MODUL 1

Sifat Kealjabaran Bilangan Real

Dr. Suryanto

PENDAHULUAN

Dalam analisis real, berbeda dengan kalkulus, pembahasan tentang konsep-konsep pokok perlu dilakukan dengan tajam, dalam arti berdasarkan definisi yang cermat, aksioma yang jelas, dan teorema atau lemma yang dilengkapi dengan bukti yang rapi.

Bilangan real dapat didefinisikan melalui beberapa tahap, misalnya mulai dengan definisi *medan,* kemudian definisi *medan bilangan rasional,* dan setelah itu definisi *sistem bilangan real.* Masih ada beberapa cara lagi untuk mendefinisikan bilangan real.

Dalam seri modul ini, untuk pemahaman tentang *field* atau *medan,* Anda dianggap telah mengenal beberapa sifat bilangan, baik bilangan asli, maupun bilangan rasional. Akan tetapi, setelah Anda dianggap memahami arti operasi yang *tertutup, komutatif, asosiatif,* dan sebagainya, dan dengan konsep itu didefinisikan sistem matematis yang disebut *medan*, Anda kembali dianggap belum mengerti sistem bilangan asli, sistem bilangan rasional, dan sebagainya. Sejak itu pembicaraan akan dimulai dengan definisi bilangan real, kemudian definisi bilangan asli, lalu bilangan rasional, dan akhirnya bilangan irrasional. Dalam Modul 1 ini pembahasan akan dibatasi pada dua pokok bahasan, yaitu *aksioma medan* dan *bilangan rasional.*

Isi Modul 1 disajikan sebagai pangkal pembicaraan tentang analisis real. Dengan memahami isi modul ini Anda diharapkan dapat menjelaskan sifat kealjabaran sistem bilangan real.

Dan secara khusus setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda terampil:

1. membedakan antara medan dan bukan medan
   a. membedakan antara operasi yang merupakan operasi pada medan dan operasi tidak pada medan;
   b. membedakan berlaku tidaknya hubungan antara anggota-anggota suatu medan, atau anggota suatu sistem yang bukan medan.

2. menjelaskan bahwa tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya 2, 3, 8 dan seterusnya.
3. menjelaskan bahwa tidak ada bilangan rasional yang pangkat-tiganya 2, 4, 5, 9 dan seterusnya.
4. menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada medan dan gelanggang.
5. menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada bilangan rasional.

KEGIATAN BELAJAR 1

Aksioma Medan

Dalam matematika, himpunan yang dilengkapi dengan satu atau beberapa operasi (yang terdefinisi pada himpunan itu) disebut *sistem matematis*. Sistem matematis dengan dua operasi yang memiliki sejumlah sifat tertentu disebut *field* atau *medan*. Kelompok sifat yang menentukan bahwa suatu sistem matematis merupakan medan disebut *aksioma medan*. Untuk jelasnya kita ambil beberapa contoh.

Ada kelaziman dalam menyatakan himpunan bilangan tertentu. Telah kita ketahui bahwa bilangan 1, 2, 3, ... disebut *bilangan asli.* Himpunan semua bilangan asli, yaitu {1, 2, 3, ...} lazim dinyatakan dengan lambang **N.** Juga telah kita ketahui bahwa bilangan 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..., disebut *bilangan bulat.* Himpunan *semua bilangan bulat,* yaitu (0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...) lazim dinyatakan dengan lambang **Z**.

Dari pelajaran di sekolah, mengenai operasi pada bilangan asli, kita telah mengetahui sifat bahwa: jumlah dua bilangan genap (n) merupakan bilangan genap (n), jumlah sebuah bilangan genap (n) dan sebuah bilangan ganjil (j) merupakan bilangan ganjil (j), jumlah sebuah bilangan ganjil (j) dan sebuah bilangan genap (n) merupakan bilangan ganjil (j), jumlah dua bilangan ganjil (j) merupakan sebuah bilangan genap (n). Untuk menyatakan sifat penjumlahan dan perkalian secara singkat, dapat kita tuliskan sebagai berikut.

Penjumlahan	Perkalian
n + n = n	n G n = n
n + j = j	n G j = n
j + n = j	j G n = n
j + j = n	j G j = j

Sajian hubungan yang dinyatakan secara singkat di atas merupakan contoh adanya sejumlah objek, yaitu objek n dan j, yang dilengkapi dengan seperangkat operasi, yaitu penjumlahan (dengan lambang +) dan perkalian (dengan lambang $\times$), sedemikian sehingga setiap pasang objek dapat dikenai operasi tersebut.

Hal di atas dapat juga disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 1.1

+	n	j
n	n	j
j	j	n

Tabel 1.2

×	n	j
n	n	n
j	n	j

Operasi yang pelaksanaannya harus dikenakan pada pasangan anggota dari suatu himpunan disebut operasi biner. Pasangan yang dikenai operasi biner itu dapat terdiri atas unsur yang berbeda dan dapat pula terdiri atas dua unsur yang sama.

Perhatikan beberapa hal berikut:
Misalkan D = {n, j}.
1. Hasil penjumlahan dan hasil kali selalu merupakan anggota dari D.
2. $n + j = j + n$ dan $n \times j = j \times n$
3. $n + (n + n) = (n + n) + n$ dan
   $n \times (n + n) = (n \times n) + (n \times n) = n$
4. $n + n = n$
   $j + n = n + j = j$

Definisi 1.1

Himpunan kuasa dari himpunan H ialah himpunan dari semua himpunan bagian dari H.

Simbol

Himpunan kuasa dari H dinyatakan dengan simbol P(H)

Contoh 1.1

1. Jika H = {a, b, c}, maka P(H) = { ϕ, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}
2. Jika K = (1, 3, 5, 7}, maka P(K) = { ϕ, {1}, {3}, {5}, {7}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 7}, {1, 3, 5}, {1, 3, 7}, {1, 5, 7}, {3, 5, 7}, {1,3.5,7}}

Definisi 1.2

Misalkan H adalah himpunan, sedangkan * (perkalian) dan # (penjumlahan) adalah operasi biner pada H.

1. Dikatakan bahwa himpunan H bersifat *tertutup* terhadap operasi *, atau dikatakan bahwa suatu operasi * bersifat tertutup, apabila untuk setiap $a \in H$ dan $b \in H$, hasil operasi a * b merupakan anggota *dari* H.
2. Operasi * dikatakan *komutatif* apabila a * b = b * a untuk setiap $a \in H$ dan $b \in H$
3. Operasi * dikatakan *asosiatif* _apabila (a * b) * c = a * (b * c) untuk setiap a, b, c $\in H$.
4. Anggota z dari himpunan H disebut *unsur netral* terhadap operasi * apabila a * z = z * a = a untuk setiap $a \in H$.
5. Unsur netral terhadap operasi # disebut *nol*.
6. Unsur netral terhadap operasi * disebut *satuan*.
7. Apabila $u \in H$ dan ada <u>tepat satu</u> anggota dari H, yaitu $w \in H$ yang bersifat bahwa hasil operasi u * w dan w * u merupakan unsur netral terhadap *, maka w disebut *invers dari* u terhadap *.
8. Invers dari u terhadap operasi # disebut *lawan dari* u, dan dinyatakan dengan lambang –u.
9. Invers dari u terhadap operasi * disebut *kebalikan dari* u, dan dinyatakan dengan lambang $\frac{1}{u}$.
10. Dikatakan bahwa *operasi * bersifat distributif terhadap operasi #* apabila a * (b # c) = (a * b) # (a * c) dan (a # b) * c = (a * c) # (b * c) untuk setiap $a \in H$, $b \in H$ dan $c \in H$.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

a. Himpunan D bersifat *tertutup* terhadap operasi *penjumlahan* dan terhadap *perkalian*.

Dapat pula dikatakan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian pada D bersifat tertutup.

b. Operasi penjumlahan pada D bersifat *komutatif.*
c. Operasi perkalian pada D bersifat *komutatif.*
d. Unsur $n \in D$ merupakan *unsur netral terhadap penjumlahan*.
e. Unsur $j \in D$ merupakan unsur netral terhadap perkalian.
f. *Lawan dari* n adalah n; *lawan dari* j adalah j.

Contoh 1.2.

1. **Contoh himpunan dengan operasi yang *tertutup*:**
   a. Himpunan semua bilangan real (**R**), dengan operasi perjumlahan
   b. Himpunan semua bilangan real (**R**), dengan operasi perkalian
   c. Himpunan semua bilangan rasional (**Q**), dengan operasi perjumlahan
   d. Himpunan semua bilangan rasional (**Q**), dengan operasi perkalian
   e. Himpunan semua bilangan bulat (**Z**), dengan operasi perjumlahan
   f. Himpunan semua bilangan bulat (**Z**), dengan operasi perkalian
   g. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi irisan ($\cap$)
   h. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi gabungan ($\cup$)

2. **Contoh himpunan dengan operasi yang *komutatif*:**
   a. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perjumlahan
   b. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perkalian
   c. Himpunan semua bilangan rasional, dengan operasi perjumlahan
   d. Himpunan semua bilangan rasional, dengan operasi perkalian
   e. Himpunan semua bilangan bulat, dengan operasi perjumlahan
   f. Himpunan semua bilangan bulat, dengan operasi perkalian
   g. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi irisan
   h. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi gabungan

3. **Contoh himpunan dengan operasi *asosiatif*:**
   a. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perjumlahan
   b. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perkalian
   c. Himpunan semua bilangan rasional, dengan operasi perjumlahan
   d. Himpunan semua bilangan rasional, dengan operasi perkalian
   e. Himpunan semua bilangan bulat, dengan operasi perjumlahan

f. Himpunan semua bilangan bulat, dengan operasi perkalian
g. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi irisan
h. Himpunan kuasa suatu himpunan, dengan operasi gabungan

4. Contoh himpunan yang mempunyai *unsur netral* (*unsur identitas*) terhadap operasi yang ditentukan

a. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perjumlahan.
b. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi perkalian.
c. Himpunan kuasa dari himpunan H, terhadap operasi irisan. *Unsur netral* adalah H, karena $A \cap H = A$ untuk setiap $A \subset H$.
d. Himpunan kuasa suatu himpunan, terhadap operasi Δ yang didefinisikan dengan aturan $A \ \Delta \ B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$. *Unsur netral* adalah ϕ, karena $A \Delta \phi = (A \cup \phi) \cap (A \cap \phi)^c = A$ untuk setiap himpunan A.
e. Himpunan $Q \times Q$, terhadap operasi *, apabila Q = himpunan semua bilangan rasional, sedangkan * didefinisikan dengan aturan (a,b) * (p,q) = (ap, aq+b). *Unsur netral* adalah pasangan (1,0), karena (a,b) * (1,0) = (a,b) untuk setiap pasangan (a,b).
f. Himpunan semua bilangan real, terhadap operasi *, yang didefinisikan dengan aturan a*b = a + b + 2ab. *Unsur netral* adalah bilangan 0, karena a*0 = a untuk setiap bilangan a.

5. Contoh himpunan yang mempunyai unsur netral, tetapi tidak setiap anggotanya mempunyai invers

a. Pada himpunan semua bilangan rasional (Q) dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$), yang sudah kita kenal, bilangan 0 merupakan unsur netral terhadap penjumlahan, dan bilangan 1 merupakan unsur netral terhadap perkalian. Lawan dari 3 adalah -3, kebalikan dari 3 adalah $\frac{1}{3}$. Terhadap perkalian, bilangan 0 tidak mempunyai invers. Jadi kebalikan dari 0 tidak ada.
b. Jika H = {a, b, c}, maka P(H) = {ϕ, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}. Pada P(H), himpunan ϕ merupakan unsur netral terhadap operasi gabungan, karena $A \cup \phi = A$ untuk setiap A anggota P(H), dan H merupakan unsur netral terhadap operasi irisan, karena $A \cap H = A$ untuk setiap A anggota P(H). Jika A anggota

P(H), invers A terhadap operasi gabungan tidak ada, dan invers A terhadap operasi irisan tidak ada.

6. Contoh himpunan yang setiap anggotanya mempunyai invers

a. Himpunan semua bilangan real yang bukan nol, dengan operasi perkalian.
b. Himpunan semua bilangan real, dengan operasi penjumlahan.

7. Contoh himpunan, dengan suatu operasi yang distributif terhadap operasi lain

a. Himpunan kuasa dari himpunan A, dengan operasi gabungan ($\cup$) dan operasi irisan ($\cap$). Operasi gabungan bersifat distributif terhadap operasi irisan. Artinya, untuk setiap H, K, L $\in$ P(A) berlaku hubungan

$$H \cup (K \cap L) = (H \cup K) \cap (H \cup L)$$

b. Himpunan kuasa dari himpunan A, dengan operasi gabungan ($\cup$) dan operasi irisan ($\cap$). Operasi irisan bersifat distributif terhadap operasi gabungan. Artinya, untuk setiap S, T, U $\in$ P(A) berlaku hubungan

$$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$$

Contoh 1.3. (dari buku Sawyer, 1950: 11-12)

Misalkan ada mobil harus melewati sebuah jembatan, dan jembatan itu sedemikian sempit sehingga lebarnya hanya cukup untuk lewat sebuah mobil. Untuk mengatur penggunaan jembatan itu diatur sebagai berikut.

a. Apabila mobil yang datang hanya dari satu arah (kanan saja, atau kiri saja) maka lampu hijau dinyalakan ke arah datangnya mobil.
b. Apabila ada mobil datang dari kedua arah (dari kiri dan dari kanan) maka lampu kuning dinyalakan ke arah kanan dan lampu merah dinyalakan ke arah kiri.

Pengaturan itu dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

1. Operasi # berarti “menyalakan *lampu hijau*”.
   Hasil operasi adalah “nyala-tidaknya *lampu hijau*” (j = ya, n = tidak)

Tabel 1.3.

		#	Ada mobil dari kanan? Tidak	Ya
Ada mobil dari kiri?	Tidak		n	j
	Ya		j	n

2. Operasi * berarti "menyalakan *lampu kuning-merah*"
   Hasil operasi adalah "nyala-tidaknya *lampu kuning-merah*" (j = ya, n = tidak)

Tabel 1.4.

		*	Ada mobil dari kanan? Tidak	Ya
Ada mobil dari kiri?	Tidak		n	n
	Ya		n	j

Tampak bahwa pasangan Tabel 1.1 (untuk penjumlahan) dan Tabel 1.2 (untuk perkalian) di atas mirip Tabel 1.3 (untuk pengaturan menyalakan lampu hijau) dan Tabel 1.4 (untuk pengaturan menyalakan lampu kuning-merah).

Dapat pula ditunjukkan hal-hal sebagai berikut.
(a) Operasi # bersifat *tertutup*.
(b) Operasi # bersifat *komutatif*.
(c) Operasi # bersifat *asosiatif*.
(d) Unsur n merupakan *unsur netral terhadap* #.
(e) *Lawan dari* n adalah n; *lawan dari* j adalah j.

Dapat pula ditunjukkan bahwa :
(f) Operasi * bersifat *tertutup*.
(g) Operasi * bersifat *komutatif*.
(h) Operasi * bersifat *asosiatif*.
(i) Operasi * bersifat distributif terhadap operasi #.

Ada juga keadaan lain yang dapat dinyatakan dengan tabel yang mirip dengan tabel-tabel di atas, yaitu sebagai berikut.

Tabel 1.5.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 1.6.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

dengan ketentuan bahwa *lambang* + dan × mempunyai makna yang sesuai dengan hal yang dibicarakan, tidak selalu berarti penjumlahan dan perkalian bilangan. Lambang "0" dan "1" juga tidak selalu menyatakan bilangan. Pada perkara lampu lalu-lintas di jembatan tersebut, operasi "penjumlahan" berarti "menyalakan *lampu hijau",* dan operasi "perkalian" berarti "menyalakan *lampu kuning-merah"*.

Sekumpulan objek yang dilengkapi dengan satu atau beberapa operasi, sedemikian sehingga setiap pasang objek (yang sama, atau yang berbeda) dapat dikenai operasi itu, disebut sistem matematis. Seperti telah disebutkan di muka, operasi yang pelaksanaannya dikenakan pada pasangan-pasangan objek (pasangan anggota dari suatu himpunan) dalam pembicaraan disebut *operasi biner*. Pasangan objek yang dikenai operasi itu mungkin terdiri dari atas objek yang berbeda, mungkin pula terdiri atas objek yang sama.

A. GELANGGANG

Sekarang marilah kita perhatikan himpunan semua bilangan bulat, yaitu himpunan {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}. Himpunan semua bilangan bulat lazim dinyatakan dengan lambang **Z**. Dari pelajaran tentang bilangan bulat yang telah kita ikuti di sekolah, kita mengetahui sifat-sifat berikut ini.

(T – 0) **Z** *tertutup terhadap penjumlahan*
Artinya: Jumlah dari setiap pasang bilangan bulat juga merupakan bilangan bulat.

(T – 1) Penjumlahan pada **Z** bersifat *asosiatif.*
Artinya: Untuk setiap bilangan bulat a, b, c, berlaku hubungan
$(a + b) + c = a + (b + c)$.

(T – 2) Ada bilangan bulat yang merupakan unsur netral terhadap penjumlahan.

Artinya: Ada bilangan khusus, yaitu 0, yang bersifat bahwa untuk setiap bilangan bulat a berlaku hubungan a + 0 = 0 + a = a

(T – 3) Setiap bilangan bulat mempunyai *invers terhadap penjumlahan.*
Artinya: Untuk setiap bilangan bulat a terdapat bilangan bulat –a, yang jumlahnya dengan a merupakan *unsur netral tersebut*, yaitu memenuhi hubungan a + (-a) = (-a) + a = 0

(T – 4) Penjumlahan pada **Z** bersifat *komutatif.*
Artinya: untuk setiap bilangan bulat a dan b, berlaku hubungan
a + b = b + a

(K – 0) **Z** *tertutup terhadap operasi perkalian.*
Artinya: Hasil-kali dari setiap pasang bilangan bulat juga merupakan bilangan bulat.

(K – 1) Perkalian pada **Z** bersifat *asosiatif.*
Artinya: Untuk setiap bilangan bulat a, b, c, berlaku hubungan
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

(D) Perkalian pada **Z** bersifat *distributif* terhadap penjumlahan.
Artinya: Untuk setiap bilangan bulat a, b, c, berlaku hubungan
$a\times (b + c) = (a\times b) + (a\times c)$ dan $(a + b)\times c = (a\times c) + (b\times c)$.

Definisi 1.3.

Himpunan H yang dilengkapi dengan operasi *penjumlahan* dan *perkalian* disebut *ring* atau *gelanggang*, apabila:

(T – 0) H *tertutup terhadap penjumlahan.*
(T – 1) Penjumlahan pada H bersifat *asosiatif.*
(T – 2) Ada unsur netral terhadap penjumlahan.
(T – 3) Setiap anggota dari H mempunyai *invers terhadap penjumlahan.*
(T – 4) Penjumlahan pada H bersifat *komutatif.*
(K – 0) H *tertutup terhadap perkalian.*
(K – 1) Perkalian pada H bersifat *asosiatif.*
(D) Perkalian pada H bersifat *distributif* terhadap penjumlahan.

Apabila **M** adalah himpunan semua matriks berordo 2 $\times$ 2, sedangkan "+" dan "$\times$" adalah operasi "penjumlahan" dan "perkalian" pada matriks, maka berlakulah kedelapan sifat di atas, yaitu:

(T – 0) **M** *tertutup* terhadap penjumlahan
(T – 1) Penjumlahan pada **M** bersifat *asosiatif*

(T – 2) Ada *unsur netral (*matriks berordo 2×2 yang merupakan unsur netral) terhadap penjumlahan.

Artinya, ada matriks n = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan untuk setiap matriks m yang berordo 2×2 berlaku hubungan m + n = n + m = m.

(T – 3) Setiap matriks berordo 2×2 mempunyai *invers* terhadap penjumlahan.

(T – 4) Penjumlahan pada **M** bersifat *komutatif*

(K – 0) **M** *tertutup* terhadap operasi perkalian

(K – 1) Perkalian pada **M** bersifat *asosiatif*

(D) Perkalian pada M bersifat *distributif* terhadap penjumlahan.

Jadi himpunan semua matriks berordo 2×2 juga merupakan *ring* atau *gelanggang.* Di samping kedelapan sifat itu terdapat dua sifat lagi, yaitu sifat K-2 dan sifat K-3 berikut ini.

(K – 2) Ada *unsur satuan* u (*matriks berordo* 2×2 yang merupakan unsur netral terhadap perkalian).

Artinya u = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yang bersifat bahwa untuk setiap matriks m yang berordo 2×2 berlaku hubungan $m \times u = u \times m = m$

Karena *ring matriks* itu mempunyai sifat K-2, maka *ring matriks* disebut *ring yang mempunyai unsur satuan*. Suatu ring yang operasi perkaliannya bersifat komutatif disebut ring komutatif (K-3). Ring matriks bukan ring komutatif, mengapa?

B. MEDAN

Marilah sekarang kita perhatikan himpunan

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in Z, \quad b \in Z, \quad \text{dan} \quad b \neq 0 \right\}$$

Pada himpunan **Q** ini didefinisikan penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) sebagai berikut.

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ untuk setiap $\frac{a}{b} \in Q$ dan $\frac{c}{d} \in Q$

2. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ untuk setiap $\dfrac{a}{b} \in Q$ dan $\dfrac{c}{d} \in Q$

Dapat ditunjukkan bahwa **Q** yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian tersebut merupakan *ring komutatif* yang mempunyai *unsur satuan*. Artinya:

(T – 0) **Q** *tertutup terhadap penjumlahan.*
(T – 1) Penjumlahan pada **Q** bersifat *asosiatif.*
(T – 2) Ada *unsur netral* terhadap penjumlahan, yaitu bilangan nol.
(T – 3) Setiap anggota dari **Q** mempunyai *invers terhadap penjumlahan.*
(T – 4) Penjumlahan pada **Q** bersifat *komutatif.*

(K – 0) **Q** *tertutup terhadap perkalian*
(K – 1) Perkalian pada **Q** bersifat *asosiatif*
(K – 2) Ada **unsur satuan**, yaitu bilangan satu.
(K – 3) Perkalian pada **Q** bersifat *komutatif.*

(D) Perkalian pada **Q** bersifat *distributif* terhadap penjumlahan.

Di samping itu, **Q** mempunyai satu sifat lagi, yaitu:

(K – 4) Setiap anggota dari **Q** yang bukan unsur netral terhadap penjumlahan (artinya: yang bukan bilangan nol) mempunyai *invers terhadap perkalian*.

Artinya, jika $c \in Q$ dan $c \neq 0$, maka ada bilangan $d = \dfrac{1}{c}$ sedemikian sehingga hasil-kali dari c dan d merupakan *unsur satuan.*

Unsur netral terhadap penjumlahan, disebut juga nol, atau unsur nol. Unsur *satuan* disebut juga *unsur netral terhadap perkalian*.

Dikatakan bahwa himpunan **Q** dengan operasi penjumlahan dan perkalian, atau himpunan **Q** yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian, merupakan *ring komutatif* yang mempunyai unsur satuan, yang setiap anggotanya yang bukan nol mempunyai invers terhadap perkalian.

Ring komutatif yang mempunyai unsur satuan, yang setiap anggotanya yang bukan unsur nol mempunyai invers terhadap perkalian disebut *field atau medan.* Secara rinci, medan dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.4

Field atau *medan* ialah himpunan F, yang dilengkapi dengan dua operasi, yang disebut *penjumlahan* (+) dan *perkalian* ($\times$), yang bersifat sebagai berikut.

(T – 0) F *tertutup terhadap penjumlahan.*
(T – 1) Penjumlahan pada F bersifat *asosiatif.*
(T – 2) Ada $n \in F$ yang merupakan *unsur netral terhadap penjumlahan* (*nol*).
(T – 3) Setiap anggota dari F mempunyai *invers terhadap penjumlahan.*
(T – 4) Penjumlahan pada F bersifat *komutatif.*
(K – 0) F *tertutup terhadap perkalian*
(K – 1) Perkalian pada F bersifat *asosiatif*
(K – 2) Ada $s \in F$ yang merupakan unsur netral terhadap perkalian (*satu atau unsur satuan*), yang tidak sama dengan unsur netral terhadap penjumlahan.
(K – 3) Perkalian pada F bersifat *komutatif*.
(K – 4) Setiap anggota dari F, *yang bukan* unsur nol mempunyai *invers terhadap perkalian.*
(D) *Perkalian* pada F bersifat *distributif* terhadap penjumlahan.

Definisi 1.5

Sebuah *medan* (F; + ; $\times$) disebut *medan yang terurut* apabila ada himpunan $P \subset F$, sedemikian sehingga:

(P – 1) Apabila a dan b anggota dari P, maka a + b juga merupakan anggota dari P;
(P – 2) Apabila a dan b anggota dari P, maka $a \times b$ juga merupakan anggota dari P;
(P – 3) Apabila $c \in F$, maka tepat satu dari ketiga hubungan berikut ini berlaku, yaitu
(1) $c = 0$, (2) $c \in P$, (3) $-c \in P$

Contoh 1.4

Himpunan **Q** dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinsikan di atas (berdasarkan pengertian operasi pada bilangan bulat), merupakan *medan yang terurut.*

C. MEDAN BAGIAN

Himpunan bagian dari suatu medan, yang mempunyai sifat khusus, lazim diberi nama khusus. Salah satu di antaranya disebut *medan bagian* atau *submedan.*

Definisi 1.6

Misalkan (H, +, $\times$) merupakan medan. Apabila K $\subset H$, dan (K, +, $\times$) juga merupakan medan, maka (K, +, $\times$) disebut *submedan* atau *medan bagian* dari (H, +, $\times$) atau dikatakan bahwa K merupakan *medan bagian* dari H.

Sebagai contoh, apabila H menyatakan himpunan semua bilangan real, sedangkan K menyatakan himpunan semua bilangan rasional, maka K merupakan *medan bagian* dari H.

D. BILANGAN REAL

Apakah yang disebut bilangan real? Kita dapat menyebut beberapa contoh bilangan asli, beberapa contoh bilangan bulat, beberapa contoh bilangan real, dan beberapa contoh bilangan kompleks. Akan tetapi tidak mudah untuk menjelaskan apa yang disebut bilangan real. Di muka telah disebutkan bahwa ada beberapa cara untuk mendefinisikan bilangan *real* atau bilangan nyata, dan kita akan mendefinisikan bilangan real melalui pengertian *medan.* Sesuai dengan uraian dalam pengantar di muka, tahap-tahap yang akan kita lalui dalam mendefinisikan bilangan nyata atau bilangan real adalah sebagai berikut.

Tahap I : Kita menganggap dulu bahwa kita mengenal bilangan asli, bilangan bulat, dan bilangan rasional.

Tahap II : Kita menganggap bahwa: (1) ada objek yang dapat kita sebut *bilangan real,* (2) *himpunan semua bilangan real* dinyatakan dengan lambang **R**, dan (3) pada **R** terdefinisi operasi *penjumlahan* (+) dan *perkalian* ($\times$).

Tahap III : Kemudian kita menganggap benar pernyataan A-1, A-2, dan A-3 berikut ini, tanpa perlu dibuktikan. Dengan kata lain, kita mengangkat ketiga pernyataan A-1, A-2, dan A-3 berikut ini sebagai *aksioma.*

(A – 1) **R** merupakan *medan* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian tersebut.
(A – 2) Pada **R** berlaku *sifat urutan*.
(A – 3) **R** mempunyai *sifat kelengkapan*.

Pernyataan A-1 disebut Aksioma Medan bagi **R**, atau Sifat Kealjabaran Bilangan Real. Pernyataan A-2 disebut Aksioma Urutan Bilangan Real. Pernyataan A-3 disebut juga Sifat Supremum atau Sifat Batas Atas Terkecil.

Marilah selanjutnya kita cermati aksioma A-1, A-2, dan A-3 itu beserta teorema-teorema yang dapat diturunkan darinya.

Sifat Kealjabaran Bilangan Real

Pada himpunan semua bilangan real **R,** terdefinisi operasi biner *penjumlahan* (dinyatakan dengan lambang +) dan *perkalian* (dinyatakan dengan lambang $\times$ atau .), yang memenuhi hubungan (memiliki sifat) berikut.

T – 0 $a + b \in \mathbf{R}$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$
T – 1 $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$
T – 2 Ada $0 \in \mathbf{R}$ dengan sifat $0 + a = a$ dan $a + 0 = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$
T – 3 Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a \in \mathbf{R}$ dengan sifat $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$
T – 4 $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$
K – 0 $a \times b \in \mathbf{R}$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$
K – 1 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$
K – 2 Ada $1 \in \mathbf{R}$ dengan sifat $1 \neq 0$,
$1 \times a = a$, dan $a \times 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$
K – 3 $a \times b = b \times a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$
K – 4 Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, apabila $a \neq 0$, terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ dengan sifat

$$a \times \frac{1}{a} = 1 \text{ dan } \frac{1}{a} \times a = 1$$

D $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$,

Dapat dibuktikan bahwa apabila $a \in \mathbf{R}$, $b = -a$, dan $c = -a$, maka $b = c$, ...(*)

Dengan kata lain, *setiap bilangan real* mempunyai tepat satu invers terhadap penjumlahan, atau tepat *satu lawan*. Selanjutnya kita gunakan juga lambang-lambang menurut definisi di bawah ini.

Definisi 1.7

1. a. b adalah lambang untuk $a \times b$.
   Jika a atau b bukan angka, ab adalah lambang untuk $a \times b$.
2. 1a adalah bilangan lambang untuk a.
3. $a - b$ adalah lambang untuk $a + (-b)$ dan untuk $(-b) + a$
4. $a : b$ dan $\frac{a}{b}$ adalah lambang untuk $a \times \frac{1}{b}$ atau $\frac{1}{b} \times a$
5. a^{-1} adalah lambang untuk $\frac{1}{a}$.
6. a^2 adalah lambang untuk perkalian atau hasil kali $a \times a$
7. a^1 adalah lambang untuk a.

Dari definsi dan sifat-sifat di atas dapat diperoleh hasil sebagai berikut.
Misalkan $a, z \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga $z + a = a$.

Maka
$$\begin{aligned} 0 &= a + (-a) \\ &= (z + a) + (-a) \\ &= z + [a + (-a)] \\ &= z + 0 \\ &= z \end{aligned}$$

Dengan cara yang mirip dengan cara di atas, dapat ditunjukkan pula bahwa apabila $b, u \in \mathbf{R}$ dan $b \neq 0$, sedemikian sehingga $u \times b = b$, maka $u = 1$. Jadi dapat disimpulkan teorema sebagai berikut.

Teorema 1.1

1. Apabila $a, z \in \mathbf{R}$ dan bersifat $z + a = a$, maka $z = 0$
2. Apabila $b, u \in \mathbf{R}$ dengan sifat $b \neq 0$, dan $u \times b = b$, maka $u = 1$.

Sekarang, misalkan $a, b \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga $a + b = 0$.

Maka
$$\begin{aligned} b &= 0 + b \\ &= [(-a) + a] + b \\ &= -a + (a + b) \end{aligned}$$

$= -a + 0$ (ditentukan)
$= -a$.

Dengan cara yang mirip dengan cara di atas dapat diperoleh sifat tentang perkalian. Hasilnya dapat kita nyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 1.2

1. Apabila $a, b \in \mathbf{R}$ dan bersifat $a + b = 0$, maka $b = -a$
2. Apabila $a, b \in \mathbf{R}$ dengan sifat $a \neq 0$ dan $a \times b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$

Selanjutnya dapat pula ditunjukkan kebenaran teorema-teorema berikut.

Teorema 1.3

Apabila $a, b \in R$, maka

1. ada tepat satu $w \in \mathbf{R}$ yang memenuhi hubungan $a + w = b$, yaitu $w = (-a) + b$.
2. jika $a \neq 0$, ada tepat satu $y \in \mathbf{R}$ yang memenuhi hubungan $a.\ y = b$, yaitu $y = \frac{1}{a}.b$

Bukti

1. Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$ dan $a + w = b$.
   Maka ada $-a \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga $-a + a = 0$ dan $a + (-a) = 0$.
   Oleh karena itu,
   $$\begin{aligned} a + [(-a) + b] &= [a + (-a)] + b \\ &= 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$
   Artinya $w = (-a) + b$ memenuhi hubungan $a + w = b$
   Misalkan $w = p$ dan $w = q$ memenuhi hubungan $a + w = b$
   Maka $a + p = b$ dan $a + q = b$
   Terdapatlah hubungan
   $$\begin{aligned} p &= 0 + p \\ &= [(-a) + a] + p \\ &= (-a) + [a + p] \\ &= -a + b \\ &= -a + (a + q) \\ &= [(-a) + a] + q \\ &= 0 + q \\ &= q \end{aligned}$$

Artinya, ada tepat satu (ada, tetapi hanya sebuah) bilangan w yang memenuhi hubungan a + w = b. Bagian (2) dapat dibuktikan dengan cara seperti di atas.

Teorema 1.4
Apabila a $\in$ **R**, maka
1. a.0 = 0
2. (-1).a = -a
3. –(-a) = a
4. (-a).(-a) = a.a [Khususnya $-1 \times -1 = 1$]

Teorema 1.5
Misalkan a, b, c $\in$ **R**.
1. Jika a $\neq$ 0, maka $\frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{\frac{1}{a}} \neq 0$
2. Jika a $\neq$ 0, dan ab = ac, maka b = c
3. Jika a.b = 0, maka a = 0 atau b = 0

Teorema 1.6
Apabila a dan b adalah bilangan real yang bukan 0, maka $(ab)^{-1} = a^{-1}\, b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Bukti
Misalkan a dan b adalah bilangan real yang bukan 0, maka ab $\neq 0$, dan ada bilangan real a^{-1}, b^{-1}, dan $(ab)^{-1}$, sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
(ab)^{-1} &= (ab)^{-1} \times 1 \\
&= (ab)^{-1} \times (1 \times 1) \\
&= (ab)^{-1} \times [(a \times a^{-1}) \times (b \times b^{-1})] \\
&= (ab)^{-1} \times [\{(a \times a^{-1}) \times b\} \times b^{-1}] \\
&= (ab)^{-1} \times [\{a \times (a^{-1} \times b)\} \times b^{-1}] \\
&= (ab)^{-1} \times [\{a \times (b \times a^{-1})\} \times b^{-1})] \\
&= (ab)^{-1} \times [\{(a \times b) \times a^{-1}\} \times b^{-1})] \\
&= (ab)^{-1} \times [(a \times b) \times (a^{-1} \times b^{-1})] \\
&= (ab)^{-1} \times [(ab) \times (a^{-1}\, b^{-1})] \\
&= [(ab)^{-1} \times (ab)] \times (a^{-1}\, b^{-1})] \\
&= 1 \times (a^{-1}\, b^{-1})
\end{aligned}
$$

$= a^{-1} b^{-1}$
$= b^{-1} a^{-1}$ (Sifat komutatif pada perkalian)

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan operasi $\times$ menyatakan perkalian pada bilangan real, dan operasi + menyatakan penjumlahan pada bilangan real, sedangkan * dan # adalah operasi pada bilangan real yang didefinisikan dengan rumus $a * b = 2a \times b$ dan $a \# b = a + 2b$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$. dan $b \in \mathbf{R}$.
   A. Apakah * komutatif?
   B. Apakah # asosiatif?
   C. Apakah * asosiatif?
   D. Apakah * distributif terhadap #?
   E. Apakah # distributif terhadap *?
2) Misalkan operasi $\times$ menyatakan perkalian pada bilangan real, dan operasi + menyatakan penjumlahan pada bilangan real, sedangkan * adalah operasi pada bilangan real yang didefinisikan dengan rumus $a * b = a + b - (a \times b)$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ dan $b \in \mathbf{R}$
   Apakah operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi *?
3) Misalkan operasi + menyatakan penjumlahan pada bilangan real, sedangkan @ adalah operasi pada bilangan real yang didefinisikan dengan rumus $p @ q = p + q - 3$ untuk setiap $p \in \mathbf{R}$ dan $q \in \mathbf{R}$.
   A. Carilah unsur identitas terhadap operasi @
   B. Carilah *invers* dari 4 pada operasi @ itu.
   C. Apakah operasi @ komutatif?
   D. Apakah operasi @ asosiatif?
   E. Apakah operasi @ bersifat distributif terhadap operasi * dalam soal nomor 2 di atas?
4) Jika operasi pada bilangan real didefinisikan dengan rumus $a : b = a \times b^{-1}$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, dan $b \in \mathbf{R}$, dengan syarat b^{-1} ada, apakah dalam $\mathbf{R}$ ada unsur identitas untuk operasi itu?
5) Diketahui bahwa H dengan operasi + dan $\times$ merupakan *gelanggang*. Buktikan sifat berikut ini.
   A. Jika z dan n merupakan unsur identitas terhadap operasi penjumlahan (+), buktikan bahwa z = n.

B. Jika $y \in H$, sedangkan k dan *l* merupakan *invers* dari y terhadap operasi penjumlahan, buktikan bahwa $k = l$

C. Jika s dan u merupakan unsur identitas terhadap operasi perkalian, buktikan bahwa $s = u$.

D. Jika $t \in H$, sedangkan p dan q merupakan invers dari t terhadap operasi perkalian, buktikan bahwa $p = q$.

6) Apabila H dengan operasi + dan $\times$ merupakan *gelanggang*, sedangkan $a \in H$, $b \in H$, dan $c \in H$ sedemikian sehingga $a + c = b + c$, maka $a = b$. Buktikan!

7) Apabila H dengan operasi + dan $\times$ merupakan *gelanggang*, sedangkan $a \in H$, maka $a \times 0 = 0 \times a = 0$. Buktikan!

8) Buktikan bahwa apabila H dengan operasi + dan $\times$ merupakan gelanggang, sedangkan $p \in H$ dan $q \in H$, maka:

   A. $-(-p) = p$
   B. $p \times (-q) = (-p) \times q = -(pq)$
   C. $(-p) \times (-q) = p \times q$
   D. $-(p + q) = -p + (-q)$

9) Buktikan bahwa apabila H dengan operasi + dan $\times$ merupakan *gelanggang*, sedangkan $p, q, r, s, t \in H$, maka $[(p + q) + (r + s) + t] = p + (q + (r + s))$.

10) Buktikan bahwa apabila p, q, r, s, dan t adalah bilangan real, maka $(((p + q) + r) + s) + t = p + (q + (r + s)) + t$

11) Buktikan bahwa apabila p, q, r, s, dan t adalah bilangan real, maka $(((p \times q) \times r) \times s) \times t = p \times ((q \times r) \times s) \times t$

Perhatikan!

Sesungguhnya dapat dibuktikan bahwa di mana pun letak pasangan tanda kurung, hasil penjumlahan pada soal nomor 10 akan sama, dan hasil perkalian pada soal nomor 11 akan sama. Oleh karena itu, pada penjumlahan dan perkalian, kurung-kurung itu boleh tidak ditulis.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. Ya, karena $2a \times b = 2b \times a = 2ab$
   b. Tidak, karena $(a + 2b) + 2c \neq a + 2(b + 2c)$
   c. Tidak, karena $2(2a \times b) \times c \neq 2a \times (2b \times c)$

d. Tidak, karena $2a \times (b + 2c) \neq (2a \times b) + 2(2a \times c)$
e. Mirip dengan bagian d.

2) Tidak, karena $a[b + c - bc] \neq ab + ac - aabc$

3) a. $t + 3 - 3 = t$ untuk setiap $t \in \mathbf{R}$. Jadi unsur identitas adalah 3.
b. $4 + t - 3 = 3$ untuk $t = 2$. Jadi *invers* dari 4 adalah 2.
c. Ya, karena $p + q - 3 = q + p - 3$ untuk setiap p dan q.
d. Ya, karena $(p + q - 3) + r - 3 = p + [q + r - 3] - 3$ untuk setiap p, q dan r.
e. Tidak, karena $p @ (q * r) = p @ (q + r - qr) = p + q + r - qr - 3$ dan $(p @ q) * (p @ r) = p + q - 3 + p + r - 3 - (p + q - 3)(p + r - 3)$

4) Tidak, karena $p : 1 = p \times 1^{-1} = p$ untuk setiap $p \in \mathbf{R}$, namun $1: p = 1 \times p^{-1} = p^{-1} \neq p$.

5) A. $ƶ = a + (-a)$, untuk setiap $a \in H$
$= (n + a) + (-a)$
$= n + (a + (-a))$
$= n + ƶ$
$= n$

B. k dan *l* invers dari y terhadap penjumlahan, maka:
$k + y = y + k = ƶ$ dan $l + y = y + l = ƶ$
$k = ƶ + k$
$= (l + y) + k$
$= l + (y + k)$
$= l + ƶ$
$= l$

untuk C dan D mengikuti seperti penyelesaian A dan B.

6) $c \in H$, karena H gelanggang maka ada $(-c) \in H$ dan $c + (-c) = (-c) + c = 0$
$a + c = b + c$
$\Leftrightarrow (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$
$\Leftrightarrow a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$
$\Leftrightarrow a + 0 = b + 0$
$\Leftrightarrow a = b$

7) (i) $a + a.0 = a.1 + a.0$
$= a\,(1+ 0)$
$= a.1$
$= a$
jadi $a + a.0 = a$
$\Leftrightarrow$ $(-a) + a + a.0 = (-a) + a$
$\Leftrightarrow$ $0 + a \,.\, 0 = 0$
$\Leftrightarrow$ $a \,.\, 0 = 0$
(ii) $a + 0 \,.\, a = 1.\, a + 0 \,.\, a$
$= (1 + 0) \,.\, a$
$= 1 \,.\, a$
$= a$
jadi $a + 0 \,.\, a = a$
$\Leftrightarrow$ $(-a) + a + 0 \,.\, a = (-a) + a$
$\Leftrightarrow$ $0 + 0 \,.\, a = 0$
$\Leftrightarrow$ $0 .a = 0$
jadi $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$

8) A. $p \in H$, maka ada $(-p) \in H$ sehingga $p + (-p) = 0$
karena $p + (-p) = 0$ maka $p = -(-p)$
B. (i) $(p \times q)\,(p \times (-q) = p \times (q + (-q))$
$= p \times 0$
$= 0$
jadi $pq + p(-q) = 0$
Hal ini berarti $p(-q) = -(pq)$

(ii) $(p \times q) + (-p \times q) = (p + (-p)) \times q$
$= 0 \times q$
$= 0$
jadi $pq + (-p)q = 0$
Hal ini berarti $(-p)q = -(pq)$
Dari (i) dan (ii) terbukti $p \times (-q) = (-p) \times q = -(pq)$
Untuk C dan D mengikuti seperti penyelesaian A dan B

Nomor 9 dan 10, gunakan sifat asosiatif penjumlahan pada gelanggang bilangan real.
Nomor 11 gunakan sifat asosiatif perkalian pada gelanggang bilangan real.

RANGKUMAN

Dalam Kegiatan Belajar 1 kita telah mempelajari sifat-sifat operasi biner, yaitu operasi yang tertutup, komutatif, asosiatif, distributif terhadap operasi lain. Kemudian kita juga telah mempelajari himpunan yang mempunyai unsur identitas terhadap satu atau dua operasi biner, himpunan yang setiap anggotanya mempunyai invers terhadap operasi tertentu. Telah pula kita pelajari sistem matematis yang disebut gelanggang dan medan. Kemudian kita pelajari definisi bilangan real melalui konsep medan, ketentuan bahwa aksioma medan bagi himpunan semua bilangan real, R disebut sifat kealjabaran bilangan real. Dari sifat kealjabaran yang kita angkat sebagai aksioma, dapat diturunkan beberapa sifat yang kita sebut teorema.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan operasi $\times$ menyatakan perkalian pada bilangan real, dan operasi + menyatakan penjumlahan pada bilangan real, sedangkan * adalah operasi pada bilangan real yang didefinisikan dengan rumus $a \times b = a + b - (a \times b)$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ dan $b \in \mathbf{R}$. *Invers* dari 5 pada operasi * adalah ....
   A. $\frac{1}{5}$
   B. $\frac{4}{5}$
   C. $\frac{1}{4}$
   D. $\frac{5}{4}$

2) Misalkan operasi $\times$ menyatakan perkalian pada bilangan real, dan operasi + menyatakan penjumlahan pada bilangan real, sedangkan * dan # adalah operasi pada bilangan real yang didefinisikan dengan rumus
   $a * b = (a + b) - (a \times b)$ dan
   $a \# b = a + b - 1$

untuk setiap a $\in$ **R** dan b $\in$ **R**
Pernyataan yang benar berikut ini adalah ….
A. **R** dengan kedua operasi # dan * tersebut merupakan *medan*
B. **R** dengan kedua operasi # dan * tersebut merupakan *gelanggang* tetapi tidak merupakan *medan*
C. operasi * tidak distributif terhadap operasi #
D. operasi * tidak asosiatif

3) Misalkan H = {p, q, r, s} dan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) pada H didefinisikan dengan dua tabel berikut ini.

Tabel +

$\times$	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	p	s	r
r	r	s	p	q
s	s	r	q	p

Tabel $\times$

+	p	q	r	s
p	p	p	p	p
q	p	q	r	s
r	p	p	p	p
s	p	q	r	s

Pernyataan yang benar berikut ini adalah ….
A. operasi $\times$ tidak komutatif
B. operasi $\times$ tidak distributif terhadap operasi +
C. H dengan kedua operasi + dan $\times$ tersebut merupakan *gelanggang* tetapi tidak merupakan *medan*
D. H dengan kedua operasi + dan $\times$ tersebut merupakan *medan*

4) Misalkan H = **R** $\times$ **R** = {(a, b) | a $\in$ **R** dan b $\in$ **R**} dan pada H didefinisikan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\times$) sebagai berikut.
(p, q) + (r, s) = (p + q, r + s)
(p, q) $\times$ (r , s) = (pr – qs, ps + qr)
untuk setiap (p, q) dan (r, s) dalam H
Pernyataan berikut ini yang benar adalah ….
A. operasi + tidak asosiatif
B. operasi $\times$ tidak distributif terhadap operasi +
C. H dengan kedua operasi + dan $\times$ itu merupakan gelanggang tetapi tidak merupakan medan
D. H dengan kedua operasi + dan $\times$ itu merupakan medan

5) Misalkan K = $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, dan $b \neq 0\}$ dan pada K didefinsikan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\times$) sebagai berikut.
(p, q) + (r, s) = (ps + qr, qs)
(p, q) $\times$ (r, s) = (pr, qs)
untuk setiap (p, q) dan (r, s) dalam K

Pernyataan berikut ini yang benar adalah ….
A. operasi + tidak asosiatif
B. operasi $\times$ distributif terhadap operasi +
C. K dengan kedua operasi + dan $\times$ itu tidak merupakan gelanggang
D. K dengan kedua operasi + dan $\times$ itu merupakan gelanggang tetapi tidak merupakan medan

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Bilangan Rasional

Seperti telah disebutkan dalam permulaan seksi bilangan real, kita menganggap belum mengetahui bilangan asli, bilangan *bulat*, maupun bilangan *rasional*. Sekarang, berdasarkan definisi dan sifat-sifat yang telah dibahas (diangkat sebagai aksioma ataupun dibuktikan kebenarannya sebagai teorema), kita akan mendefinisikan *bilangan asli, bilangan bulat,* dan *bilangan rasional.*

A. SISTEM BILANGAN ASLI

Bilangan asli kita definisikan dengan menggunakan pengertian bilangan 1 yang merupakan unsur identitas terhadap perkalian bilangan real dan menggunakan operasi pada bilangan real.

Definisi 1.8

1. Himpunan induktif ialah himpunan yang memiliki kedua sifat berikut.
   a. 1 menjadi anggota dari himpunan itu;
   b. apabila k menjadi anggota dari himpunan itu, maka k + 1 juga menjadi anggota dari himpunan itu.
2. Anggota irisan dari semua himpunan induktif, disebut bilangan asli.
3. Irisan dari semua himpunan induktif disebut **himpunan semua bilangan asli**, dan kita nyatakan sebagai **N**.
4. Himpunan **N** yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada bilangan real, disebut **sistem bilangan asli**.

Definsi 1.9

1. Anggota dari himpunan $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-b \mid b \in \mathbf{N}\}$ disebut *bilangan bulat*, sedangkan **Z** disebut *himpunan semua bilangan bulat*.
2. Himpunan **Z** yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada bilangan real, disebut sistem bilangan bulat.

Definisi 1.10

1. Setiap bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, dengan $a \in$ **Z** dan $b \in$ (**Z**\{0}), disebut *bilangan rasional*.
2. Himpunan semua bilangan rasional, yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada bilangan real, disebut *sistem bilangan rasional*.

Dari sifat K-2 dalam seksi bilangan real kita telah tahu bahwa ada anggota dari **R** yang dinyatakan dengan lambang 1, yang merupakan satuan dalam **R**. Unsur itu selanjutnya kita sebut bilangan *real 1*, atau bilangan *1*, atau disebut 1 saja.

Dari sifat di atas dan Definisi 1.8 dapat kita simpulkan bahwa 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, [(1 + 1) + 1] + 1 dan seterusnya merupakan anggota dari **N** atau merupakan *bilangan asli*. Selanjutnya bilangan-bilangan itu, berturut-turut, kita nyatakan dengan lambang 1, 2, 3, 4, dan seterusnya, dan dibaca *satu, dua, tiga, empat,* dan seterusnya. Dari definisi 1.8 dapat kita simpulkan bahwa **N** = {1, 2, 3, 4, ..}

Selanjutnya Anda dianggap telah tahu lambang bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan seterusnya.

B. SIFAT PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN PADA BILANGAN ASLI

Dengan definisi 1.8 di atas, dan dengan sifat asosiatif dan sifat komutatif pada penjumlahan, yaitu sifat T1 dan sifat T4, dapat ditunjukkan bahwa jumlah dari dua bilangan asli juga merupakan bilangan asli. Demikian pula, dengan Definisi 1.8 di atas dan dengan sifat komutatif dan sifat asosiatif pada penjumlahan dan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, dapat ditunjukkan bahwa hasil kali dari dua bilangan asli juga merupakan bilangan asli. Dengan kata lain, himpunan **N** bersifat tertutup terhadap operasi *penjumlahan* dan operasi *perkalian.* Sebagai latihan, tunjukkanlah (buktikanlah) kedua sifat tersebut!.

Berdasarkan hal-hal tersebut di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Teorema 1.7

T0. $a + b \in \mathbf{N}$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{N}$
T1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c, \in \mathbf{N}$
T2. Di dalam N tidak terdapat unsur netral terhadap penjumlahan
T3. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{N}$
K0. $a \times b \in N$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{N}$
K1. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c, \in \mathbf{N}$
K2. Ada $1 \in N$ dengan sifat $1 \times a = a$, dan $a \times 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{N}$.
K3. $a \times b = b \times a$ untuk setiap $a, b, \in \mathbf{N}$
D. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{N}$.

C. HASIL PENJUMLAHAN DARI SUKU YANG SAMA DAN HASIL PERKALIAN DARI FAKTOR YANG SAMA

Dalam penjumlahan bilangan, setiap bilangan yang dijumlahkan disebut *suku*, dan dalam perkalian bilangan, setiap bilangan yang dikalikan disebut *faktor*.

Contoh 1.5

Jika $p + q = r$, maka p dan q disebut suku, sedangkan r disebut *jumlah,* atau *hasil tambah,* atau *hasil penjumlahan.*
Jika $r \times s = t$, maka r dan s disebut *faktor,* sedangkan t disebut *hasil kali* atau *hasil perkalian*.

Untuk penjumlahan dari suku yang sama dan perkalian dari faktor yang sama kita gunakan lambang yang sesuai dengan definisi berikut.

Definisi 1.11

1. Jika n adalah bilangan asli yang bukan 1 dan bukan 2, penjumlahan n suku $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n$ adalah lambang untuk penjumlahan $(...((p_1 + p_2) + p_3) + ...) + p_n$, sedangkan perkalian $p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_n$ adalah lambang untuk perkalian $(....((p_1 \times p_2) \times p_3) \times ....) \times p_n$.
2. 2p adalah lambang untuk hasil penjumlahan $p + p$
3. Jika n adalah bilangan asli yang bukan 1, maka np adalah lambang untuk hasil penjumlahan dari n suku $p + p + ... + p$.
4. p^2 (dibaca “p pangkat dua” atau ‘’p kuadrat”) adalah lambang untuk hasil kali $p \times p$.

5. Jika n adalah bilangan asli yang bukan 1, maka p^n (dibaca “p pangkat n”) adalah lambang untuk hasil kali dari n faktor $p \times p \times \dots \times p$
6. Jika n adalah bilangan asli, maka p^{n+1} adalah lambang untuk hasil kali $p^n \times p$.

D. INDUKSI MATEMATIS

Dalam beberapa hal kita perlu membuktikan bahwa suatu sifat mengenai bilangan asli berlaku untuk setiap bilangan asli. Pembuktian sifat demikian dilakukan dengan aksioma yang lazim disebut asas *induksi matematis,* sedang bukti yang berdasarkan asas itu disebut *bukti secara induksi matematis,* atau *bukti dengan induksi lengkap.* Lebih dulu harap diperhatikan bahwa himpunan bilangan asli adalah himpunan bagian dari **N**, mungkin sama dengan **N**, mungkin pula merupakan himpunan bagian sejati dari **N**.

Aksioma 1 (Asas Induksi Matematis)

Apabila H adalah himpunan bilangan asli yang memiliki dua sifat:

1. $1 \in H$, dan
2. $m + 1 \in H$ untuk setiap $m \in H$,

maka H merupakan himpunan semua bilangan asli.

Aksioma tersebut dapat pula dinyatakan sebagai berikut.
Apabila:

1. Sifat S(n) berlaku untuk n = 1, dan
2. Sifat S(n) berlaku untuk n = k + 1 jika sifat S(n) itu berlaku untuk n = k,

maka sifat S(n) berlaku untuk setiap bilangan asli n.

Pembuktian sifat berdasarkan aksioma (asas induksi matematis) itu disebut *pembuktian dengan induksi matematis* atau *pembuktian dengan induksi lengkap.*

Contoh 1.6

Sebagai contoh pembuktian secara induksi matematis disajikan bukti Teorema 1.8 di bawah ini.

Teorema 1.8

Apabila p adalah bilangan real tertentu dan k adalah bilangan asli tertentu, maka $p^{k+n} = p^k \times p^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Bukti

Langkah I

Apabila n = 1, maka $p^{k+n} = p^{k+1} = p^k \times p^1$

Berarti $p^{k+n} = p^k \times p^n$ untuk n = 1.

Langkah II

Diandaikan $p^{k+n} = p^k \times p^n$ untuk n = m

Maka $p^{k+m} = p^k \times p^m$, sehingga

$$
\begin{aligned}
p^{k+(m+1)} &= p^{(k+m)+1} \\
&= p^{k+m} \times p \\
&= (p^k \times p^m) \times p \\
&= p^k \times (p^m \times p) \\
&= p^k \times p^{m+1}
\end{aligned}
$$

Ternyata dengan pengandaian bahwa hubungan itu berlaku untuk n = m, hubungan ini berlaku pula untuk n = m + 1. Jadi, menurut asas induksi matematis, apabila $p \in \mathbf{R}$ dan $k \in \mathbf{N}$, maka $p^{k+n} = p^k \times p^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

E. BILANGAN PRIMA DAN BILANGAN KOMPOSIT

Kita akan menggunakan sifat dari bilangan asli tertentu dalam pembuktian teorema. Oleh karena itu, bilangan asli tertentu itu diberi nama khusus, menurut definisi tersebut.

Definisi 1.12

1. Apabila a, b, dan c adalah bilangan asli sedemikian sehingga $a \times b = c$, maka c disebut *kelipatan dari* b, atau dikatakan bahwa c adalah *bilangan yang habis dibagi dengan* b.
2. Apabila a, b, dan c adalah bilangan asli sedemikian sehingga $a \times b = c$, maka dikatakan bahwa b *merupakan faktor dari* c atau *pembagi dari* c.
3. Apabila ada tepat dua bilangan asli yang merupakan faktor dari bilangan asli c, atau pembagi dari bilangan asli c, maka c disebut bilangan *prima*.

4. Apabila ada lebih dari dua bilangan asli yang merupakan pembagi atau faktor dari bilangan asli p, maka p disebut bilangan *komposit*.
5. Apabila a, b, dan p adalah bilangan asli sedemikian sehingga p merupakan faktor dari a dan juga merupakan faktor dari b, maka p disebut *faktor persekutuan* dari a dan b, atau *pembagi persekutuan* dari a dan b.
6. Apabila a dan b adalah bilangan asli yang tidak mempunyai faktor sekutu positif kecuali faktor 1, maka dua bilangan a dan b itu disebut *sepasang bilangan yang prima relatif*.

Contoh 1.7

a. 24 adalah kelipatan dari 8, karena $3 \times 8 = 24$
b. 6 adalah faktor dari 72 atau pembagi dari 72, karena $12 \times 6 = 72$
c. 7 adalah bilangan prima, karena bilangan asli yang merupakan faktor dari 7 hanya ada 2, yaitu 1 dan 7.
d. 60 adalah bilangan komposit, karena bilangan asli yang merupakan faktor atau pembagi dari 60 lebih dari dua buah, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, dan 60.
e. Bilangan asli 3 merupakan pembagi dari 24 dan juga merupakan pembagi dari 144. Maka 3 disebut *faktor persekutuan* atau *pembagi persekutuan* dari 24 dan 144.

F. BILANGAN GENAP DAN BILANGAN GASAL

Perhatikan

$1 = 0 + 1 = (2 \times 0) + 1$

$2 = 2 \times 1$

$3 = 2 + 1 = (2 \times 1) + 1$

$$
\begin{aligned}
4 = 3 + 1 &= [(2 \times 1) + 1] + 1 \\
&= (2 \times 1) + (1 + 1) \\
&= (2 \times 1) + 2 \\
&= (2 \times 1) + (2 \times 1) \\
&= 2 \times (1 + 1) \\
&= 2 \times 2
\end{aligned}
$$

Berdasarkan fakta tersebut dan Definisi 1.8, bilangan asli dapat dibedakan atas dua jenis, berdasarkan habis tidaknya bilangan itu dibagi dengan 2. Pembedaan ini sangat berguna dalam pembuktian beberapa teorema. Untuk lengkapnya di sini disajikan definisi tentang kedua jenis bilangan asli tersebut.

Definisi 1.13

Bilangan asli yang habis dibagi dengan 2 disebut *bilangan genap*. Bilangan asli yang tidak habis dibagi dengan 2 disebut *bilangan gasal* atau *bilangan ganjil*.

Berdasarkan fakta di atas dan Definisi 1.8, bilangan asli yang bukan bilangan genap pasti merupakan bilangan gasal, dan bilangan asli yang bukan bilangan gasal pasti merupakan bilangan genap.

Berdasarkan Definisi 1.13, maka bilangan asli yang genap dapat dinyatakan sebagai 2m, dengan m bilangan asli. Demikian pula, bilangan asli yang gasal dapat dinyatakan sebagai 2m + 1, dengan m bilangan 0 atau bilangan asli.

Apabila kita bekerja dengan dua bilangan asli genap, tetapi kita tidak mengetahui, atau tidak perlu mengetahui berapa bilangan itu, maka kita dapat menyatakan kedua bilangan itu 2m dan 2n, dengan m dan n bilangan asli.

Apabila kita bekerja dengan dua bilangan asli yang terdiri atas sebuah bilangan genap dan sebuah bilangan gasal, tetapi kita tidak mengetahui, atau tidak perlu mengetahui berapa bilangan itu, maka cukup kalau kita nyatakan kedua bilangan itu sebagai 2m dan 2n + 1 dengan m bilangan asli dan n bilangan asli atau 0.

Apabila kita bekerja dengan dua bilangan asli yang gasal, tetapi kita tidak mengetahui, atau tidak perlu mengetahui berapa bilangan itu, maka cukup kalau kita nyatakan kedua bilangan itu sebagai 2m + 1 dan 2n + 1, dengan m dan n bilangan 0 atau bilangan asli.

Lemma 1.1

1. Jumlah dua bilangan genap merupakan bilangan genap.
2. Jumlah dua bilangan gasal merupakan bilangan genap.
3. Jumlah sebuah bilangan gasal dan sebuah bilangan genap merupakan bilangan gasal.
4. Hasil kali dua bilangan genap merupakan bilangan genap.
5. Hasil kali dua bilangan gasal merupakan bilangan gasal.

6. Hasil kali sebuah bilangan gasal dan sebuah bilangan genap merupakan bilangan genap.

Sebagai latihan, buktikanlah Lemma 1.1!

Lemma 1.2

Apabila p adalah bilangan asli, maka p merupakan bilangan genap *jika dan hanya jika* p^2 merupakan bilangan genap.

Bukti

Misalkan p adalah bilangan asli, sedangkan p^2 merupakan bilangan genap. Ada dua kemungkinan untuk p, yaitu p adalah bilangan ganjil atau p adalah bilangan genap. Apabila p merupakan bilangan ganjil maka p^2 juga merupakan bilangan ganjil, karena $p^2 = p \times p$, sedangkan hasil kali dari dua bilangan ganjil (yang sama atau yang berbeda) merupakan bilangan ganjil. Jadi, apabila p^2 merupakan bilangan genap, maka p juga merupakan bilangan genap. Misalkan p adalah bilangan asli yang genap. Maka p^2 merupakan bilangan genap. (Lemma 1.1 bagian 4).

Lemma 1.3

Apabila p adalah bilangan asli, maka p merupakan bilangan gasal *jika dan hanya jika* p^2 merupakan bilangan gasal.

Sebagai latihan, buktikanlah Lemma 1.3.

G. BEBERAPA SIFAT BILANGAN RASIONAL

Sekarang marilah kita perhatikan sifat-sifat khusus bilangan rasional. Salah satu sifat khusus itu dapat kita rumuskan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.9

Untuk setiap bilangan real a dan b, dengan $b \neq 0$, dan setiap bilangan real m, apabila m bukan 0, maka $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$.

Bukti

Misalkan $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, $m \in \mathbf{R}$, dan $m \neq 0$.

Maka ada $m^{-1} \in \mathbf{R}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{ma}{mb} &= (ma)(mb)^{-1} \\
&= (am)\ (mb)^{-1} = [(am) \times 1] \times (mb)^{-1} \\
&= [(am) \times (b \times b^{-1})] \times (mb)^{-1} \\
&= [(am \times b) \times b^{-1}] \times (mb)^{-1} \\
&= [b^{-1} \times (am \times b)] \times (mb)^{-1} \\
&= b^{-1} \times [(am \times b) \times (mb)^{-1}] \\
&= b^{-1} \times [\{a \times (m \times b)\} \times (mb)^{-1}] \\
&= b^{-1} \times [\{a \times (mb)\} \times (mb)^{-1}] \\
&= b^{-1} \times [a \times \{(mb) \times (mb)^{-1}\}] \\
&= b^{-1} \times [a \times 1] = [a \times 1] \times b^{-1} \\
&= a \times b^{-1} \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

(Selidikilah sifat-sifat mana saja yang telah digunakan di atas untuk memperoleh suatu ruas dari ruas sebelumnya!).

Dari teorema di atas dapat diturunkan sifat-sifat yang dirumuskan sebagai teorema teorema berikutnya.

Definisi 1.14

1. Apabila sebuah bilangan rasional dinyatakan dengan lambang $\frac{a}{b}$, sedangkan a dan b mempunyai faktor persekutuan yang *bukan* 1, maka dikatakan bahwa bilangan rasional itu dinyatakan dalam bentuk yang dapat disederhanakan.
2. Apabila sebuah bilangan rasional dinyatakan dengan lambang $\frac{a}{b}$, sedangkan a dan b adalah pasangan bilangan yang prima relatif, maka dikatakan bahwa bilangan rasional itu dinyatakan dalam bentuk yang tidak dapat disederhanakan.

Contoh 1.8

a. $\frac{24}{60}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{2}{5}$, sehingga dikatakan bahwa $\frac{24}{60}$ senilai dengan $\frac{2}{5}$, atau dinyatakan juga bahwa $\frac{24}{60}$ dan $\frac{2}{5}$ menyatakan bilangan rasional yang sama, dan dapat dituliskan $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

b. $\frac{3}{7}$ tidak dapat disederhanakan.

Lemma 1.4

Apabila a, b, dan c adalah bilangan real, dengan $b \neq 0$ dan $\frac{a}{b} = c$, maka $a = bc$.

***Bukti*:**

Misalkan, a, b, dan c adalah bilangan real, dengan $b \neq 0$ dan $\frac{a}{b} = c$, maka

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1 = a \cdot (b^{-1} \cdot b) \\ &= (a \cdot b^{-1}) \cdot b = c \cdot b \\ &= b \cdot c \\ &= bc \end{aligned}$$

Teorema 1.10

Apabila a, b, dan c adalah bilangan real, dengan $c \neq 0$, maka

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Bukti:

Misalkan a, b, dan c adalah bilangan real, dengan $c \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= (a \cdot c^{-1}) + (b \cdot c^{-1}) \\ &= (a + b) \cdot c^{-1} \\ &= \frac{a + b}{c} \end{aligned}$$

Teorema 1.11.

Apabila a, b, c, dan d adalah bilangan real, dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$, maka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

***Bukti*:**

Misalkan a, b, c, dan d adalah bilangan real, dengan b $\neq$ 0 dan d $\neq$ 0, maka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (ab^{-1}) + (cd^{-1})$$
$$= [(a \times 1) \times b^{-1}] + [(c \times 1) \times d^{-1}]$$
$$= [\{a \times (d \times d^{-1})\} \times b^{-1}] + [\{c \times (b \times b^{-1})\} \times d^{-1}]$$
$$= [\{(a \times d) \times d^{-1}\} \times b^{-1}] + [\{(c \times b) \times b^{-1})\} \times d^{-1}]$$
$$= [(a \times d) \times (d^{-1} \times b^{-1})] + [(c \times b) \times (b^{-1} \times d^{-1})]$$
$$= [(ad) \times (b^{-1} \times d^{-1})] + [(b \times c) \times (b^{-1} \times d^{-1})]$$
$$= [(ad) \times (b^{-1} d^{-1})] + [(bc) \times (b^{-1} d^{-1})]$$
$$= [(ad) + (bc)] \times (b^{-1}d^{-1})$$
$$= (ad + bc) \times (bd)^{-1}$$
$$= \frac{ad + bc}{bd}$$

Teorema 1.12.
Apabila a, b, c, dan d adalah bilangan real, dengan b $\neq$ 0 dan d $\neq$ 0, maka

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Bukti
Misalkan a, b, c, dan d adalah bilangan real, dengan b $\neq$ 0 dan d $\neq$ 0, maka

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = (a \times b^{-1}) \times (c \times d^{-1})$$
$$= [(a \times b^{-1}) \times c] \times d^{-1} = [a \times (b^{-1} \times c)] \times d^{-1}$$
$$= [a \times (c \times b^{-1})] \times d^{-1} = [(a \times c) \times b^{-1})] \times d^{-1}$$
$$= (a \times c) \times (b^{-1} \times d^{-1}) = (ac) \times (b^{-1} d^{-1})$$
$$= (ac) \times (bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

Teorema 1.13

Apabila a dan b adalah bilangan real, dengan b $\neq$ 0, maka $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Bukti
Apabila a dan b adalah bilangan real, dengan b $\neq$ 0, maka

$$-\frac{a}{b} = 0 + \left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$= (0 \times b^{-1}) + \left(-\frac{a}{b}\right) = [(-a + a) \times b^{-1})] + \left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$= [(-a \times b^{-1}) + (a \times b^{-1})] + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b} + \frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{-a}{b} + \left[\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right)\right] = \frac{-a}{b} + 0$$

$$= \frac{-a}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = (-a)(b^{-1})$$

$$= [(-a)(b^{-1})] \times 1 = [(-a) \times (b^{-1})] \times [(-b) \times (-b)^{-1}]$$
$$= [\{(-a) \times (b^{-1})\} \times (-b)] \times (-b)^{-1}$$
$$= [(-a) \times \{(b^{-1}) \times (-b)\}] \times (-b)^{-1}$$
$$= [(-a) \times \{(-b) \times (b^{-1})\}] \times (-b)^{-1}$$
$$= [\{(-a) \times (-b)\} \times (b^{-1})] \times (-b)^{-1}$$
$$= [(a \times b) \times (b^{-1})] \times (-b)^{-1}$$
$$= [a \times \{b \times (b^{-1})\}] \times (-b)^{-1}$$
$$= [a \times 1] \times (-b)^{-1} = a \times (-b)^{-1}$$
$$= \frac{a}{-b}$$

Teorema 1.14
Apabila a dan b adalah bilangan real, dengan a $\neq$ 0 dan b $\neq$ 0, maka

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Bukti:

Misalkan a dan b adalah bilangan real, dengan a $\neq$ 0 dan b $\neq$ 0, maka

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times 1$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times [(ab) \times (ab)^{-1}] = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times \frac{ab}{ab}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times \frac{ab}{ba} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times \left[\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times \frac{a}{b}\right] \times \frac{b}{a}$$

$$= 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Dengan definisi-definisi dan sifat-sifat di atas dapat diselidiki ada tidaknya bilangan rasional yang kuadratnya ditentukan. Salah satu hasilnya dirumuskan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 1.15

Tidak ada bilangan rasional r yang bersifat $r^2 = 2$

Bukti:

Diandaikan ada bilangan rasional r yang bersifat $r^2 = 2$. Tentulah $r \neq 0$, karena $0^2 = 0$ ($\neq 2$). Karena r bilangan rasional, maka ada bilangan asli a dan bilangan bulat $b \neq 0$, yang merupakan pasangan yang prima relatif, sedemikian sehingga $r = \frac{a}{b}$

Terdapatlah

$$2 = r^2 = r \times r$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

Hal ini menunjukkan bahwa a^2 merupakan bilangan genap, sehingga a juga merupakan bilangan genap. Oleh karena itu, a = 2m untuk suatu bilangan asli m. Terdapatlah hubungan

$$2b^2 = a^2 = a \times a$$

$$= (2m) \times (2m)$$

$$= 2 \times [2 \times (m \times m)]$$

$$
\begin{aligned}
b^2 &= 1 \times b^2 = (2^{-1} \times 2) \times b^2 \\
&= 2^{-1} \times (2 \times b^2) = 2^{-1} \times [2 \times \{2 \times (m \times m)\}] \\
&= (2^{-1} \times 2) \times \{2 \times (m \times m)\} = 1 \times \{2 \times (m \times m)\} \\
&= 2 \times (m \times m)
\end{aligned}
$$

Ternyata b^2 juga merupakan bilangan genap, sehingga b juga merupakan bilangan genap.

Hasil di atas menunjukkan bahwa a dan b tidak merupakan sepasang bilangan yang prima relatif. Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa a dan b prima relatif. Karena menimbulkan pertentangan, maka pengandaian di atas harus diingkar. Jadi, *tidak ada bilangan rasional r yang bersifat* $r^2 = 2$.

Untuk membuktikan bahwa tidak ada bilangan rasional r yang bersifat $r^2 = 3$, kita lebih dulu perlu menjelaskan bahwa bilangan asli dapat dibedakan atas tiga golongan, yaitu:

(i) bilangan asli yang merupakan kelipatan dari 3,
(ii) bilangan asli yang sama dengan 1 ditambah kelipatan dari 3, dan
(iii) bilangan asli yang sama dengan 2 ditambah dengan kelipatan dari 3.

Ketiga jenis bilangan asli itu dapat dinyatakan, berturut-turut, dengan lambang 3n, 3n + 1, 3n + 2, dengan n melambangkan sebarang bilangan asli. Selanjutnya kita gunakan sifat-sifat berikut ini.

$$
\begin{aligned}
(3m)^2 &= 3(3m^2) \\
(3m + 1)^2 &= 3(3m^2 + 2m) + 1 \\
(3m + 2)^2 &= 3(3m^2 + 4m + 1) + 1
\end{aligned}
$$

Dengan cara seperti pembuktian teorema di atas dapat diperoleh kontradiksi, sehingga pengandaian adanya bilangan rasional r yang bersifat $r^2 = 3$ itu harus diingkar.

Dengan cara yang mirip dengan cara di atas dapat dibuktikan bahwa tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan 5, 7, 8, 10, 11, dan sebagainya.

Perhatikan:

$$
\begin{aligned}
(2m)^3 &= 8m^3 = 2 \times 4m^3 \\
(2m + 1)^3 &= (2m)^3 + 3(2m)^2 + 3(2m) + 1 \\
&= 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1
\end{aligned}
$$

Dari kedua hasil ini dapat disimpulkan:

1. Apabila k^3 bilangan genap, maka k juga genap.
2. Apabila k^3 bilangan ganjil, maka k juga ganjil.

Dengan dasar ini dan dengan cara yang mirip dengan pembuktian Teorema 1.15, dapat dibuktikan bahwa *tidak ada* bilangan rasional yang pangkat tiganya adalah 2.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dengan induksi matematis buktikan bahwa untuk setiap bilangan real p yang bukan 0, dan untuk setiap bilangan asli m dan n berlaku hubungan $p^m \times p^n = p^{m+n}$
2) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real p yang bukan 0, dan untuk setiap bilangan bulat m dan n berlaku hubungan $p^m \times p^n = p^{m+n}$
3) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional s yang bersifat $s^2 = 3$
4) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional t yang bersifat $t^2 = 6$
5) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional u yang bersifat $u^3 = 3$
6) Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional t yang bersifat $t^3 = 6$
7) Selidiki apakah **N** dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan gelanggang
8) Jelaskan apakah **Q** dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan medan.
9) Misalkan a, b, c, dan d adalah sebarang bilangan bulat dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$. Buktikan bahwa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika ad = bc.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Kerjakan pembuktian dengan memperlakukan dulu m sebagai konstan, kemudian kerjakan pembuktian dengan memperlakukan n sebagai konstan.
2) Jika m negatif, nyatakan m = -k, dan jika n negatif, nyatakan n = -w. Kemudian gunakan hasil dari soal nomor 1.
3) Gunakan sifat bahwa bilangan asli dapat dibedakan atas tiga golongan, yaitu berbentuk 3k, 3k + 1, 3k + 2, dengan k nol atau sebarang bilangan asli.

4) Salah satu cara ialah menggunakan sifat bahwa apabila k adalah bilangan asli, maka:
$(6k)^2$ berbentuk 6m;
$(6k + 1)^2$ berbentuk 6m + 1;
$(6k + 2)^2$ berbentuk 6m + 4;
$(6k + 3)^2$ berbentuk 6m + 3;
$(6k + 4)^2$ berbentuk 6m + 4;
$(6k + 5)^2$ berbentuk 6m + 1;
Langkah pembuktian seperti pada soal nomor 3.
5) Menggunakan sifat bahwa bilangan asli dapat dibedakan atas tiga golongan, yaitu berbentuk 3k, 3k + 1, 3k + 2, dengan k nol atau sebarang bilangan asli; dan apabila k adalah bilangan asli, maka:
$(3k)^3$ berbentuk 3m
$(3k + 1)^3$ berbentuk 3m + 1
$(3k + 2)^3$ berbentuk 3m + 2
6) Gunakan langkah-langkah seperti pada soal nomor 5 dengan memanfaatkan sifat-sifat yang digunakan dalam soal nomor 4.
7) Periksalah dipenuhi tidaknya syarat-syarat gelanggang.
8) Periksalah dipenuhi tidaknya syarat-syarat medan.
9) Misalkan a, b, c, dan d sebarang bilangan bulat dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ akan dibuktikan 2 hal, yaitu:

(i) Jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ maka ad = bc, dan

(ii) Jika ad = bc maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Bukti:

(i) Diketahui $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ atau $ab^{-1} = cd^{-1}$ atau $a \times b^{-1} = c \times d^{-1}$

$$
\begin{aligned}
ad &= (a \times d) \times 1 \\
&= (a \times d) \times (b^{-1} \times b) \\
&= a \times (d \times b^{-1}) \times b \\
&= a \times (b^{-1} \times d) \times b \\
&= (a \times b^{-1}) \times d \times b \\
&= (c \times d^{-1}) \times d \times b \\
&= c \times (d^{-1} \times d) \times b \\
&= c \times 1 \times b
\end{aligned}
$$

$= c \times b = b \times c$
$= bc$

(ii) Diketahui $ad = bc$ atau $a \times d = b \times c$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a \times b^{-1} \\
&= 1 \times a \times b^{-1} \\
&= (d \times d^{-1}) \times a \times b^{-1} \\
&= (d^{-1} \times d) \times a \times b^{-1} \\
&= d^{-1} \times (d \times a) \times b^{-1} \\
&= d^{-1} \times (a \times d) \times b^{-1} \\
&= d^{-1} \times (b \times c) \times b^{-1} \\
&= d^{-1} \times (c \times b) \times b^{-1} \\
&= d^{-1} \times c \times (b \times b^{-1}) \\
&= d^{-1} \times c \times 1 \\
&= d^{-1} \times c = c \times d^{-1} \\
&= cd^{-1} \\
&= \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

RANGKUMAN

Dalam Kegiatan Belajar 2 ini kita telah mempelajari pengertian bilangan rasional dan cara-cara membuktikan sifat-sifat yang berkenaan dengan bilangan rasional. Bilangan rasional ialah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a bilangan bulat dan b bilangan bulat yang bukan nol. Beberapa bilangan asli tertentu tidak mungkin menjadi hasil perpangkatan dari bilangan rasional.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Apabila r $\in$ **Q** dan s $\in$ **Q** sedemikian sehingga r $\times$ s = 0, maka ....
   A. r = 0
   B. s = 0
   C. r = 0 dan s = 0
   D. r = 0 atau s = 0

2) Misalkan diketahui dua pernyataan ….
   P1: Pada gelanggang (K, +, $\times$), untuk setiap a $\in$ K, b $\in$ K, dan c $\in$ K, apabila c $\neq$ 0, dan ac = bc, maka a = b
   P2: Pada gelanggan (K, +, $\times$), untuk setiap a $\in$ K dan b $\in$ K, apabila ab = 0 maka a = 0 atau b = 0.
   Dapat disimpulkan bahwa ….
   A. benar salahnya P1 tidak ada hubungannya dengan benar salahnya P2, dan benar salahnya P2 tidak ada hubungannya dengan benar salahnya P1
   B. apabila P1 benar, maka P2 benar, tetapi tidak sebaliknya
   C. apabila P2 benar, maka P1 benar, tetapi tidak sebaliknya
   D. P1 ekuivalen atau setara dengan P2

3) Diketahui himpunan bilangan **T** = {0, 1, 2} dan operasi penjumlahan dan perkalian pada **T** yang didefinisikan dengan tabel berikut.

Penjumlahan

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Perkalian

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

   Dapat disimpulkan bahwa ….
   A. penjumlahan dan perkalian tersebut tidak asosiatif
   B. perkalian tidak distributif terhadap penjumlahan
   C. (**T**, +, $\times$) merupakan gelanggang, tetapi tidak merupakan medan
   D. (**T,** +, $\times$) merupakan medan

4) Untuk setiap bilangan asli p dan q, apabila tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya adalah p dan tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya q, maka ....
   A. pasti tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya adalah pq
   B. untuk pasangan p dan q tertentu, ada bilangan rasional yang pangkat empatnya adalah p + q
   C. pasti tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya adalah p + q
   D. pasti tidak ada bilangan rasional yang pangkat empatnya adalah pq

5) Diketahui himpunan bilangan **F** = {0, 1, 2, 3} dengan operasi pada **F** yang didefinisikan dengan tabel berikut.

Penjumlahan

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Perkalian

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dapat disimpulkan bahwa ….
   A. untuk setiap $a \in$ **E**, $b \in$ **E**, $c \in$ **E**, apabila $c \neq 0$ dan $ac = bc$, maka $a = b$
   B. penjumlahan dan perkalian tersebut tidak asosiatif
   C. (**E**, +, ×) *merupakan gelanggang*, tetapi tidak merupakan *medan*
   D. (**E**, +, ×) merupakan *medan*

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\textit{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D. karena a * 0 dan 0 * a = 0 + a – 0 = a
   Jadi, unsur identitas adalah 0. Untuk mencari invers dari 5 kita harus menyelesaikan persamaan berikut.
   $5 * b = 0$
   $5 + b - 5b = 0$
   $b = 5^{-1} = \frac{5}{4}$
   Jadi $5^{-1} = \frac{5}{4}$
2) A. karena semua syarat medan dipenuhi.
3) B. karena daftar perkalian simetris, berarti perkalian bersifat komutatif, tetapi $r \times (r + s) = r \times p = r$ dan $(r \times r) + (r \times s) = p + q = p$
   Jadi, perkalian ($\times$) tidak distributif terhadap penjumlahan (+).
4) D. karena semua syarat medan dipenuhi. Unsur netral terhadap (+) adalah (0,0) dan unsur satuan terhadap ($\times$) adalah (1,0)
5) C. operasi + bersifat aosiatif. Operasi $\times$ tidak bersifat distributif terhadap +. Oleh karena itu K bukan gelanggang

Tes Formatif 2

1) D. karena yang lain bertentangan dengan sifat yang telah kita buktikan.
2) A. karena pembuktian salah satu pernyataan itu tidak menggunakan pernyataan yang lainnya.
3) D. karena semua syarat medan dipenuhi.
   Unsur netral terhadap (+) adalah 0
   Invers 0 terhadap (+) adalah 0
   Invers 1 terhadap (+) adalah 2
   Invers 2 terhadap (+) adalah 1
   Unsur satuan terhadap ($\times$) adalah 1
   Invers 1 terhadap ($\times$) adalah 1
   Invers 2 terhadap ($\times$) adalah 2
4) B. karena yang lain dapat ditunjukkan salahnya dengan contoh kontra.
   Contoh kontra:

A. Ambil p = 2 dan q = 32, maka pq = 64. Bilangan rasional yang kuadratnya 64 adalah 8.
C. Ambil p = 10 dan q = 6, maka p + q = 16. Bilangan rasional yang kuadratnya 16 adalah 4
D. Ambil p = 2 dan q = 8, maka pq = 16. Bilangan rasional yang pangkat empatnya 64 adalah 2

5) C. tidak setiap unsur yang bukan nol mempunyai invers terhadap perkalian.
Unsur netral terhadap (+) adalah 0
Invers 0 terhadap (+) adalah 0
Invers 1 terhadap (+) adalah 3
Invers 2 terhadap (+) adalah 2
Invers 3 terhadap (+) adalah 1

Daftar Pustaka

*Bartle, R.G. 1976. *The elements of real analysis,* (2^{nd} ed.). New York: John Wiley & Sons.

Sawyer, W.W. 1959. *A concrete approach to abstract algebra*. San Francisco, CA: W.H. Freeman and Company.

Whiteshitt, J.E. 1973. *Principles of modern algebra,* (2^{nd}. ed.). Reading. MA: Addison-Wesley.