MODUL 1

Pendahuluan, Probabilitas, dan Kurva Normal

Drs. Pangestu Subagyo, M.B.A.

PENDAHULUAN

Dalam memecahkan masalah yang dihadapi, manajemen biasanya memerlukan pertimbangan-pertimbangan tertentu. Untuk itu, diperlukan berbagai alat, antara lain statistik, matematika, riset operasi, dan sebagainya. Riset operasi merupakan salah satu alat analisis yang berdasarkan angka saja, padahal tidak semua hal dapat diukur dengan angka. Oleh karena itu, hasil optimal dalam riset operasi belum tentu merupakan keputusan terbaik, tetapi mungkin ada sedikit perubahan atau penyesuaian setelah mempertimbangkan data-data kuantitatif.

Pada modul ini, akan dibahas salah satu metode kuantitatif, yaitu probabilitas. Sementara itu, pada modul-modul berikutnya berturut-turut akan dibahas metode-metode yang lain.

Salah satu metode kuantitatif dalam riset operasi adalah menghitung probabilitas terjadinya suatu peristiwa.

Setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan kegunaan riset operasi untuk pengambilan keputusan
2. menjelaskan maksud dari probabilitas
3. menjelaskan cara menghitung besarnya probabilitas terjadinya suatu peristiwa, baik pendekatan klasik, pendekatan frekuensi, pendekatan binomial, maupun pendekatan poisson
4. menjelaskan kurva normal, cara mencari luas kurva normal, dan penggunaan kurva normal untuk menyelesaikan masalah.

Secara khusus, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan cara analisis data dengan model-model yang ada dalam riset operasi

2. memilih model yang lebih tepat dan sesuai dengan masalah yang dihadapi
3. menerapkan hasil analisis untuk pemecahan masalah melalui pengambilan keputusan
4. menggunakan konsep probabilitas dan kurva untuk membantu analisis data agar menentukan kebijaksanaan dalam memecahkan suatu masalah.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pendahuluan

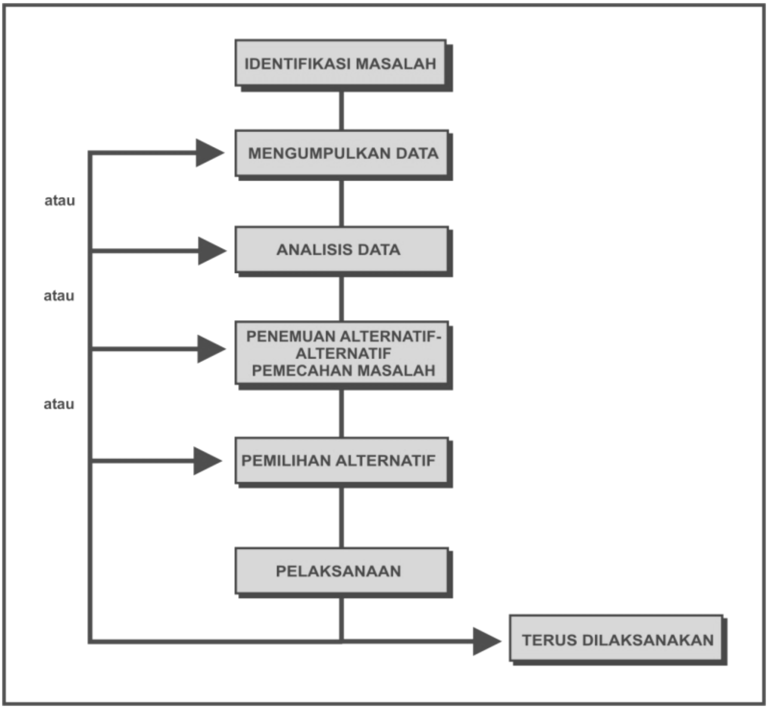
A. PENGERTIAN DASAR

Dalam suatu organisasi, manajemen selalu dihadapkan pada masalah pengambilan keputusan. Keputusan ini untuk menyelesaikan masalah-masalah yang dihadapinya. Sebelum mengambil keputusan, biasanya dilakukan analisis terhadap data yang ada. Untuk melakukan analisis ini, diperlukan alat-alat analisis, antara lain yang kita bahas dalam modul ini, yaitu analisis kuantitatif, karena analisis ini menggunakan ukuran atau satuan angka. Jadi, segala hal atau faktor yang berhubungan atau memengaruhi masalah yang dapat dipecahkan sedapat mungkin diukur dengan angka. Kemudian, dianalisis secara kuantitatif. Untuk melakukan analisis ini, dilakukan atau dikembangkan konsep-konsep yang dipelajari dalam matematika, statistik, akuntansi, dan sebagainya sehingga membentuk suatu model yang dapat dipakai untuk memecahkan masalah.

Tujuan dalam riset operasi adalah mencari pemecahan masalah secara optimal dengan mengingat tujuan serta keterbatasan yang ada. Optimal berarti sebaik-baiknya, yaitu yang paling kita kehendaki. Kalau biaya atau pengorbanan, tentu saja kita minimumkan. Akan tetapi, kalau manfaat atau keuntungan, tentu saja kita maksimumkan.

B. PROSES PENGAMBILAN KEPUTUSAN

Pengambilan keputusan bisa dilakukan secara sembarang tanpa didahului suatu analisis. Akan tetapi, cara ini tentu saja tidak menjamin diperolehnya hasil secara optimal, terutama jika masalahnya relatif rumit dan terjadi pada organisasi yang relatif besar. Untuk bisa mengambil keputusan secara lebih baik, bisa digunakan prosedur yang skemanya tercantum pada Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1.
Skema Proses Pengambilan Keputusan

1. Identifikasi Masalah

Masalah yang timbul harus diketahui dengan jelas. Hal ini disebabkan jika masalah pokoknya belum diketahui, kita tidak mungkin bisa memecahkan masalah tersebut dengan baik. Untuk mengetahui masalah tersebut, bisa dilakukan penelitian pendahuluan. Berdasarkan masalah ini, bisa ditentukan cara-cara yang cocok untuk mengatasinya.

2. Mengumpulkan Data

Untuk mengetahui cara mengatasi masalah tersebut, harus didukung dengan data yang relevan atau cocok. Untuk itu, kita harus mengumpulkan data yang diperlukan tersebut.

3. Analisis Data

Data yang terkumpul harus dianalisis terlebih dahulu agar bisa diketahui pemecahannya. Dalam analisis ini, biasanya dibuat suatu model. Model adalah tiruan atau abstraksi dari kejadian yang sebenarnya, biasanya dalam bentuk yang lebih sederhana. Untuk melakukan analisis, biasanya digunakan ilmu-ilmu pengetahuan, seperti matematika, riset operasi, statistik, dan akuntansi. Di sinilah kedudukan *analisis kuantitatif* sebagai alat untuk membantu manajemen dalam menganalisis data sebagai dasar untuk mengambil keputusan.

Dalam analisis ini, selain dipertimbangkan hasil-hasil perhitungan dari analisis kuantitatif, juga dipertimbangkan faktor-faktor lain yang tidak bisa diukur dengan satuan angka, misalnya kebudayaan, perikemanusiaan, agama, politik, dan sebagainya. Faktor-faktor ini tidak bisa dimasukkan dalam model kuantitatif, tetapi memiliki pengaruh yang kuat. Oleh karena itu, hasil analisis kuantitatif yang kita peroleh kadang-kadang tidak bisa diterapkan begitu saja, tetapi diperlukan penyesuaian terlebih dahulu.

4. Penentuan Alternatif-alternatif Pemecahan Masalah

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, bisa diperoleh alternatif-alternatif pemecahan masalah.

5. Pemilihan Alternatif

Di antara alternatif-alternatif yang ada itu, kita pilih salah satu yang paling cocok untuk mengatasi masalah tadi.

6. Pelaksanaan

Alternatif yang telah dipilih di atas kemudian dilaksanakan/dijalankan untuk mengatasi masalah yang timbul. Dalam pelaksanaan ini, dapat dilihat apakah langkah itu sudah cocok atau belum. Kalau alternatif itu sudah cocok dan bisa mengatasi masalah yang timbul, langkah ini bisa dijalankan. Sebaliknya, kalau alternatif ini ternyata tidak cocok, harus diulang lagi langkah-langkah sebelumnya. Mungkin pemilihan alternatifnya yang salah. Mungkin analisisnya kurang tepat. Mungkin datanya yang kurang relevan.

Demikianlah kedudukan alat-alat analisis kuantitatif dalam pengambilan keputusan oleh manajemen. Yang penting harus diingat bahwa alat analisis ini hanya membantu memudahkan analisis. Sementara itu, untuk mengambil keputusan, masih dipertimbangkan pula berbagai aspek yang biasanya bersifat kuantitatif.

C. SEJARAH PERKEMBANGAN PENGGUNAAN *OPERATIONS RESEARCH*

Sebenarnya, analisis kuantitatif ini sudah mulai dikenal sejak lama. Tokoh-tokoh yang pernah mencoba menerapkannya untuk pengambilan keputusan, antara lain F.W. Harris. Pada 1915, ia mengemukakan konsep pengawasan sediaan. Pada 1931, Walter Shewart mengemukakan penggunaan statistik untuk pengawasan kualitas.

Sebelum Perang Dunia II, masih banyak orang yang menganggap bahwa metode-metode kuantitatif itu tidak bisa diterapkan pada ilmu sosial. Akan tetapi, pada Perang Dunia II, ada gagasan untuk menggunakan/menerapkan metode kuantitatif ini untuk mengatur strategi perang. Pada tahun 1941, para sarjana dari berbagai cabang ilmu pengetahuan di Inggris, terutama sarjana-sarjana matematika dikerahkan untuk ikut memikirkan strategi perang. Hasil kerja mereka antara lain sistem radar, pengaturan konvoi, dan cara-cara mengetahui kekuatan armada angkatan laut musuh.

Oleh karena penerapan pertamanya dalam operasi militer di Inggris, maka disebut *operations research in the United Kingdom*. Selanjutnya disebut riset operasi. Kemudian, menyusul Amerika Serikat yang juga mengerahkan sarjana-sarjana matematika untuk ikut memecahkan masalah-masalah peperangan. Ternyata, hasilnya juga cukup memuaskan. Setelah Perang Dunia II berakhir, ada beberapa ilmuwan yang dulu aktif dalam mengatur strategi perang tersebut. Mereka mencoba menerapkan riset operasi ini dalam perekonomian pada umumnya dan kehidupan perusahaan pada khususnya. Dengan demikian, lahirlah *analisis kuantitatif* untuk manajemen yang sering juga disebut sebagai riset operasi atau *management science*.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebutkan macam-macam alat yang bisa membantu atau memudahkan seseorang untuk melakukan analisis!
2) Manakah yang penting dalam pengambilan keputusan: data kuantitatif atau kualitatif?
3) Jelaskan kedudukan riset operasi dalam proses pengambilan keputusan!
4) Apakah hasil pemecahan optimal itu pasti sama dengan keputusan yang harus dijalankan? Jelaskan!
5) Sebutkan secara singkat sejarah perkembangan riset operasi dalam ilmu sosial!

Petunjuk Jawaban Latihan

Jawaban dari semua pertanyaan latihan dapat dibaca pada uraian materi Kegiatan Belajar 1 karena sudah diuraikan dengan jelas. Apabila ada kesulitan, Anda dapat berdiskusi dengan teman atau tutor Anda!

RANGKUMAN

Dalam bagian ini, diuraikan tentang kedudukan riset operasi dalam ilmu sosial sebagai pembantu analisis data yang diperlukan untuk pengambilan keputusan. Namun, hasil pemecahan optimal dalam riset operasi itu hanya salah satu pertimbangan yang bersifat kuantitatif. Di samping itu, masih ada hal-hal yang bersifat kualitatif yang sulit diukur dengan angka, tetapi juga harus dipertimbangkan.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Riset operasi bertujuan mencari pemecahan masalah secara optimal dengan keterbatasan yang ada. Optimalisasi biaya berarti biaya ….
   A. terbesar
   B. sedang
   C. terkecil
   D. terbatas

2) Proses pengambilan keputusan yang baik melewati beberapa prosedur dan diawali dengan prosedur ….
   A. identifikasi masalah
   B. pengumpulan data
   C. analisis data
   D. pemilihan alternatif

3) Selain mempertimbangkan analisis kuantitatif, proses pengambilan keputusan juga memperhatikan aspek kualitatif, misalnya ….
   A. produksi
   B. pemasaran
   C. operasi
   D. politik

4) Kesalahan pemilihan alternatif pemecahan masalah antara lain disebabkan oleh ….
   A. kecocokan data
   B. data yang kurang relevan
   C. korelasi data
   D. keragaman data

5) Pertama kali *operation research* diterapkan pada operasi militer yang terjadi selama ….
   A. Perang Dunia I
   B. Perang Dunia II
   C. Perang Korea
   D. Perang Vietnam

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Probabilitas

Terjadinya suatu peristiwa itu dapat bersifat pasti atau belum pasti. Kalau suatu peristiwa itu tidak pasti, kita dapat memperkirakan tingkat kecenderungan terjadinya. Dalam bahasa Inggris, istilah yang digunakan adalah *probability*. Kalau diterjemahkan dalam bahasa Indonesia agak sulit, kadang-kadang digunakan istilah peluang, kementaan, bahkan di Malaysia sering digunakan kebarangkalian. Dulu, pernah digunakan istilah kemungkinan. Namun, sekarang tidak pernah dipakai sebab kemungkinan bahasa Inggrisnya *posibility*. Istilah yang paling tepat kita gunakan adalah probabilitas pengalihbahasaan dari *probability*.

Probabilitas terjadinya suatu peristiwa itu diukur dengan menggunakan angka minimum = 0 dan maksimum = 1. Kalau peristiwa A memiliki probabilitas = 0 (biasanya ditulis dengan $P_A = 0$), berarti peristiwa itu mustahil terjadi. Bila peristiwa B memiliki probabilitas = 1 ($P_B = 1$), berarti peristiwa B ini pasti terjadi. Sementara itu, peristiwa yang kita hitung hanya peristiwa yang tidak mustahil atau tidak pasti, yaitu yang probabilitasnya di atas 0 dan di bawah 1. Di samping itu, jumlah probabilitas semua aternatif kejadian suatu peristiwa = 1. Misalnya, kalau probabilitas terjadinya suatu peristiwa = 0,45, maka probabilitas tidak terjadinya persitiwa tersebut = 0,55.

A. CARA MENGHITUNG PROBABILITAS

Ada dua cara atau pendekatan yang biasanya digunakan untuk menghitung probabilitas, yaitu pendekatan teoretis dan pendekatan frekuensi.

1. Pendekatan teoretis

Pendekatan teoretis sering juga disebut dengan pendekatan klasik. Penentuan probabilitas didasarkan pada objek yang terlibat. Sebagai contoh suatu mata uang logam Rp500 memiliki dua permukaan yang simetris, yaitu permukaan A (yang bergambar burung garuda) dan permukaan B (yang bergambar bunga). Jika dilempar ke atas, probabilitas muncul permukaan A = 0,50 dan permukaan B = 0,50. Contoh kedua adalah suatu dadu yang memiliki 6 permukaan yang simetris. Dadu itu dilemparkan ke atas. Maka, probabilitas diperoleh permukaan pertama tampak di atas = P_1 = 1/6 karena 1 merupakan permukaan dari 6 permukaan yang ada. Selanjutnya, permukaan ke-2, ke-3, ke-4, ke-5, dan ke-6 masing-masing = 1/6. Kalau dadunya tidak simetris, tentunya probabilitas setiap permukaan tidak sama. Contoh ketiga, suatu kotak berisi 2 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Kalau secara random (secara acak) diambil 1 kelereng, probabilitas diperolehnya kelereng putih = 3/(2+3) = 3/5 = 0,6.

2. Pendekatan Frekuensi

Pendekatan frekuensi sering disebut pendekatan *experimental*. Dalam pendekatan ini, probabilitas suatu peristiwa dihitung berdasarkan pengalaman, kejadian, atau hasil yang pernah terjadi. Misalnya, jika mata uang yang simetris dilemparkan 100 kali, diperoleh 48 kali permukaan A tampak di atas dan muncul permukaan B 52 kali. Maka, probabilitas memperoleh permukaan A = 48/100 = 0,48. Sementara itu, probabilitas diperolehnya permukaan B = 52/100 = 0,52. Contoh kedua, suatu dadu yang simetris dilemparkan 60 kali. Kalau permukaan nomor 1 diperoleh 9 kali, P_1 = 9/60 = 0,15. Bila permukaan kedua diperoleh 12 kali, P_2 = 12/60 = 0,20. Begitu seterusnya.

Sekarang timbul pertanyaan, di antara kedua pendekatan atau cara menghitung probabilitas itu mana yang terbaik? Jawabannya, semua sama baiknya. Pendekatan teoretis akan menghasilkan probabilitas dengan tepat jika penelitian dan pengolahan datanya teliti. Sementara itu, pendekatan frekuensi akan menghasilkan probabilitas yang semakin tepat bila sampel yang digunakan semakin banyak. Dengan kata lain, kalau jumlah sampelnya tak terhingga, probabilitasnya tepat.

B. HUBUNGAN ANTARA PERISTIWA SATU DAN PERISTIWA YANG LAIN

Hubungan antara peristiwa satu dan yang lain dapat bersifat (1) *mutually exclusive* (saling asing atau saling meniadakan); (2) *independent* atau bebas; dan (3) *conditional* atau bersyarat.

1. Hubungan *Mutually Exclusive*

Hubungan *mutually exclusive* terjadi apabila suatu peristiwa yang mengakibatkan peristiwa lain tidak akan terjadi. Misalnya, dalam pelemparan mata uang, kalau diperoleh permukaan A, tidak mungkin diperoleh permukaan B. Kalau kesebelasan X menang dalam pertandingan final sepak bola piala dunia tahun ini, tidak mungkin kesebelasan Y juga menang. Hubungan ini ditunjukkan dengan rumus sebagai berikut.

Probabilitas peristiwa A dan B terjadi semua atau bersama-sama:

$$P_{(A \text{ dan } B)} = 0$$

Probabilitas terdapat salah satu dari peristiwa A atau B yang terjadi:

$$P_{(A \text{ atau } B)} = P_A + P_B$$

Bila sebuah dadu yang simetris dilemparkan ke atas, probabilitas diperoleh setiap permukaan = 1/6. Maka:

a. probabilitas permukaan nomor 1 dan nomor 2 tampak di atas = $P_{(\text{permukaan 1 dan permukaan 2 tampak di atas})} = 0$
b. probabilitas permukaan nomor satu atau nomor 2 tampak di atas = $P_{(\text{permukaan 1 atau permukaan 2 tampak di atas})} = 1/6 + 1/6 = 2/6$.

2. Hubungan Independen

Kalau peristiwa A terjadi, peristiwa B boleh terjadi dan boleh juga tidak terjadi. Kalau peristiwa B terjadi, peristiwa A boleh terjadi dan boleh juga tidak terjadi. Itu berarti tidak saling mengikat dan boleh terjadi dengan bebas. Dalam rumus, dikemukakan sebagai berikut.

$$P_{(A \text{ dan } B)} = P_{(A)} \times P_{(B)}$$

3. Hubungan *Conditional*

Dalam hubungan *conditional* atau bersyarat, terjadinya suatu peristiwa didahului oleh peristiwa prasyarat. Misalnya, seorang bayi mula-mula dilahirkan (peristiwa A), kemudian menjadi dewasa (peristiwa B). Sebelum dewasa, pasti dilahirkan dulu dengan selamat (sebagai prasyarat). Kemudian, dapat menjadi dewasa. Probabilitas peristiwa prasyarat biasanya ditulis dengan P_A. Sementara itu, untuk peristiwa B, probabilitas menjadi dewasa kalau dia sudah dilahirkan dengan selamat = $P_{(B/A)}$. Maka itu, probabilitas seseorang dilahirkan dengan selamat dan dapat menjadi dewasa = $P_{(A \text{ dan } B)} = P_A \times P_{(B/A)}$. Andaikata seorang anak (bayi) dapat dilahirkan dengan selamat, probabilitasnya = 0,80. Kalau sudah dilahirkan dan dapat menjadi dewasa =

$P_{(B/A)}$ = 0,90, probabilitas anak (bayi) itu dapat dilahirkan dengan selamat dan bisa hidup menjadi dewasa = $P_{(A \text{ dan } B)} = P_A \times P_{(B/A)}$ = 0,80 x 0,90 = 0,72.

C. DISTRIBUSI PROBABILITAS

Dalam bagian ini, kita akan membuat distribusi probabilitas. Artinya, kita akan membuat tabel yang berisi kelas-kelas dan probabilitasnya. Untuk mempermudah penjelasannya, kita gunakan contoh sebagai berikut. Kita meneliti keluarga-keluarga yang beranak tiga di suatu daerah. Ternyata, setiap terjadi kelahiran, probabilitas wanita = 0,30 sehingga probabilitas laki-laki = 0,70. Anak yang dimiliki bisa laki-laki semua, mungkin, anak pertama perempuan, lalu anak ke-2 dan ke-3 laki-laki, dan seterusnya.

1. Untuk alternatif pertama, semua anaknya laki-laki (L,L,L) = P_{1L} x P_{2L} x P_{3L} = P anak pertama laki-laki x P anak kedua laki-laki x P anak ketiga laki-laki = 0,7 x 0,7 x 0,7 = 0,343.
2. Untuk alternatif kedua, anak pertama perempuan, anak kedua laki-laki, dan anak ketiga laki-laki (P,L,L) = P_{1P} x P_{2L} x P_{3L} = P anak pertama perempuan x P anak kedua laki-laki x P anak ketiga laki-laki = 0,3 x 0,7 x 0,7 = 0,147. Begitu seterusnya.

Secara perinci, hitungan ini dapat dilihat dalam tabel berikut.

Tabel 1.1.
Alternatif Jenis Kelamin Anak yang Dimiliki dan Probabilitasnya

Alter-natif	Anak ke: I	II	III	Anak wanita	Probabilitas
1	L	L	L	0	0,7 x 0,7 x 0,7 = 0,343
2	L	L	P	1	0,7 x 0,7 x 0,3 = 0,147
3	L	P	L	1	0,7 x 0,3 x 0,7 = 0,147
4	P	L	L	1	0,3 x 0,7 x 0,7 = 0,147
5	L	P	P	2	0,7 x 0,3 x 0,3 = 0,063
6	P	L	P	2	0,3 x 0,7 x 0,3 = 0,063
7	P	P	L	2	0,3 x 0,3 x 0,7 = 0,063
8	P	P	P	3	0,3 x 0,3 x 0,3 = 0,027
Jumlah					1,000

Keluarga yang memiliki tiga anak laki-laki (L, L, L) hanya ada satu alternatif, yaitu alternatif 1 dengan probabilitas = 0,343.

Sementara itu, keluarga yang beranak tiga, tetapi perempuan hanya satu orang, adalah alternatif 2, 3, dan 4 yang masing-masing dengan probabilitas = 0,147. Karena alternatif-alternatif itu (2, 3, dan 4), keadaannya sama memiliki satu anak perempuan. Maka, probabilitasnya dapat digabung: $P_{\text{(beranak tiga dengan satu wanita)}}$ = 0,147 + 0,147 + 0,147 = 0,441.

Demikian juga alternatif 5, 6, dan 7 memiliki kesamaan sifat, yaitu beranak tiga dengan perempuan ada dua. Probabilitas keluarga yang beranak tiga dengan dua perempuan = 0,063 + 0,063 + 0,063 = 0,189.

Probabilitas beranak tiga perempuan hanya ada satu alternatif, probabilitasnya = 0,027.

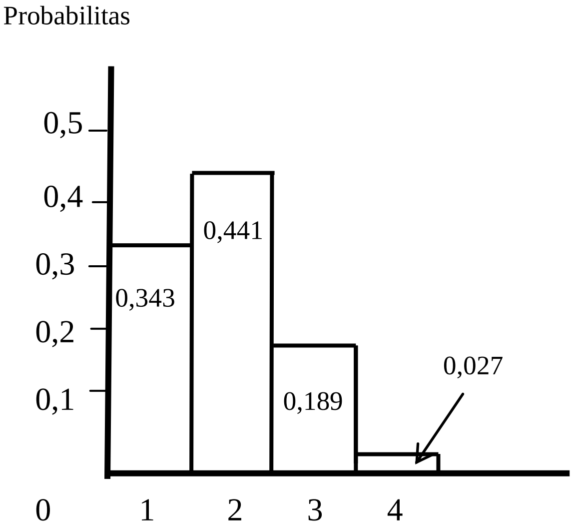
Berdasarkan perhitungan ini, dapat dibuat distribusi probabilitasnya seperti Tabel 1.2 dan dapat digambarkan menjadi histogram pada Gambar 1.1.

Tabel 1.2.
Distribusi Teoretis

Kelas	Jumlah anak perempuan	Probabilitas
1	0	0,343
2	1	0,441
3	2	0,189
4	3	0,027
		1,000

D. HISTOGRAM

Berdasarkan data dalam contoh soal, distribusi probabilitas mendapat jumlah anak perempuan seperti pada Tabel 1.2. dapat digambarkan menjadi histogram.



Gambar 1.2.
Histogram Distribusi Probabilitas Memiliki Anak Wanita
dari Keluarga yang Memiliki Tiga Anak

E. DISTRIBUSI BINOMIAL

Menghitung probabilitas setiap alternatif seperti pada contoh, dilakukan dengan cara yang cukup panjang. Untuk mempermudah, kita dapat menghitung probabilitas itu dengan menggunakan rumus binomial. Menghitungnya dapat lebih cepat dan lebih mudah dengan rumus berikut.

$$P_{(X,n)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$

Probabilitas untuk mendapat keluarga yang tidak memiliki anak wanita = P_0.

X = 0, n = 3, p = 0,3

$$P_0 = \frac{xn!}{x!(n-x)!} \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$

$$= \frac{3!}{3!} \cdot 0,3^0 \cdot 0,73$$

$$= 1 \times 1 \times (0,343) = 0,343$$

Probabilitas mendapat 1 anak wanita = P_1.

X = 1, n = 3, p = 0,3

$$P_1 = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$
$$= \frac{3!}{2!} \times 0,3^1 \times 0,7^2$$
$$= 3 \times (0,3) \times (0,49) = 0,441$$

Probabilitas mendapat 2 anak wanita = P_2.

X = 2, n = 3, p = 0,3

$$P_2 = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$
$$= \frac{3!}{2!(1)!} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1$$
$$= 3 \times (0,09) \times (0,7) = 0,189$$

Probabilitas mendapat 3 anak wanita = P_3.

X = 3, n = 3, p = 0,3

$$P_2 = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$
$$= \frac{3!}{3!} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0$$
$$= 1 \times (0,027) \times 1 = 0,027$$

Hasil perhitungan memakai rumus binomial ini sama dengan hasil hitungan sebelumnya, seperti Tabel 1.2.

F. *MEAN* DAN DEVIASI STANDAR DARI PROBABILITAS

Dalam distribusi frekuensi biasa, yang bukan probabilitas atau proporsi, besarnya *mean* atau rata-rata suatu data dapat ditulis dengan rumus sebagai berikut.

$$Mean = \mu = \frac{\sum f_i \cdot X_i}{N} = \sum \frac{f_i}{N} X_i$$

Kalau f_i/N diganti dengan P, rumus *mean* dari probabiltas sering disebut *expected value* seperti di bawah ini.

$$E(X) = \sum P_i \cdot X_i$$

Deviasi standar untuk data biasa—bukan untuk probabilitas—dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$\sigma = \sqrt{\sum \frac{fi(Xi-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\sum \frac{fi}{N}(Xi-\mu i)^2}$$

Kalau f_i/N diganti dengan P, kita peroleh rumus deviasi standar dari probabilitas atau proporsi sebagai berikut.

$$\sigma = \sqrt{\sum P \cdot \left(X_i - \mu_i\right)^2}$$

Data pada contoh mengenai probabilitas anak perempuan sebelumnya dapat dihitung dalam Tabel 1.3.

Tabel 1.3.
Mean dan Deviasi Standar Jumlah Anak

X_i	P_i	$P_i(X_i)$	$P_i[X_i - E(X)^2$
0	0,343	0,000	0,27783
1	0,441	0,441	0,00441
2	0,189	0,378	0,22869
3	0,027	0,081	0,11907
	1,000	0,910	0,63000

G. DISTRIBUSI POISSON

Rumus binomial yang sudah kita kenal hanya dapat dipakai bila probabilitas kejadian itu tidak terlalu kecil (misalnya 0,20; 0,25; 0,40) dan tidak terlalu besar (misalnya 3, 4, 5, 10). Apabila probabilitasnya sangat kecil (misalnya 0,005; 0,0001) dan *n*-nya banyak sekali (misalnya 1000; 10000), sebaiknya kita gunakan rumus poisson. Ini dilakukan karena sangat sulit menghitungnya jika menggunakan rumus binomial, misalnya perkalian dan perpangkatannya rumit. Rumus poisson sebagai berikut.

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{X!}$$

μ = n.p
e = bilangan naperian = 2,71828

Contoh:
Dalam suatu kecamatan, terdapat 5000 orang penduduk dewasa. Probabilitas seorang penduduk yang memiliki bibit penyakit malaria = 0,001.

a. Berapa probabilitas jika empat orang penduduk di kecamatan itu memiliki bibit penyakit malaria?

Jawab:
μ = 5 000 x 0,001 = 5

$$P_{(4)} = \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!} = \frac{625 \times 0,00674}{24} = 0,175521$$

Jadi, probabilitas empat orang penduduk yang memiliki bibit penyakit malaria = 0,175521.

b. Hitunglah probabilitas—paling banyak dua orang—yang memiliki bibit penyakit malaria!

Jawab:

Probabilitas paling banyak dua orang yang memiliki bibit penyakit malaria = $P_0 + P_1 + P_2$ =

$$P_{(0)} = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = \frac{1 \times 0,00674}{1} = 0,0067$$

$$P_{(1)} = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} = \frac{5 \times 0,00674}{1} = 0,0337$$

$$P_{(2)} = \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} = \frac{25 \times 0,00674}{2} = 0,08425$$

Probabilitas paling banyak dua orang yang memiliki bibit penyakit malaria = 0,0067 + 0,0337 + 0,08425 = 0, 12469.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Data berikut digunakan untuk menjawab soal nomor 1. Diketahui, sebuah kotak berisi enam kelereng berwarna merah dan empat kelereng berwarna putih. Kita ambil dua kelereng berturut-turut secara random.

1) Hitunglah probabilitas jika kita mendapat kelereng berwarna merah dari pengambilan dua kelereng itu. Sebelum pengambilan kedua, kelereng yang sudah diambil dikembalikan terlebih dahulu.
2) Hitunglah probabilitas jika kita mendapat satu kelereng berwarna merah dan satu kelereng berwarna putih dari pengambilan itu. Sebelum pengambilan kedua, kelereng yang sudah diambil dikembalikan terlebih dahulu.
3) Hitunglah probabilitas jika kita mendapat kelereng berwarna merah semua dari pengambilan dua kelereng itu. Sebelum pengambilan kedua, kelereng yang sudah diambil tidak dikembalikan terlebih dahulu.
4) Hitunglah probabilitas jika kita mendapat satu kelereng berwarna merah dari pengambilan dua kelereng itu. Sebelum pengambilan kedua, kelereng yang sudah diambil tidak dikembalikan terlebih dahulu.
5) Hitunglah probabilitas mendapat kelereng yang sama warnanya dari pengambilan kedua kelereng itu. Sebelum pengambilan kelereng kedua, kelereng yang sudah diambil tidak dikembalikan.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) 36/100.
2) 48/100.
3) 30/90.
4) 48/90.

5) Berwarna sama berarti putih semua atau merah semua. Ini berarti = 42/90.

RANGKUMAN

Kegiatan belajar ini menjelaskan cara-cara menghitung nilai probabilitas suatu peristiwa, cara menghitung probabilitas dengan pendekatan binomial, penggunaan pendekatan poisson, dan distribusi probabilitas.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Probabilitas digunakan untuk mengukur kecenderungan terjadinya suatu peristiwa ….
   A. kalau mendekati berarti mendekati, tetapi kalau mendekati 0 berarti cenderung untuk terjadi
   B. kalau probabilitas suatu peristiwa itu sebesar 1, itu berarti peristiwa tersebut pasti terjadi
   C. kalau probabilitas suatu peristiwa itu sebesar 0, itu berarti peristiwa tersebut mustahil terjadi
   D. alternatif jawaban A, B, dan C benar semua

2) Kalau terjadinya suatu peristiwa yaitu seseorang tidur dan berarti ia tidak bangun itu memiliki hubungan ….
   A. bersyarat (*conditional*)
   B. bebas (*independent*)
   C. *mutually excluve*
   D. *mutually exhaustive*

3) Suatu kotak berisi lima kelereng merah dan tiga kelereng putih. Dari kotak itu, diambil sebuah kelereng secara random. Berapakah probabilitas yang diperoleh jika mendapat kelereng merah dari pengambilan itu?
   A. 3/8
   B. 5/8
   C. 3/5
   D. 3/10

4) Diketahui, probabilitas seorag siswa SMU dapat lulus ujian tahun yang akan datang = 0,80. Sedang probabilitas seorang nasabah bank A memenangkan undian berhadiah = 0,15. Seorang siswa SMU kelas 3, dia menjadi pelanggan Bank A, berapakah probabilitas ia lulus SMU tahun depan dan mendapat undian!
   A. 0,95
   B. 0,12
   C. 0,83
   D. 0,65

5) Suatu desa memiliki 2500 penduduk. Dari probabilitas setiap 1000 orang, pada umumnya dua orang menderita tekanan darah tinggi (P= 0,002). Bila dilakukan penelitian pada desa itu, hitunglah probabilitas jika terdapat enam orang yang menderita tekanan daah tinggi!
   A. 0,02
   B. 0,146223
   C. 0,002
   D. Alternatif jawaban yang tersedia salah semua.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

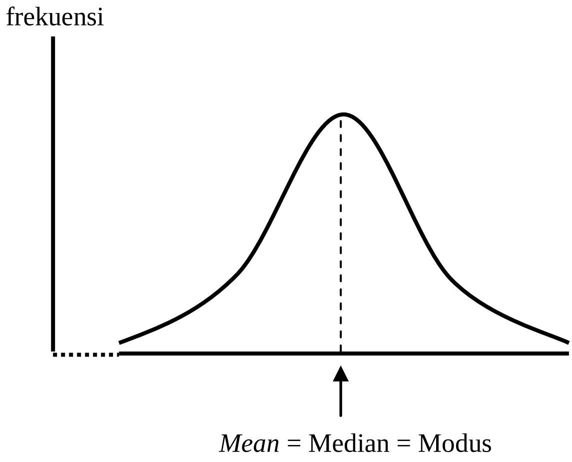
Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Kurva Normal

A. PENDAHULUAN

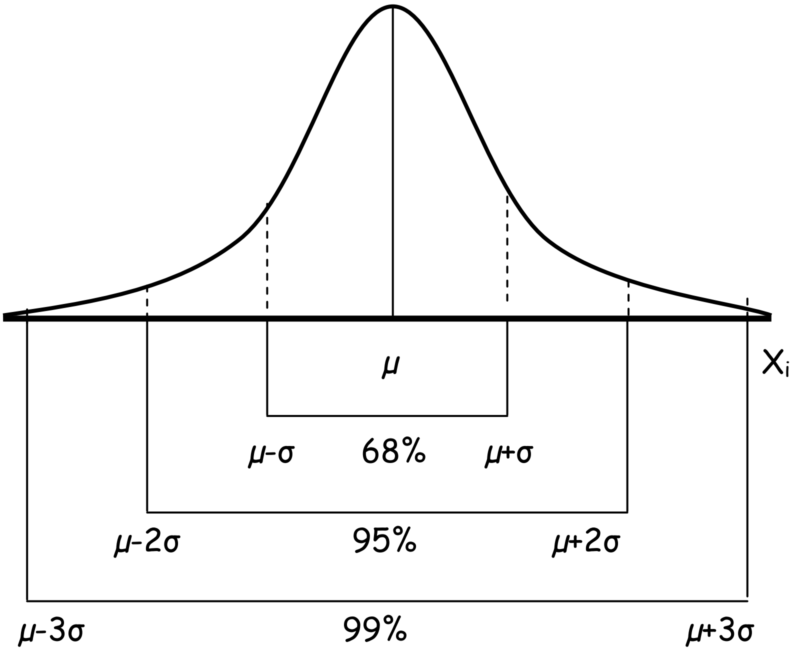
Curve atau kurva sering disebut dengan lengkung. Kurva menunjukkan distribusi dari data. Biasanya, sekelompok data yang nilainya sedikit berada di pinggir. Semakin besar nilainya semakin banyak di tengah-tengah seperti pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3.
Kurva Normal serta Letak *Mean*, Median, dan Modus

Kurva normal biasanya digunakan untuk menggambar data yang bersifat *continuous* atau sinambung, misalnya berat beras dapat dihitung dalam pecahan kilogram. Akan tetapi, memang kadang-kadang dapat digunakan pada *discrete*, tetapi perlu penyesuaian.

Kurva yang kita pelajari adalah kurva yang normal, yaitu kurva yang belahan kirinya simetri dengan belahan bagian kanan. Kadang-kadang dikatakan seperti bel yang ditelungkupkan. Kurva normal ini luasnya sebanyak 100% sehingga bagian kirinya = 50% dan bagian kanannya 50%. Dengan dasar kurva normal inilah, biasanya dilakukan analisis statistik. Di samping itu, dalam kurva normal, terjadi ketentuan sebagai berikut. Banyaknya data yang besarnya antara μ - σ sampai dengan μ + σ = 68%, banyaknya data yang besarnya antara μ - 2σ sampai dengan μ + 2σ = 95%, dan banyaknya data yang besarnya antara μ - 3σ sampai dengan μ + 3σ = 99%. Lihat Gambar 1.4.



Gambar 1.4.
Luas Kurva Normal pada Berbagai Nilai μ - σ

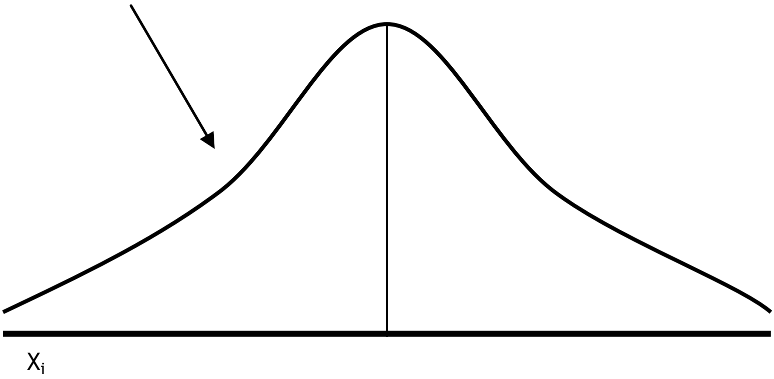
B. PERSAMAAN KURVA NORMAL

Lengkung atau kurva normal memiliki persamaan sebagai berikut.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left[(X-\mu)/\sigma\right]^2}$$

Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 1.5.

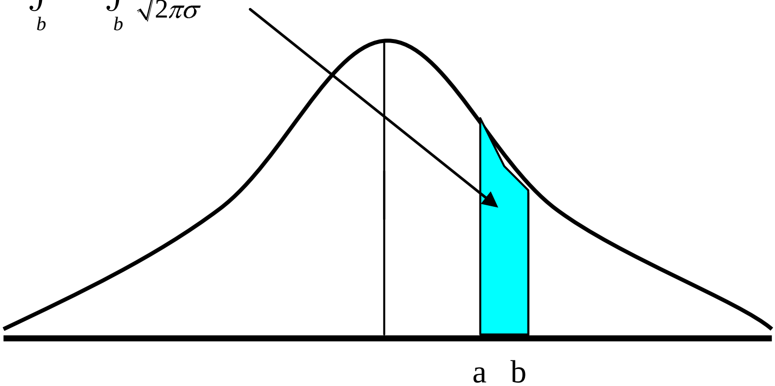
$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}[(X-\mu)/\sigma]^2}$$



Gambar 1.5.
Persamaan Garis Lengkung (Kurva Normal)

Luas antara titik a dan titik b dapat dicari dengan integral antara titik a dan titik b.

$$\int_b^a Y = \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}[(X-\mu)/\sigma]^2}$$



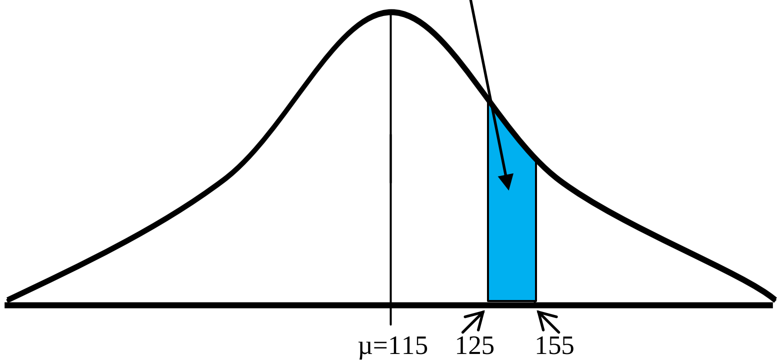
Gambar 1.6.
Luas Daerah Kurva Normal Bila Dicari dengan Integral Terbatas

Misalnya, suatu perusahaan memiliki pelanggan yang jumlahnya sangat banyak. Omzet penjualan kepada setiap pelanggan itu setiap beli rata-rata Rp115.000.000 dengan devisi standarnya Rp15.000.000.

Kita akan mencari berapa persenkah pelanggan yang dapat menghasilkan omzet antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000?

Gunakan data dalam contoh untuk membuat persamaan garis Y dan mencari luas di bawah lengkung dengan menggunakan integral terbatas antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000 (untuk mempermudah, disingkat menjadi 125 sampai dengan 155) dari persamaan itu.

$$\int_{155}^{125} Y = \int_{155}^{125} \frac{1}{\sqrt{2\pi 15}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(X-115\right)/15\right]^2} = 0,2476$$



X_i = Omset penjualan

Gambar 1.7.

Persentase pelanggan yang omzetnya antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000 dicari dengan integral. Berarti pelanggan yang menghasilkan omzet penjualan perusahaan antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000 sebanyak 0,2476 atau 24,76%.

C. PENGGUNAAN TABEL Z UNTUK MENCARI LUAS KURVA NORMAL

Kita memang dapat menghitung persentase banyak pelanggan yang omzetnya antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000 dengan integral terbatas seperti pada contoh di atas. Namun, cara ini cukup rumit dan memakan waktu lama. Kita dapat menghitungnya dengan lebih mudah, yaitu menggunakan tabel kurva normal. Untuk menghitung dengan tabel kurva normal ini, sebelumnya nilai X (dalam contoh omzet penjualan), harus diubah menjadi Z. Pada kurva normal dengan skala ini, nilai μ dianggap = 0 dan nilai σ dianggap = 1. Jadi, nilai Z dapat dicari dengan rumus berikut.

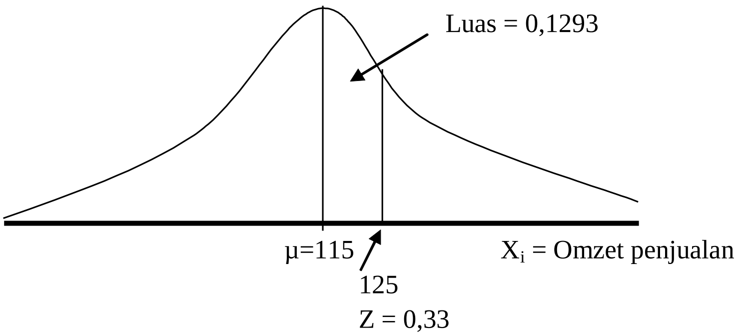
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Apabila nilai X lebih besar dari rata-rata (μ), nilai Z positif. Kalau X lebih kecil dari μ, nilai Z akan negatif.

Berdasarkan nilai Z, kita dapat menghitung luas kurva normal antara Z = 0 (pada *mean* atau rata-rata, mula-mula = μ) sampai dengan nilai Z pada titik yang kita kehendaki. Sebagai contoh, kita akan menghitung luas antara rata-rata (omzet penjualan Rp115.000.000) sampai dengan omzet penjualan = Rp 125.000.000 (X_1). Nilai Z_1 dapat dihitung dengan rumus Z.

$$Z_1 = \frac{125 - 115}{15} = 0.3333 \text{ dibulatkan} = 0{,}33$$

Maka, luas antara Z = 0 sampai dengan Z_1 = 0,33 = 0,1293.

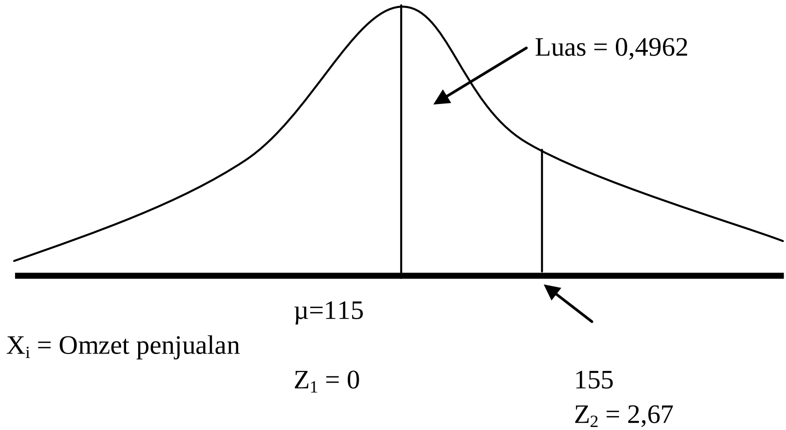


Gambar 1.8.
Luas antara Z = 0 sampai dengan Z = 0,33

Sekarang, kita cari luas antara rata-rata sampai dengan omzet penjualan Rp155.000.000.
Nilai Z_2 = (X_2 = Rp 155 000 000).

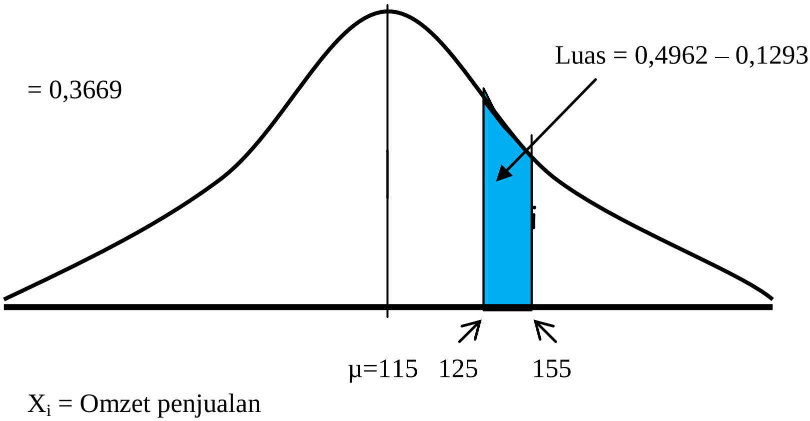
$$Z_1 = \frac{155 - 115}{15} = 2{,}6666 \text{ dibulatkan} = 2{,}67$$

Luas antara Z = 0 sampai dengan Z_2 = 2,67 = 0,4962.



Gambar 1.9.
Luas antara Z = 0 sampai dengan Z = 2,67

Persentase pelanggan yang omzetnya antara Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000 adalah luas Z_0 sampai dengan Z_2 dikurangi Z_0 sampai dengan Z_1 = 0,4962 – 0,1293 = 0,3669.

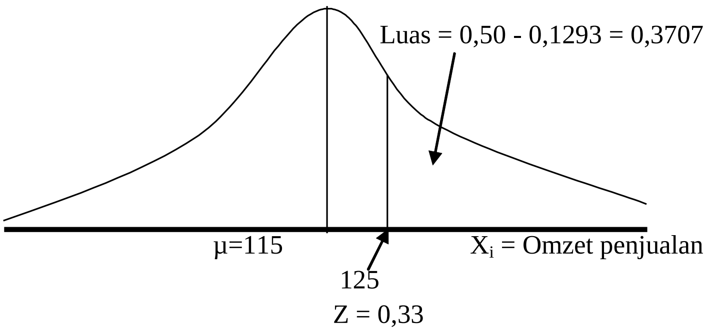


Gambar 1.10
Persentase Pelangganan yang Besarnya Omzet antara
Rp125.000.000 sampai dengan Rp155.000.000.

Berikut dijelaskan beberapa contoh soal kurva normal dengan menggunakan data pada contoh sebelumnya.

1. Hitunglah persentase pelanggan yang besar omzetnya lebih dari Rp125.000.000!

   Untuk nilai omzet penjualan kepada pelanggan Rp125.000.000, nilai Z nyz = Z_1 sudah tahu = 0,33 dan luas antara Z_0 sampai dengan Z_1 = 01293. Jadi, luas kurva normal di atas Z1 = 0,50- 0,1293 = 0,3707.



Gambar 1.11.
Luas antara Z = 0 sampai dengan Z = 0,33

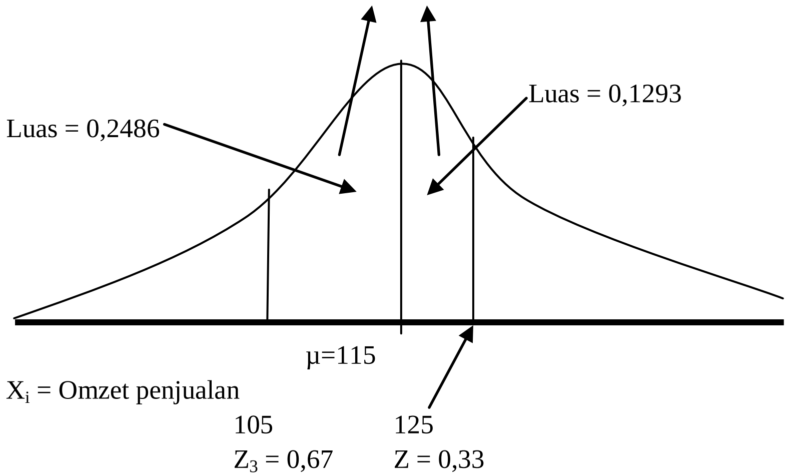
2. Menghitung persentase pelanggan yang omzetnya antara Rp105.000.000 sampai dengan Rp125.000.000.

   Luas antara Z_0 sampai dengan Z_1 sudah kita ketahui sebesar 0,1293. Tinggal kita hitung antara Z_3 (Rp 105 000 000) sampai dengan Z_0 (Rp115.000.000).

$$Z_3 = \frac{105 - 115}{15} = 0,6666 \text{ dibulatkan} = 0,67$$

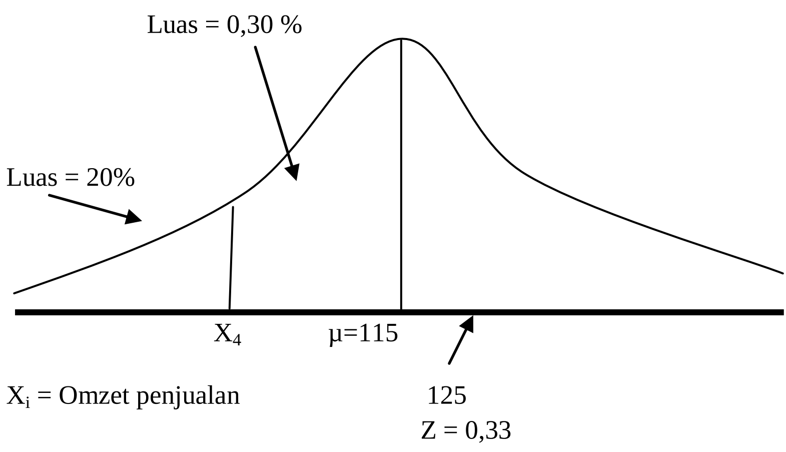
   Luas antara Z = -0,67 sampai Z_0 = 0,2486. Jadi, pelanggan yang menghasilkan omzet penjualan antara Rp105.000.000 sampai dengan Rp125.000.000 = 0,1293 + 0,2486 = 0,3779.

0,2486 + 0,1293 = 0,3779



Gambar 1.12.
Luas antara Z = 0 sampai dengan Z = 0,33

3. Hitunglah 20% pelanggan yang termasuk kelompok penghasil terendah. Penghasil omzet terendah berarti pada kurva terletak pada ekor kiri kurva.



Gambar 1.13.
Luas antara Z = 0 sampai dengan Z = 0,33

Pelanggan yang termasuk 20% penghasil omzet terendah berada di ekor kiri, sedangkan yang ada pada tabel adalah yang terletak antara Z_4 sampai Z_0. Luasnya = 0,50 – 0,20 = 0,30. Maka, nilainya dalam tabel, kita cari pada tubuh tabel angka terdekatnya = 0,2995 terletak pada nilai Z = -0,84. Negatif karena di kiri. Lalu, kita masukkan dalam persamaan Z.

$$-0,84 = \frac{X_1 - 115}{15}$$

$$-0,84(15) = X_1 - 115 \; 0,84(15) = X_4 - 115.$$

Jadi, X_4 = 115 – 0,84 = 102,4.
Berarti batas tertinggi dari omzet 20% pelanggan terendah = Rp102.400.000.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jelaskan yang dimaksud dengan kurva normal itu? Data berikut digunakan untuk menjawab soal nomor 2 sampai dengan nomor 5: Berdasarkan sensus yang belum lama ini dilakukan, diperoleh rata-rata penghasilan setiap kepala keluarga (KK) setiap bulan Rp1.200.000 dengan deviasi standar Rp121.000.
2) Berdasarkan data yang ada, hitunglah berapa persen KK yang memiliki penghasilan Rp1.400.000 atau lebih setiap bulan!
3) Hitunglah berapa persenkah KK yang memiliki penghasilan antara Rp1.300.000,- sampai dengan Rp1.300.000,-!
4) Hitunglah berapa persenkah KK yang memiliki penghasilan antara Rp1.100.000,- sampai dengan Rp.1.400.000,-!
5) Bila 15% dari KK yang berpenghasilan terendah akan ditransmigrasikan, berapakah batas penghasilan per bulan KK yang ditransmigrasikan?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Jawaban dapat dilihat pada buku modul ini karena di sini secara lengkap sudah dijelaskan.
2) Dengan μ = Rp1.200.000 dan σ = Rp121.000,-, persentase kepala keluarga yang penghasilan per bulannya antara *mean* (μ) sampai dengan Rp1.400.000,- dapat dicari dalam tabel Z = 0,4505 sehingga KK yang penghasilannya lebih dari Rp1.400.000,- = 0,50 – 0,4505 = 0,0495 atau 45,05%.
3) Kita cari dulu luas kurva normal antara *mean* sampai dengan Rp1.400.000,- kemudian dikurang luas antara *mean* sampai dengan Rp1.300.000,-.
4) Dapat dihitung seperti cara pada contoh b dalam kegiatan belajar ini.
5) Dengan luas 15% nilai penghasilan terendah kita dapat menghitung kuas antara X yang dicari dengan *mean*, yaitu 0,5 – 0,15 = 0,35. Cari luas terdekat, yaitu 0,3431, nilai Z-nya = 1,05. Dengan memanfaatkan nilai-nilai dalam persamaan ini, dapat dicari X (batas penghasilan terendahnya) = Rp1.072.950,-.

RANGKUMAN

Kurva normal adalah kurva yang simetris, yaitu belahan kanannya sama dengan belahan kirinya, hanya bentuknya terbalik. Luas di bawah lengkung (kurva) itu luasnya = 100% sehingga belahan kirinya = belahan kanannya = masing-masing 50%. Untuk mencari luas kurva antara μ sampai dengan titik batas yang kita kehendaki, cari dulu nilai Z-nya dengan rumus $Z = (X - \mu)/\sigma$. Kemudian luasnya dapat dicari dalam kurva normal. Untuk mencari luas yang kita kehendaki, tinggal menyesuaikannya.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Data ini digunakan untuk menjawab soal nomor 1 sampai 3. Berdasarkan sensus yang belum lama ini dilakukan, diperoleh data mengenai rata-rata penghasilan kepala-kepala keluaga (KK) setiap bulan Rp1.225.000 dengan deviasi standar Rp133.000.

1) Berdasarkan data yang ada, hitunglah berapa persen KK yang memiliki penghasilan Rp1.000.000 atau lebih setiap bulan!
   A. 1,6917
   B. 0,4535
   C. 0,0465
   D. 0,9535

2) Berdasarkan data yang ada, hitunglah berapa persen KK yang memiliki penghasilan Rp1.000.000 sampai dengan Rp1.350.000!
   A. 0,8398
   B. 0,3264
   C. 0,7799
   D. 0,1271

3) Bila 15% dari KK yang berpenghasilan terendah akan ditransmigrasikan, berapakah batas penghasilan per bulan KK yang ditransmigrasikan!
   A. 1778,45
   B. 1178,45
   C. 1271,55
   D. 46,55

Data berikut untuk menjawab soal nomor 4 dan 5. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, ternyata hasil panen yang diperoleh oleh setiap petani di Kabupaten Antah-berantah setiap tahun rata-rata 926 kg padi dengan deviasi standar 95 kg. Berdasarkan data itu, dipilihlah secara random seorang petani untuk diteliti. Maka:

4) Hitunglah probabilitas hasil panen petani yang setiap tahunnya sebanyak 1 ton padi atau lebih!
   A. Probabilitasnya = 0,2794
   B. Probabilitasnya = 0,0,7789

C. Probabilitasnya = 0,2206
D. Probabilitasnya = 0,7794

5) Hitunglah probabilitas hasil panen petani yang setiap tahunnya sebanyak 750 kg sampai 1 ton padi!
A. Probabilitasnya = 0,4676
B. Probabilitasnya = 0,7472
C. Probabilitasnya = 0,1884
D. Probabilitasnya = 0,3554

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) C
2) B
3) D
4) B
5) B

Tes Formatif 2
1) D
2) C
3) B
4) C
5) B

Tes Formatif 3
1) D
2) C
3) B
4) C
5) B

Daftar Pustaka

Churchman, C.W., Ackoff, R.L. dan Arnoff, E.L. (Tanpa Tahun) *Introduction to* Riset operasi. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Render, Barry; Ralph M. Stair Jr; dan Michael E. Hanna. (2006). *Quantitative Analysis for Management*. Edisi ke-9. New Jersey: Pearson, Prentice Hall.

Subagyo, P., M. Asri, dan T.H. Handoko. (1985). *Dasar-dasar Riset Operasi*. Yogyakarta: BPFE.