Aplikasi Residu Untuk Menghitung Integral

Dina Thaib
UPBJJ-UT Bandung, Bandung

dinathaib@ut.ac.id

Makalah ini memberi gambaran bagaimana teori residu dapat digunakan dalam menentukan nilai integral dari berbagai fungsi antara lain :

1. Integral lintasan untuk suatu fungsi kompleks f(z) atas suatu lintasan C
2. Integral (riel) tak wajar berbentuk $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ dengan $f(x)$ fungsi rasional $a \in R^+$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\; dx$ atau $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax$ dengan $a \in R^+$
3. Integral tentu berbentuk $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ dengan F(sin θ , cos θ) merupakan fungsi rasional dalam sinθ dan cos θ dan nilai fungsi berhingga pada interval [0 , 2π].

Pengertian keanalitikan dan singularitas fungsi kompleks dibahas untuk menentukan kutub dan residu dari fungsi kompleks tersebut, dan selanjutnya dengan menggunakan resdidu nilai integral dari fungsi kompleks dapat diperoleh. Dengan merubah bentuk integral tak wajar dan integral tentu dari fungsi rasional yang didefinisikan kedalam bentuk integral kompleks, nilai integral tak wajar dan integral tentu dari fungsi rasional tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan residu.

PENDAHULUAN.

Permasalahan fisika menuntut penyelesaian bentuk integral dari berbagai fungsi, salah satu diantaranya adalah integral dari suatu fungsi kompleks atas suatu lintasan C, yang disebut sebagai integral lintasan. Nilai integral fungsi kompleks dapat bergantung dari bentuk lintasan, yang berupa segmen garis, kurva, lingkaran atau ellips. Dalam keadaan khusus integral lintasan bebas terhadap lintasan artinya nilai integral akan bernilai sama walaupun lintasannya berbeda asalkan titik-titik ujungnya tetap (Mursita, D, 1998).

METODOLOGI

Pada bagian ini diperkenalkan beberapa pengertian keanalitkan, singularitas, kutub dan residu dari fungsi kompleks.

.

1. Fungsi Analitik.

Misalkan D suatu himpunan buka dari bilangan kompleks . Fungsi kompleks f(z) yang merupakan pemetaan dari domain D ke D dikatakan analitik pada D bila f'(z) ada untuk ∀ z ∈ D atau berlaku Persamaan Cauchy Riemann (PCR) untuk ∀

$z \in D$. Bila $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, maka bentuk PCR adalah $U_x(x,y) = V_y(x,y)$ dan $U_y(x,y) = -V_x(x,y)$, dengan U_x dan U_y berturut-turut turunan parsial pertama terhadap x dan y. Jika f(z) dinyatakan dalam bentuk $f(z) = U(r,\theta) + i\,V(r,\theta)$, maka PCR :

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta \;dan\; \frac{1}{r} U_\theta = -V_r$$

Fungsi f(z) dikatakan analitik di $z = z_0$ bila f(z) analitik pada lingkungan dari z_0 (lingkungan dari z_0 adalah lingkaran buka yang berpusat di z_0 dan berjari-jari r). Fungsi f(z) disebut entire bila f(z) analitik untuk $\forall$ z (f(z) berlaku PCR $\forall$ z).

- Contoh.

  Fungsi $f(z) = 3x + y + i(3y-x)$ adalah entire . Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

  $U(x,y) = 3x + yV(x,y) = 3y - x$

  $U_x(x,y) = 3 \qquad U_y(x,y) = 1$

  $V_x(x,y) = -1 \qquad V_y(x,y) = 3$

  Karena $U_x(x,y) = V_y(x,y)$ dan $U_y(x,y) = -V_x(x,y)$, maka PCR berlaku $\forall$ $z = x + iy$ akibatnya f(z) entire.

2. Titik Singular.

z_0 disebut titik singular dari f(z) bila f(z) gagal analitik di z_0 tetapi analitik pada suatu titik dari setiap lingkungan dari z_0 . Titik singular z_0 disebut terisolasi bila ada lingkungan dari z_0 yang mengakibatkan f(z) analitik.

- Contoh .

  Misalkan $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2(z^2+1)}$, maka $z = 0$ dan $z = \pm\, i$ titik singular terisolasi

3. Deret Laurent.

Bila f(z) analitik pada $0 < | z - z_0 | < R$ (lingkaran dengan pusat z_0 dan jari-jari R) maka untuk setiap titik z pada lingkaran itu , f(z) dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{.................}(|z - z_0| < R_0).$$

$$dengan\ a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2,............)$$

Deret di atas disebut sebagai deret Taylor dititik z_0 dan daerah $| z - z_0 | < R_0$ disebut daerah kekonvergenan atau keanalitikan deret. Bila f(z) fungsi entire maka daerah keanalitikan deret adalah $| z - z_0 | < \infty$. Bila $z_0 = 0$, maka deret di sebut sebagai deret Mac Laurin dan berbentuk :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \text{..................}(|z| < R_0)$$

Bila fungsi f(z) tidak analitik di $z = z_0$ maka f(z) tidak dapat diperderetkan dalam deret Taylor di $z = z_0$. Agar f(z) dapat diperderetkan di $z = z_0$ maka dilakukan dengan cara membuang titik singular $z = z_0$ dari daerah $| z - z_0 | < R$ sehingga diperoleh daerah $R_1 <| z - z_0 | < R_2$ (cincin / annulus) yang merupakan daerah keanalitikan fungsi f(z). Hal ini dijelaskan oleh Laurent sebagai berikut.

Misalkan f(z) tidak analitik di $z = z_0$ tetapi analitik pada annulus $R_1<| z - z_0 |< R_2$, maka fungsi f(z) dapat diperderetkan di $z = z_0$ menjadi bentuk deret (*deret Laurent*) sebagai berikut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \text{.....................}(R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

$$dengan\ a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad , n = 0,1,2,3,.....dan$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz \qquad , n = 1,2,3,..............$$

Lintasan C merupakan lintasan tutup sederhana yang terletak didalam annulus yang melingkupi z_0. Notasi lain yang biasa digunakan untuk menyatakan bentuk deret Laurent yaitu :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad .(R_1 < | z - z_0 | < R_2)$$

$$\text{dengan } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Untuk menghindari perhitungan integral lintasan, maka dalam memperderetkan fungsi ke dalam deret Laurent, rumusan di atas tidak digunakan. Untuk itu dilakukan dengan menggunakan deret Taylor maupun deret Mac Laurin.

- Contoh.

  Akan ditentukan deret Laurent dari f(z) = $e^{1/z}$ dengan pusat z = 0.

  Pembahasan.

  Karena f(z) = $e^{1/z}$ tidak analitik di z = 0., maka f(z) diperderetkan dalam deret Laurent dengan daerah keanalitikan : 0 < | z | < ∞ atau $0 < \left| \frac{1}{z} \right| < \infty$.

  Deret Mac Laurin dari e^z = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$ (| z | <∞).

  Dengan mengganti z oleh 1/z akan diperoleh deret Laurent $e^{1/z}$ sebagai berikut :

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{.1}{1!\, z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + ... \qquad (0 \mid z \mid < \infty).$$

4. Residu dan Kutub.

Misal f(z) analitik pada 0 < | z - z_0 | < R dan z_0 merupakan titik singular terisolasi dari f(z). Maka f(z) dapat diperderetkan dalam deret Laurent yaitu :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} .$$

Secara khusus koefisien dari $\frac{1}{(z - z_0)^n}$ yaitu $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz$, $n = 1, 2, 3, ...$

C merupakan lintasan tutup sederhana yang termuat pada 0 <| z - z_0 |< R dan menutupi z_0 dengan arah positif . Untuk n = 1 maka :

$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$. b_1 disebut residu dari f(z) di z_0 (nilai koefisien dari suku $\frac{1}{z-z_0}$)

Notasi : $b_1 = \underset{z=z_0}{\text{Res.}} f(z)$. Bagian prinsipal dari f(z) di z_0 adalah :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bila $b_m \neq 0$ dan $b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = \ldots\ldots\ldots = 0$ maka :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots\ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} ,$$

dengan $0<|z-z_0|<R$ dan $b_m \neq 0$

Dari bagian prinsipal deret di atas dikatakan bahwa titik singular terisolasi z_0 disebut *kutub (pole)* order m. Bila m = 1 maka z_0 disebut *kutub sederhana* . Bila m = ∞ maka z_0 disebut *titik singular esensial*. Untuk menetukan order titik singular dari f(z) dilakukan dengan memperderetkan f(z) ke dalam deret Laurent terlebih dahulu, seperti diperlihatkan dalam contoh berikut.

- Contoh.

Akan ditentukan kutub dari :

1. $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z-2}$

Pembahasan.

$$f(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2} \qquad 0<|z-2|<\infty$$

z = 2 merupakan kutub order 1 (kutub sederhana) dari f(z).

2. $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$

Pembahasan.

Perderetan dari fungsi tersebut adalah :

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \frac{1}{7!}z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0<|z|<\infty)$$

z = 0 merupakan kutub order 3 dari f(z).

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Cara Menghitung Residu.

Misal f(z) dengan titik singular z_0 .Maka kemungkinan bentuk f(z) dan rumus perhitungan residu di z_0 dapat diberikan sebagai berikut .

a. Kutub sederhana.

Misal $f(z)=\dfrac{\Phi(z)}{z-z_0}$ dengan Φ(z) analitik di z_0 dan $\Phi(z_0) \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \Phi(z_0)$

b. Kutub order m.

Misal $f(z)=\dfrac{\Phi(z)}{(z-z_0)^m}$ dengan m = 2,3,4,…….dengan Φ(z) analitik di z_0 dan $\Phi(z_0) \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \dfrac{\Phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

❖ Contoh.

Akan ditentukan residu dari :

1. $f(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z-i)^3}$

2. $f(z)=\dfrac{1}{z(e^z-1)}$

Pembahasan.

1. Titik singular terisolasi , z_0 = i kutub order 3.

   Fungsi $\Phi(z) = z^3 + 2z$ entire dan $\Phi(i) = i \neq 0$.

   Maka $\operatorname*{Res.}_{z=i} f(z) = \dfrac{\Phi''(i)}{2!} = 3i.$

2. Titik singular terisolasi z_0 = 0 kutub sederhana .

Bila $f(z)=\dfrac{\Phi(z)}{z}$ dimana $\Phi(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ tidak analitik di z_0 = 0 .Oleh karena itu rumus perhitungan residu tidak dapat diterapkan.

Cara penyelesaiannya dengan memperderetkan e^z di z_0 = 0 yaitu

$e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+.....\ |\ z\ |<\infty$, sehingga diperoleh hasil :

$$f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+.................\right)}$$

$$=\frac{1}{z^2\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+.............\right)} \qquad (|\ z\ |<\infty)$$

Jika $f(z)=\dfrac{\Phi(z)}{z^2}$, dimana $\Phi(z)=\dfrac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+........}$, maka z_0 = 0 merupakan kutub order 2 dan $\Phi(0)\neq 0$.

$$\Phi'(z)=\frac{-(1/2!+2z/3!+......)}{(1+z/2!+z^2/3!+........)^2}.$$

$$\textit{Sehingga diperoleh } \operatorname*{Re s.}_{z=0} f(z)==\frac{\Phi'(0)}{1!}=-\frac{1}{2}$$

2. Penghitungan Integral

2.1. Integral Kompleks.

Misalkan C lintasan tutup sederhana dengan arah positif , dan f(z) analitik kecuali pada sebanyak hingga titik singular z_k (k = 1,2,3,…………) pada daerah yang dibatasi oleh C. Maka $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Re s.}_{z=z_k} f(z).$

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Tentukan semua titik singular dari integran f(z).
2. Tentukan residu dari f(z) di semua titik singular yang terletak di dalam lintasan C.
3. Nilai integral kompleks diperoleh dengan mengalikan jumlah hasil pada butir 2 dengan 2 π i.

❖ Contoh.

Akan ditentukan nilai integral $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$, dimana C lingkaran | z | = 2 dengan arah positif.

Pembahasan.

$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$, memiliki titik singular z = 0 dan z = 1 , keduanya terletak didalam daerah yang dibatasi oleh C.

Untuk z = 0 → $\Phi(z) = \frac{5z-2}{z-1}$ analitik di z =0 dan $\Phi(0) = 2 \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=0} f(z) = 2$

Untuk z = 1 → $\Phi(z) = \frac{5z-2}{z}$ analitik di z = 1 dan $\Phi(1) = 3 \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=1} f(z) = 3$

Dari hasil di atas maka $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ = 2 π i (3 + 2) = 10 π i.

2.2. Integral (Riel) Tak Wajar.

Untuk menghitung integral tak wajar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ dimana f(x) fungsi rasional dengan menggunakan metode residu apabila f(x) fungsi genap $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\right)$, pandang f(x) = f(z) dan C merupakan lintasan yang melingkupi separo bidang atas. Sehingga nilai integral tak wajar di atas merupakan nilai integral kompleks dari f(z) terhadap lintasan C yakni hasil kali 2 π i dengan jumlah hasil residu di titik singular dari f(z) yang terletak di daerah separo bidang atas dan dituliskan sebagai berikut :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res.}_{z=z_k} f(z)$, z_k merupakan titik singular dari f(z) yang terletak di separo bidang atas.

❖ Contoh.

Akan ditentukan nilai integral $\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

Pembahasan.

$$\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx \text{ karena } \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} \text{ fungsi genap.}$$

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4} = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

f(z) memiliki titik-titik singular terisolasi z = ± i dan z = ± 2i , sedangkan yang terletak di separo bidang atas adalah z = i dan z = 2i .

Untuk z = i → $\Phi(z) = \frac{2z^2-1}{(z+i)(z^2+4)}$ analitik di z = i dan $\Phi(i) = -\frac{1}{2i} \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=i} f(z) = -\frac{1}{2i}$

Untuk z = 2i → $\Phi(z) = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z+2i)}$ analitik di z = 2i dan $\Phi(2i) = \frac{3}{4i} \neq 0$.

Maka $\operatorname*{Res.}_{z=2i} f(z) = \frac{3}{4i}$.

Dari hasil di atas maka diperoleh hasil

$$\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\,2\pi i\left(-\frac{1}{2i}+\frac{3}{4i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Untuk menghitung integral tak wajar berbentuk $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\, dx$ atau $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax$, $a \in R^+$ .dengan menggunakan residu, perhatikan bahwa ke dua fungsi di atas masing-masing merupakan bagian riel dan imajiner dari $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}$

karena $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\, dx$

Perhitungan integral diperoleh yaitu , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Re}\,s.}\left(f(z)e^{iaz}\right)$

dimana z_k merupakan titik singular dari $f(z)e^{iaz}$ yang terletak pada separo bidang atas

Contoh : Hitung integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1}$

Pembahasan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1} = \mathrm{Riel}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx\right]$

Residu di titik singular dari $\frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ yang terletak pada separo bidang atas adalah $\underset{z=i}{\mathrm{Re}\,s.}f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{2i}$

Diperoleh : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1} = \mathrm{Riel}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx\right] = \mathrm{Riel}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}\right)\right] = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$

2.3. Integral Tentu

Integral tentu yang akan diselesaikan dengan menggunakan metode residu berbentuk :

$\int_{0}^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ dengan F(sin θ , cos θ) merupakan fungsi rasional dalam sinθ dan cos θ dan nilai fungsi berhingga pada interval [0 , 2π].

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Tentukan $z = e^{iz}$ dan lintasan C merupakan lingkaran satuan dengan arah berlawanan dengan jarum jam kareana θ bergerak dari 0 sampai 2π. Diperoleh :

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta$$
$$= iz\,d\theta$$
$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$$

2. Susbtitusi hasil di atas ke dalam integral tentu, akan diperoleh bentuk integral kompleks sebagai berikut :

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$$

3. Selesaikan permasalahan integral dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian integral kompleks.

- Contoh : Hitung integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}$$

Pembahasan :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \int_C \frac{dz}{iz}\,\frac{2iz}{z^2 + 4iz - 1} = \int_C \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

Residu di titik singular dari $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 4iz - 1} = \dfrac{2}{\left(z + 2i - \sqrt{3}\right)\left(z + 2i + \sqrt{3}\right)}$

yang terletak di dalam lingkaran satuan adalah $\operatorname*{Res.}_{z=-2i+\sqrt{3}} f(z) = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}$

Jadi $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

KESIMPULAN

Beberapanpermasalahan penentuan integral fungsi riel menjadi lebih mudah dengan menggunakan teknik residu dari fungsi kompleks.

Daftar Pustaka *.*

1. Churchill , Ruel V and Brown , James Ward . 1990. ‘ *Complex Variables and Applications . Fifth Edition* ‘. McGraw-Hill Publishing Co., Singapore.

2. Sardi, Hidayat. 1989. ‘ *Fungsi Kompleks* ‘. Buku Materi Pokok MATK4432, Modul 1 - 9 . Depdikbud , Universitas Terbuka , Jakarta.

3. Mursita, Danang, 1998. ‘Matematika Teknik II’. Bahan Perkuliahan Dasar dan Umum STT Telkjom 1998.

UNIVERSITAS TERBUKA

Memberikan

SERTIFIKAT

kepada

Dina Thaib

sebagai

Pemakalah

Dies Natalis

pada Seminar Nasional Tahunan Matematika, Sains, dan Teknologi FMIPA-UT 2012 dengan tema "Meningkatkan Kemandirian Masyarakat dalam Pengelolaan Energi secara Bijak melalui Penerapan Matematika, Sains, dan Teknologi yang Inovatif" yang diselenggarakan pada 10 September 2012 di Balai Sidang Universitas Terbuka (UTCC)

Tangerang Selatan, 10 September 2012
Dekan FMIPA-UT

Dr. Nuraini Soleiman, M. Ed
NIP 19540730 198601 2 001