PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINEAR $13^x + 17^y = z^2$

Agus Sugandha[1], Agustini Tripena Surbakti[2], Agung Prabowo[3]

1,2,3) Staf Pengajar pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Unsoed

Agussugandha74@gmail.com; tripena1960@yahoo.co.id; agung_nghp@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas bagaimana membuktikan persamaan Diophantine non linear $13^x + 17^y = z^2$ tidak mempunyai solusi, dengan x, y, z bilangan bulat non negatif. Proses Pembuktian menggunakan konjektur Catalan.

Kata Kunci : Persamaan Diophantine Non linear, Solusi, Konjektur Catalan

PENDAHULUAN

Teori kekongruenan pertama kali ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss (1977-1855) yang merupakan karya monumental dimana hal ini merupakan fondasi dari teori bilangan modern. Kekongruenan ini sebenarnya merupakan pengembangan dari relasi keterbagian. Kemudian dikembangkan oleh Diophantine yang disebut dengan teori kekongruenan linier. Fokus dari teori kekongruenan linier ini adalah mencari solusi (jika ada) dari persamaan dalam bentuk $ax \equiv b \bmod(n)$. Artinya andaikan x_0 adalah solusi dari kekongruenan linier $ax \equiv b \bmod(n)$ maka dipenuhi $ax_0 \equiv b \bmod(n)$. Fermat (1980) memperkenalkan persamaan Diophantine non linier dalam bentuk $x^n + y^n = z^n$. Secara khusus untuk $n = 2$ maka semua solusinya disebut dengan tripel phytagoras.

Bentuk bentuk persamaan Diophantine non linier terus berkembang. Begitu pula penelitian yang melibatkan persamaan Diophantine non linier. Acu (2007) membuktikan bahwa (3,0,3) dan (2,1,3) merupakan solusi dari persamaan Diophantine non linier $2^x + 5^y = z^2$.

Sroysang (2012) menemukan bahwa solusi tunggal dari persamaan diophantine non linier $3^x + 5^y = z^2$ adalah (1,0,2). Kemudian Banyat Sroysang (2013) menemukan tiga solusi dari persamaan Diophantine non linier $2^x + 3^y = z^2$ yaitu (0,1,2),(3,0,3) dan (4,2,5).Srijan Tanakan (2014) menemukan solusi tunggal dari persamaan Diophantine non linier $19^x + 2^y = z^2$ adalah (0,3,3). Dari beberapa hasil penelitian diatas menimbulkan pertanyaan untuk mencari solusi persamaan Diophantine non linier dalam bentuk lain yaitu $13^x + 17^y = z^2$ dimana x, y, z bilangan bulat non negatif.

METODE PENELITIAN

Metode Penelitian yang digunakan adalah studi literature dan jurnal

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proposisi (Konjektur Catalan)

$(3,2,2,3)$ adalah solusi tunggal (a,b,x,y) untuk persamaan Diophantin $a^x - b^y = 1$ dengan a,b,x dan y merupakan bilangan bulat dengan min $\{a,b,x,y\} > 1$

Teorema 1.1 :

Persamaan Diophantine $13^x + 17^y = z^2$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat non negatif

Akan ditunjukkan Persamaan Diophantin $13^x + 17^y = z^2$ tidak mempunyai solusi.

Bukti:

Dari Persamaan Diophantin $13^x + 17^y = z^2$ dapat ditinjau dari tiga kasus:

Kasus 1: $x = 0$

$$1 + 17^y = z^2$$
$$17^y = z^2 - 1$$
$$17^y = (z-1)(z+1)$$

Untuk setiap bilangan bulat tak negatif $a \text{ dan } b$, terdapat bilangan $z \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $17^a = (z-1)$ dan $17^b = (z+1)$ dengan $a < b$.

Selanjutnya

$$17^y = (z-1)(z+1)$$
$$17^y = 17^a \cdot 17^b$$
$$17^y = 17^{a+b}$$

Diperoleh $a + b = y$

Dengan menggunakan manipulasi berikut:

$$17^b - 17^a = (z+1) - (z-1) = 2$$

Untuk $a < b$, persamaan $17^b - 17^a = 2$ mempunyai jawab $17^a = 1$

Apabila $17^a = 1$ maka $a = 0$

$$17^{a} = \text{z - 1}$$
$$1 = \text{z - 1}$$
$$\text{z} = 2$$

Akibatnya $17^{b} = z + 1 = 3$. Tidak ada b yang memenuhi.

Dengan demikian, untuk $x = 0$ impossible.

Kasus 2: $y = 0$

$$13^{x} = z^{2} - 17^{y}$$
$$13^{x} = z^{2} - 1$$
$$13^{x} = (z-1)(z+1)$$

Untuk setiap bilangan bulat tak negatif $a \text{ dan } b$, terdapat bilangan $z \in Z$ sedemikian sehingga $13^{a} = (z-1)$ dan $13^{b} = (z+1)$ dengan $a < b$.

Selanjutnya

$$13^{x} = (z-1)(z+1)$$
$$13^{x} = 13^{a} \cdot 13^{b}$$
$$13^{x} = 13^{a+b}$$

Diperoleh $a + b = x$

Dengan menggunakan manipulasi berikut:

$$13^{b} - 13^{a} = (z+1) - (z-1) = 2$$

Untuk $a < b$, persamaan $13^{b} - 13^{a} = 2$ mempunyai jawab $13^{a} = 1$

Apabila $13^{a} = 1$ maka $a = 0$

$$13^{a} = \text{z - 1}$$
$$1 = \text{z - 1}$$
$$\text{z} = 2$$

Akibatnya $13^{b} = z + 1 = 3$. Tidak ada b yang memenuhi.

Dengan demikian, untuk $y = 0$ impossible.

Kasus 3: $x > 0$ **dan** $y > 0$

Dari $13^{x} + 17^{y} = z^{2}$

$$17^{y} = z^{2} - 13^{x}$$
$$17^{y} = z^{2} - \left(\sqrt{13}\right)^{2x}$$
$$17^{y} = \left(z - \sqrt{13}^{\,x}\right)\left(z + \sqrt{13}^{\,x}\right)$$

Misalkan,

$$17^a = z - \sqrt{13}^x \text{ dan } 17^b = z + \sqrt{13}^x$$

Untuk x ganjil dengan $x = 2n+1,\ n = 0,1,2,...$ tidak dapat ditentukan nilai a dan b .

Untuk x genap dengan $x = 2n,\ n = 1,2,...$ tidak dapat ditentukan nilai a dan b .

$$17^a = z - 13^b$$

$$17^b - 17^a = 2\sqrt{13}^x$$

$$17^a\left(17^{b-a} - 1\right) = 2\sqrt{13}^x$$

$$17^a = 1$$

$$a = 0$$

$$17^{b-a} - 1 = 2\sqrt{13}^x$$

$$17^{b-a} - 2\sqrt{13}^x = 1$$

Menurut konjektur Catalan $a^x - b^y = 1$ analog $-2\sqrt{13}^x - \left(-17^{b-a}\right) = 1$

$$a = -2\sqrt{13}, b = -17, x = x, y = b - a = -17 + 2\sqrt{13}$$

Bertentangan dengan Konjektur Catalan. Jadi, tidak ada solusi yang memenuhi

Corolary 1.2 :

Persamaaan Diophantine $13^x + 17^y = w^4$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat non negatif.

Bukti :

Andaikan terdapat bilangan bulat non negatif x, y dan w sedemikian sehingga memenuhi $13^x + 17^y = w^4$. Jika $z = w^2$ maka $13^x + 17^y = z^2$. Menurut teorema 1.1 persamaan diophantine $13^x + 17^y = z^2$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat non negatif. Sehingga terjadi kontradiksi.

KESIMPULAN

Persamaan Diophantine Non Linier $13^x + 17^y = z^2$ tidak mempunyai solusi untuk x, y, z bulat non negatif.

DAFTAR PUSTAKA

Burton. (1997). *Elementary Number Theory*, John Wiley & Sons.

Fergy, Julius. (2013). A *Note on Two Diophantine Equation* $17^x + 19^y = z^2$ *and* $71^x + 73^y = z^2$,Chitkara University.

Sroysang. (2012). *On The Diophantine Equation* $3^x + 5^y = z^2$, ijpam.eu.

Sroysang. (2013). *On The Diophantine Equation* $3^x + 17^y = z^2$, ijpam.eu.

Sroysang. (2013). *More On The Diophantine Equation* $2^x + 3^y = z^2$*, ijpam.eu.*

Srijan. (2014). *On the Diophantine Equation* $19^x + 2^y = z^2$*, www.m-hikari.com.*

Sukirman. (2005). *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator Yogyakarta.