MODUL 1

Himpunan

Dra. Kusrini, M.Pd.

PENDAHULUAN

Dalam Modul 1 ini ada 3 kegiatan belajar, yaitu Kegiatan Belajar 1, Kegiatan Belajar 2, dan Kegiatan Belajar 3. Dalam Kegiatan Belajar 1, Anda akan mempelajari relasi, macam-macam relasi, fungsi, dan macam-macam fungsi. Dalam Kegiatan Belajar 2, Anda akan mempelajari himpunan finit, infinit, "denumerable", "countable", dan "non-denumerable". Dalam Kegiatan Belajar 3, Anda akan mempelajari urutan parsial, himpunan terurut parsial, elemen pertama dan terakhir, elemen minimal dan maksimal, batas bawah dan batas atas, serta infimum dan supremum.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat memahami relasi, fungsi, jenis himpunan berdasarkan korespondensi satu-satu, dan himpunan terurut parsial beserta elemen-elemennya.

Secara khusus Anda diharapkan dapat:

1. mengidentifikasi suatu relasi;
2. menentukan relasi refleksif, simetris, anti-simentris, atau transitif dari suatu relasi yang diketahui;
3. mengidentifikasi suatu fungsi;
4. menentukan fungsi satu-satu atau onto dari suatu fungsi yang diketahui;
5. mengidentifikasi suatu fungsi konstan;
6. mengidentifikasi suatu fungsi identitas;
7. menentukan suatu himpunan merupakan himpunan finit atau infinit;
8. menentukan suatu himpunan merupakan himpunan "denumerable" atau tidak;
9. menentukan suatu himpunan merupakan himpunan "countable" atau tidak;
10. mengidentifikasi dua himpunan yang ekivalen;
11. mengidentifikasi suatu relasi urutan parsial;

12. menentukan elemen pertama dan terakhir pada suatu himpunan terurut parsial;
13. menentukan elemen minimal dan maksimal pada suatu himpunan terurut parsial;
14. menentukan batas atas dan batas bawah suatu himpunan bagian dari himpunan terurut parsial;
15. menentukan infimum dan supremum dari suatu himpunan bagian dari himpunan terurut parsial.

Untuk mempelajari Modul 1 ini, Anda harus memulai dari Kegiatan Belajar 1, dilanjutkan dengan Kegiatan Belajar 2, baru Kegiatan Belajar 3 secara berurutan karena secara matematis, konsep yang ada pada Kegiatan Belajar 1 mendasari konsep yang ada pada Kegiatan Belajar 2, dan konsep yang ada pada Kegiatan Belajar 2 mendasari konsep yang ada pada Kegiatan Belajar 3.

Manfaat mempelajari Modul 1 ini adalah Anda dapat memahami relasi, fungsi, jenis himpunan berdasarkan korespondensi satu-satu, himpunan terurut parsial beserta elemen-elemennya, dan sebagai dasar mempelajari konsep-konsep yang ada pada modul-modul berikutnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Relasi dan Fungsi

Pada Modul 1, Kegiatan Belajar 1 ini akan dibahas mengenai relasi, macam-macam relasi, fungsi, dan macam-macam fungsi.

A. RELASI

Anda sudah mengenal relasi dan fungsi waktu di SMP. Adapun pengertian relasi di SMP adalah sebagai berikut.

Relasi dari himpunan X ke himpunan Y adalah perkawanan atau kaitan antara anggota-anggota himpunan X ke himpunan Y. Tidak harus semua anggota himpunan X mempunyai kawan anggota Y dan sebaliknya. Selain itu, jika ada anggota X yang mempunyai kawan anggota Y, kawannya tidak harus tunggal, begitu juga sebaliknya.

Selain dengan pengertian relasi seperti tersebut di atas, relasi dapat juga didefinisikan seperti berikut ini.

1. Definisi 1.1

Suatu relasi R terdiri atas:

a. himpunan A,
b. himpunan B,
c. kalimat terbuka P(x, y) dengan P(a, b) bernilai salah atau bernilai benar untuk sebarang $(a, b) \in A \times B$.

Selanjutnya, relasi R dikatakan suatu relasi dari A ke B dinyatakan dengan R = (A, B, P (x, y)), atau $R : A \to B$ dengan sifat P (x, y).

Jika untuk $(a, b) \in A \times B$, P(a, b) bernilai benar, maka ditulis a R b dibaca a berelasi R dengan b. Sebaliknya, jika P(a, b) tidak benar, maka ditulis a $\not R$ b, dibaca a tidak berelasi R dengan b.

Jika R = (A, B, P(x, y)) suatu relasi, maka P(x, y) mendefinisikan suatu relasi dari A ke B. Jika A = B, maka P(x, y) mendefinisikan suatu relasi di A, atau R adalah suatu relasi di A.

Selanjutnya, P(x, y) dapat juga dinyatakan dengan xRy, yang dibaca: x berelasi R dengan y.

a. *Contoh 1.1*

A = Himpunan bapak-bapak
B = Himpunan ibu-ibu
P(x, y) = xRy dibaca : x adalah suami dari y.
R = (A, B, P (x, y)) merupakan suatu relasi.

Jika a $\in$ A dan b $\in$ B, maka aRb, dibaca “a adalah suami dari b”. Dari aRb yang sama dengan “a adalah suami dari b”, maka dapat dikatakan bahwa relasi R = “adalah suami dari”.

b. *Contoh 1.2*

N = Himpunan bilangan asli

R : N $\rightarrow$ N dengan xRy menyatakan “x adalah pembagi dari y”, maka R merupakan suatu relasi.
3R12 menyatakan 3 adalah pembagi dari 12
5R15 menyatakan 5 adalah pembagi dari 15
$4 \not R\ 7$ menyatakan 4 bukan pembagi 7
$9 \not R\ 13$ menyatakan 9 bukan pembagi 13.

c. *Contoh 1.3*

A = Himpunan bapak-bapak
B = Himpunan ibu-ibu

R : A $\rightarrow$ B dengan xRy menyatakan “x adalah pembagi dari y”.
R bukan suatu relasi, karena untuk (a, b) $\in$ A $\times$ B, aRb tidak mempunyai arti.

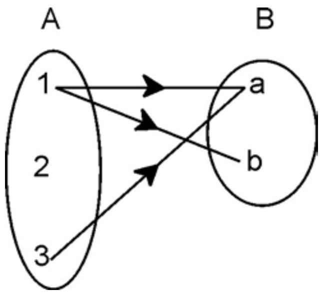
2. Definisi 1.2

Suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan bagian dari A x B.
Jadi, jika a $\in$ A, b $\in$ B, dan berlaku aRb dapat ditulis sebagai (a, b) $\in$ R.

a. *Contoh 1.4*

A = {1, 2, 3} dan B = {a, b}. Relasi R : A $\rightarrow$ B dinyatakan dengan R = {(1, a), (1, b), (3, a)}.

Relasi R tersebut dapat juga dinyatakan dengan diagram seperti berikut.

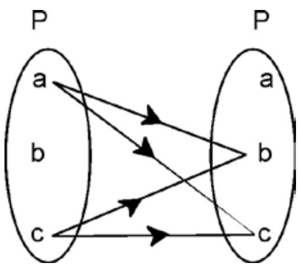


Dapat dilihat bahwa:
1Ra, 2$\not R$ b, 3Ra, 3$\not R$ b, atau
(1,a) $\in$ R, (2,b) $\notin$ R,
(3,a) $\in$ R, (3,b) $\notin$ R.

b. *Contoh 1.5*

P = {a, b, c}. Relasi R : P $\rightarrow$ P atau relasi R di P dinyatakan dengan R = {(a,b), (a,c), (c,c), (c,b)}.

Diagram panahnya adalah sebagai berikut.



Dari diagram dapat dilihat bahwa:
(a, a) $\notin$ R, (b, a) $\notin$ R, (c, c) $\in$ R,
(a, b) $\in$ R, atau a$\not R$ a, b$\not R$ a, cRc, aRb.

3. Definisi 1.3

Setiap relasi R : A $\rightarrow$ B mempunyai relasi invers R^{-1} : B $\rightarrow$ A yang dinyatakan dengan R^{-1} terdiri atas pasangan berurutan yang didapatkan dari pasangan berurutan anggota R dengan jalan menukar tempat setiap pasangan berurutan dari elemen-elemennya.

Contoh 1.6

A = {1, 2, 3} dan B = {a, b}. Relasi R : A $\rightarrow$ B didefinisikan dengan R = {(1,a), (1,b), (3, a)}.

Relasi inversinya R^{-1} = {(a,1), (b,1), (a,3)}.

B. MACAM-MACAM RELASI

1. Definisi 1.4

Misal relasi R : A $\rightarrow$ A.

a. Relasi R disebut relasi refleksif bila dan hanya bila $\forall$ a $\in$ A berlaku (a, a) $\in$ R, atau aRa.

b. Relasi R disebut relasi simetris bila dan hanya bila jika (a, b) $\in$ R maka (b, a) $\in$ R, atau jika aRb maka bRa, untuk a, b $\in$ A.

c. Relasi R disebut relasi anti-simetris bila dan hanya bila jika (a, b) $\in$ R dan (b, a) $\in$ R maka a = b, atau jika aRb dan bRa maka a = b, untuk a, b $\in$ A.

d. Relasi R disebut relasi transitif bila dan hanya bila jika (a, b) $\in$ R dan (b, c) $\in$ R maka (a, c) $\in$ R, atau jika aRb dan bRc maka aRc, untuk a, b, c $\in$ A.

a. Contoh 1.7

N = Himpunan bilangan asli.

Relasi R di N didefinisikan dengan xRy yaitu: "x kurang dari atau sama dengan y". Apakah R merupakan relasi refleksif, simetris, anti-simetris, atau transitif ?

Penyelesaian

1) Relasi R merupakan relasi refleksif, karena untuk bilangan x $\in$ N selalu kurang dari atau sama dengan x itu sendiri. Atau, $\forall$ x $\in$ N, berlaku x $\leq$ x.
2) Relasi R bukan relasi simetris, karena untuk x, y $\in$ N, jika x $\leq$ y maka y $\not\leq$ x.
3) Relasi R merupakan relasi anti simetris, karena untuk x, y $\in$ N, jika x $\leq$ y dan y $\leq$ x maka x = y.

4) Relasi R merupakan relasi transitif, karena untuk x, y, z $\in$ N, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

b. Contoh 1.8

A = Himpunan segi tiga sebidang.

Relasi R : A $\rightarrow$ A dengan xRy menyatakan "x sebangun dengan y", untuk x, y $\in$ A. Perhatikan bahwa x, y $\in$ A berarti x dan y adalah segitiga-segitiga yang sebidang.

1) R merupakan relasi refleksif, karena untuk setiap segitiga tentu sebangun dengan dirinya sendiri. Atau, x $\in$ A, berlaku x sebangun dengan x sendiri.
2) R merupakan relasi simetris, karena untuk x, y $\in$ A, jika x sebangun dengan y maka y sebangun dengan x. Atau, jika xRy maka yRx.
3) R bukan relasi anti-simetris, karena untuk x, y $\in$ A, jika x sebangun dengan y dan y sebangun dengan x, maka belum tentu x = y.
4) R merupakan relasi transitif, karena untuk x, y, z $\in$ A, jika x sebangun dengan y dan y sebangun dengan z, maka x sebangun dengan z.

2. Definisi 1.5

Misal R relasi dari A ke A.

Relasi R disebut relasi ekuivalensi jika:

a. R refleksif, yaitu $\forall$ a $\in$ A, berlaku aRa
b. R simetris, yaitu untuk setiap a, b $\in$ A, jika aRb maka bRa
c. R transitif, yaitu untuk setiap a, b, c $\in$ A, jika aRb dan bRc maka aRc.

Contoh 1.9

Pada contoh 1.8, karena R merupakan relasi refleksif, simetris dan transitif, maka R merupakan relasi ekuivalensi.

C. FUNGSI

1. Definisi 1.6

Suatu fungsi f dari A ke B adalah suatu perkawanan dari tiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

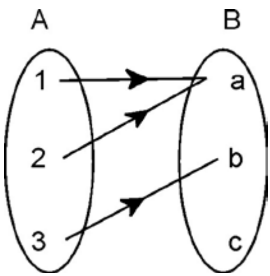
Ditulis $f : A \to B$, dan dibaca : "f adalah fungsi dari A ke B".

Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dan B disebut daerah kawan (*codomain*) dari fungsi f. Jika $a \in A$, maka elemen $b \in B$ yang merupakan pasangan (kawan) dari a disebut bayangan (*image*) dari a, dan dinyatakan dengan $f(a) = b$. Himpunan anggota-anggota B yang merupakan bayangan dari anggota-anggota A, yaitu f(A), disebut daerah hasil (*range*).

Notasi:
Daerah asal dari f ditulis dengan notasi D_f
Daerah kawan dari f ditulis dengan notasi C_f
Daerah hasil dari f ditulis dengan notasi R_f

a. *Contoh 1.10*

A = {1, 2, 3} dan B = {a, b, c}. Fungsi $f : A \to B$ didefinisikan seperti diagram berikut.



Perhatikan bahwa tiap elemen di A mempunyai pasangan elemen di B dan pasangannya tunggal.
Daerah asal dari $f = D_f = A$
Daerah kawan dari $f = C_f = B$.

f(1) = a ; f(2) = a ; f(3) = b. Jadi daerah hasil dari $f = D_f = \{a, b\}$.

b. *Contoh 1.11*

R = Himpunan bilangan real

Fungsi $f : R \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2$

$D_f = R$; $C_f = R$; $R_f = R^+ \cup \{0\}$

2. **Definisi 1.7**

   Misal fungsi f : A → B

a. Fungsi f disebut fungsi satu-satu (*injektif*) bila dan hanya bila untuk setiap x, y ∈ A, jika x ≠ y maka f(x) ≠ f(y), atau bila untuk setiap x, y ∈ A dengan f(x) = f(y) maka x = y.

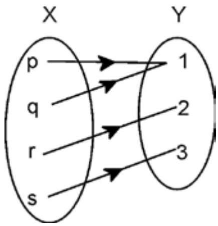
b. Fungsi f disebut fungsi onto (*surjektif*) bila dan hanya bila f(A) = B, atau tiap anggota B merupakan bayangan dari paling sedikit satu anggota A.

c. Fungsi f disebut fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) bila dan hanya bila f merupakan fungsi satu-satu dan onto.

a. Contoh 1.12

X = {p, q, r, s} dan Y = {1, 3, 5}

Fungsi f : X → Y didefinisikan seperti diagram berikut.



Apakah fungsi f merupakan:

a. fungsi satu-satu?

b. fungsi onto?

Penyelesaian

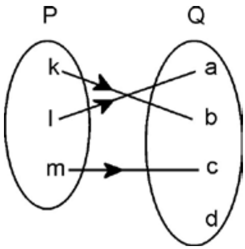
a. Fungsi f bukan fungsi satu-satu, karena ada p, q ∈ X dengan p ≠ q tetapi f(p) = f(q) = 1.

b. Fungsi f merupakan fungsi onto, karena setiap anggota Y merupakan bayangan dari paling sedikit satu anggota X.

b. Contoh 1.13

P = {k, l, m} dan Q = {a, b, c, d}

Fungsi f : P → Q didefinisikan seperti berikut.

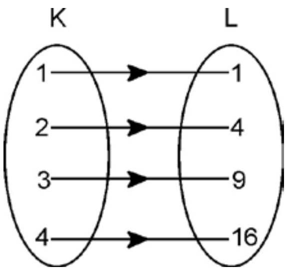


Fungsi f merupakan fungsi satu-satu, karena untuk $x, y \in P$ jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$.
Fungsi f bukan fungsi onto, karena ada $d \in Q$ dan d tidak merupakan bayangan dari suatu anggota P.

c. *Contoh 1.14*

$K = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $L = \{1, 4, 9, 16\}$.

Fungsi $f : K \rightarrow L$ didefinisikan seperti berikut.



Fungsi f merupakan fungsi satu-satu dan sekali gus merupakan fungsi onto. (buktikan sendiri). Jadi, fungsi f merupakan fungsi bijektif atau korespondensi 1-1.

3. Definisi 1.8

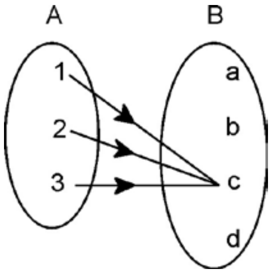
a. Fungsi $f : A \rightarrow A$ disebut fungsi identitas jika $f(x) = x$ untuk setiap $x \in A$.

b. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi konstan jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $f(a) = b$, dengan $b \in B$.

a. *Contoh 1.15*

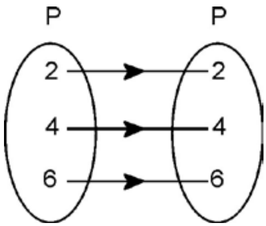
1) $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan seperti berikut.



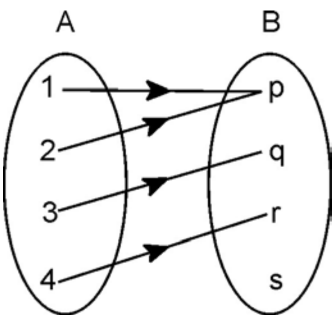
Karena untuk setiap x ∈ A berlaku f(x) = c, maka f merupakan fungsi konstan.

2) P = {2, 4, 6}
Fungsi f : P → P didefinisikan seperti berikut.



Karena untuk setiap x ∈ P berlaku f(x) = x, maka f merupakan fungsi identitas.

Seperti pada relasi, maka fungsi juga dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan.
Pada contoh 12, untuk X = {p, q, r, s} dan Y = {1, 3, 5} fungsi f juga dapat dinyatakan sebagai: f = {(p, 1), (q, 1), (r, 2), (s, 3)}.
Pada contoh 15 b, fungsi f dapat dinyatakan sebagai : f = {(2, 2), (4, 4), (6, 6)}
Perhatikan fungsi f : A → B dengan A = {1, 2, 3, 4} dan B = {p, q, r, s} berikut ini.

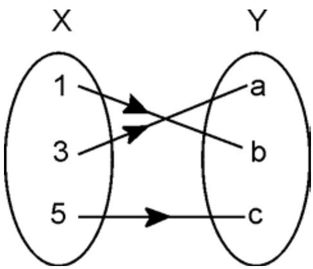


f(1) = p, f(2) = p,
f(3) = q, f(4) = r.
Dari f(1) = p dan f(2) = p, berarti bahwa p merupakan *image* dari 1 dan 2.

Sebaliknya, 1 dan 2 dikatakan merupakan peta (*image*) invers dari p. Hal ini disajikan dengan $f^{-1}(p) = \{1, 2\}$, dan $f^{-1}(p)$ dibaca: f invers dari p. Dengan cara yang sama didapatkan $f^{-1}(q) = \{3\}$, $f^{-1}(r) = \{4\}$ dan $f^{-1}(s) = \varnothing$ (karena tidak ada anggota A yang *image*-nya s). Selanjutnya dikatakan bahwa: {1, 2} merupakan *invers image* dari p,
{3} merupakan *invers image* dari q, dan
{4} merupakan *invers image* dari r.
Secara singkat, jika fungsi $f : A \to B$ dan $b \in B$, maka $f^{-1}(b) = \{x \in A : f(x) = b\}$.
Jika fungsi f dari A ke B, atau $f : A \to B$, maka $f^{1} : B \to A$ merupakan fungsi *invers* jika f^{-1} memenuhi persyaratan sebagai fungsi, karena ada kemungkinan f^{-1} bukan suatu fungsi.

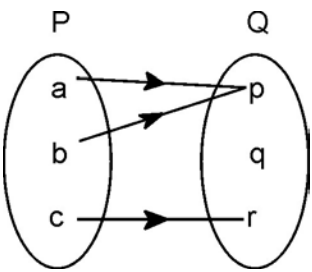
b. *Contoh 1.16*

1) $X = \{1, 3, 5\}$ dan $Y = \{a, b, c\}$.



Fungsi $f : X \to Y$ dinyatakan dengan diagram berikut
Karena $f^{-1} : Y \to X$ memenuhi syarat fungsi, maka f^{-1} merupakan
fungsi, yang disebut fungsi *invers* dari f.

2) $P = \{a, b, c\}$ dan $Q = \{p, q, r\}$.
Fungsi $f : P \to Q$ didefinisikan seperti berikut.



$f^{-1} : Q \to P$ tidak merupakan suatu fungsi, karena ada $q \in Q$ yang tidak punya pasangan di P.

LATIHAN 1

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Relasi R pada X didefinisikan dengan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2,2), (3, 1), (4, 4)\}$.
   Apakah relasi R merupakan relasi refleksif?
2) Jika relasi R pada $X = \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan seperti pada soal nomor 1), apakah R merupakan relasi simetris?
3) Jika relasi R pada $X = \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan seperti pada soal nomor 1), apakah R merupakan relasi anti-simetris?
4) Jika relasi R pada $X = \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan seperti pada soal nomor 1), apakah R merupakan relasi transitif?
5) $P = \{a, b, c, d\}$. Relasi R pada P dinyatakan dengan
   $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c), (a, d), (c, b), (d, a), (d, d)\}$.
   Apakah relasi R merupakan relasi:
   a. refleksif?
   b. simetris?
6) Jika relasi R pada $P = \{a, b, c, d\}$ didefinisikan seperti pada soal nomor 5), apakah relasi R merupakan relasi:
   a. anti-simetris?
   b. transitif?
7) S = Himpunan segitiga yang sebidang.
   Relasi R pada S didefinisikan dengan xRy yaitu “x kongruen dengan y” atau xRy menyatakan $x \cong y$.
   Apakah R merupakan relasi ekuivalensi?
8) $A = \{k, l, m, n\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$. Fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan $f = \{(k, 2), (1, 4), (m, 4), (n, 6)\}$.
   Apakah fungsi f merupakan fungsi satu-satu (*injektif*)?
9) Jika himpunan A dan B beserta fungsi f dari A ke B didefinisikan seperti pada soal nomor 8), apakah fungsi f merupakan fungsi onto (*surjektif*)?
10) Misal $N = \{1, 2, 3, ...\}$ dan $G = \{2, 4, 6, ...\}$.
    Fungsi $f : N \rightarrow G$ dinyatakan dengan $f(x) = 2x, \forall x \in N$.
    Apakah f merupakan fungsi *bijektif* atau korespondensi satu-satu?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) R tidak refleksif, karena ada $3 \in X$, tetapi $(3, 3) \notin R$.
2) R simentris, karena jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.
3) R tidak anti-simetris, karena ada $(1, 3) \in R$ dan $(3,1) \in R$ tetapi $1 \neq 3$. Atau karena ada 1R3 dan 3R1 tetapi $1 \neq 3$.
4) R tidak transitif, karena ada $(3, 1) \in R$ dan $(1, 3) \in R$ tetapi $(3, 3) \notin R$.
5) a. R refleksif, karena $\forall x \in P, (x, x) \in R$.
   b. R simetris, karena jika $(x, y) \in R$ maka $(y, x) \in R$.
6) a. R tidak anti-simetris, karena ada $(b,c) \in R$ dan $(c,b) \in R$ tetapi $b \neq c$
   b. R transitif, karena jika $(x, y) \in$ dan $(y, z) \in$ maka $(x, z) \in R$.
7) a. R refleksif, karena untuk setiap segitiga $x \in S$, $x \cong x$.
   b. R simetris, karena untuk setiap $x, y \in S$, jika $x \cong y$ maka $y \cong x$
   c. R transitif, karena untuk setiap $x, y, z \in S$, jika $x \cong y$ dan $y \cong z$ maka $x \cong z$.

   Karena R merupakan relasi refleksif, simetris dan transitif, maka R merupakan relasi ekuivalensi.
8) Fungsi $f : A \to B$ tidak satu-satu, karena ada $l, m \in A$ dengan $l \neq m$ tetapi $f(l) = f(m) = 4$.
9) Fungsi f merupakan fungsi onto, karena $\forall x \in B$, x merupakan image dari paling sedikit satu anggota A.
10) a. Fungsi $f : N \to G$ merupakan fungsi satu-satu (1-1), karena untuk setiap $x, y \in N$, jika $x \neq y$ maka $2x \neq 2y$, berarti bahwa $f(x) \neq f(y)$, atau jika $f(x) = f(y)$ yaitu $2x = 2y$, maka $x = y$.
   b. Fungi $f : N \to G$ merupakan fungsi onto, karena untuk setiap $p \in G$, tentu $p = 2n$, dengan $n \in N$ dan $n = p/2$, sehingga $f(n) = p$.

   Karena f merupakan fungsi satu-satu dan onto maka f merupakan fungsi bijektif (korespondensi satu-satu).

RANGKUMAN

1. Misalnya R relasi dari A ke B (dapat ditulis $R : A \to B$).
   Untuk $(a, b) \in A \times B$, jika a berelasi R dengan b ditulis aRb atau $(a, b) \in R$, tetapi jika a tidak berelasi dengan b ditulis $a \not R b$ atau $(a, b) \notin R$.
2. Setiap relasi $R : A \to B$ mempunyai relasi invers $R^{-1} : B \to A$ yang dinyatakan dengan $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.
3. Relasi $R : A \to A$ dikatakan R relasi pada A.
4. Misal R relasi pada A.
   a. R relasi refleksif bhb. $\forall\, a \in A$, aRa atau $(a, a) \in R$.
   b. R relasi simetris bhb. untuk setiap $a, b \in A$, jika aRb maka bRa.
   c. R relasi anti-simetris bhb. untuk setiap $a, b \in A$, jika aRb dan bRa maka $a = b$.
   d. R relasi transitif bhb. untuk setiap $a, b, c \in A$, jika aRb dan bRc maka aRc.
5. R merupakan relasi ekuivalensi pada A bhb. R relasi refleksif, simetris dan transitif.
6. Suatu fungsi $f : A \to B$ adalah perkawanan dari setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Daerah asal dari $f = D_f = A$, daerah kawan dari $f = C_f = B$, dan daerah hasil dari $f = R_f = f(A)$. Jika $b \in B$ merupakan pasangan $a \in A$, maka $b = f(a)$ disebut *image* (bayangan) dari a oleh f.
7. Misalnya fungsi $f : A \to B$.
   a. Fungsi f disebut fungsi satu-satu (1-1) bhb. untuk setiap $x, y \in A$, jika $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$, atau jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.
   b. Fungsi f disebut fungsi onto bhb. untuk setiap $x \in B$, x merupakan image dari paling sedikit satu anggota A.
   c. Fungsi f disebut bijektif (korespondensi satu-satu) bhb. fungsi f merupakan fungsi satu-satu dan onto.
   d. Fungsi f disebut fungsi identitas bhb. $\forall\, x \in A$, $f(x) = x$.
   e. Fungsi f disebut fungsi konstan bhb. $\forall\, x \in A$, $f(x) = b$, untuk suatu $b \in B$.
8. Jika fungsi $f: A \to B$, maka untuk $b \in B$,
   $f^{-1}(b) = \{x \in A : f(x) = b\}$.

Jika $\{p, q\} = f^{-1}(b)$ maka $\{p, q\}$ disebut *invers image* dari b.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misal relasi R : A $\rightarrow$ A dengan A = {a, b, c, d}. Relasi R = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)} adalah relasi ....
   A. refleksif tetapi tidak simetris
   B. simetris tetapi tidak refleksif
   C. anti-simetris dan bukan refleksif
   D. refleksif dan simetris

2) Berikut ini yang merupakan relasi transitif dari relasi R : B $\rightarrow$ B dengan B = Himpunan bilangan prima kurang dari 10 adalah ....
   A. R = {(2,3), (3,2), (3,5)}
   B. R = {(7,5), (5,2), (7,2)}
   C. R = {(2,3), (3,5), (5,7)}
   D. R = {(1,2), (2,3), (3,1)}

3) Misal relasi R : M $\rightarrow$ M dengan M = {2, 3, 5}.
   Yang merupakan relasi refleksif dan simetris pada relasi R berikut adalah ....
   A. R = {(2,2), (2,3), (3,2), (5,5)}
   B. R = {(2,2), (2,3), (3,3), 3,2), (5,5)}
   C. R = {(2,2), (3,2), (2,3), (3,5), (5,3)}
   D. R = {(2,2), (2,3), (3,3), (3,2)}

4) Pada himpunan garis-garis yang sebidang, untuk sebarang garis x, y yang sebidang, jika relasi R didefinisikan sebagai xRy adalah "x tegak lurus y", maka R merupakan relasi ….
   A. simetris tetapi tidak refleksif dan tidak transitif
   B. anti-simetris dan transitif
   C. refleksif tetapi tidak transitif
   D. transitif dan simetris tetapi tidak refleksif

5) Misal K adalah himpunan segitiga. Untuk sebarang segitiga x dan y, jika relasi R didefinisikan dengan xRy adalah " x sebidang dengan y". maka R merupakan relasi ….
   A. transitif tetapi tidak refleksif
   B. refleksif dan transitif
   C. refleksif dan simetris tetapi tidak transitif
   D. simetris tetapi tidak transitif

6) Misal fungsi f fungsi dari himpunan A ke himpunan A, dan didefinisikan dengan $f(x) = 5x + 2$, $\forall x \in A$, A himpunan bilangan asli. Fungsi f merupakan fungsi ….
   A. satu-satu
   B. onto
   C. satu-satu dan onto
   D. tidak satu-satu dan tidak onto

7) Misal g fungsi dari himpunan bilangan bulat B ke himpunan bilangan asli A dan g(x) didefinisikan sebagai $g(x) = |x|$, untuk setiap bilangan bulat x. Fungsi g adalah fungsi ....
   A. satu-satu tetapi tidak onto
   B. onto tetapi tidak satu-satu
   C. tidak satu-satu dan tidak onto
   D. satu-satu dan onto

8) Berikut ini yang merupakan fungsi satu-satu pada himpunan bilangan bulat B adalah ….
   A. $f(x) = x^2$, $\forall x \in B$
   B. $f(x) = \frac{2}{x}$, $\forall x \in B$
   C. $f(x) = 3x + 2$, $\forall x \in B$
   D. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, $\forall x \in B$

9) Jika N = himpunan bilangan asli dan K = himpunan bilangan bulat non positif, dan fungsi $f : N \to K$ maka yang merupakan fungsi onto berikut ini adalah ….
   A. $f(x) = - x$, $\forall x \in N$
   B. $f(x) = x - 1$, $\forall x \in N$
   C. $f(x) = - (x – 1)$, $\forall x \in N$
   D. $f(x) = - x + 1$, $\forall x \in N$

10) A = {1, 2, 3} dan B {a, b, c}. Yang merupakan fungsi bijektif $f : A \to B$ berikut ini adalah ….
   A. f = {(1, b), (2, a), (3, c)}
   B. f = {(1, b), (2, b), (3, b)}
   C. f = {(1, a), (2, b), (3, b)}
   D. f = {(1, a), (1, b), (2, c)}

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Himpunan Finit, Infinit, dan Keluarga Himpunan

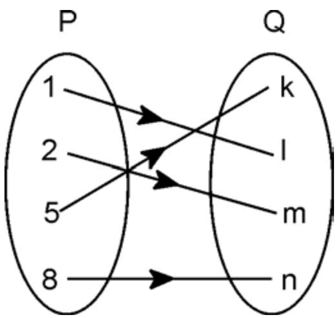
A. HIMPUNAN FINIT DAN INFINIT

1. Definisi 1.9

Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B, yang dinyatakan dengan $A \sim B$, bila dan hanya bila ada fungsi $f : A \rightarrow B$ yang satu-satu dan onto (bijektif).

a. Contoh 1.17

$P = \{1, 2, 5, 8\}$ dan $Q = \{k, l, m, n\}$. Fungsi $f : P \rightarrow Q$ didefinisikan seperti berikut.



Perhatikan bahwa f merupakan fungsi satu-satu dan onto.
Jadi P ekuivalen dengan Q atau $P \sim Q$

b. Contoh 1.18

$A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ dan $B = \{x \in R : 0 \leq x \leq 5\}$.
Fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan sebagai $f(x) = 3x + 2$.

Fungsi f merupakan fungsi satu-satu, karena untuk setiap $x, y \in A$, jika $x \neq y$ maka $3x + 2 \neq 3y + 2$. Berarti $f(x) \neq f(y)$.

Fungsi f merupakan fungsi onto, karena untuk setiap $b \in B$, ada
$x = (b – 2)/3$ sehingga $f(x) = f((b-2)/3) = b$.

Karena f merupakan fungsi satu-satu dan onto maka $A \sim B$.

Relasi ekuivalen pada himpunan merupakan relasi ekuivalensi, karena:

a. refleksif, yaitu $A \sim A$, untuk setiap himpunan A,
b. simetris, yaitu untuk himpunan A dan B, jika $A \sim B$ maka $B \sim A$,
c. transitif, yaitu untuk himpunan A, B, dan C, jika $A \sim B$ dan $B \sim C$ maka $A \sim C$.

2. Definisi 1.10

Suatu himpunan X disebut himpunan infinit bila dan hanya bila X ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya. Himpunan tidak infinit disebut himpunan finit.

Perlu diingat bahwa, yang dimaksud dengan himpunan bagian sejati adalah himpunan bagian yang tidak sama dengan himpunannya. Jadi jika P himpunan bagian sejati dari Q, maka $P \subset Q$ tetapi $P \neq Q$.

a. Contoh 1.19

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan asli $N = \{1, 2, 3, ...\}$ merupakan himpunan yang infinit!

Penyelesaian

Misal himpunan $G = \{2, 4, 6, ...\}$ G himpunan bagian sejati dari N. Atau $G \subset N$ tetapi $G \neq N$.

Dibuat fungsi $f : N \rightarrow G$ dengan $f(x) = 2x$.

Fungsi f merupakan fungsi satu-satu, karena untuk setiap $x, y \in N$, jika $2x \neq 2y$, yang berarti bahwa $f(x) \neq f(y)$.

Fungsi f merupakan fungsi onto, karena untuk setiap $g \in G$, ada $n = g/2$ sehingga $f(n) = f(g/2) = g$.

Karena f fungsi satu-satu dan onto, maka $N \sim G$ atau $G \sim N$.

Karena $G \sim N$ dan G himpunan bagian sejati dari N, maka N merupakan himpunan yang infinit.

Contoh 1.20

Tunjukkan bahwa himpunan $A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 5\}$ infinit!.

Penyelesaian

Misalnya B = $\{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$. B merupakan himpunan bagian sejati dari A. Dibentuk fungsi $f : B \rightarrow A$ dengan $f(x) = 5x$.

Fungsi f merupakan fungsi satu-satu, karena untuk setiap $x, y \in B$, jika $x \neq y$ maka $5x \neq 5y$, yang berarti bahwa $f(x) \neq f(y)$.

Fungsi f merupakan fungsi onto karena untuk setiap $a \in A$, ada $b = a/5$ sehingga $f(b) = f(a/5) = a$.

Karena f merupakan fungsi satu-satu dan onto maka $B \sim A$ atau $A \sim B$.

Karena $A \sim B$ dan B himpunan bagian sejati dari A, maka A merupakan himpunan yang infinit.

b. Contoh 1.21

P = {1, 3, 5, 7}. Himpunan P merupakan himpunan finit karena tidak mungkin ada himpunan bagian sejati dari P yang ekuivalen dengan P.

B. HIMPUNAN KELUARGA

1. Definisi 1.11

a. Himpunan D disebut himpunan "denumerable" bila dan hanya bila D ekuivalen dengan himpunan bilangan asli N.
b. Himpunan X disebut himpunan terhitung ("countable") bila hanya bila himpunan X finit atau "denumerable".
c. Himpunan Y disebut himpunan yang "non-denumerable" bila dan hanya bila Y inifinit dan tidak "denumerable".

a. Contoh 1.22

G = {2, 4, 6, ...}

Dari contoh 3, $G \sim N$. Jadi G merupakan himpunan yang "denumerable", dan oleh karena itu juga "countable".

b. Contoh 1.23

B = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Dibuat $f : N \rightarrow B$, N = himpunan bilangan asli, dengan

$f(x) = -(x/2)$, untuk x genap

$\quad\;\; = (x + 1)/2$, untuk x ganjil

Fungsi f merupakan fungsi satu-satu, karena untuk setiap x, y $\in$ N, jika x $\neq$ y, maka:
untuk x, y genap, - (x/2) $\neq$ - (y/2), sehingga f(x) $\neq$ f(y)
untuk x, y ganjil, - (x+1)/2 $\neq$ (y+1)/2, sehingga f(x) $\neq$ f(y)

Fungsi f merupakan fungsi onto karena untuk b $\in$ B, jika:
b $\geq$ 0, maka ada n = 2b – 1 $\in$ N sehingga f(n) = f(2b - 1) = b
b < 0, maka ada m = -2b $\in$ N sehingga f(m) = f(-2b) = b.

Karena f merupakan fungsi satu-satu dan onto maka N ~ B.

Karena N ~ B atau B ~ N, maka B merupakan himpunan yang "denumerable", dan oleh karena itu B "countable".

c. *Contoh 1.24*
X = {2, 4, 6, 8}.

Himpunan X merupakan himpunan finit, jadi juga merupakan himpunan "countable".

d. *Contoh 1.25*
A = {x: 0 $\leq$ x $\leq$ 5}.
Dari contoh 4, A merupakan himpunan infinit.

Karena A tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan asli N, maka A tidak "denumerable".

Himpunan A infinit dan tidak "denumerable", maka A merupakan himpunan "non-denumerable".

Jika diketahui suatu himpunan, maka ada kemungkinan bahwa himpunan tersebut semua anggotanya merupakan suatu himpunan.

Suatu himpunan yang semua anggotanya merupakan himpunan disebut keluarga himpunan atau kelas himpunan.

e. *Contoh 1.26*
Misal P = {{a, b}, {c}, {b, c}}. Karena semua anggota P merupakan himpunan, maka P merupakan suatu keluarga himpunan.

Misal Q = {a, {b}, c, {b, c}}. Q bukan suatu keluarga himpunan, karena ada a, c $\in$ Q yang tidak merupakan himpunan.

Misalnya A = {1, 2, 3}. Himpunan bagian dari A adalah: $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.

Jika Y = { {1}, {2}, {1, 3}, {2, 3}}, untuk Y merupakan keluarga himpunan dari himpunan bagian A, atau keluarga dari himpunan bagian A.

Jika X = {$\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}, maka X merupakan suatu keluarga himpunan dari semua himpunan bagian A. Keluarga dari semua himpunan bagian A ini disebut himpunan kuasa dari A, yang dinotasikan dengan 2^A.
Jadi, di sini X = 2^A.

f. *Contoh 1.27*

D = {p, q, r, s}.
Himpunan kuasa dari D = 2^D = {$\varnothing$ {p}, {q}, {r}, {s}, {p, q}, {p, r},
{p, s} {q, r}, {q, s} {r, s}, {p, q, r}, {p, q, s}, {p, r, s}, {q, r, s}, {p, q, r, s}}.
Jika A suatu keluarga himpunan dengan A = {A_1, A_2, A_3, ..., A_n}, maka himpunan A dapat dinyatakan sebagai A = $\{A_i\}_{i \in I}$, I = himpunan indeks, I = {1, 2, 3, ..., n} dan

$$\cup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$
$$\cap_i \in I\ A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n,$$

Contoh 1.28
A = {{a, b, c}, {b, c}, {c}}.
A_1 = {a, b, c}; A_2 = {b, c}; A_3 = {c}.

A dapat dinyatakan sebagai A = $\{A_i\}_{i \in I}$; I = {1, 2, 3}.

$$\cup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c\}.$$
$$\cap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{c\}.$$

LATIHAN 2

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misal X = {p, q, r, s, t, u} dan Y = {1, 4, 9, 16, 25, 36}. Tunjukkan bahwa X ~ Y!
2) Jika G = {2, 4, 6, ... } dan B = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} maka tunjukkanlah bahwa G ~ B!
3) Apakah P = {2, 4, 6, …, 1000}. Tunjukkan bahwa P tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan asli!
4) Apakah K = {2, 4, 6, …, 1.000.000} merupakan himpunan finit? Jelaskan!
5) Tunjukkan bahwa himpunan K = {3, 6, 9, 12, ... } merupakan himpunan infinit!
6) Jika M = {1/2, 1/3,1/4, ... } maka M merupakan himpunan yang "denumerable". Tunjukkan!
7) H = {x $\in$ R: 2 < x < 12}. Tunjukkan bahwa H merupakan himpunan yang "non-denumerable"!
8) P = {x, y, z}. Apakah himpunan kuasa dari P merupakan himpunan yang "countable"? Jelaskan!
9) Apakah himpunan bilangan asli mempunyai himpunan bagian yang "denumerable"?
10) Apakah ada himpunan yang "countable" mempunyai himpunan bagian yang "denumerable"? Jelaskan!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Karena X dan Y finit, dan n(X) = n(Y), maka dapat dibuat korespondensi satu-satu antara X dan Y. Jadi X ~ Y
2) Telah dijelaskan pada contoh 6 bahwa G ~ N, N = himpunan bilangan asli. Pada contoh 7, telah ditunjukkan bahwa N ~ B. Karena transitif, G ~ N dan N ~ B, maka G ~ B.

3) Antara P dan himpunan bilangan asli tidak dapat dibuat korespondensi satu-satu. Jadi, P tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan asli.
4) K himpunan finit, karena K tidak ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya, atau, tidak dapat dibuat korespondensi satu-satu antara himpunan K dengan himpunan bagian sejatinya.
5) Misal L = {9, 12, 15, ... }, maka $L \subset K$ dan $L \neq K$
   Dibentuk fungsi $f : K \rightarrow L$ dengan $f(x) = x + 6$.
   Fungsi f merupakan fungsi satu-satu dan onto (dapat dibuktikan sendiri). Jadi, $K \sim L$.
   Karena $K \sim L$ dan L merupakan himpunan bagian sejati dari K maka K merupakan himpunan yang infinit.
6) Dibentuk fungsi $f : N \rightarrow M$, N = himpunan bilangan asli, dengan $f(x) = 1/(x + 1)$. Fungsi f ini merupakan fungsi satu-satu dan onto (dapat dibuktikan sendiri). Oleh karena itu $M \sim N$, maka M merupakan himpunan yang "denumerable".
7) Misal $A = \{x \in R: 0 \leq x \leq 5, x \text{ real}\}$. Dibentuk fungsi $f : A \rightarrow H$ dengan $f(x) = 2x + 2$. Fungsi f ini satu-satu dan onto. Jadi $A \sim H$. Karena A "non-denumerable" (contoh 9) maka H merupakan himpunan yang "non-denumerable".
8) Himpunan kuasa dari P = 2^P = {∅, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {y, z}, {x, y, z}}. Karena himpunan kuasa dari P finit, maka "countable".
9) Himpunan bilangan asli mempunyai himpunan bagian yang "denumerable", misalnya T = {2, 3, 4, 5, ...}.
10) Himpunan bilangan asli adalah himpunan yang "countable", dan menurut soal nomor 9), himpunan bilangan asli mempunyai himpunan bagian yang "denumerable".

RANGKUMAN

1. Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B, dinyatakan dengan $A \sim B$, bhb. ada fungsi $f : A \rightarrow B$ yang satu-satu dan onto.
2. Relasi ekuivalen pada himpunan merupakan relasi ekuivalensi.

3. Himpunan X disebut himpunan infinit bhb. X ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya. Himpunan yang tidak infinit disebut himpunan finit.
4. Himpunan D disebut himpunan “denumerable” bhb. D ekivalen dengan himpunan bilangan asli N.
5. Himpunan X disebut himpunan terhitung (*countable*) bhb. X finit atau “denumerable”.
6. Himpunan Y disebut himpunan “non-denumerable” bhb. Y infinit dan tidak “denumerable”.
7. Suatu himpunan yang semua anggotanya merupakan himpunan disebut keluarga himpunan atau kelas himpunan.
8. Jika A suatu himpunan, maka himpunan kuasa dari A, yang dinyatakan dengan 2A adalah keluarga himpunan dari semua himpunan bagian A.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Yang ekuivalen dengan himpunan A = {a, e, i, o, u} adalah ....
   A. B = Himpunan huruf dalam abjad
   B. C = Himpunan bilangan yang anggotanya 5
   C. D = {1, 2, 3, 4, 5}
   D. E = Himpunan huruf konsonan

2) Himpunan berikut yang tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan bulat adalah ....
   A. Himpunan bilangan genap
   B. Himpunan bilangan asli
   C. Himpunan bilangan real antara 0 dan 1
   D. Himpunan bilangan kelipatan 3

3) Berikut ini yang merupakan himpunan non *denumerable* adalah ….
   A. Himpunan bilangan bulat
   B. Himpunan bilangan asli
   C. Himpunan bilangan real antara 1 dan 2
   D. Himpunan bilangan yang berbentuk a/b, dengan a, b bilangan bulat, b tidak sama dengan nol, b= a + 1.

4) Yang merupakan himpunan yang "countable" adalah ….
   A. Himpunan huruf vokal
   B. Himpunan bilangan real
   C. Himpunan bilangan real antara 0 dan 1
   D. Himpunan bilangan real positif

5) Jika H = {-1, -2, -3, ... } dan P = {1, 1/2, 1/3, 1/4 ... } maka fungsi $f : H \to P$ yang dapat menunjukkan bahwa $H \sim P$ adalah ….
   A. f(x) = -1/x
   B. f(x) = 1/x
   C. f(x) = -1/(x-1)
   D. f(x) = 1/(x-1)

6) P = {2, 4, 6, ….}.
   Untuk menunjukkan bahwa P infinit, dan agar $P \sim Q$, maka himpunan Q berikut ini yang sesuai adalah ....
   A. Q = {1, -2, 3, ... }
   B. Q = {0, 2, 4, 6, ... }
   C. Q = {-2, -4, -6, ... }
   D. Q = {4, 8, 12, ... }

7) Himpunan K berikut ini yang merupakan himpunan yang tidak "denumerable" adalah ….
   A. K = {x real: x > 0}
   B. K = {x prima: x: $0 \leq x \leq 20$}
   C. K = {... , -4, -2, 0, 2, 4, ...}
   D. K = {8, 10, 12, ... }

8) B = {x real: -2 < x < 0} merupakan himpunan ….
   A. "countable"
   B. "denumerable"
   C. tidak "countable"
   D. "countable" tetapi tidak "denumerable"

9) Misal A = {x real: 0<x<1}. Himpunan yang ekuivalen dengan himpunan A adalah ….
   A. Himpunan bilangan bulat
   B. Himpunan bilangan asli
   C. Himpunan bilangan kelipatan 2
   D. Himpunan bilangan real antara 0 dan 1000

10) H = {1, 3, 5}. 2^H = himpunan kuasa dari H $\cup$ $_iH_i$, dengan $H_i \in 2^H$ adalah ....
A. {{1, 3, 5}}
B. {1, 3, 5}
C. {{1}, {3}, {5}}
D. { $\emptyset$, {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}}

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{JumlahJawabanyangBenar}}{\text{JumlahSoal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Himpunan Terurut Parsial

DEFENISI HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

1. Definisi 1.12

Suatu urutan parsial dalam himpunan A adalah suatu relasi R pada A yang bersifat.

a. Refleksif, yaitu $\forall$ a $\in$ A, (a, a) $\in$ R atau aRa.
b. Anti-simetris, yaitu untuk setiap a, b $\in$ A, jika (a, b) $\in$ R dan (b, a) $\in$ R maka a = b, atau jika aRb dan bRa maka a = b.
c. Transitif, yaitu untuk setiap a, b, c $\in$ A, jika (a, b) $\in$ R dan (b, c) $\in$ R maka (a, c) $\in$ R, atau jika aRb dan bRc maka aRc.

Selanjutnya, jika relasi R pada himpunan A mendefinisikan suatu urutan parsial di A, maka untuk (a, b) $\in$ R dinyatakan dengan a $\leq$ b, yang dibaca "a mendahului (merendahi) b".

a. Contoh 1.28

Misal A suatu keluarga himpunan. Relasi R didefinisikan dengan xRy adalah "x adalah himpunan bagian dari y" atau x $\subset$ y.

R refleksif, karena untuk setiap himpunan x, x $\subset$ x.

R anti-simetris, karena untuk setiap x, y $\in$ A, jika x $\subset$ y dan y $\subset$ x maka x = y.

R transitif, karena untuk setiap x, y, z $\in$ A, jika x $\subset$ y dan y $\subset$ z maka x $\subset$ z.

Karena memenuhi ketiga syarat, maka R merupakan relasi urutan parsial pada himpunan A.

b. Contoh 1.29

N = Himpunan bilangan asli.

Relasi R didefinisikan dengan xRy adalah "x kurang dari atau sama dengan y" atau ditulis x $\leq$ y.

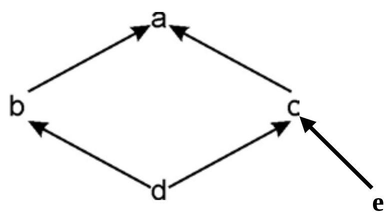
Relasi R merupakan relasi urutan parsial, karena:

1) R refleksif, yaitu untuk $\forall$ x $\in$ N, x $\leq$ x.
2) R anti-simetris, yaitu untuk setiap x, y $\in$ N, jika x $\leq$ y dan y $\leq$ x maka x = y.
3) R transitif, yaitu untuk setiap x, y, z $\in$ N, jika x $\leq$ y dan y $\leq$ z maka x $\leq$ z.

Relasi $\leq$ (kurang dari atau sama dengan) pada himpunan bilangan disebut urutan natural.

c. *Contoh 1.30*

P = {a, b, c, d, e}. Relasi R pada himpunan P dinyatakan dengan diagram berikut. R merupakan urutan parsial di P dengan cara berikut.



x $\leq$ y (dibaca x mendahului/merendahi y) jika x = y atau x ke y dengan mengikuti tanda anak panah ke atas.

Pada diagram:

d $\leq$ c, e $\leq$ c, d $\leq$ b, b $\leq$ a, c $\leq$ a.

Harus diingat bahwa notasi $\leq$ dibaca mendahului atau merendahi.

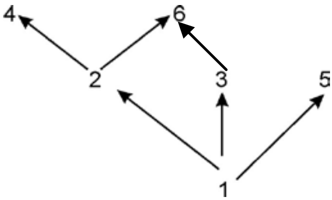
Untuk selanjutnya, urutan parsial pada suatu himpunan dapat digambarkan dengan diagram, sepanjang memungkinkan untuk digambar.

d. *Contoh 1.31*

K = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Relasi R pada himpunan K didefinisikan dengan xRy adalah “x pembagi dari y”.

R merupakan urutan parsial, yang dapat disajikan dengan diagram berikut ini.



1 merupakan pembagi dari 1, 2, 3, dan 5.
2 merupakan pembagi dari 2, 4, dan 6.
3 merupakan pembagi dari 3 dan 6, dan 5 merupakan pembagi dari 5 sendiri.

Karena berlaku sifat transitif, 1 pembagi dari 2 dan 2 pembagi dari 6, maka 1 pembagi dari 6. Begitu juga 1 merupakan pembagi dari 4.

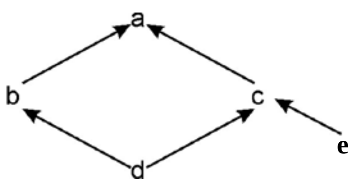
2. **Definisi 1.13**

Suatu himpunan A bersama-sama dengan suatu relasi parsial tertentu R di A disebut himpunan terurut parsial.
Notasi: (A, R) atau (A, $\leq$)
Notasi berikut ini, juga sering digunakan dalam himpunan terurut parsial.
b > a = a < b dan a $\neq$ b, dibaca a murni mendahului b atau a murni merendahi b.
b $\geq$ a = a $\leq$ b, dibaca b mengatasi a
b > a = a < b, dibaca b murni mengatasi a.

Dua elemen a dan b dari himpunan terurut parsial A disebut tidak dapat dibandingkan atau tidak komparabel jika a $\npreceq$ b dan b $\npreceq$ a.

a. *Contoh 1.32*

Dari contoh 3, P = {a, b, c, d, e} dengan urutan parsial sebagai berikut.



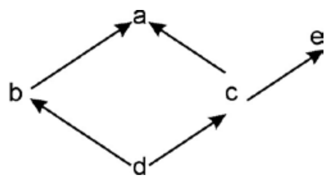
d murni mendahului b, atau
b murni mengatasi d
Jadi d < b atau b > d

Tetapi, d juga mendahului b atau b mengatasi d. Jadi d $\leq$ b atau b $\geq$ d. e mengatasi e sendiri, tetapi e tidak murni mengatasi e sendiri. Selanjutnya d dan e merupakan dua elemen yang tidak dapat dibandingkan (*komparable*).

Jika suatu relasi R di A merupakan relasi refleksif, anti-simetris dan transitif, maka relasi invers R^{-1} juga refleksif, anti-simentris dan transitif. Dengan kata lain, jika R mendefinisikan suatu urutan parsial di A, maka R^{-1} juga mendefinisikan suatu urutan parsial di A, yang disebut urutan invers.

b. *Contoh 1.33*

Dari contoh 1.32, P = {a, b, c, d, e}.
Urutan inversnya R^{-1} dapat dinyatakan sebagai berikut.



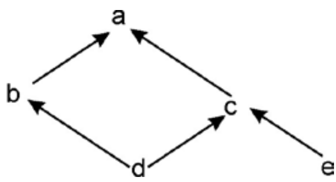
Terlihat bahwa R^{-1} yang disajikan dengan diagram tersebut merupakan suatu urutan parsial.

Misal R suatu urutan parsial pada himpunan A, atau (A, R) suatu himpunan terurut parsial. Himpunan B merupakan himpunan bagian dari himpunan A. Atau B $\subset$ A. Urutan parsial R di A menjadi urutan parsial R’ di B dengan cara seperti berikut.

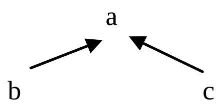
Jika a, b $\in$ B, maka a $\leq$ b sebagai elemen dari A bila dan hanya bila a $\leq$ b sebagai elemen dari B. Selanjutnya, (B, R’) dengan kondisi tersebut dinamakan himpunan bagian dari himpunan terurut parsial (A, R).

c. *Contoh 1.34*

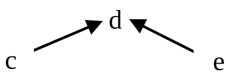
P = {a, b, c, d, e} terurut parsial seperti berikut.



Misal himpunan Q = {a, b, c} dengan urutan parsial seperti berikut.



Himpunan Q dengan urutan parsial seperti ini merupakan himpunan bagian dari himpunan terurut P, karena $Q \subset P$ dan relasi pada Q juga berlaku pada (P, R). Misal himpunan K = {c, d, e} dengan urutan parsial seperti berikut.



Himpunan K = {c, d, e} dengan urutan seperti ini bukan himpunan bagian dari himpunan terurut P meskipun $K \subset P$, karena relasi pada K tidak berlaku pada himpunan terurut (P, R).

3. **Definisi 1.14**

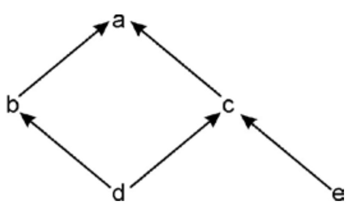
Misal A himpunan terurut parsial.

a. Elemen $a \in A$ disebut elemen pertama dari A bila dan hanya bila $\forall\, x \in A, a \leq x$. Atau a mendahului setiap elemen di A.

b. Elemen $b \in A$ disebut elemen terakhir dari A bila dan hanya bila $\forall\, x \in A, x \leq b$. Atau b mengatasi setiap elemen di A.

a. Contoh 1.35

P = {a, b, c, d, e} terurut parsial seperti berikut.



Elemen a merupakan elemen terakhir, karena a mengatasi setiap elemen di P. Ingat bahwa $a \geq a$ atau a mengatasi a sendiri. P dengan urutan tersebut tidak mempunyai elemen pertama, karena tidak ada elemen P yang mendahului setiap elemen di P.

b. *Contoh 1.36*

Pada N = himpunan bilangan asli, dengan urutan natural (kurang dari atau sama dengan), 1 merupakan elemen pertama di N, dan tidak ada elemen terakhirnya.

c. *Contoh 1.37*

$A = \{x : 0 < x < 1, x \text{ real}\}$ terurut dengan "$x \leq y$".

A tidak mempunyai elemen pertama dan tidak mempunyai elemen terakhir.

Jika (A, R) himpunan terurut parsial, maka ada kemungkinan A mempunyai elemen pertama atau tidak. Begitu juga ada kemungkinan A mempunyai elemen terakhir atau tidak. Jika A mempunyai elemen pertama, maka paling banyak A mempunyai satu elemen pertama. Begitu juga dengan elemen terakhir.

Jika a elemen pertama dan b elemen terakhir dalam A, maka a menjadi elemen terakhir dan b menjadi elemen pertama dalam urutan invers di A.

4. Definisi 1.15

Misal A himpunan terurut parsial.

a. Suatu elemen $a \in A$ disebut elemen maksimal bila dan hanya bila jika $a \leq x$ (a mendahului x) maka $a = x$.

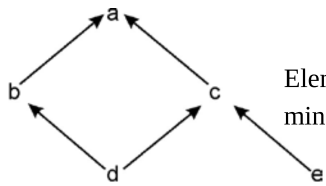
Atau, a elemen maksimal di A bila dan hanya bila tidak ada elemen di A yang murni mengatasi a.

b. Suatu elemen $b \in A$ disebut elemen minimal bila dan hanya bila jika $x \leq b$ (x mendahului B) maka $b = x$.

Atau, b elemen minimal di A bila dan hanya bila tidak ada elemen di A yang murni mendahului b.

a. *Contoh 1.38*

P = {a, b, c, d, e} dengan urutan seperti berikut.

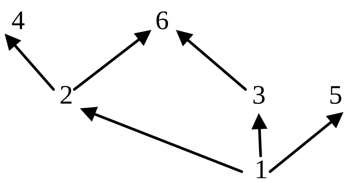


Elemen d dan e merupakan elemen-elemen minimal karena tidak ada elemen di A yang murni mendahului d maupun e.

Elemen a merupakan elemen maksimal, karena tidak ada elemen di A yang murni mengatasi a.

b. *Contoh 1.39*

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dengan urutan “x pembagi dari y”.



Elemen 1 adalah elemen minimal di B, karena tidak ada elemen di B yang murni mendahului 1. Elemen 4, 5, dan 6 merupakan elemen-elemen maksimal, karena tidak ada elemen di B yang murni mengatasi 4, 5, dan 6.

c. *Contoh 1.40*

N = {1, 2, 3, ... } dengan urutan natural (kurang dari atau sama dengan}. 1 adalah elemen pertama yang sekaligus juga merupakan elemen minimal, tetapi tidak ada elemen terakhir maupun elemen maksimal.

Perhatikan bahwa, untuk himpunan terurut parsial A berlaku sifat-sifat seperti berikut.

1) Jika x merupakan elemen pertama, maka x juga merupakan elemen minimal dan x merupakan satu-satunya elemen minimal di A. Begitu juga jika y elemen terakhir, maka y juga elemen maksimal dan merupakan satu-satunya elemen maksimal di A.

2) Jika A finit, maka A paling sedikit mempunyai satu elemen minimal dan paling sedikit mempunyai satu elemen maksimal. Sedangkan jika A infinit, A mungkin tidak mempunyai elemen minimal atau elemen maksimal.

5. Definisi 1.16

Misi B merupakan himpunan bagian dari himpunan terurut parsial A.

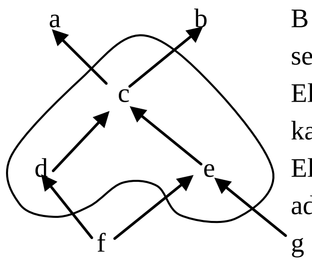
a. Elemen $p \in A$ disebut batas bawah dari B bila dan hanya bila $\forall\ x \in B$, $p \leq x$ (p mendahului setiap elemen di B). Jika p batas bawah dan p mengatasi batas bawah dari B yang lain, maka p disebut batas bawah terbesar atau infimum dari B, yang dinotasikan dengan inf (B).

b. Elemen $q \in A$ disebut batas atas dari B bila dan hanya bila $\forall\ x \in B$, $x \leq q$ (q mengatasi setiap elemen di B).

Jika q batas atas dan q mendahului batas atas dari B yang lain, maka q disebut batas atas terkecil atau supremum dari B, yang dinotasikan dengan sup (b).

Contoh 1.41

A = {a, b, c, d, e, f, g} terurut sebagai berikut.



B = {c, d, e} himpunan bagian dari A, terurut seperti pada diagram.
Elemen f merupakan batas bawah dari B, karena f mendahului setiap elemen di B.
Elemen g bukan batas bawah dari B, karena ada $d \in B$ dan g tidak mendahului d.

Elemen c merupakan batas atas dari B, karena c mengatasi setiap elemen di B. Begitu juga dengan a dan b, juga merupakan batas atas dari B.

Perhatikan bahwa batas bawah maupun batas atas dari B tidak harus merupakan elemen dari B.

Karena batas bawah dari B hanya f, maka f merupakan batas bawah terbesar dari B, atau infimum dari B atau, inf (B) = f. Batas atas dari B adalah c, a, dan b. Elemen c merupakan batas atas dari B yang mendahului batas atas yang lain (yaitu a dan b). Jadi c merupakan batas atas terkecil dari B, atau supremum dari B atau sup (B) = c.

6. Definisi 1.17

Suatu himpunan terurut A dikatakan *similar* dengan himpunan terurut B yang dinyatakan dengan $A \sim B$, bila dan hanya bila ada fungsi $f : A \to B$ yang satu-satu dan onto sehingga untuk sebarang elemen $x, y \in A$, $x < y$ bila dan hanya bila $f(x) < f(y)$. Atau, ada fungsi $f : A \to B$ yang satu-satu dan onto sehingga untuk $x, y \in A$, x murni mendahului y bila dan hanya bila f(x) murni mendahului f(y).

Selanjutnya, fungsi f disebut *mapping similaritas* dari A ke B.

a. Contoh 1.42

A = {1, 2, 6, 8} terurut dengan “x adalah pembagi dari y” dan B = {a, b, c, d} terurut seperti pada diagram berikut.

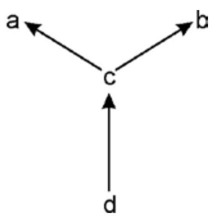
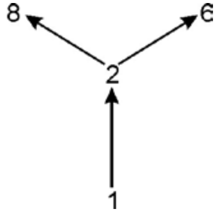
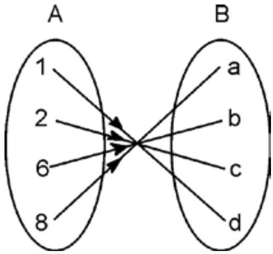


Diagram dari A adalah:



$A \approx B$, karena ada fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan dengan diagram berikut merupakan fungsi satu-satu dan onto yang melestarikan urutan. Jadi f merupakan *mapping similaritas*.



Perhatikan bahwa g = {(1, d), (2, c), (6, b), (8, a)} juga merupakan *mapping similaritas* (mengapa?).

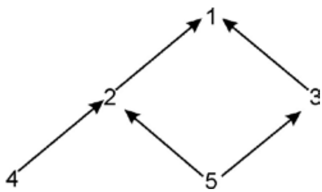
b. Contoh 1.43

N = {1, 2, 3, ... } dan M = {-1, -2, -3, ... } keduanya dengan urutan natural. N tidak similar dengan M. Karena jika ada f : N $\rightarrow$ M *mapping similar*, maka $\forall$ a $\in$ N, jika 1 $\leq$ a maka f(1) $\leq$ f(a), $\forall$ f(a) $\in$ M. Karena M tidak mempunyai elemen pertama maka f tidak akan ada.

LATIHAN 3

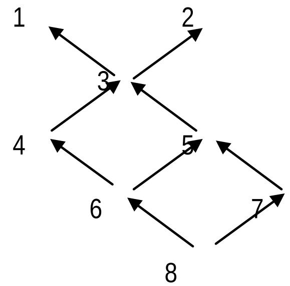
Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) X = { 2, 4, 6, 8, 10}. Relasi R didefinisikan dengan xRy sebagai x faktor dari y. Apakah R merupakan urutan parsial?
2) Dari soal nomor 1, apakah (X,R) merupakan himpunan terurut parsial?
3) A = {1, 2, 3, 4, 5} terurut seperti diagram berikut.
   Carilah elemen minimal dan elemen maksimal dari A!

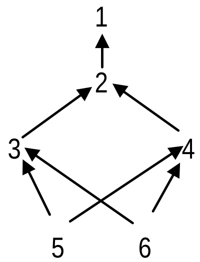


4) Dari soal nomor 1, carilah elemen pertama dan elemen terakhir dari A.

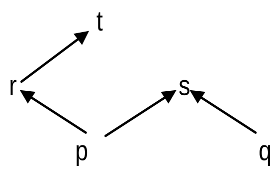
5) B = {2, 3, 4, ..., 9, 10} terurut dengan “x pembagi y”. Carilah elemen minimal , maksimal , pertama, dan terakhir dari B!
6) K = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} dan L = {4, 5, 6} terurut seperti pada diagram berikut. Carilah batas bawah dan batas atas dari L!



7) Dari soal nomor 5, carilah infimum dan supremum dari L!
8) M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan N = {2, 3, 4} terurut seperti berikut. Carilah batas atas dan batas bawah dari N!



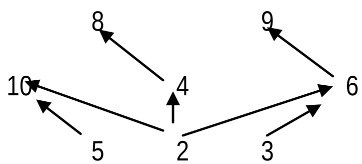
9) Dari soal nomor 7, carilah infimum dan supremumnya!
10) A = {2, 3, 4, 6, 8} yang terurut dengan “x pembagi dari y”.
B = {p, q, r, s, t} dengan urutan seperti berikut.



Apakah himpunan A similar dengan himpunan B?

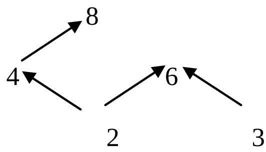
Petunjuk Jawaban Latihan 3

1) R merupakan urutan parsial, karena R memenuhi:
   a) refleksif, karena untuk setiap x elemen X berlaku xRx, atau x faktor dari x.
   b) Anti simetris, karena jika x faktor dari y dan y faktor dari x maka x = y
   c) transitif, karena 2 faktor dari 4 dan 4 faktor dari 8 maka 2 faktor dari 8
2) Karena R merupakan relasi urutan parsial, maka (X,R) merupakan himpunan terurut parsial.
3) a) Elemen minimum dari A : 4 dan 5
   b) Elemen maksimum dari A : 1
4) a) Elemen pertama dari A : tidak ada
   b) Elemen terakhir dari A : 1
5) Diagramnya:

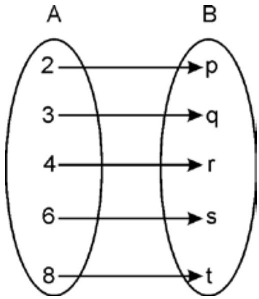


   a) Elemen minimum dari B : 2, 3, 5, 7.
   b) Elemen maksimum dari B : 7, 8, 9, 10.
   c) Elemen pertama dari B : tidak ada.
   d) Elemen terakhir dari B : tidak ada
6) a) Batas bawah dari L : 6 dan 8
   b) Batas atas dari L : 1, 2, dan 3
7) a) Inf (L) = 6
   b) Sup (L) = 3
8) a) Batas bawah dari N : 5 dan 6
   b) Batas atas dari N : 1 dan 2
9) a) Inf (N) = 6
   b) Sup (N) = 3

10) Diagram dari A:



Dibuat fungsi $f : A \rightarrow B$ seperti berikut.



Fungsi $f : A \rightarrow B$ ini merupakan fungsi satu-satu dan onto (dapat dibuktikan sendiri), dan f melestarikan urutan.
Jadi, f merupakan *mapping similaritas*, dan $A \simeq B$.

RANGKUMAN

1. Suatu urutan parsial dalam himpunan A adalah suatu relasi R pada A yang bersifat.
   a. refleksif, yaitu $\forall\ a \in A$, $(a, a) \in R$ atau aRa,
   b. anti-simetris, yaitu untuk $a, b \in A$, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$, atau jika aRb dan bRa maka $a = b$.
   c. transitif, yaitu untuk $a, b, c \in A$, jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$, atau jika aRb dan bRc maka aRc.
2. Jika R urutan parsial pada A, maka untuk $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ atau aRb dapat dinyatakan dengan $a \leq b$ yang dibaca dengan a mendahului/merendahi b.
3. Suatu himpunan A bersama-sama dengan suatu relasi urutan parsial R di A disebut himpunan terurut parsial, yang dinotasikan dengan (A, R) atau $(A, \leq)$.
4. Jika $a, b \in A$, A himpunan terurut parsial, maka $a < b$ dibaca a murni mendahului b, atau b murni mengatasi a.
5. Jika $a, b \in A$, A himpunan terurut parsial, maka a dan b dikatakan tidak dapat dibandingkan (komparabel) jika $a \not\leq b$ dan $b \not\leq a$.

6. Jika R suatu urutan parsial pada himpunan A, maka R^{-1} merupakan urutan invers pada A.
7. Misal A himpunan terurut parsial.
   a. Elemen $a \in A$ disebut elemen pertama dari A bhb. $\forall x \in A$, $a < x$. Atau, a mendahului setiap elemen di A.
   b. Elemen $b \in A$ disebut elemen terakhir dari A bhb $\forall x \in A$, $x \leq b$. Atau, b mengatasi setiap elemen di A.
8. Misal A himpunan terurut parsial.
   a. Elemen $a \in A$ disebut elemen maksimal dari A bhb jika $a \leq x$ (a mendahului x) maka a = x. Atau, jika tidak ada elemen di A yang murni mengatasi a.
   b. Elemen $b \in A$ disebut elemen minimal dari A bhb, jika $x < b$ (x mendahului b) maka b = x. Atau, jika tidak ada elemen di A yang murni mendahului b.
9. Misal B merupakan himpunan bagian dari himpunan terurut parsial A.
   a. Elemen $p \in A$ disebut batas bawah dari B bhb. $\forall x \in B$. $p \leq x$ (p mendahului setiap elemen di B).
      Jika p batas bawah dan p mengatasi batas bawah dari B yang lain, maka p disebut batas bawah terbesar dari B atau infimum dari B, yang dinotasikan dengan inf (B).
   b. Elemen $q \in A$ disebut batas atas dari B bhb $\forall \in B$, $x < q$ (q mengatasi setiap elemen di B).
      Jika q batas atas dan q mendahului batas atas dari B yang lain, maka q disebut batas atas terkecil dari B atau supremum dari B, yang dinotasikan dengan sup (B).
10. Suatu himpunan terurut parsial A dikatakan similar dengan himpunan terurut B yang dinyatakan dengan $A \simeq B$, bila ada fungsi $f : A \rightarrow B$ yang satu-satu dan onto, sehingga untuk sebarang elemen $x, y \in A$, $x < y$ bhb $f(x) < f(y)$.
    Atau, ada fungsi $f : A \rightarrow B$ yang satu-satu dan onto, sehingga untuk $x, y \in A$, x murni mendahului y bhb. f(x) murni mendahului f(y). Fungsi f tersebut dinamakan *mapping similaritas* dari A ke B.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

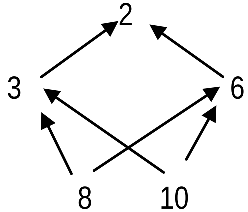
1) A = {{2, 3}, {2, 5}, {2, 3, 8}, {2, 3, 5, 8}} terurut dengan "x himpunan bagian dari y".
   Elemen minimal dari A adalah ….
   A. 2
   B. 2, 3, dan 5
   C. {2, 3}
   D. {2, 3} dan {2, 5}

2) Dari soal nomor 1, elemen pertamanya adalah ….
   A. tidak ada
   B. 2
   C. {2,3}
   D. {2,3} dan {2,5}

3) B = {2, 3, 4, ..., 10} terurut dengan "x adalah hasil kali dari y".
   Elemen maksimal dari B adalah ….
   A. 2, 3, dan 5
   B. 6 dan 8
   C. 8
   D. 6, 8, 9, dan 10

4) Dari soal nomor 3), elemen terakhirnya adalah ….
   A. 2, 3, 5, dan 7
   B. tidak ada
   C. 8
   D. 6, 8, 9, dan 10

5) C = {2, 4, 6, 8, 10} terurut seperti diagram berikut.

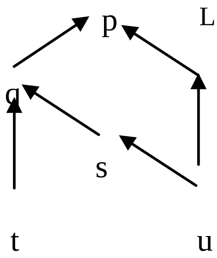


Elemen pertama dari C adalah ….
A. tidak ada
B. 2
C. 2, 4, dan 6
D. 8 dan 10

6) Dari soal nomor 5, elemen terakhirnya adalah ....
A. tidak ada
B. 2
C. 8 dan 10
D. 2, 4, dan 6

7) R = Himpunan bilangan real, terurut dengan urutan natural.
$P = \{x \in R: x^2 < 4\}$
Batas bawah dari P adalah ….
A. tidak ada
B. $\{x \in R: x < 0\}$
C. $\{x \in R: x < -2\}$
D. $\{x \in R: x < 4\}$

8) K = {p, q, r, s, t, u} terurut dengan diagram berikut.



L = {p, q, r}

Supremum dari L adalah:
A. tidak ada
B. p
C. u
D. t dan u

9) Dari soal nomor 9, infimumnya adalah ....
A. tidak ada
B. p
C. t dan u
D. u

10) Dari soal nomor 9), pernyataan yang benar adalah ….
A. elemen pertama sama dengan elemen minimal
B. elemen terakhir sama dengan elemen maksimal
C. infimum sama dengan elemen pertama
D. elemen pertama sama dengan batas bawah

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) R refleksif dan simetris karena untuk $\forall$ x $\in$ A, xRx dan jika xRx maka xRx. *Kunci D.*
2) Karena 7R5 dan 5R2 maka 7R2,berarti R merupakan relasi transitif. *Kunci B.*
3) R = {(2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (5,5)} merupakan relasi refleksif dan simetris. *Kunci B.*
4) xRy = x tegak lurus y.

   R merupakan relasi simetris, karena, jika x tegak lurus y maka y tegak lurus x. R tidak refleksif, karena x tidak akan tegak lurus dengan x sendiri. R tidak transitif, karena jika x tegak lurus y dan y tegak lurus z maka x tidak tegak lurus z. *Kunci A.*
5) xRy adalah segitiga x sebidang dengan segitiga y.

   R merupakan relasi simetris, karena jika segitiga x sebidang dengan segitiga y maka segitiga y tentu sebidang dengan segitiga x. R transitif, karena jika segitiga x sebidang dengan segitiga y dan segitiga y sebidang dengan segitiga z maka segitiga x tentu sebidang dengan segitiga z. *Kunci B.*
6) f adalah fungsi satu-satu, karena jika x, y $\in$ A, x $\neq$ y maka 5x $\neq$ 5y, atau f(x) $\neq$ f(y). *Kunci A.*
7) Karena untuk bilangan bulat x dan y, dengan x $\neq$ y, maka IxI $\neq$ IyI, atau f(x) $\neq$ f(y), maka f fungsi satu-satu. Karena untuk sebarang bilangan asli z ada bilangan bulat x = z dan x = -z sehingga f(x) = IxI = IzI = z dan f(x) = IxI = I-zI = z, maka f fungsi onto. *Kunci D.*
8) f(x) = 3x + 2 merupakan fungsi satu-satu, karena untuk x $\neq$ y, maka 3x + 2 $\neq$ 3y + 2. Berarti f(x) $\neq$ f(y). *Kunci C.*
9) Fungsi f : N $\rightarrow$ K dengan f(x) = – x + 1 merupakan fungsi onto karena untuk setiap k $\in$ K, ada x = – (k – 1) sehingga f(x) = f (– (k-1)) = k. *Kunci D.*

10) $f = \{(1, b), (2, b), (3, c)\}$ merupakan fungsi satu-satu, karena untuk x, y $\in$ A, jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$. f merupakan fungsi onto, karena untuk setiap $b \in B$, tentu ada $a \in A$ sehingga $b = f(a)$.

Tes Formatif 2

1) C. D ekuivalen dengan A.
2) C. Himpunan bilangan real antara 0 dan 1 adalah himpunan non-denumerable, jadi tidak ekuivalen dengan himpunan bilangan bulat.
3) C. Himpunan bilangan real antara 1 dan 2 adalah himpunan infinit dan tidak *countable*, jadi non-denumerable.
4) A. Himpunan huruf vocal adalah himpunan finit, jadi merupakan himpunan countable.
5) A. Fungsi $f : H \to P$ dengan $f(x) = -\frac{1}{x}$ adalah fungsi satu-satu dan onto. Jadi f tersebut dapat digunakan untuk menunjukkan $H \sim P$.
6) D. $Q = \{4, 8, 12, ...\}$ dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa P infinit, dengan membentuk fungsi $f : P \to Q$ dengan $f(x) = 2x$ yang satu-satu dan onto. Selain itu $Q \subset P$.
7) A. Himpunan $K = \{x : x \geq 0, x \text{ real}\}$ tidak "denumerable", karena K tidak ekivalen dengan N.
8) C. Himpunan $B = \{x : -2 \leq x \leq 0\}$ merupakan himpunan yang tidak "countable", karena B tidak finit juga tidak "denumerable".
9) D. Himpunan A adalah himpunan yang non denumerable. Himpunan bilangan real antara 0 dan 1000 juga himpunan yang non denumerable, yang ekivalen dengan himpunan A.
10) B. Himpunan kuasa dari $H = 2^H = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$.
   $\cup_i H_i = \{1, 3, 5\}$.

Tes Formatif 3

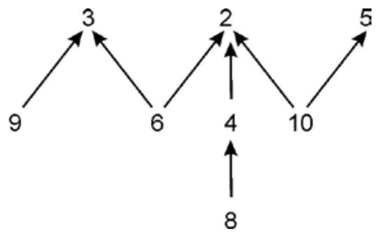
1) D. Diagramnya:

$$\begin{tikzcd}
 & \{2,3,5,8\} & \\
\{2,3,8\} \arrow[ur] & & \{2,5\} \arrow[ul] \\
 & \{2,3\} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Elemen minimalnya adalah {2, 3} dan {2, 5}, karena tidak ada elemen di A yang murni mendahului {2, 3} dan {2, 5}.

2) A. Elemen pertamanya tidak ada, karena tidak ada elemen yang mendahului setiap elemen di A.

3) A. Diagramnya:



Elemen maksimalnya adalah 2, 3, dan 5, karena tidak ada elemen di B yang murni mengatasi 2, 3, dan 5.

4) B. Elemen terakhirnya tidak ada.

5) A Elemen pertama dari C tidak ada, karena tidak ada elemen yang mendahului setiap elemen C.

6) B. Elemen terakhirnya adalah 2.

7) C. Batas bawah dari P adalah $\{x \in R : x \leq -2\}$.

8) B. Batas atas dari L adalah p. Jadi, supremum dari L : p.

9) A. Infimumnya tidak ada.

10) B. Elemen terakhir sama dengan elemen maksimal.

Glosarium

Batas atas	:	adalah elemen yang mengatasi setiap elemen pada himpunan terurut parsial.
Batas bawah	:	adalah elemen yang mendahului setiap elemen pada himpunan terurut parsial.
Co-domain	:	adalah daerah kawan.
Domain	:	adalah daerah hasil.
Ekuivalen	:	Dua himpunan dikatakan ekuivalen jika ada korespondensi satu-satu antara kedua himpunan tersebut.
Elemen maksimal	:	a adalah elemen maksimal di A jika tidak ada elemen di A yang murni mengatasi a.
Elemen minimal	:	b adalah elemen minimal di A jika tidak ada elemen di A yang murni mendahului b.
Elemen pertama	:	a adalah elemen pertama dari A jika a mendahului setiap elemen dari A.
Elemen terakhir	:	b elemen terakhir dari A jika b mengatasi setiap elemen dari A.
Fungsi bijektif	:	adalah fungsi yang satu-satu dan onto.
Fungsi injektif	:	f fungsi injektif dari A ke B jika untuk x,y anggota A dengan $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$.
Fungsi onto	:	f fungsi onto dari A ke B jika untuk setiap y anggota B ada x anggota A sehingga $y = f(x)$ Fungsi satu-satu sama dengan fungsi injektif Fungsi surjektif sama dengan fungsi onto
Himpunan *countable*	:	adalah himpunan yang finit atau *denumerable*.
Himpunan *denimerable*	:	adalah himpunan yang ekuivalen dengan himpunan bilangan asli.
Himpunan finit	:	adalah himpunan yang tidak infinit.
Himpunan infinit	:	adalah himpunan yang ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya.

Himpunan non *denumerable*	:	adalah himpunan infinit yang tidak *countable*.
Himpunan terurut parsial	:	adalah himpunan yang di dalamnya terkandung urutan parsial.
Infimum	:	adalah batas bawah terbesar.
Korespondensi satu-satu	:	adalah fungsi satu-satu dan onto.
Range	:	adalah daerah hasil.
Relasi refleksi	:	R relasi refleksif pada himpunan terurut A jika untuk setiap x anggota A berlaku xRx.
Relasi simetris	:	R relasi simetris pada himpunan A jika untuk setiap x, y anggota A berlaku jika xRy maka yRx.
Relasi anti simetris	:	R relasi anti simetris pada himpunan A jika untuk setiap x, y anggota A, jika xRy dan yRx maka x = y.
Relasi transitif	:	R relasi transitif pada himpunan A jika untuk setiap x, y, z anggota A, jika xRy dan yRz maka xRz.
Relasi ekuivalensi	:	R relasi ekuivalensi jika R refleksif, simetris, dan transitif.
Supremun	:	adalah batas atas terkecil.
Urutan parsial	:	adalah suatu urutan yang berlaku relasi refleksif, anti simetris, dan transitif.

Daftar Pustaka

Croom, Fred H. (1989). *Topology of Principles.* Saunders College Publishing.

Lipschutz Seymour. (1965). *General Topology.* Scaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Book Company.

Soedjadi, Prof. Drs. R. (1987). *Himpunan dan Pengantar Topologi.* Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Soehakso, Prof. R. M. Y. T., *Topology*, tp., tth.