika A = {x | x bilangan asli} maka A^c = {x | x bilangan bulat tidak positif}. Jika G = {2n | n bilangan bulat } maka G^c = {2n + 1 | n bilangan bulat}.
b. Misalkan S = { a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n } sebagai himpunan semesta. Jika A = {b, a, n, d, e, m} dan B = {k, e, c, a, m}, akan ditunjukkan bahwa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, sebagai berikut: $A \cap B$ = {a, e, m}, $(A \cap B)^c$ = {b, c, d, f, g, h, k, n}, A^c = {c, f, g, h, k, n}, B^c = {b, d, f, g, h, k, n}, $A^c \cup B^c$ = {b, c, d, f, g, h, k, n}. Tampak di sini bahwa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dari definisi komplemen suatu himpunan tersebut, apabila A sebarang himpunan dalam suatu himpunan semesta S maka $A \cup A^c = S$, $(A^c)^c = A$, $S^c = \emptyset$ dan $\emptyset^c = S$

***Teorema 1.2* : (*De Morgan*)**

a. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

***Bukti* :**

a. Untuk membuktikannya digunakan pengertian kesamaan dua himpunan, yaitu kita menunjukkan berturut-turut $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ dan $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

Ambil sebarang $x \in (A \cap B)^c$
$\Rightarrow x \notin (A \cap B)$,
$\Rightarrow x \notin A$ atau $x \notin B$
$\Rightarrow x \in A^c$ atau $x \in B^c$
$\Rightarrow x \in A^c \cup B^c$.

Jadi $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ ……………………(i)

Ambil sebarang $y \in A^c \cup B^c$
$\Rightarrow y \in A^c$ atau $y \in B^c$
$\Rightarrow y \notin A$ atau $y \notin B$
$\Rightarrow y \notin (A \cap B)$
$\Rightarrow y \in (A \cap B)^c$

Jadi $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ ………………(ii)

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

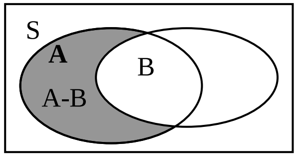
Bukti untuk teorema 1.2.b diserahkan Anda sebagai latihan.

4. Selisih Dua Himpunan

Definisi 1.6:

Himpunan A dikurangi himpunan B (ditulis A – B dan dibaca A kurang B) adalah himpunan dari anggota-anggota himpunan A yang bukan merupakan anggota B. Atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}$$



Gambar 1.6

Contoh 1.8:

a. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ maka $A - B = \{1, 2, 3\}$ dan $B - A = \{7, 8\}$.

b. Apabila $B = \{x \mid x$ bilangan bulat$\}$ dan $G = \{2x \mid x$ bilangan bulat$\}$ maka $B - G = \{2x - 1 \mid x$ bilangan bulat$\}$ dan $G - B = \emptyset$.

Dari definisi selisih dua himpunan tersebut, yaitu:

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\} \\ &= \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

Jadi $A - B = A \cap B^c$

5. Perkalian Cartesius Dua Himpunan

Definisi 1.7:

Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong maka perkalian Cartesius dari A dan B (ditulis $A \times B$ dan dibaca "A kali B") adalah himpunan semua pasangan berurutan yang pasangan pertamanya adalah elemen A dan pasangan keduanya elemen B.

Atau ditulis sebagai

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B \}$$

Contoh 1.9:

a. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka
$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$ dan
$B \times A = \{a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$.
Karena $(a, b) \neq (b, a)$, untuk $a \neq b$ maka $A \times B \neq B \times A$.

b. Buktikan bahwa $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

***Bukti* :**

Ambil sebarang $(x,y) \in A \times (B \cap C)$

$(x,y) \in (A \times (B \cap C)) \Rightarrow x \in A$ dan $y \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ dan ($y \in B$ dan $y \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ dan $y \in B$) dan ($x \in A$ dan $y \in C$)

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B)$ dan $(x,y) \in (A \times C)$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

Jadi $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

Ambil sebarang $(p,q) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$

$(p,q) \in ((A \times B) \cap (A \times C)) \Rightarrow (p,q) \in (A \times B)$ dan $(p,q) \in (A \times C)$

$\Rightarrow$ ($p \in A$ dan $q \in B$) dan ($p \in A$ dan $q \in C$)

$\Rightarrow p \in A$ dan ($q \in B$ dan $q \in C$)

$\Rightarrow p \in A$ dan $q \in (B \cap C)$

$\Rightarrow (p,q) \in A \times (B \cap C)$

Jadi, $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

Sehingga $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $\square$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Apabila $A = \{x \mid x$ bilangan asli$\}$, $B = \{x \mid x$ bilangan bulat$\}$, tuliskanlah himpunan-himpunan berikut ini dengan cara daftar atau dengan kalimat sehari-hari!
   a) $H = \{x \mid x \in B \text{ dan } -2 < x < 8\}$
   b) $T = \{x \in B \mid x \text{ terbagi oleh } 13\}$
   c) $F = \{x \in B \mid x \text{ genap dan } x < 100\}$
   d) $E = \{2n - 1 \mid n \in A\}$
   e) $G = \{k \in B \mid k < -100\}$.
   f) $I = \{x \in B \mid x + 1 = x\}$.
   g) $K = \left\{ \dfrac{x}{y} \,\middle|\, x, y \in A, x < y \text{ dan } y < 4 \right\}$.
   h) $L = \{p \in A \mid p^2 < 17\}$.
   i) $M = \{t \in B \mid t^2 - 1 < 18\}$

j) $N = \{9m - 1 \mid m \in B\}$

k) $D = \{a^n \mid n \in B\}$, jika a suatu bilangan bulat tertentu.

l) $E = \{na \mid n \in B\}$, jika a suatu bilangan bulat tertentu.

m) $F = \{x \in A \mid x < 15$ dan x saling prima dengan $15\}$

n) $G = \{x \mid x \subset \{1,2,3\}\}$

o) $J = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a,b \in B \text{ dan } b \neq 0 \right\}$

p) $K = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m < n \text{ dan } m,n \in A \right\}$

2) Tuliskanlah himpunan-himpunan berikut ini dengan notasi pembentuk himpunan!

a) $P = \{ 7, 10, 13, 16, \ldots \}$

b) $S = \{0, 3, -3, 6, -6, 12, -12, \ldots \}$

c) $T = \{0, 4, 8, 12, \ldots \}$

d) $U = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots \}$

e) $V = \{5, 15, 25, 35, \ldots\}$

f) $W = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$

g) $X = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots \right\}$

3) Tuliskan semua himpunan bagian dari himpunan-himpunan berikut ini!

a. $\{ 0, \emptyset\}$ b. $\{a, \{b\}, \{a,b\}\}$

4) Diketahui $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

a) Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai dua anggota?

b) Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai tujuh anggota?

c) Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai tiga anggota?

d) Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai empat anggota?

e) Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai lima anggota?

5) Misalkan S suatu himpunan semesta dengan himpunan-himpunan A dan B. Buktikanlah pernyataan-pernyataan berikut ini!
   a) $A \subset B$ jhj $B^c \subset A^c$
   b) Jika $A \cap B = \emptyset$ maka $A \subset B^c$
   c) $A - B \subset A \cup B$
6) Buktikanlah bahwa a. $A^c - B^c = B - A$
   b. jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$
7) Jika $A \subset B$, buktikan $A \cup C \subset B \cup C$, untuk setiap himpunan C.
8) Buktikan : $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) H = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.
   b) T = {. . ., -39, -26, -13, 0, 13, 26, 39, . . . }
   c) F = {98, 96, 94, 92, . . . , 0, -2, -4, -6, . . . }
   d) E = {1, 3, 5, 7, . . . }
   e) G = {-101, -102, -103, -104, . . . }
   f) I = { }.
   g) $K = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.
   h) L = {1, 2, 3, 4}.
   i) M = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}
   j) N = {. . . , -19, -10, -1, 8, 17, . . . }
   k) $D = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots\}$
   l) E = {. . . , -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, . . . }
   m) F = {1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14}
   n) $G = \{\emptyset, \{1\},\{2\},\{3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\},\{1,2,3\}\}$
   o) J = himpunan semua bilangan rasional
   p) K = himpunan semua pecahan sejati
2) A adalah himpunan semua bilangan asli dan B adalah himpunan semua bilangan bulat.
   a) $P = \{3n + 4 \mid n \in A\}$
   b) $S = \{3m \mid m \in B\}$.
   c) $T = \{4t - 4 \mid m \in A\}$
   d) $U = \{(-1)^{n+1}\, n \mid n \in A\}$.
   e) $V = \{10n - 5 \mid n \in A\}$.

f) $W = \{ \frac{n}{n+1} \mid n \in A\}$

g) $X = \{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mid n \in A\}$

3) a) Semua himpunan bagian dari { 0, Ø} adalah Ø , {0}, { Ø} dan {0, Ø}.

b) Semua himpunan bagian dari {a,{b},{a,b}} adalah Ø, {a}, {{b}}, {{a, b}}, {a, {b}},{a, {a, b}}, {{b}, {a, b}}dan {a, {b},{a, b}}.

4) Diketahui A = {a, b, c, d, e, f, g, h}.

a) Banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai dua anggota adalah 28 himpunan.

b) Banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai tujuh anggota ada 8

c) Banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai tiga anggota ada 56.

d) Banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai empat anggota ada 70.

e) Banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai lima anggota ada 56.

5) Pembuktian:

a) Harus dibuktikan

(i) jika $A \subset B$ maka $B^c \subset A^c$, dan

(ii) jika $B^c \subset A^c$ maka $A \subset B$.

Bukti (i).

Diketahui $A \subset B$

Jika $x \in B^c$ maka $x \notin B$

Berdasarkan yang diketahui $A \subset B$, dan diperoleh $x \notin B$, berarti $x \notin A$. Sehingga $x \notin A^c$. Jadi $B^c \subset A^c$.

Bukti (ii)

Diketahui $B^c \subset A^c$

Jika $y \in A$ maka $y \notin A^c$, dan karena $B^c \subset A^c$ maka $y \notin B^c$ sehingga $y \in B$.

Jadi $A \subset B$.

b) Jika $x \in A$ dan karena $A \cap B = \emptyset$ maka $x \notin B$ sehingga $x \in B^c$.

Jadi $A \subset B^c$

c) Jika $x \in (A - B)$ maka $x \in A$ dan $x \notin B$. Karena $x \in A$ maka $x \in (A \cup B)$. Jadi $A - B \subset A \cup B$

6) Akan dibuktikan bahwa a) $A^c - B^c = B - A$

b) jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$

a) Jika $x \in (A^c - B^c)$ maka $x \in A^c$ dan $x \notin B^c$ sehingga $x \in B$ dan $x \notin A$, yang berarti $x \in (B - A)$. Jadi $A^c - B^c \subset B - A$ .... (i)
Sebaliknya, jika $y \in (B - A)$ maka $y \in B$ dan $y \notin A$ sehingga $y \in A^c$ dan $y \notin B^c$, yang berarti $y \in (A^c - B^c)$.
Jadi, $B - A \subset A^c - B^c$ ……………………………………………. (ii)
Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $A^c - B^c = B - A$

b) $A \cup (B - A) = A \cup B$, sebab $A \subset B$
$= B$, sebab $A \subset B$.

7) Jika $A \subset B$, akan dibuktikan $A \cup C \subset B \cup C$, untuk setiap himpunan C.
Jika $x \in (A \cup C)$ maka $x \in A$ atau $x \in C$. $x \in A$ dan karena $A \subset B$ maka $x \in B$.
$x \in B$ atau $x \in C$ maka $x \in (B \cup C)$. Jadi $A \cup C \subset B \cup C$.

8) Akan dibuktikan bahwa $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (B - A) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\\ &= (A \cup (B \cap A^c)) \cap (B^c \cup (B \cap A^c)).\\ &= ((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) \cap ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)).\\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)\\ &= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c\\ &= (A \cup B) - (A \cap B).\end{aligned}$$

RANGKUMAN

* Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan dua cara, yaitu :
  (a) dengan cara daftar (tabulasi)
  (b) dengan notasi pembentuk himpunan.
* Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B (ditulis $A \subset B$) jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B.
  $A \subset B$ jhj $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$.
* Dua himpunan A dan B dikatakan sama (ditulis $A = B$) jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B, dan setiap anggota B merupakan anggota A pula. Atau
  $A = B$ jhj $A \subset B$ & $B \subset A$
* Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B (ditulis $A \sim B$) jika ada korespondensi satu-satu dari A ke B atau sebaliknya.
* Dua himpunan yang tidak kosong A dan B dikatakan saling asing/lepas (ditulis A//B) jika dua himpunan itu tidak mempunyai

anggota persekutuan, atau setiap anggota A bukan anggota B dan setiap anggota B bukan anggota A.

* Irisan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cap B$) adalah himpunan semua anggota persekutuan himpunan A dan himpunan B,atau dengan kata lain, himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua anggota himpunan A yang sekaligus sebagai anggota B.
  Atau $A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$
* Gabungan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cup B$) adalah himpunan yang anggotanya semua anggota himpunan A atau himpunan B.
  Atau $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}$
* Sifat distributif: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
* Misalkan S adalah suatu himpunan semesta maka komplemen dari himpunan A (ditulis A^c) adalah himpunan dari semua anggota himpunan semesta S yang bukan merupakan anggota A.
  Atau $A^c = \{x \mid x \in S \;\&\; x \notin A\}$
* Teorema De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
* Himpunan A dikurangi himpunan B (ditulis $A - B$) adalah himpunan dari anggota-anggota himpunan A yang bukan merupakan anggota B.
  Atau $A - B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \notin B\}$
* Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong maka perkalian Cartesius dari A dan B (ditulis $A \times B$) adalah himpunan semua pasangan berurutan yang pasangan pertamanya elemen A dan pasangan keduanya elemen B.
  Atau $A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B \}$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Pilihan: A, jika (1) dan (2) benar,
B, jika (1) dan (3) benar,
C, jika (2) dan (3) benar, atau
D, jika (1), (2) dan (3) semuanya benar.

1) Jika diketahui bahwa $A \subset B$ maka pernyataan berikut ini *yang benar* adalah ….
(1) $A - B = \varnothing$
(2) $A \cap B = A$
(3) $A \cup B = B$

2) Jika $A \cap B = \varnothing$ maka ….
(1) $A^c \cup B^c = \varnothing$
(2) $A - B = A$
(3) $B^c \cap A = A$

3) Pernyataan-pernyataan berikut ini *yang benar* adalah ….
(1) Jika $A = B$ dan $B = C$ maka $A = C$.
(2) Jika $A \in B$ dan $B \in C$ maka $A \in C$.
(3) Jika $A = B$ dan $A \in C$ maka $B \in C$.

4) Pernyataan berikut ini yang *tidak benar* adalah ….
(1) $\{a, b\} \subset \{a,\{a,b\}\}$
(2) $a \in \{\{a,b\}, b\}$
(3) $\{a,b\} \subset \{\{a\},\{b\}\}$

5) Pernyataan-pernyataan berikut ini yang *tidak benar* adalah ….
(1) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
(2) $\{a\} \subset \{\{a\}, b\}$
(3) $a \in \{n, \{a\}\}$

6) Pernyataan-pernyataan berikut ini *yang benar* adalah ….
   (1) Jika $A \cup B \subset A \cup C$, maka $B \subset C$
   (2) Jika $A - B = A - C$, maka $B = C$
   (3) Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$

7) Pernyataan-pernyataan berikut ini *yang benar* adalah ….
   (1) Jika $B \subset C$ maka $A - C \subset A - B$
   (2) Jika $A \subset B$, maka $A \cap C \subset B \cap C$
   (3) Jika $A \cup B = A \cup C$, maka $B = C$

8) Pernyataan-pernyataan berikut ini *yang benar* adalah ….
   (1) Jika $A \cap B = A \cap C$, maka $B = C$
   (2) Jika $A = B$ maka $A \cap C = B \cap C$
   (3) Jika $A \subset B$ maka $A \cup C \subset B \cup C$

9) Jika $n(A) = 10$ maka banyaknya himpunan bagian dari A yang memuat ….
   (1) 8 elemen ada 45
   (2) 3 elemen ada 120
   (3) 2 elemen ada 90

10) Himpunan berikut ini yang menyatakan :" Himpunan semua bilangan bulat kelipatan k, jika k suatu bilangan bulat" adalah ….
   (1) {kn | n bilangan bulat}
   (2) {x | x = mk, m bilangan bulat}
   (3) {x | x = kn, n bilangan bulat}

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Himpunan Bilangan Bulat

Dalam kegiatan belajar 2 ini, kita akan membicarakan bilangan bulat dan sifat-sifatnya yang erat kaitannya dengan penerapannya dalam Struktur Aljabar. Khusus dalam kegiatan belajar ini, untuk menyingkat penulisan maka setiap variabel yang ditulis huruf kecil menyatakan suatu bilangan bulat.

Salah satu asumsi dasar dalam mengembangkan sifat-sifat bilangan bulat adalah prinsip urutan-baik (*well-ordering principle*), yaitu : Suatu himpunan bagian yang tidak kosong dari himpunan bilangan bulat tak negatif selalu mempunyai elemen terkecil.

Dalam menggunakan simbol, prinsip ini dapat dinyatakan bahwa jika $S \neq \varnothing$ dan S suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan bulat tak negatif, maka ada suatu elemen $s_o \in S$ sedemikian hingga $s_o \leq s$, $\forall\ s \in S$. Salah satu penerapan dari prinsip ini adalah teorema dasar dalam Teori Bilangan yang disebut *algoritma pembagian* yang pembuktiannya menggunakan prinsip *well-ordering*. Algoritma pembagian yang sering digunakan dalam *algoritma Euclid*, menyatakan bahwa jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat lain maka ada hasil dan ada sisanya. Secara formal, algoritma pembagian dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.3 : *(Algoritma Pembagian).*

Jika m dan n dua bilangan bulat dan $n > 0$ maka ada bilangan-bilangan bulat q dan r, sedemikian hingga $m = qn + r$, dengan $0 \leq r < n$.

***Bukti* :**

Dibentuk himpunan $W = \{m - tn \mid t \text{ bilangan bulat}\}$. Himpunan W ini mesti memuat suatu bilangan bulat tak negatif, sebab jika t dibuat cukup besar dan negatif, maka $m - tn \geq 0$. Misalkan $V = \{v \in W \mid v \geq 0\}$, maka dengan prinsip well-ordering, V mempunyai elemen terkecil, misalnya $r \in V$, $r \geq 0$ dan $r = m - qn$ untuk suatu bilangan bulat q. Bilangan bulat $r < n$, sebab jika tidak, yaitu $r = m - qn \geq n$, maka $m - (q + 1)n \geq 0$. Sehingga $m - (q + 1)n$ suatu elemen dari V dan $m - (q + 1)n < r$. Hal ini bertentangan dengan ketentuan semula bahwa r suatu elemen terkecil dalam V. Dengan demikian teorema terbukti. □

Definisi 1.8:

Jika m, n bilangan-bilangan bulat dan $m \neq 0$ maka m membagi (habis) n (ditulis $m \mid n$) jika dan hanya jika $n = km$, untuk suatu bilangan bulat k.

Sebagai contoh, $2 \mid 8$, $(-6) \mid 24$, $5 \mid (-15)$, $(-4) \mid (-12)$.
Jika $m \mid n$, maka dikatakan bahwa m pembagi atau faktor dari n, dan n adalah kelipatan dari m. Untuk menyatakan bahwa m tidak membagi n ditulis $m \nmid n$.
Berikut ini sifat-sifat elementer dari keterbagian.

Teorema 1.4:

Jika m, n bilangan-bilangan bulat dan $m \neq 0$, maka

a. $m \mid 0$, $1 \mid n$ dan $n \mid n$
b. jika $m \mid 1$, maka $m = 1$ atau $m = -1$
c. jika $m \mid n$ dan $n \mid k$, maka $m \mid k$
d. jika $m \mid n$ dan $k \mid r$, maka $mk \mid nr$
e. jika $m \mid n$ dan $n \mid m$, maka $m = \pm n$
f. jika $m \mid n$ dan $m \mid k$, maka $m \mid (un + vk)$, $\forall u, v \in B$.

Bukti **:**

Bukti tiap bagian dari teorema ini langsung diperoleh dari definisi di atas. Bagian f. akan dibuktikan di sini dan bagian lainnya diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

f. $m \mid n$ dan $m \mid k$, maka $n = am$ dan $k = bm$ untuk suatu bilangan-bilangan bulat a dan b. Sehingga $un = uam$ dan $vk = vbm$. Jadi, $(un + vk) = (ua + vb)\, m$ yang berarti $m \mid (un + vk)$. □

Kita telah mengetahui bahwa semua faktor bulat positif dari 30 adalah

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, dan 30.

Sedangkan semua faktor bulat positif dari 45 adalah

1, 3, 5, 9, 15 dan 45.

Maka faktor-faktor persekutuan (pembagi-pembagi bersama) dari 30 dan 45 adalah

1, 3, 5, dan 15

Dan faktor persekutuan terbesar dari 30 dan 45 adalah 15.

Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari dua bilangan bulat dituliskan sebagai definisi berikut ini.

***Definisi 1.9* :**

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat maka bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $d \mid a$ dan $d \mid b$.

Karena 1 adalah pembagi (faktor) dari setiap bilangan bulat maka 1 adalah faktor persekutuan dari a dan b. Jadi himpunan faktor persekutuan dari a dan b tidak pernah kosong.

Setiap bilangan bulat, kecuali nol selalu membagi nol sehingga jika a = b = 0 maka setiap bilangan bulat merupakan faktor persekutuan dari a dan b. Dalam hal ini, himpunan semua faktor persekutuan bulat positif dari a dan b merupakan himpunan tak hingga.

Apabila sekurang-kurangnya satu dari a dan b tidak sama dengan nol maka himpunan semua faktor persekutuan bulat positif dari a dan b merupakan himpunan berhingga. Sehingga mesti ada anggota dari himpunan tersebut yang terbesar dan disebut Faktor Persekutuan terBesar (FPB) dari a dan b. Secara formal, hal tersebut dinyatakan sebagai definisi berikut ini.

***Definisi 1.10*:**

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat yang sekurang-kurangnya satu di antaranya tidak sama dengan nol maka Faktor Persekutuan terBesar (FPB) dari a dan b ditulis "(a, b)" adalah suatu bilangan bulat positif d yang memenuhi

(i) $d \mid a$ dan $d \mid b$, serta

(ii) jika $e \mid a$ dan $e \mid b$ maka $e \leq d$.

Dari definisi tersebut dapat dimengerti bahwa jika $(a, b) = d$ maka $d \geq 1$. Dan apabila ada faktor persekutuan lain, misalnya e maka $e \leq d$ dan $e \mid d$.

Contoh 1.10:

Faktor bulat positif dari –12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Faktor bulat positif dari 30 adalah 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Maka faktor persekutuan yang positif dari –12 dan 30 adalah 1, 2, 3, 6.

Jadi faktor persekutuan terbesar dari –12 dan 30 adalah 6, atau dapat ditulis secara singkat sebagai (-12, 30) = 6.
Selanjutnya dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa (-5, 5) = 5 ; (8, 15) = 1 ; (8, -36) = 4 ; (-6, -42) = 6.

Perhatikan bahwa (30, 105) = 15 dan (30:15, 105:15) = (2, 7) = 1.
Apabila (a, b) = d, apakah (a : d, b : d) = 1?

Misalkan (a : d, b : d) = c maka $c \geq 1$ dan $c \mid (a : d)$ dan $c \mid (b : d)$.
$c \mid (a : d)$ maka ada bilangan bulat m sehingga a : d = mc atau a = mcd.
$c \mid (b : d)$ maka ada bilangan bulat n sehingga b : d = nc atau b = ncd.
Karena a = mcd dan b = ncd maka cd adalah faktor persekutuan dari a dan b. Karena (a, b) = d, maka $cd \leq d$, yaitu $c \leq 1$, sebab d suatu bilangan bulat positif. Karena $c \geq 1$ dan $c \leq 1$ maka c = 1.

Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini.

***Teorema 1.5* :**
Jika (a, b) = d maka (a : d, b : d) = 1.

Apabila (a, b) = c maka c dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari a dan b, misalnya (24, 9) = 3 dan $3 = 3 \cdot 9 + (-1) \cdot 24 = (-5)\, 9 + 2 \cdot 24$.
Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

***Teorema 1.6*:**
Jika a dan b bilangan-bilangan bulat yang tidak nol maka FPB dari a dan b selalu ada dan tunggal serta jika (a, b) = c maka ada bilangan-bilangan bulat m_o dan n_o sedemikian hingga $c = m_o a + n_o b$.

***Bukti* :**
Karena a dan b keduanya tidak nol maka himpunan $A = \{ma + nb \mid m,n \in B\}$ memuat bilangan bulat yang tidak nol. Apabila x < 0 dan $x \in A$ maka $-x \in A$ dan -x > 0, sebab jika $x = m_1 a + n_1 b$ maka $-x = (-m_1)\, a + (-n_1)\, b$ juga dalam A. Jadi, A memuat bilangan bulat positif sehingga menurut prinsip *well-ordering*, A memuat bilangan bulat positif terkecil, misalnya $c \in A$. Karena $c \in A$ maka $c = m_o a + n_o b$ untuk suatu $m_o, n_o \in B$.

Kita tunjukkan bahwa c = (a, b). Misalkan $d|a$ dan $d|b$, maka $d|(m_o a+n_o b)$. Sehingga $d|c$. Selanjutnya dengan algoritma pembagian, a=qc+r dengan $0 \leq r < c$, yaitu $r \in A$. Tetapi karena $0 \leq r < c$, dan c adalah bilangan bulat positif terkecil dalam A maka r = 0. Sehingga a = qc atau $c|a$. Dengan jalan yang sama, maka $c|b$. Sesuai dengan definisi 1.10, maka c = (a, b).

Selanjutnya ditunjukkan ketunggalan c. Misal ada t = (a,b), akan dibuktikan t = c.

(i) t = (a,b), maka t > 0, $t|a$ dan $t|b$. Sementara itu c = (a,b) sehingga $t \leq c$.
(ii) c = (a,b), maka c > 0, $c|a$ dan $c|b$. Sementara itu t = (a,b) sehingga $c \leq t$.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa t = c.
Jadi, (a, b) = c adalah tunggal. □

Apabila (a, b) = 1, dikatakan bahwa a prima relatif terhadap b atau a dan b saling prima. Perhatikan bahwa jika a dan b saling prima, maka a dan b tidak perlu prima, misalnya (9, 14) = 1. Sebagai akibat dari teorema 1.6 adalah teorema berikut ini.

***Teorema 1.7*:**

Jika a dan b bilangan-bilangan, maka (a, b) = 1 jika dan hanya jika ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga ma + nb = 1.

***Bukti* :**

Sesuai teorema 1.6, jika (a, b) = 1 maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga m a + n b = 1.
Sebaliknya ditunjukkan bahwa jika ma + nb = 1 untuk suatu bilangan-bilangan bulat m dan n maka (a, b) = 1. Misalkan (a, b) = d, maka $d|a$ dan $d|b$ sehingga $d|(ma + nb)$ atau $d|1$. Jadi, d = 1. □
Konsekuensi dari teorema 1.7 adalah teorema berikut ini.

***Teorema 1.8*:**

Jika $a|bc$ dan (a, b) = 1 maka $a|c$.

***Bukti* :**

Karena (a, b) = 1 maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga ma + nb = 1 sehingga mac + nbc = c. Karena $a|bc$ maka $a|nbc$. Jelas bahwa $a|mac$ sehingga $a|(mac + nbc)$, yaitu $a|c$. □

Sebagai akibat dari teorema 1.8 tersebut adalah pernyataan berikut ini.

Akibat 1.8: Jika (a, b) = 1 dan (a, c) = 1 maka (a, bc) = 1.

***Bukti* :**

Karena (a, b) = 1, maka ada bilangan bulat m dan n sedemikian hingga ma + nb = 1, sehingga (mac + nbc) = c. Misalkan (a, bc) = d maka d | a dan d | bc sehingga d | (mac + nbc) atau d | c. Oleh karena d | a, d | c dan (a, c) = 1 maka d = 1. Jadi (a, bc) = 1. □

***Definisi 1.11* :**

Kelipatan Persekutuan terKecil (KPK) dari dua bilangan bulat tidak nol a dan b adalah suatu bilangan bulat positif d (ditulis [a, b] = d), apabila memenuhi :

(i) a|d dan b|d
(ii) jika a|c dan b|c maka d | c.

Dari definisi ini dapat dimengerti, jika [a, b] = d maka d ≥ 1, dan jika c suatu faktor persekutuan dari a dan b maka d | c.

Di atas telah disebutkan kata "prima", berikut ini suatu definisi bilangan prima.

***Definisi 1.12* :**

Bilangan bulat positif p disebut bilangan prima atau disingkat prima, apabila untuk sebarang bilangan bulat a berlaku p | a atau (a, p) = 1.

Definisi ini sama saja dengan definisi yang telah biasa kita kenal, yaitu bilangan bulat positif p disebut bilangan prima, apabila p tidak mempunyai faktor bulat, kecuali 1 dan p. Sebagai hasil lain dari teorema 1.8 adalah teorema berikut ini.

***Teorema 1.9*:**

Jika p suatu bilangan prima dan p | a_1 a_2 a_3 ... a_n maka p | a_i untuk suatu i dengan $1 \leq i \leq n$.

***Bukti* :**

Menurut definisi 1.12, karena p prima maka $p \mid a_i$ atau $(p, a_i) = 1$, untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Jika $p \mid a_i$ untuk suatu $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, maka teorema terbukti. Jika $(p, a_i) = 1$ maka $p \nmid a_i$, $\forall i \in \{ 1, 2, ..., n \}$ sehingga $p \nmid a_1 a_2 ... a_n$. Hal ini bertentangan dengan ketentuan. □

Bilangan prima mempunyai peranan yang sangat khusus dalam himpunan bilangan asli. Setiap bilangan asli adalah suatu bilangan prima atau sebagai hasilkali dari bilangan-bilangan prima. Apabila suatu bilangan asli dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima, maka bentuk perkalian tersebut tunggal, kecuali urutan faktor-faktornya saja. Ini semua pembaca dapat mempelajarinya dalam Teori Bilangan.

Perhatikan suatu bilangan bulat positif, misalnya 210 maka 210 dapat diuraikan atas faktor-faktor prima, yaitu :

$210 = 2. 3. 5. 7$ atau
$210 = 3. 7. 2. 5$ atau
$210 = 7. 3. 5. 2$ atau lainnya

Perbedaan penguraian dari 210 atas faktor-faktor prima tersebut hanya berbeda pada urutan faktor-faktornya saja. Hal ini merupakan suatu contoh bahwa suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima tertentu. Bentuk perkalian bilangan-bilangan prima itu adalah tunggal, kecuali urutan dari bilangan-bilangan prima tersebut. Hal ini sering disebut dengan *Teorema Faktorisasi Tunggal*. Teorema-teorema berikut merupakan persiapan untuk membuktikan teorema faktorisasi tunggal.

***Teorema 1.10*:**

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

***Bukti* :**

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Apabila n suatu bilangan prima maka $n \mid n$, berarti teorema telah terbukti.

Apabila n suatu bilangan komposit maka n mempunyai faktor bulat positif selain 1 dan n sendiri, misalnya d_1, yaitu $d_1 \mid n$. Sehingga ada bilangan bulat positif n_1 sedemikian hingga

$$n = d_1 n_1 \text{ dengan } 1 < n_1 < n.$$

Jika n_1 suatu bilangan prima maka $n_1 | n$ sehingga teorema terbukti. Tetapi jika n_1 suatu bilangan komposit maka n_1 mempunyai faktor bulat positif selain 1 dan n_1, misalnya d_2, yaitu $d_2 | n_1$. Sehingga ada bilangan bulat positif n_2 sedemikian hingga

$$n_1 = d_2 n_2 \text{ dengan } 1 < n_2 < n_1.$$

Jika n_2 suatu bilangan prima maka $n_2 | n_1$. Dan karena $n_1 | n$, maka $n_2 | n$. Jadi n terbagi oleh bilangan prima n_2, berarti teorema terbukti. Tetapi jika n_2 suatu bilangan komposit maka n_2 mempunyai faktor bulat positif selain 1 dan n_2, misalnya d_3, yaitu $d_3 | n_2$. Ini berarti ada bilangan bulat positif n_3 sedemikian hingga

$$n_2 = d_3 n_3 \text{ dengan } 1 < n_3 < n_2.$$

Jika n_3 suatu bilangan prima maka $n_3 | n_2$. Karena $n_2 | n$ maka $n_3 | n$. Jadi n terbagi oleh bilangan prima n_3, berarti teorema terbukti. Tetapi jika n_3 suatu bilangan komposit maka proses seperti di atas dapat dilanjutkan sedemikian hingga diperoleh suatu barisan :

$$n, n_1, n_2, n_3, \ldots \text{ dengan } n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > 1$$

Penguraian atas faktor-faktor komposit ini tentu berakhir pada suatu faktor prima, karena faktor-faktor tersebut selalu lebih kecil dari bilangan yang difaktorkan dan selalu lebih besar dari 1. Misalkan pemfaktoran tersebut berakhir pada faktor prima n_k maka :

$$n_k | n_{k-1},\quad n_{k-1} | n_{k-2},\quad n_2 | n_1, \ldots \text{ dan } n_1 | n \text{ sehingga } n_k | n. \ \square$$

Memperhatikan teorema di atas, suatu bilangan bulat positif yang lebih besar 1 selalu terbagi oleh suatu bilangan prima maka hasilbaginyapun akan terbagi oleh suatu bilangan prima pula. Dan hasil bagi berikutnyapun demikian pula. Sehingga suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dari bilangan-bilangan prima tertentu. Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

***Teorema 1.11*:**

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

***Bukti* :**

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Menurut teorema 1.10 maka ada suatu bilangan prima p_1 sedemikian hingga $p_1 | n$. Sehingga ada suatu bilangan positif n_1 sehingga

$$n = p_1 n_1 \text{ dengan } 1 \leq n_1 < n.$$

Jika $n_1=1$ maka $n = p_1$ sehingga n suatu bilangan prima. Tetapi jika $n_1 > 1$ maka menurut Teorema 1.10 lagi, ada suatu bilangan prima p_2 sedemikian hingga $p_2 | n_1$. Sehingga ada suatu bilangan bulat positif n_2 sehingga

$$n_1 = p_2 n_2 \text{ dengan } 1 \leq n_2 < n_1.$$

Jika $n_2 = 1$ maka $n_1 = p_2$ sehingga $n = p_1 p_2$. Berarti teorema terbukti. Tetapi jika $n_2 > 1$, maka ada suatu bilangan prima p_3 sedemikian hingga $p_3 | n_2$ sehingga ada suatu bilangan bulat positif n_3 sehingga

$$n_2 = p_3 n_3 \text{ dengan } 1 \leq n_3 < n_2.$$

Jika $n_3 = 1$ maka $n_2 = p_3$ sehingga $n = p_1 p_2 p_3$. Berarti teorema terbukti. Tetapi jika $n_3 > 1$, maka proses seperti di atas dapat dilanjutkan sehingga akan berakhir pada $n_k = 1$, maka diperoleh $n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$, yaitu bilangan bulat positif $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. □

Suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima. Mungkin saja di antara faktor-faktor prima tersebut ada yang sama, maka faktor-faktor yang sama dapat ditulis sebagai bilangan berpangkat.

Contoh 1.11:

$5544 = 2.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 7.\ 11$ dapat ditulis $5544 = 2^3.\ 3^2.\ 7.\ 11$

Hal ini secara umum, jika n suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai

$$(1) \quad n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_k^{a_k}$$

dengan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ adalah faktor-faktor prima dari n dan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ adalah eksponen-eksponen bulat tak negatif.

Selanjutnya (1) disebut *representasi* dari n sebagai perkalian bilangan-bilangan prima atau sering pula disebut *bentuk kanonik* dari n.

Teorema 1.11 tersebut sangat memudahkan untuk menentukan FPB dan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih, yaitu dengan menyatakan masing-masing bilangan bulat itu dalam bentuk kanoniknya. Tetapi sebelum itu, kita perlu mengenal lebih dulu notasi-notasi berikut ini.

"min(a, b)" menyatakan nilai minimum dari a dan b.

"maks(a, b)" menyatakan nilai maksimum dari a dan b.

Misalnya : min (7, 5) = 5, maks (8, 3) = 8

min (5, 0, 3) = 0, maks (7, 4, 5, 0) = 7

Misalkan m, n dan t adalah bilangan-bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 yang bentuk-bentuk kanoniknya berturut-turut sebagai berikut :

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$$

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \ldots p_k^{b_k}$$

$$t = p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \cdots p_k^{c_k}$$

maka FPB dan KPK dari m, n dan t, berturut-turut adalah

$(m, n, t) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \cdots p_k^{d_k}$ dengan $d_i = \min(a_i, b_i, c_i)$ untuk i = 1, 2, 3, …, k.

$[m, n, t] = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k}$ dengan $e_i = \text{maks}(a_i, b_i, c_i)$ untuk i = 1, 2, 3, …, k.

Contoh 1.12

Tentukan FPB dan KPK dari 198, 216 dan 252

Penyelesaian : Apabila tiga bilangan tersebut diuraikan atas faktor-faktor prima maka diperoleh:

$$198 = 2 . 3^2 . 11$$
$$216 = 2^3 . 3^3$$
$$252 = 2^2 . 3^2 . 7$$

Uraian atas faktor-faktor prima tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$198 = 2 . 3^2 . 7^0 . 11$$
$$216 = 2^3 . 3^3 . 7^0 . 11^0$$
$$252 = 2^2 . 3^2 . 7 . 11^0$$

$$\begin{aligned}(198, 216, 252) &= 2^{\min(1,3,2)} 3^{\min(2,3,2)} 7^{\min(0,0,1)} 11^{\min(1,0,0)} \\ &= 2^1 . 3^2 . 7^0 . 11^0 \\ &= 18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[198, 216, 252] &= 2^{\text{maks}(1,3,2)} 3^{\text{maks}(2,3,2)} 7^{\text{maks}(0,0,1)} 11^{\text{maks}(1,0,0)} \\ &= 2^3 . 3^3 . 7^1 . 11^1 \\ &= 16.632\end{aligned}$$

Telah dibicarakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 terbagi oleh suatu bilangan prima sehingga setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian dari bilangan-bilangan prima tertentu. Selanjutnya akan dipelajari bahwa pemfaktoran suatu bilangan bulat positif atas faktor-faktor prima adalah *tunggal* sehingga kita mengenalnya sebagai faktorisasi tunggal. Tetapi sebelum membicarakan faktorisasi tunggal, kita akan mempelajari beberapa teorema sebagai persiapan untuk mempelajari faktorisasi tunggal.

***Teorema 1.12*:**

Jika p suatu bilangan prima dan $p \mid ab$ maka $p \mid a$ atau $p \mid b$

***Bukti* :**

Karena p suatu bilangan prima maka untuk sebarang bilangan bulat a berlaku $(a, p) = 1$ atau $(a, p) = p$. Jika $(a, p) = 1$ dan $p \mid ab$, maka berdasarkan teorema 1.8, $p \mid b$, dan jika $(a, p) = p$, maka $p \mid a$. Jadi terbukti bahwa $p \mid a$ atau $p \mid b$.□

Jika pada Teorema 1.12 diambil kasus bahwa p, q dan r masing-masing bilangan prima dan $p \mid qr$, maka $p \mid q$ atau $p \mid r$, yaitu $p = q$ atau $p = r$. Karena p, q dan r masing-masing bilangan prima, kasus tersebut dapat diperluas sebagai berikut :

Jika $p, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ semuanya bilangan prima dan $p \mid q_1q_2q_3 \ldots q_n$ maka

$$p = q_k \text{ untuk suatu } k \text{ dengan } 1 \leq k \leq n.$$

Selanjutnya kita akan membuktikan ketunggalan dari faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat positif. Teorema ini sering disebut *faktorisasi tunggal* yang merupakan teorema dasar dalam aritmetika.

***Teorema 1.13*:**

Pemfaktoran suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 atas faktor-faktor prima adalah tunggal, kecuali urutan dari faktor-faktornya.

Bukti **:**

Pada Teorema 1.11 kita telah membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian dari bilangan-bilangan prima tertentu. Sekarang kita akan membuktikan bahwa faktor-faktor prima tersebut adalah tunggal.

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$.
Jika n suatu bilangan prima maka n adalah faktornya sendiri.
Jika n suatu bilangan komposit dan diandaikan bahwa pemfaktoran n atas faktor-faktor prima adalah tidak tunggal, misalnya :

$$n = p_1 \, p_2 \ldots p_t \text{ dan } n = q_1 \, q_2 \ldots q_r$$

dengan p_i dan q_j adalah bilangan-bilangan prima untuk $i = 1,2,3, \ldots, t$ dan $j = 1,2,3, \ldots, r$ serta $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_t$ dan $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_r$ dengan $t \leq r$.
Karena $n = p_1 \, p_2 \ldots p_t$ maka $p_1 \mid n$ sehingga $p_1 \mid q_1 q_2 q_3 \ldots q_r$.
Dan selanjutnya menurut perluasan teorema 1.9 maka $p_1 \mid q_k$ untuk suatu k dengan $1 \leq k \leq r$. Dan mengingat $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_r$ maka $p_1 \leq q_1$.
Karena $n = q_1 \, q_2 \ldots q_r$ maka $q_1 \mid n$ sehingga $q_1 \mid p_1 \, p_2 \ldots p_t$.
Dan menurut perluasan teorema 1.9 maka $q_1 \mid p_m$ untuk suatu m dengan $1 \leq m \leq t$. Dan mengingat $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_t$ maka $q_1 \leq p_1$.
Karena $p_1 \leq q_1$ dan $q_1 \leq p_1$ maka $p_1 = q_1$ sehingga dari pemisalan n di atas kita memperoleh bahwa : $p_2 \ldots p_t = q_2 q_3 \ldots q_r$.

Jika proses seperti di atas diteruskan, maka kita akan memperoleh bahwa:

$p_2 = q_2$ sehingga $p_3 \, p_4 \ldots p_t = q_3 q_4 \ldots q_r$.
$p_3 = q_3$ sehingga $p_4 \, p_5 \ldots p_t = q_4 q_5 \ldots q_r$.
dan seterusnya.

Apabila $t = r$ maka proses tersebut akan berakhir pada $p_t = q_r$ dan teorema terbukti. Tetapi apabila $t < r$ maka akan diperoleh bahwa:

$$1 = q_{t+1} q_{t+2} q_{t+3} \ldots q_r.$$

Hal ini mustahil, karena $q_{t+1} q_{t+2} q_{t+3} \ldots q_r$ adalah bilangan-bilangan prima maka haruslah $t = r$ sehingga

$$p_1 = q_1, \, p_2 = q_2, \, p_3 = q_3, \, \ldots, \, p_t = q_r.$$

Ini berarti bahwa bilangan bulat positif n tersebut hanya dapat dinyatakan sebagai hasil kali faktor-faktor primanya secara tunggal. □

Pembuktian yang lebih singkat dari teorema faktorisasi tunggal tersebut menggunakan induksi matematika. Coba lakukan pembuktian dengan induksi matematika ini dengan memperhatikan petunjuk berikut.

Apakah teorema benar untuk n = 2?

Sebagai hipotesis, misalkan teorema benar untuk suatu bilangan bulat positif $n \leq k$ dan harus ditunjukkan bahwa teorema benar untuk $n = k + 1$.

Misalkan $k + 1 = p_1 \ p_2 \ \ldots p_t = q_1 q_2 q_3 \ldots q_r$ dengan p_i dan q_j adalah bilangan-bilangan prima … dan seterusnya seperti bagian pembuktian di atas sehingga diperoleh $p_1 = q_1$ dan $p_2 \ \ldots p_t = q_2 q_3 \ldots q_r$. Bilangan ini lebih kecil atau sama dengan k, mengingat hipotesis maka teorema benar untuk $n = k + 1$. Dengan demikian terbuktilah teorema tersebut.

Di muka telah dibuktikan suatu teorema tentang algoritma pembagian, yaitu : Jika m dan n dua bilangan bulat dan $n > 0$, maka ada bilangan-bilangan bulat q dan r, sedemikian hingga $m = qn + r$, dengan $0 \leq r < n$.

Sebagai ilustrasi, jika a = 21 dan b = 75 maka q = 3 dan r = 12, yaitu:

$$75 = 3. \ 21 + 12$$

Di sini tampak bahwa (75, 21) = (21, 12) = 3.

Apakah benar, apabila $b = aq + r$ maka $(b,a) = (a, r)$?

Misalkan $(b,a) = d$ dan $(a, r) = c$ maka kita akan menunjukkan bahwa $c = d$. Karena $(b,a) = d$, maka $d \mid b$ dan $d \mid a$, dan karena $b = aq + r$ maka $d \mid r$.

Dari $d \mid a$ dan $d \mid r$, maka d adalah faktor persekutuan dari a dan r.

Tetapi karena $(a, r) = c$ maka $d \leq c$.

Selanjutnya, karena $(a, r) = c$, maka $c \mid a$ dan $c \mid r$ dan karena $b = aq + r$ maka $c \mid b$. Dari $c \mid a$ dan $c \mid b$, maka c adalah faktor persekutuan dari a dan b.

Tetapi karena $(a, b) = d$, maka $d \geq c$.

Dari $d \leq c$ dan $d \geq c$, maka $c = d$, yaitu $(b, a) = (a, r)$.

Uraian tersebut merupakan bukti dari teorema berikut ini:

***Teorema 1.14*:**

Jika $b = aq + r$ maka $(b,a) = (a, r)$.

Misalkan $a \mid c$ dan $b \mid c$, dapatkah kita menyimpulkan bahwa $ab \mid c$.

Diambil contoh sebagai berikut : $8 \mid 24$ dan $6 \mid 24$, maka tidak benar bahwa $8.6 \mid 24$. Tetapi apabila diberi tambahan ketentuan bahwa $(a, b) = 1$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $ab \mid c$. Hal itu ditunjukkan sebagai berikut:

Karena (a, b) = 1, menurut teorema 1.7, maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian hingga :

$$ax + by = 1$$

Jika kedua ruas dikalikan c, maka diperoleh persamaan :

$$acx + bcy = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Karena $a \mid c$ dan $b \mid c$ maka ada bilangan-bilangan bulat r dan t sedemikian hingga c = ar dan c = bt. Sehingga persamaan (1) menjadi:

$$abtx + abry = c$$
$$ab(tx + ry) = c$$

Ini berarti bahwa $ab \mid c$.

Uraian tentang akibat dari teorema tersebut dinyatakan sebagai berikut :

Akibat: Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan (a, b) = 1 maka $ab \mid c$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Apabila (a, b) = d, buktikan bahwa $d \mid (ax + by)$ untuk setiap bilangan-bilangan bulat x dan y!
2) Hasil kali n bilangan bulat berurutan selalu terbagi habis oleh n. Buktikanlah!
3) Buktikanlah bahwa $6 \mid (a^3 – a)$ untuk setiap bilangan bulat a!
4) Tunjukkan bahwa pernyataan berikut *tidak benar*
   (i) Jika $a \mid bc$, maka $a \mid b$ atau $a \mid c$.
   (ii) Jika $a \mid (b + c)$, maka $a \mid b$ atau $a \mid c$.
   (iii)Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$, maka $ab \mid c$.
5) Jika a dan b bilangan-bilangan gasal, tunjukkan bahwa $8 \mid (a^2 – b^2)$!
6) Jika $a \mid b$ dan $a > 0$, buktikan bahwa (a, b) = a!
7) Buktikan bahwa ((a, b), b) = (a, b)!
8) Jika (a, b) = 1 dan $c \mid a$, buktikan bahwa (c, b) = 1!
9) Buktikan bahwa (a + b, a) = (a, b)!
10) Buktikan bahwa setiap faktor persekutuan dari dua bilangan bulat merupakan faktor dari FPB dua bilangan bulat tersebut!
11) Jika n suatu bilangan bulat positif, buktikan bahwa $(a, a + n) \mid n$, untuk setiap bilangan bulat a!

12) Jika $(a, b) = 1$ dan $(a, c) = 1$, buktikan bahwa $(a, bc) = 1$!
13) Jika $(a, b) = 1$, buktikan bahwa $(ac, b) = (c, b)$!
14) Jika $(a, b) = 1$ dan $c \mid (a + b)$, buktikan bahwa $(a, c) = (b, c) = 1$!

Petunjuk Jawaban Latihan

Apabila Anda menemui kesulitan dalam meyelesaikan soal-soal latihan, Anda dapat mengikuti petunjuk jawaban berikut ini !

1) Karena $(a, b) = d$, maka $d \mid a$ dan $d \mid b$.
   Karena $d \mid a$, maka $d \mid ax$ untuk setiap bilangan bulat x.
   Karena $d \mid b$, maka $d \mid by$ untuk setiap bilangan bulat y.
   Dari $d \mid ax$ dan $d \mid bu$, maka $d \mid ax + by$.
2) Dibuktikan dengan induksi matematik.
   Jika $n = 1$, maka $1 \mid 1$ benar.
   Diasumsikan untuk $n = k$ benar, yaitu hasil kali k bilangan bulat berurutan terbagi oleh k, maka harus ditunjukkan benar $n = k + 1$, yaitu hasil kali $(k + 1)$ bilangan bulat berurutan terbagi oleh $k + 1$.
3) $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$. Ini adalah hasil kali tiga bilangan bulat berurutan, maka di antaranya ada yang kelipatan 2 dan ada yang kelipatan 3. Sehingga hasil kali tiga bilangan bulat berurutan itu terbagi oleh 6.
4) Ketiga pernyataan tersebut salah, cukup ditunjukkan masing-masing sebuah contoh.
   (i) Jika $6 \mid 2.3$ maka $6 \mid 2$ atau $6 \mid 3$ (SALAH)
   (ii) Jika $6 \mid (2 + 10)$ maka $6 \mid 2$ atau $6 \mid 10$ (SALAH)
   (iii)Jika $6 \mid 12$ dan $3 \mid 12$ maka $18 \mid 12$ (SALAH)
5) Misalkan $a = 2k + 1$ dan $b = (2k + 1) + 2t$ dengan k dan t bilangan-bilangan bulat.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (2k + 1)^2 - \{(2k + 1) + 2t\}^2 \\ &= -4t^2 - 4t(2k + 1) \\ &= -4t\,(t + 2k + 1). \end{aligned}$$

   Ruas ke dua dari kesamaan terakhir ini, jika t suatu bilangan genap maka $a^2 - b^2$ terbagi oleh 8. Jika t suatu bilangan gasal maka $(t + 2k + 1)$ suatu bilangan genap sehingga $a^2 - b^2$ terbagi oleh 8.
6) Misalkan $(a, b) = d$ maka $d \mid a$ dan $d \mid b$.
   Diketahui bahwa $a \mid b$ dan $a \mid a$ maka a adalah faktor persekutuan dari a dan b, tetapi karena $(a, b) = d$ maka $a \mid d$.

Selanjutnya, karena $d \mid a$ dan $a \mid d$ serta $a > 0$ maka $a = d$.
Jadi $(a, b) = a$.

7) Misalkan $(a, b) = d$, maka kita harus menunjukkan bahwa $(d, b) = d$.
Selanjutnya seperti nomor 6.

8) Karena $(a, b) = 1$, maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian hingga

$$ax + by = 1.$$

Diketahui pula bahwa $c \mid a$, maka ada bilangan bulat k sedemikian hingga $a = ck$. Sehingga diperoleh

$$ckx + by = 1,$$

Ini berarti bahwa $(c, b) = 1$.

9) Misalkan $(a, b) = d$ maka $d \mid a$ dan $d \mid b$ sehingga diperoleh $d \mid a + b$.
Dan karena $d \mid b$, maka d merupakan faktor persekutuan dari $a + b$ dan b.
Jika $(a + b, b) = t$ maka $d \le t$.
Karena $(a + b, b) = t$ maka $t \mid a + b$ dan $t \mid b$ sehingga $t \mid a$.
Dari $t \mid a$ dan $t \mid b$ maka t merupakan faktor persekutuan dari a dan b.
Tetapi, karena $(a, b) = d$ maka $t \le d$.
Selanjutnya, karena $d \le t$ dan $t \le d$ maka $t = d$.
Jadi $(a + b, b) = (a, b)$.

10) Misalkan dua bilangan bulat itu a dan b dengan $(a, b) = d$.
Misalkan pula m adalah suatu faktor persekutuan dari a dan b maka kita harus membuktikan bahwa $m \mid d$.
Karena $(a, b) = d$ maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian hingga

$$ax + by = d.$$

Karena m adalah faktor persekutuan dari a dan b maka $m \mid a$ dan $m \mid b$, sehingga $m \mid ax$ dan $m \mid by$. Akibatnya $m \mid ax + by$ atau $m \mid d$.

11) Misalkan $(a, a + n) = d$, maka $d \mid a$ dan $d \mid a + n$ sehingga $d \mid n$.
Jadi $(a, a + n) \mid n$.
Mengapa disyaratkan bahwa n harus positif ?

12) Karena $(a, b) = 1$, maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sehingga $ax + by = 1$. Karena $(a, c) = 1$, maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sehingga $am + cn = 1$. Jika ruas-ruas dari dua persamaan ini dikalikan maka diperoleh

$$a (amx + cnx + bmy) + bc (ny) = 1$$

Dari persamaan terakhir ini dapat disimpulkan bahwa (a, bc) = 1.

13) Karena (a, b) = 1, maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sehingga ax + by = 1. Misalkan (ac, b) = d, maka d | ac dan d | b, berarti d | acx dan d | bcy. Dan karena acx + bcy = c, maka d | c. Karena d | c dan d | b, maka d merupakan faktor persekutuan dari c dan b.
Apabila dimisalkan (c, b) = t, maka $d \leq t$ dan t | c juga t | b.
Dari t | c maka t | ac dan karena t | b maka t merupakan faktor persekutuan dari ac dan b.
Tetapi karena (ac, b) = d maka $t \leq d$.
Selanjutnya dari $d \leq t$ dan $t \leq d$, maka d = t, berarti (ac, b) = (c, b).

14) Jika (a, b) = 1 dan c | (a + b) buktikan bahwa (a, c) = (b, c) = 1
Misalkan (a, c) = m, maka $m \geq 1$ dan juga m | a dan m | c.
Sementara c | (a + b), maka m | (a + b).
Jika m | a maka m | (-a)
m | (-a) dan m | (a + b), berdasarkan teorema 1.4.f, m | (– a) + (a + b) atau m | b.
Dari m|a dan m|b, maka m merupakan faktor persekutuan dari a dan b.
Tetapi karena (a, b) = 1, maka $m \leq 1$.
Dari $m \leq 1$ dan $m \leq 1$, maka m = 1.
Dengan cara yang mirip ini dapat ditunjukkan bahwa (b, c) = 1.

RANGKUMAN

1) Bilangan-bilangan bulat a membagi b (diberi simbol a | b), jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian hingga b = ka.
2) Sifat-sifat dari keterbagian:
   Jika m, n bilangan-bilangan bulat dan $m \neq 0$ maka:
   a) m | 0, 1 | n dan n | n.
   b) Jika m | 1 maka m =1 atau m = -1.
   c) Jika m | n dan n | k maka m | k.
   d) Jika m | n dan k | r maka mk | nr.
   e) Jika m | n dan n | m maka m = $\pm$ n.
   f) Jika m | n dan m | k maka m | (un + vk), $\forall$u, v$\in$B.
3) d adalah faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika d | a dan d | b.
4) Faktor persekutuan terBesar (FPB) dari a dan b ditulis “(a, b)” adalah suatu bilangan bulat positif d yang memenuhi.
   (i) d | a dan d | b, serta.

(ii) jika $e \mid a$ dan $e \mid b$ maka $e \leq d$.

5) Jika $(a, b) = d$ maka $(a : d, b : d) = 1$.
6. Jika $(a, b) = 1$ maka dikatakan bahwa a dan b saling prima atau a relatif prima terhadap b.
7) Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $b > 0$ maka ada pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r sedemikian hingga $a = bq + r$ dengan $0 \leq r < b$
8) Jika $b = aq + r$ maka $(b, a) = (a, r)$.
9) Jika $(a, b) = d$ maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $ax + by = d$.
10) $(a, b) = 1$ jika dan hanya jika $ax + by = 1$ untuk suatu bilangan-bilangan bulat x dan y.
11) Jika $d \mid ab$ dan $(d, a) = 1$ maka $d \mid b$.
12) Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan $(a, b) = 1$ maka $ab \mid c$.
13) Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan itu dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Pilihlah: A, jika (1) dan (2) benar
B, jika (1) dan (3) benar
C, jika (2) dan (3) benar, dan
D, jika (1), (2) dan (3) semua benar.

1) Yang dimaksud $a \mid b$ adalah ….
(1) a membagi b.
(2) b kelipatan dari a
(3) $b = ma$, untuk suatu bilangan bulat m.

2) Apabila $a \mid b$ maka ….
(1) $ka \mid kb$, untuk sebarang bilangan bulat k
(2) $a \mid kb$, untuk setiap bilangan bulat k
(3) $ka \mid b$, untuk setiap bilangan bulat k.

3) Apabila $a \mid b$ maka ….
(1) $a \mid b^3$
(2) $a^2 \mid b^2$
(3) $a^3 \mid b^2$

4) Apabila $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka ….
(1) $a \mid b + 3c$
(2) $a \mid b + c^3$
(3) $a \mid b^2 - c$.

5) Apabila $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka ….
(1) $a^2 \mid bc$
(2) $2a \mid b + c$
(3) $a^2 \mid b^2 - c^2$.

6) Apabila $(a, b) = d$ dan m suatu faktor persekutuan dari a dan b maka ….
(1) $d = m$
(2) $m \mid d$.
(3) $m \leq d$

7) Apabila $[a, b] = d$ maka ….
(1) $a \mid d$
(2) $(a, b) \mid d$
(3) $b \mid d$

8) Jika $[a, b] = ab$ maka ….
(1) $(a, b) = 1$
(2) $a = b$
(3) a relatif prima dengan b.

9) Jika p suatu bilangan prima dan a sebarang bilangan asli maka ….
(1) $(p, a) = 1$ atau $p \mid a$.
(2) a dan p saling prima atau $(a, p) = p$
(3) jika $p \mid a^2$ maka $p \mid a$.

10) Jika diketahui $15a + 8b = 10$, dengan a dan b bilangan-bilangan bulat maka ….
   (1) $5 \mid 8b$
   (2) $2 \mid 15a$
   (3) $5 \mid 15a + 8b$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D. Karena $A \subset B$, maka $A - B = \emptyset$, $A \cap B = A$ dan $A \cup B = B$.
2) C. Karena $A \cap B = \emptyset$, maka $A^c \cup B^c = S$, $A - B = A$, $B^c \cap A = A$.
3) B. Jika $A \in B$ dan $B \in C$, maka $A \in C$, adalah suatu pernyataan yang salah. Ambil misalnya, $B = \{A, D\}$ dan $C = \{ E, \{A, D\}\}$ maka $A \notin C$.
4) D. Yang benar adalah $\{a, b\} \in \{a,\{a,b\}\}$, $b \in \{\{a,b\}, b\}$ dan $\{\{a\}\} \subset \{\{a\},\{b\}\}$
5) C. Yang benar adalah $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, b\}$ dan $\{a\} \in \{n, \{a\}\}$
6) B. Jika $A - B = A - C$, maka $B = C$, adalah suatu pernyataan yang salah. Ambil contoh : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ dan $C = \{3, 4, 7, 8, 9\}$.
7) A. Jika $A \cup B = A \cup C$, maka $B = C$, adalah suatu pernyataan yang salah. Ambil contoh : $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ dan $C = \{d, e\}$
8) C. Jika $A \cap B = A \cap C$, maka $B = C$, adalah suatu pernyataan yang salah. Contoh : $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ dan $C = \{1, 2, 3, 5\}$
9) A. (1) $\binom{10}{8} = \frac{10.9}{1.2} = 45$ cocok

   (2) $\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ cocok

   (3) $\binom{10}{2} = \frac{10.9}{1.2} = 45$ tidak cocok
10) D. Semuanya berarti himpunan semua bilangan bulat kelipatan k.

Tes Formatif 2

1) D. a membagi b, sama artinya dengan b kelipatan dari a, dan sama artinya pula dengan b = ma, untuk suatu bilangan bulat m.
2) A. (3) salah, untuk menunjukkannya cukup dengan sebuah contoh, misalnya : jika $3|12$ maka $5.3 \mid 12$ adalah suatu pernyataan yang salah.
3) A. (3) $a^3 \mid b^2$ salah, untuk menunjukkannya buatlah sebuah contoh.

4) D. Apabila $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid mb + nc$, untuk setiap bilangan-bilangan bulat m dan n.
5) B. Apabila $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a^2 \mid bc$, $a^2 \mid b^2$ dan $a^2 \mid c^2$ sehingga $a^2 \mid (b^2 - c^2)$.
6) C. Apabila $(a, b) = d$ dan m suatu faktor persekutuan dari a dan b, maka $m \mid d$ dan $m \leq d$.
7) D. Apabila $[a, b] = d$ maka $a \mid d$, $(a, b) \mid d$ dan $b \mid d$.
8) B. Jika $[a, b] = ab$, maka $(a, b) = 1$ yang sama artinya dengan a relatif prima dengan b.
9) D. Jika p suatu bilangan prima dan a sebarang bilangan asli, maka (1) $(p, a) = 1$ atau $p \mid a$. (2) a dan p saling prima atau $(a, p) = p$. (3) jika $p \mid a^2$, maka $p \mid a$.
10) D. Jika diketahui $15a + 8b = 10$, dengan a dan b bilangan-bilangan bulat, maka $5 \mid 8b$, $2 \mid 15a$, dan $5 \mid (15a + 8b)$.

Glosarium

Algoritma pembagian	:	nama suatu teorema yang mengatakan bahwa pada setiap dua bilangan bulat yang tidak nol maka yang satu dibagi lainnya mesti ada hasil bagi dan sisanya
Algoritma *Euclid(es)*	:	suatu algoritma yang menerapkan teorema algoritma pembagian. *Euclides* adalah nama seorang ahli matematika.
Bentuk *kanonik* suatu bilangan bulat positif	:	uraian/faktorisasi bilangan tersebut atas faktor-faktor prima.
Bilangan prima	:	suatu bilangan asli yang lebih dari 1 yang hanya mempunyai faktor 1 dan dirinya sendiri.
Cara Tabulasi (daftar)	:	cara menuliskan suatu himpunan dengan menuliskan daftar semua elemennya.
Cartesius	:	istilah yang diambil dari nama *Rene Descartes* (seorang Matematikawan) yang digunakan untuk nama : Koordinat Cartesius, Perkalian Cartesius.
De Morgan	:	nama orang yang digunakan untuk menamakan rumus yang ditemukan, yaitu rumus komplemen dari suatu irisan dua himpunan dan komplemen dari gabungan dua himpunan.
Diagram *Venn-Euler*	:	*Venn* dan *Euler* adalah nama orang matematikawan, yang namanya secara bersamaan untuk memberi nama dari diagram suatu himpunan.
Faktorisasi tunggal	:	nama suatu teorema yang mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih dari 1 adalah suatu

		bilangan prima atau dapat difaktorkan secara tunggal atas bilangan-bilangan prima.
Gabungan (*union*) dua himpunan A dan B	:	suatu himpunan yang terdiri dari elemen A saja, elemen B saja dan elemen persekutuan dari A dan B.
Himpunan (*set*), gugus, kelas, koleksi, keluarga	:	kumpulan benda konkret atau abstrak yang terdefinisi dengan jelas.
Himpunan kuasa dari himpunan A	:	Keluarga yang terdiri dari semua himpunan bagian dari A
Himpunan semesta (semesta pembicaraan)	:	himpunan yang memuat semua elemen yang dibahas/dibicarakan.
Himpunan berhingga	:	himpunan yang banyaknya elemen berhingga.
Himpunan takhingga	:	himpunan yang banyaknya elemen takhingga.
Himpunan-himpunan yang ekuivalen	:	himpunan-himpunan yang dapat dilakukan korespondensi satu-satu.
Himpunan-himpunan yang saling lepas/saling asing	:	himpunan-himpunan yang tidak kosong dan tidak mempunyai elemen persekutuan.
Irisan **(***intersection***)** dua himpunan A dan B	:	suatu himpunan yang terdiri dari elemen-elemen persekutuan dari A dan B.
Komplemen himpunan A	:	suatu himpunan yang terdiri dari elemen-elemen himpunan semesta yang tidak menjadi elemen dari A.
Saling prima **(***prima relatif***)**	:	suatu relasi dua bilangan bulat positif atau lebih yang FPB-nya sama dengan 1.

Daftar Pustaka

Apostol, Tom M. (1983). *Introduction to Analytic Number Theory.* New York: John Wiley & sons.

Burton, David M. (1986). *Elementary Number Theory Revised Printing.* Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Dudley, Underwood. (1969). *Elementary Number Theory.* San Francisco : W.H. Freeman and Company.

Lipschutz S. (1981). *Theory and Problems of Set Theory and Related Topics.* Singapore : McGraw-Hill International Book Company.

Rosen, Kenneth H. (1993). *Elementary Number Theory and Its Applications, Third Edition.* New york: Addision-Wesley Publising Company.

Selby S and Sweet L. (1983). *Set Relations Functions an Introduction*. New York : McGraw-Hill Book Company, Inc.

Shapiro, Harold N. (1995). *Introduction to the Theory of Numbers.* New York : Springer-Verlag.

Sukirman. (2001). *Pengantar Teori Bilangan.* Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

________. (1994/1995). *Teori Bilangan.* Jakarta: Proyek Peningkatan Mutu Guru SLTP.