PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINEAR $2^x + 2^y = z^2$

Agus Sugandha[1], Agustini Tripena Surbakti[2], Agung Prabowo[3]

1,2,3) Staf Pengajar pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Unsoed

Agussugandha74@gmail.com; tripena1960@yahoo.co.id; agung_nghp@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas bagaimana mencari bentuk umum solusi persamaan Diophantine non linear $2^x + 2^y = z^2$ t dengan x, y, z bilangan bulat non negatif. Proses mencari solusi dengan induksi matematika.

Kata Kunci : Persamaan Diophantine Non linear, Solusi, Induksi Matematika.

PENDAHULUAN

Carl Friedrich Gauss (1977-1855) menemukan teori kekongruenan yang merupakan fondasi teori bilangan modern. Teori kekongruenan ini sebenarnya merupakan pengembangan dari relasi keterbagian dan sifat sifatnya. Kemudian dikembangkan oleh Diophantine yang disebut dengan teori kekongruenan linier. Fokus dari teori kekongruenan linier ini adalah mencari solusi (jika ada) dari persamaan dalam bentuk $ax \equiv b \bmod(n)$. Artinya andaikan x_0 adalah solusi dari kekongruenan linier $ax \equiv b \bmod(n)$ maka dipenuhi $ax_0 \equiv b \bmod(n)$.Akhirnya dikembangkan mencari solusi untuk sistem perkongruenan linear. Fermat (1980) memperkenalkan persamaan Diophantine non linier dalam bentuk $x^n + y^n = z^n$. Secara khusus untuk $n = 2$ maka semua solusinya disebut dengan tripel phytagoras. Bentuk bentuk persamaan Diophantine non linier terus berkembang. Begitu pula penelitian yang melibatkan persamaan Diophantine non linier. Acu (2007) membuktikan bahwa (3,0,3) dan (2,1,3) merupakan solusi dari persamaan Diophantine non linier $2^x + 5^y = z^2$. Sroysang (2012) menemukan bahwa solusi tunggal dari persamaan diophantine non linier $3^x + 5^y = z^2$ adalah (1,0,2). Kemudian Banyat Sroysang (2013) menemukan tiga solusi dari persamaan Diophantine non linier $2^x + 3^y = z^2$ yaitu (0,1,2),(3,0,3) dan (4,2,5).Srijan Tanakan (2014) menemukan solusi tunggal dari persamaan Diophantine non linier $19^x + 2^y = z^2$ adalah (0,3,3). Sroysang (2014) membuktikan bahwa (1,0,2) merupakan solusi tunggal dari persamaan diophantine $3^x + 5^y = z^2$ Dari beberapa hasil penelitian diatas menimbulkan pertanyaan untuk mencari bentuk solusi persamaan diophntine non linier dalam bentuk lain yaitu $2^x + 2^y = z^2$ dimana x, y, z bilangan bulat non negatif.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literature dan jurnal

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema utama

Dari persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$. Untuk mencari solusinya dibagi menjadi 3 kasus

1. Kasus $x = y$

   Bentuk solusi persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$ adalah (x,y,z)=$(2k-1, 2k-1, 2^k)$ dimana k adalah bilangan bulat positif

   Bukti dengan menggunakan induksi matematika

i) Untuk k=1 diperoleh (x,y,z)=(1,1,2)

   $2^1 + 2^1 = 2^2$ kalimat yang benar

ii) Diasumsikan benar untuk n=k

   Artinya (x,y,z)=$(2k-1, 2k-1, 2^k)$ adalah solusi dari persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$

iii) Harus dibuktikan benar untuk n=k+1

   Artinya harus dibuktikan bahwa (x,y,z)=$(2k+1, 2k+1, 2^{k+1})$ adalah solusi dari persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$. Ekuivalen dengan membuktikan $2^{2k+1} + 2^{2k+1} = z^2$, dengan z=$2^{k+1}$

   Dari $2^{2k-1} + 2^{2k-1} = z^2$, dengan z= 2^{k+1}

$$2^2 2^{2k-1} + 2^2 2^{2k-1} = 8.2^{2k-1}$$

$$=4.2^{2k} = (2.\,2^k)^2 = \left(2^{k+1}\right)^2 = z^2$$

   Terbukti benar untuk n=k+1

   Sehingga terbukti pula bahwa $2^x + 2^y = z^2$ adalah (x,y,z)=$(2k-1, 2k-1, 2^k)$, dengan k bilangan bulat positif.

ii) kasus x>y

Bentuk solusi dari persamaan diophantine adalah $(x, y, z) = (2k+3, 2k, 3.2^k)$ dimana k adalah bilangan bulat non negatif.

Akan dibuktikan dengan **induksi matematika**:

*) untuk k=1, diperoleh (5,2,6) adalah solusi. (pernyataan yang benar)

Hal ini dikarenakan

$2^5 + 2^2 = 6^2$ (benar)

**) diasumsikan pernyataan benar untuk n=k artinya $(x, y, z) = (2k + 3,2k, 3.2^k)$ adalah solusi dari persamaan diophantine

***) harus dibuktikan pernyataan benar untuk n=k+1, Artinya harus dibuktikan bahwa$(x, y, z) = (2k + 5,2k + 2,3.2^{k+1})$ adalah solusi dari persamaan diophantine

Artinya harus dibuktikan bahwa $(x, y, z) = (2k + 5,2k + 2,3.2^{k+1})$ adalah solusi dari persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$. Ekuivalen dengan membuktikan $2^{2k+5} + 2^{2k+2} = z^2$, dengan z=$3.2^k$

Dari $2^{2k+3} + 2^{2k} = z^2$, dengan z= 3.2^k

$2^2 2^{2k+3} + 2^2.2^{2k} = 2^2.z^2$=$(2.z)^2 = (2.3.2^k)^2 = (3.2^{k+1})^2$

Terbukti benar untuk n=k+1

Sehingga terbukti pula bahwa solusi $2^x + 2^y = z^2$ untuk x>y adalah (x,y,z)=$\left(2k + 5,2k + 2, 3.2^{k+1}\right)$, dengan k bilangan bulat positif.

(iii) kasus x<y

Sehingga solusi persamaan diophantine $2^x + 2^y = z^2$ adalah

(x,y,z)=$\left(2k, 2k + 3, 3.2^k\right)$

Dibuktikan dengan induksi matematika

untuk k=1, diperoleh (5,2,6) adalah solusi. (pernyataan yang benar)

Hal ini dikarenakan

$2^2 + 2^5 = 6^2$ (benar)

**) diasumsikan pernyataan benar untuk n=k artinya $(x, y, z) = (2k, 2k + 3,3.2^k)$ adalah solusi dari persamaan diophantine

***) harus dibuktikan pernyataan benar untuk n=k+1, Artinya harus dibuktikan bahwa$(x, y, z) = (2k + 2,2k + 5,3.2^{k+1})$ adalah solusi dari persamaan diophantine

Dari $2^{2k} + 2^{2k+3} = z^2$

$2^2 2^{2k} + 2^2.2^{2k+3} = 2^2.z^2$=$(2.z)^2 = (2.3.2^k)^2 = (3.2^{k+1})^2$

Terbukti benar untuk n=k+1

Sehingga terbukti pula bahwa solusi $2^x + 2^y = z^2$ untuk x>y adalah (x,y,z)=$\left(2k + 2,2k + 5, 3.2^{k+1}\right)$, dengan k bilangan bulat positif.

KESIMPULAN

Persamaan Diophantine Non Linier $2^x + 2^y = z^2$ mempunyai solusi dalam bentuk :

1. jika $x = y$ maka solusinya adalah (x,y,z)=$(2k-1, 2k-1, 2^k)$ dengan k bilangan bulat positif
2. jika $x < y$ maka solusinya dalam bentuk (x,y,z)=$(2k+2, 2k+5, 3.2^{k+1})$ dengan k bilangan bulat positif
3. jika jika $x > y$ maka solusinya dalam bentuk (x,y,z)=$(2k+3, 2k, 3.2^k)$ dengan k bilangan bulat positif

DAFTAR PUSTAKA

Burton. (1997). *Elementary Number Theory*, John Wiley & Sons.

Fergy, Julius (2013), A *Note on Two Diophantine Equation* $17^x + 19^y = z^2$ *and* $71^x + 73^y = z^2$,Chitkara University.

Sroysang. (2012). *On The Diophantine Equation* $3^x + 5^y = z^2$, ijpam.eu.

Suvarnamani. (2010). Solutions of the diophantine equation $2^x + p^y = z^2$ *,www.journalshub.com.*

Sroysang. (2013). *More On The Diophantine Equation* $2^x + 3^y = z^2$*, ijpam.eu*

Srijan. (2014). *On the Diophantine Equation* $19^x + 2^y = z^2$*, www.m-hikari.com.*

Sukirman. (2005)*. Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator Yogyakarta.